数学百科全书

第一卷

A—C

科学出版社

數學百科全書

蘇步青題

(京)新登字 092 号

内容简介

本书由三类条目组成．首先是介绍数学的各个主要方向的综述性条目(采用了一种很好的分科办法)，对这类条目的基本要求是尽可能通俗全面地阐明有关领域发展的现状；这些条目一般可供大学数学系学生和数学邻近领域的研究生阅读，根据专业需要，还可供在工作中用到数学方法的其他科学领域的专家、工程师和数学教师阅读．其次，是一些中等篇幅的条目，专门介绍某些具体的数学问题和方法，这类条目内容较深，是为水平较高的读者而写的．最后，还有一类简短的条目，可供查阅定义时参考．本书附有主题索引，其中不仅包括所有条目的标题，还包括在前两类条目中给出定义的许多概念，以及在条目中提到的一些最重要的结果．多数条目附有参考文献．这部大型数学工具书的功能是很齐全的，读者范围是十分广泛的．

责任编辑　张鸿林　杜小杨　夏墨英　郑春平
特邀编辑　方嘉琳　卢景波　朱学贤　沈永欢
郑洪深　罗嵩龄　葛显良　戴中器

数学百科全书

第一卷

《数学百科全书》编译委员会 编译

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1994 年 1 月第 一 版　开本：787×1092 1/16
1994 年 1 月第一次印刷　印张：59 插页：2
印数 0 001-4 600　字数：2 123 000

ISBN 7-03-003504-6/ O·631

定价：68.00 元

數學百科全書

蘇步青題

蘇步青

序

在人类的思想史上，数学有一个基本和独特的地位。几千年来，从巴比伦的代数、希腊的几何、中国、印度、阿拉伯的数学，直到近代数学的伟大发展，虽然历史有时中断，但对象和方法则是一致的。数学的对象不外“数”与“形”，虽然近代的观念，已与原始的意义，相差甚远。数学的主要方法，是逻辑的推理。因之建立了一个坚固的思想结构。这些结果会对其他学科有用，是可以预料的。但应用远超过了想象。数学固然成了基本教育的一部分。其他科学也需要数学作理想的模型，从而发现相应科学的基本规律。

在这样蓬勃的发展中，数学的任务是艰巨的：它既需充实已有的基础，还需应付外来的冲击。一部完整的数学百科全书，便有迫切的需要。但兹事体大，许多合格的数学家，都望而却步。

我们有幸有这一套苏联的《数学百科全书》。它对数学的贡献，将无法估计。我们要了解，数学是一种“活”的学问：它的内容，不断在变化，在进展。我们现在大学研究院数学活动的内容，大部分在五十年前是不存在的，其他一部分则是昔贤伟大思想的精华，将历久而弥新。我建议《百科全书》每两年出一附录，包括新项目和旧项目的重写。如有佳构，不必拘泥编辑的方针。《百科全书》每隔若干年宜有新版。

面对着这座巨大的建筑，令人惶惑。百科全书原不为有涯之身所能控制的。数学工作者的使命在对某些选定的项目，增加了解和探索。本书将便利他们思考范围的推广。

我相信数学将有一个黄金时代，其中将有多数的中国数学家参加。希望本书能起相当的作用。

陳省身

出 版 说 明

数学的重要性是尽人皆知的。一个人从进小学开始到大学毕业为止，不论哪个专业，学习数学的时间至少都有12年至14年之久。一些自然科学领域，如天文学、力学、物理学、化学等，以及各工程技术学科，历来都是以数学为基础的。随着电子计算机的迅速发展和普及，生命科学、地学、军事科学和管理科学等方面也愈来愈多地用到数学，使这些学科从定性研究向定量研究发展。

由于数学所用的方法是逻辑推导，它有严格的定义和特定的符号，它的研究对象是抽象的数量关系和空间形式，没有相当的训练和基础知识的人是难于入门的，所以数学又使人望而生畏。另一方面，数学发展很快，文献数量呈指数增加，浩如烟海。一个人很难了解数学的许多方面，这就加重了数学发展和应用的困难。

苏联大百科全书出版社从1977年到1986年，历时10年，出版了苏联科学院院士、世界著名数学家 И.М. 维诺格拉多夫（Виноградов）主编、几百位数学家共同撰写的一部《数学百科全书》（Математическая энциклопедия），约900万字。它的重要性是极为显著的。不久，荷兰的莱德尔出版公司出版了由180位西方数学家参加翻译的英文版（Encyclopaedia of mathematics）。英文版增补了大量最新成果、重要的西方文献和编者注，因而其内容更加充实和完善。

苏联《数学百科全书》出版后，我国很多著名数学家和数学教师纷纷要求将这部书译成中文出版，使我国广大科学工作者（特别是数学工作者）、工程技术人员、教师和学生有一部内容极其丰富的工具书，可以从中查阅所需要的数学知识及作进一步了解的线索。这无疑是一件十分重要的事情。

中国数学会常务理事会经过认真讨论，完全支持我国广大数学家和科技人员的要求，决定领导这部《数学百科全书》的编译工作，并将它列为

中国数学会最重要的工作之一；随后，立即成立了编译委员会，负责具体的组织工作。由于我国广大数学家的热情支持和参加，所以编译工作进展比较顺利。必须指出，科学出版社始终将这项工作作为该社的一项重点任务来抓，编辑人员为此付出了长期的艰苦劳动。

本书中文版分五卷，包括了俄文版的全部内容和英文版增补的内容。为尽快出版，条目按英文字母顺序排列。在第五卷中，附有详尽的中文和外文索引，此外还增加了600余篇数学家小传。

本书除中文简体字版本以外，还有繁体字版，繁体字版由台湾九章出版社出版发行。这也是海峡两岸数学家和出版界人士的一次良好合作。

老一辈数学家苏步青教授为本书题写书名，陈省身教授作序，苏步青、陈省身、吴文俊、程民德教授应邀担任编译委员会顾问。对于他们的支持，谨致以衷心的感谢！

最后，对于书中欠妥和错误之处，还望读者不吝指教。

《数学百科全书》编译委员会

本书的排版得到科学出版社技术室的大力协助，并由河北省雄县电脑服务部负责植字。谨此致谢！

A

A 积分 [A - integral ; A - интеграл]

Lebesgue 积分的一种推广，旨在对 Lebesgue 可积函数的共轭函数进行积分，它是由 E. Titchmarsh ([1]) 给出的．可测函数 $f(x)$ 称为在 $[a, b]$ 上 A 可积的 (A-integrable)，如果

$$m\{x: |f(x)|>n\} = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

并且

$$I = \lim_{n\to\infty}\int_a^b [f(x)]_n\,dx$$

存在，其中

$$[f(x)]_n = \begin{cases} f(x), & \text{如果 } |f(x)|\leqslant n, \\ 0, & \text{如果 } |f(x)|> n. \end{cases}$$

数 I 称为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的 A 积分 (A-integral)，记作

$$(A)\ \int_a^b f(x)\,dx.$$

参考文献

[1] Titchmarsh, E. G., On conjugate functions, *Proc. London Math. Soc.*, **29** (1928), 49–80.

[2] Виноградова, И. А., Скворцов, В. А., в кн.: Итоги науки. Математический анализ, 1970, М., 1971, 65–107.

И. А. Виноградова 撰　王斯雷 译

$\mathscr{A}$ 运算 [$\mathscr{A}$ - operation ; $\mathscr{A}$ - операция]

由 П. С. Александров ([1]) 提出的一类集合论运算 (亦见 [2], [3])．设 $\{E_{n_1\cdots n_k}\}$ 是以自然数的一切有限序列为下标的集合系统．集合

$$P = \bigcup_{n_1,\ldots,n_k,\ldots}\ \bigcap_{k=1}^{\infty} E_{n_1\cdots n_k}$$

称为 $\mathscr{A}$ 运算应用于系统 $\{E_{n_1\cdots n_k}\}$ 的结果，其中并运算是在自然数的所有无穷序列上进行的．

对实数轴上的区间系统使用 $\mathscr{A}$ 运算所得到的集合 (为纪念 Александров 而称为 $\mathscr{A}$ 集) 未必是 Borel 集 (见 $\mathscr{A}$ **集** ($\mathscr{A}$-set)；**描述集合论** (descriptive set theory))．$\mathscr{A}$ 运算比可数并运算和可数交运算都强，并且是幂等的．(任意拓扑空间的子集的) **Baire 性质** (Baire property) 和 Lebesgue 可测的性质在 $\mathscr{A}$ 运算下都是不变的．

参考文献

[1] Aleksandrov, P. S., *C. R. Acad. Sci. Paris*, **162** (1916), 323–325.

[2] Александров, П. С., Теория функций действительного переменного и теори топологических пространств, М., 1978.

[3] Колмогоров, А. Н., 《Успехи матем. наук》, **21** (1968), 4, 275–278.

[4] Suslin, M. Ya. (Суслин, М. Я.), *C. R. Acad. Sci. Paris*, **164** (1917), 88–91.

[5] Лузин, Н. Н., Собр. соч., т. 2, М., 1958, 284.

[6] Kuratowski, K., Topology, Acad. Press, 1966–1968 (译自法文).

А. Г. Ельнин 撰

【补注】 在西方通常把 $\mathscr{A}$ 运算归功于 М. Я. Суслин ([4])，所以它也称为 Суслин 运算 (Suslin operation)，Суслин $\mathscr{A}$ 运算 (Suslin $\mathscr{A}$-operation)．$\mathscr{A}$ 集通常称为解析集．

张锦文、赵希顺 译

后验分布 [a posteriori distribution ; апостериорное распределение]

一随机变量的条件概率分布，以与其无条件分布或先验分布 (a priori distribution) 对照考虑．

设 Θ 为具有先验密度 $p(\theta)$ 的随机参数，X 为随机观察结果，而 $p(x\mid\theta)$ 为当 $\Theta=\theta$ 时 X 的条件密度，

则根据 **Bayes 公式** (Bayes formula), 当给定 $X=x$ 时, Θ 的后验分布具有密度

$$p(\theta|x)=\frac{p(\theta)p(x|\theta)}{\int_{-\infty}^{+\infty}p(\theta)p(x|\theta)d\theta}.$$

若 $T(x)$ 为具有密度 $p(x|\theta)$ 的分布族的一个**充分统计量** (sufficient statistic), 则后验分布不直接依赖 x, 而是通过 $T(x)$ 依赖 x. 若 x_j 为来自密度 $p(x|\theta_0)$ 的独立观察值, 则后验分布 $p(\theta|x_1,\cdots,x_n)$ 当 $n\to\infty$ 时的渐近性状, 是与 Θ 的先验分布"几乎无关的".

关于后验分布在统计决策理论中的作用, 见 **Bayes 方法** (Bayesian approach).

参考文献

[1] Бернштейн, С. Н., Теория вероятностей, 4 изд., М.-Л., 1946.

Ю. В. Прохоров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Sverdrup, E., Laws and chance variations. 1, North-Holland, 1967, 214 ff.

陈希孺 译

后验概率 [**a posteriori probability**; **апостериорная вероятность**]

一事件在某些条件下发生的条件概率, 以与其无条件概率或**先验概率** (a priori probability) 相对照. "条件"和"后验"两词并无意义上的差别. 当条件是假定的而非在试验过程中直接观察到的时候, 用前一词; 当需要强调问题中的条件是实际观察所得的时候, 用后一词. 后验概率与先验概率通过 **Bayes 公式** (Bayes formula) 发生联系.

Ю. В. Прохоров 撰 陈希孺 译

先验分布 [**a priori distribution**; **априорное распределение**]

一随机变量的概率分布, 以与该变量在某些附加条件下的**条件分布** (conditional distribution) 对照考虑. 通常, "先验分布"一词是按下述方式使用的. 设 (Θ, X) 为一对随机变量 (随机向量, 或更一般的随机元). 把随机变量 Θ 看作未知的, 把 X 看作为估计 Θ 而进行的观察的结果. Θ 和 X 的联合分布, 由 Θ 的分布 (现称为先验分布) 以及当给定 $\Theta=\theta$ 时 X 的条件概率族 P_θ 所决定. 可按 **Bayes 公式** (Bayes formula) 来计算当给定 X 时 Θ 的条件分布 (现称为 Θ 的后验分布). 在统计问题中, 先验分布多属未知的 (甚至假定其存在也未必有充分根据). 关于先验分布的使用, 见 **Bayes 方法** (Bayesian approach).

Ю. В. Прохоров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Sverdrup, E., Laws and chance variations. 1, North-Holland, 1967, 214 ff.

陈希孺 译

先验概率 [**a priori probability**; **априорная вероятность**]

一事件的概率, 以与同一事件在某些附加条件下的条件概率对照考虑. 后者则称为**后验概率** (a posteriori probability). 这一术语通常在与 **Bayes 公式** (Bayes formula) 有关的内容中使用.

Ю. В. Прохоров 撰 陈培德 译

$\mathscr{A}$ 集 [**$\mathscr{A}$-set**; **$\mathscr{A}$-множество**], 解析集 (analytic set), 完全可分度量空间中的

Borel 集的连续像. 因为任意 Borel 集都是无理数集的连续像, 所以 $\mathscr{A}$ 集可定义为无理数集的连续像. $\mathscr{A}$ 集的可数并和可数交仍是 $\mathscr{A}$ 集. $\mathscr{A}$ 集是 Lebesgue 可测的. $\mathscr{A}$ 集的性质关于 Borel 可测映射和 $\mathscr{A}$ 运算 ($\mathscr{A}$-operation) 是不变的. 而且, 一个集合为 $\mathscr{A}$ 集的充分必要条件是它可表示为 $\mathscr{A}$ 运算作用于闭集族的结果. 存在不是 Borel 集的 $\mathscr{A}$ 集. 例如, 在实数的单位区间 I 上的所有闭子集组成的空间 2^I 中, 所有不可数闭集组成的集合是 $\mathscr{A}$ 集, 但不是 Borel 集. 任意不可数 $\mathscr{A}$ 集都拓扑地包含 Cantor 完全集. 从而, $\mathscr{A}$ 集"实现了"连续统假设: 它们的基数或者是有限的, 或者是 $\aleph_0$ 或 $2^{\aleph_0}$. **Лузин 可分性原则** (Luzin separability principles) 对于 $\mathscr{A}$ 集成立.

参考文献

[1] Kuratowski, K., Topology, 1, Acad. Press, 1966-1968 (译自法文).

[2] Лузин, Н. Н., Лекции об аналитических множествах и их приложениях, М., 1953.

Б. А. Ефимов 撰

【补注】 现在用 Σ_1^1 来表示解析集的类, 而用 Π_1^1 表示补解析集的类 (见 **$C\mathscr{A}$ 集** ($C\mathscr{A}$-set)).

参考文献

[A1] Jech, T. J., The axiom of choice, North-Holland, 1973.

[A2] Moschovakis, Y. N., Descriptive set theory, North-Holland, 1980.

张锦文、赵希顺 译

A 系统 [**A-system**; **A-система**]

集合的"可数-分歧"系统, 也就是集合 X 的一个子集族 $\{A_{n_1\cdots n_k}\}$, 其指标是自然数的一切有限序列. 一个 A 系统 $\{A_{n_1\cdots n_k}\}$ 称为正则的 (regular), 如果 $A_{n_1\cdots n_kn_{k+1}}\subset A_{n_1\cdots n_k}$. A 系统的一个元素序列 $A_{n_1},\cdots,A_{n_1\cdots n_k},\cdots$, 其指标为同一个自然数无穷序列的所有段, 称为这个 A 系统的一个链 (chain). 一个链的所有元素的交称为它的核 (kernel), 一个 A 系统的所有链的一切核之并称为这个

A系统的核，或称为 $\mathscr{A}$ 运算应用于这个 A 系统的结果，或称为由这个 A 系统生成的 $\mathscr{A}$ 集 ($\mathscr{A}$-set). 每个 A 系统都可以正则化而不改变核(只须令 $A'_{n_1\cdots n_k}=A_{n_1}\cap\cdots\cap A_{n_1\cdots n_k}$). 如果 $\mathscr{A}$ 是一个集合系统, 则由 $\mathscr{A}$ 的元素组成的 A 系统的核称为由 $\mathscr{A}$ 生成的 $\mathscr{A}$ 集 ($\mathscr{A}$-set). 由拓扑空间的闭集生成的 $\mathscr{A}$ 集称为这个空间的 $\mathscr{A}$ 集.

参考文献

[1] Александров, П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977.

[2] Kuratowski, K., Topology, 1, Acad. Press, 1966 (译自法文).

А. Г. Елькин 撰

【补注】 $\mathscr{A}$ 运算在描述集合论中是一个重要工具,它是由 M. Я. Суслин 引进的, 因而也称为 Суслин 运算 (Suslin (Souslin) operation). 就此而论,一个 A 系统也称为 Суслин 概形 (Suslin (Souslin) scheme). 亦见 $\mathscr{A}$ 运算 ($\mathscr{A}$-operation), $\mathscr{A}$ 集 ($\mathscr{A}$-set).

[2] 是关于经典结果的标准参考文献,而近代的处理方法可在 [A1] 中找到.

参考文献

[A1] Christensen, J. P. R., Topology and Borel structure, North-Holland, 1974.

罗嵩龄、许依群、徐定宥 译

算盘 [abacus; абак]

古希腊、古罗马以及 18 世纪以前的西欧使用的一种计算工具: 分成一档一档的一块框板,计算时在档内拨动算珠(骨制品、小石子等). 相当于在东亚国家广泛使用的中国算盘. 在俄国则有俄式算盘 (счеты).

БСЭ-3

【译注】 中国的算盘是由算筹演变而来的. 其形长方, 周为木框,内贯直柱,称为档,一般为九档、十一档和十三档,档中横以梁,梁上每档两珠,每珠作数五,梁下每档五珠,每珠作数一. 元朝末年,算盘已在江浙一带开始使用,明朝已盛行,后来传入日本和其他东亚国家. 算盘目前仍在广泛使用,同电子计算器相比,在某些方面还具有其优越性.

张鸿林 译

Abel 准则 [Abel criterion; Абеля признак]

1) 数项级数的 Abel 准则. 如果级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

收敛, 数列 $\{a_n\}$ $(n=1, 2, \cdots)$ 是单调有界的, 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

收敛.

2) 函数项级数的 Abel 准则. 如果级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$$

在集合 X 上一致收敛, 函数序列 $\{a_n(x)\}$ $(n=1, 2, \cdots)$ 对每个 $x\in X$ 是单调的, 且在 X 上一致有界, 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$$

在集合 X 上一致收敛. 对于依赖于参数 $x\in X$ 的积分

$$\int_0^{\infty} a(n, x) b(n, x)\, dn$$

的一致收敛性,也存在类似的 Abel 准则.

Abel 准则可以加强,例如见 **Dedekind 准则** (Dedekind criterion). 亦见 **Dirichlet 准则** (Dirichlet criterion); **Abel 变换** (Abel transformation).

参考文献

[1] Fichtenholz, G. M., Differential und Integralrechnung, 1, Deutsch. Verlag Wissenschaft., 1964.

[2] Кудрявцев, Л. Д., Математический анализ, т. 1, 2 изд., М., 1973.

[3] Whittaker, E. T. and Watson, G. N., A course of modern analysis, 1-2, Cambridge Univ. Press, 1952.

Л. П. Купцов 撰 张鸿林 译

Abel 微分方程 [Abel differential equation; Абеля дифференциальное уравление]

常微分方程

$$y' = f_0(x)+f_1(x)y+f_2(x)y^2+f_3(x)y^3$$

(第一类 Abel 微分方程)或

$$[g_0(x)+g_0(x)y]y' = f_0(x)+f_1(x)y + f_2(x)y^2+f_3(x)y^3$$

(第二类 Abel 微分方程). 这些方程是 N. H. Abel 研究椭圆函数论时出现的(见[1]). 第一类 Abel 微分方程是 **Riccati 方程** (Riccati equation) 的自然推广.

如果 $f_1(x)\in C(a, b)$, $f_2(x)$ 和 $f_3(x)\in C^1(a, b)$, 且当 $x\in[a, b]$ 时 $f_3(x)\neq 0$, 则第一类 Abel 微分方程通过变量变换可以化为标准形式 $d\;/dt=z^3+\Phi(t)$ ([2]). 在一般情况下, 第一类 Abel 微分方程不能以封闭形式进行积分, 虽然在一些特殊情况下是可能的([2]). 如果 $g_0(x)$ 和 $g_1(x)\in C^1(a, b)$, 而 $g_1(x)\neq 0$, $g_0(x)+g_1(x)y\neq 0$, 则第二类 Abel 微分方程通过变换 $g_0(x)+g_1(x)y=1/z$, 可以化为第一类 Abel 微分方程.

可以在复数域中详细研究第一类和第二类 Abel 微

分方程及其推广

$$y' = \sum_{i=0}^{n} f_i(x) y^i, \quad y' \sum_{j=0}^{m} g_j(x) y^j = \sum_{i=0}^{n} f_i(x) y^i$$

(例如，见[3]).

参考文献

[1] Abel, N. H., Précis d'une théorie des fonctions elliptiques, *J. Reine Angew Math.*, 4 (1829), 309－348.

[2] Kamke, E., Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen, 1, Chelsea, 1971 (中译本: E. 卡姆克, 常微分方程手册, 科学出版社, 1977).

[3] Голубев, В. В., Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 2 изд., М.-Л., 1950.

Н. Х. Розов 撰 张鸿林 译

Abel-Гончаров 问题 [**Abel-Goncharov problem**; **Абеля-Гончарова проблема**], Гончаров问题 (Goncharov problem)

单复变量函数论中的下述问题：从某个函数类中求满足关系 $f^{(n)}(\lambda_n)=A_n$ $(n=0, 1, \cdots)$ 的所有函数 $f(z)$ 的集合，其中$\{A_n\}$和$\{\lambda_n\}$是为给定函数类所容许的复数列. 这个问题是由В. Л. Гончаров 提出的([2]).

使函数 $f(z)$ 与级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(\lambda_n) P_n(z) \qquad (*)$$

相对应；这个级数称为Abel-Гончаров 插值级数 (Abel-Goncharov interpolation series)，其中 $P_n(z)$ 是由等式

$$P_n^{(k)}(\lambda_k) = 0, \ k=0, \ldots, n-1; \ P_n^{(n)}(z) = 1$$

定义的 Гончаров 多项式 (Goncharov polynomial). N. H. Abel 给出了对情况 $\lambda_n = a + nh, n=0,1,\cdots$ (其中 a, h 是实数且 $h\neq 0$)的形式处理(见[1]). 此时，

$$P_n(z) = \frac{1}{n!}(z-a)(z-a-nh)^{n-1}.$$

级数(*)可用于研究正则函数逐次导数的零点. 能由级数(*)表示的函数 $f(z)$ 的集合称为 Abel-Гончаров 问题的收敛类 (convergence class).

在 $\lim_{n\to\infty}|\lambda_n|=\infty$ 的情形，Abel-Гончаров 收敛类可用整函数 $f(z)$ 依赖于量 $\sum_{k=0}^{n-1}|\lambda_{k+1}-\lambda_k|$ 的增长的阶和型的界来表达([2]).

如果 $\lambda_n = n^{1/\rho} l(n)$，其中 $l(n)$ 是缓慢递增函数，$0<\rho<\infty$，则 Abel-Гончаров 收敛类在某种意义下已被准确地确定([6]). 对于有限或无穷阶整函数的其他 Abel-Гончаров 收敛类也已被确定，它们由加在对应函数类的指标上的各种不同的限制所表达. 对于多变量整函数，也已研究它们的 Abel-Гончаров 问题. 对于某些插值结点类，已经得到 Гончаров 多项式的精确估计.

设 A_r^α 是形如

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(n!)^{-\alpha} a_n z^n, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|^{1/n} \leqslant r$$

(其中 $\overline{\lim}_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}\leqslant r, 0<r<\infty, 0\leqslant\alpha<\infty$)的函数 $f(z)$ 构成的类，Λ_α 是使得 $|\lambda_n| \leqslant (n+1)^{\alpha-1}$ $(n=0, 1, \cdots)$的一切可能的序列$\{\lambda_n\}$构成的类，则类 Λ_α 的收敛界 (bound of convergence) S_α 定义为使得每个函数 $f(z)\in A_r^\alpha$ 能由一个级数(*)表示的 r 值的上确界. 满足下述条件的 r 值的下确界称为类 Λ_α 的唯一性界 (bound of uniqueness) W_α: 存在函数 $f(z)\in A_r^\alpha$ 和序列 $\{\lambda_n\}\in\Lambda_\alpha$，使得 $f^{(n)}(\lambda_n)=0$ $(n=0, 1, \cdots)$, $f(z)\not\equiv 0$. 量 W_1, W_0 分别称为 Whittaker 常数 (Whittaker constant) 和 Гончаров 常数 (Goncharov constant). 已证明 $S_1=W_1$ (见[6])；也已证明([5], [10])更一般的论断

$$S_\alpha = W_1, \quad W_\alpha = W_1, \quad 0\leqslant\alpha<\infty.$$

于是，如果$\{\lambda_n\}\in\Lambda_\alpha$，则Abel-Гончаров 问题归结为求出常数 W_1. 迄今还不知道 W_1 的精确值，但已得到上界和下界: $0.7259<W_1<0.7378$ ([9]).

以 A_1^* 表示在区域 $|z|\geqslant 1$ 上正则且 $f(\infty)=0$ 的函数 $f(z)$ 构成的类，下述与类 A_1^* 的 Abel-Гончаров 问题有关的论断已得到证实：对任何满足条件

$$\lim_{k\to\infty}\frac{n_k}{|\lambda_k|} = 0$$

(其中$\{n_k\}$是自然数的一个递增序列)的数集$\{\lambda_k\}$，方程 $f^{(n_k)}(\lambda_k)=0$ $(k=0, 1, \cdots)$ 蕴涵 $f(z)\equiv 0$. 而且，对任何数 $b>0$，存在满足

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{|\lambda_n|} = b$$

的序列$\{\lambda_n\}$，以及函数 $f(z)\in A_1^*$ $(f(z)\not\equiv 0)$，使得 $f^{(n)}(\lambda_n)=0$ $(n=1, 2, \cdots)$ ([7]).

Abel-Гончаров 问题包含由 J. M. Whittaker 提出的([12])两点问题 (two-point problem). 设 $\{v_k\}$ 和 $\{\mu_n\}$ 是两个序列，满足$\{v_k\}\cup\{\mu_n\}=\{n\}$, $\{v_k\}\cap\{\mu_n\}=\phi$. 两点问题就是要确定在何种条件下，存在在区间[0,1]上正则的函数 $f(z)\not\equiv 0$，满足 $f^{(v_k)}(1)=0, f^{(\mu_n)}(0)=0$. 对于在圆盘 $|z|<R$ $(R>1)$内正则的函数类的各种子类，这个问题已被解决. 所得到的条件在某种意义下是精确的，它由加在依赖于$\{v_k\}$的展开式

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{v_k} z^{v_k}$$

的系数 a_{v_k} 上的种种界限所表达([3]). 这个问题已被推广，并已用无穷线性方程组理论予以解决([4]). 在$\{v_k\}$形成算术序列并限于处理指数型整函数的特殊情形，在

某种意义上两点问题已经彻底解决([8]).

参考文献

[1] Abel, N. H., Sur les fonctions génératrices et leurs déterminants, in Oeuvres complètes, Vol. 2, Christiania, 1839, 77–88. Edition de Holmboe.

[2] Gontcharoff, W. L. (Гончаров, В. Л.), Recherches sur les dérivées successives des fonctions analytiques. Géneralisation de la serie d'Abel, *Ann. Sci. Ecole. Norm. Sup.*, (3), **47** (1930), 1–78.

[3] Гельфонд, А. О., Ибрагимов, И. И., 《Изв. АН СССР, Сер. матем.》, **11** (1947), 6, 547–560.

[4] Джрбашян, М. М., 《Изв. АН СССР, Сер. матем.》, **16** (1952), 3, 225–252.

[5] Драгилев, М. М., Чухлова, О. П., 《Сиб. матем. ж.》, **4** (1963), 2, 287–294.

[6] Евграфов, М. А., Интерполяционная задача Абеля-Гончарова, М., 1954.

[7] Казьмин, Ю. А., 《Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., мех.》, 1963, 1, 26–34.

[8] Казьмин, Ю. А., 《Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., мех.》, 1965, 6, 37–44.

[9] Macintyre, S. S., On the zeros of successive derivatives of integral functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **67** (1949), 241–251.

[10] Суетин, Ю. К., 《Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., мех.》, 1966, 5, 16–25.

[11] Осколков, В. А., 《Матем. сб.》, **92** (1973), 1, 55–59.

[12] Whittaker, J. T., Interpolatory function theory, Cambridge Univ. Press, 1935.

В. А. Осколков 撰

【补注】 关于有关的一般领域的导论,见[A1].

参考文献

[A1] Boas, R. P., Entire functions, Acad. Press, 1954.

沈永欢 译

Abel 不等式 [Abel inequality; Абеля неравенство]

对于一些数对乘积之和的估计. 如果给定这样的数 a_k 的集合和数 b_k 的集合,使得一切和 $B_k=b_1+b_2+\cdots+b_k$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 的绝对值都不超过一个数 B,即 $|B_k|\leqslant B$,并且或者 $a_i\geqslant a_{i+1}$ 或者 $a_i\leqslant a_{i+1}$ $(i=1,2,\cdots,n-1)$,则

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_k b_k\right|\leqslant B(|a_1|+2|a_n|).$$

如果 a_k 是非增的、非负的,则有更简单的估计:

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_k b_k\right|\leqslant Ba_1.$$

Abel 不等式可以通过 **Abel 变换** (Abel transformation) 来证明.

Л. Д. Кудрявцев 撰 张鸿林 译

Abel 积分方程 [Abel integral equation; Абеля интегральное уравнение]

积分方程

$$\int_0^x \frac{\varphi(s)}{\sqrt{x-s}}\,ds=f(x), \tag{1}$$

这个方程是在求解 **Abel 问题** (Abel problem) 时推出的. 方程

$$\int_a^x \frac{\varphi(s)}{(x-s)^\alpha}\,ds=f(x),\quad a\leqslant x\leqslant b \tag{2}$$

称为广义 Abel 积分方程 (generalized Abel integral equation),其中 $a>0$, $0<\alpha<1$ 是已知常数, $f(x)$ 是已知函数,而 $\varphi(x)$ 是未知函数. 表达式 $(x-s)^{-\alpha}$ 称为 Abel 积分方程的核 (kernel) 或 Abel 核 (Abel kernel). Abel 积分方程属于第一类 **Volterra 方程** (Volterra equation). 方程

$$\int_a^b \frac{\varphi(s)}{|x-s|^\alpha}\,ds=f(x),\quad a\leqslant x\leqslant b \tag{3}$$

称为具有固定积分限的 Abel 积分方程 (Abel integral equation with fixed limits).

如果 $f(x)$ 是连续可微函数,则 Abel 积分方程 (2) 具有唯一的连续解,这个解由公式

$$\varphi(x)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\frac{d}{dx}\int_a^x\frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \tag{4}$$

或者

$$\varphi(x)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left[\frac{f(a)}{(x-a)^{1-\alpha}}+\int_a^x\frac{f'(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}\right] \tag{5}$$

给出. 公式 (5) 在更一般的假设下给出了 Abel 方程 (2) 的解 (见[3], [4]). 从而证明了 ([3]): 如果 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上绝对连续,则 Abel 积分方程 (2) 具有由公式 (5) 给出的属于 Lebesgue 可积函数类的唯一解. 关于 Abel 积分方程 (3) 的解,见[2]; 亦见 [6].

参考文献

[1] Bôcher, M., On the regions of convergence of power-series which represent two-dimensional harmonic functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **10** (1909), 271–278.

[2] Carleman, T., Ueber die Abelsche Integralgleichung mit konstanten Integrationsgrenzen, *Math. Z.*, **15** (1922), 111–120.

[3] Tonelli, L., Su un problema di Abel, *Math. Ann.*, **99** (1928), 183–199.

[4] Tamarkin, J. D., On integrable solutions of Abel's integral equation, *Ann. of Math.* (2), **31** (1930), 219–229.

[5] Михлин, С. Г., Лекции по линейным интегральным

уравнениям, М., 1959 (英译本: Mikhlin, S. G., Linear integral equations, Hindushtan Publ. Comp., Delhi, 1960).

[6] Гахов, Ф. Д., Краевые задачи, 2 изд., М. 1963 (英译本: Gakhov, F. D., Boundary value problems, Pergamon, 1966).

Б. В. Хведелидзе 撰

【补注】 (2)的左边也称为 Riemann - Liouville 分式积分, 其中 Re $\alpha<1$, 见[A1]. 如果把(1)和(2)的两边从 x 到 ∞ 进行积分, 并且用 $s-x$ 代替 $x-s$, 则所得等式的左边分别称为 Abel 变换(Abel transform)和 Weyl 分式积分(Weyl fractional integral), 见[A1]. 这个 Abel 变换就是一个实半单 Lie 群上的 Abel 变换的特例SL(2, **R**), [A2].

[A3]是积分方程的一般教程.

参考文献

[A1] Erdélyi, A., Magnus, W., Oberhetinger, F. and Tricomi, F. G., Tables of integral transform, Ⅱ, McGraw-Hill, 1954, Chapt. 13.

[A2] Godement, R., Introduction aux travaux de A. Selberg, in *Sém. Bourbiki*, Vol. 144, 1957.

[A3] Fenyö, S. and Stolle, H. W., Theorie und Praxis der linearen Integralgleichungen, 3, Birkhäuser, 1984, Sect. 13. 2. 4.

张鸿林 译 蒋正新 校

Abel-Poisson 求和法[Abel-Poisson summation method; Абеля-Пуассона метод суммирования]

Fourier 级数求和法之一. 函数 $f\in L[0,2\pi]$ 的 Fourier 级数在点 φ 上按 Abel-Poisson 法是可和的(summable by Abel-Poisson method), 其和为数 S, 如果

$$\lim_{\rho\to 1-0} f(\rho,\varphi) = S,$$

其中

$$f(\rho,\varphi) = \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\varphi+b_k\sin k\varphi)\rho^k,$$

$$f(\rho,\varphi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi+t)\frac{1-\rho^2}{2(1-2\rho\cos t+\rho^2)}\,dt. \quad (*)$$

如果 $f\in C(0,2\pi)$, 则对于 $|z|\equiv|\rho e^{i\varphi}|<1$, 右边的积分是调和函数, 正如 S. Poisson 所证明的, 它是关于圆盘的 Dirichlet 问题的解. 所以, **Abel 求和法**(Abel summation method)当应用于 Fourier 级数时称为 Abel-Poisson 求和法, 而积分(*)称为 **Poisson 积分**(Poisson integral).

如果(ρ,φ)是单位圆内一点的极坐标, 则可以考虑当点 $M(\rho,\varphi)$不是沿半径或切线, 而是沿任意路径趋向于边界圆上的一点时函数 $f(\rho,\varphi)$的极限. 在这种情况下, Schwarz 定理(Schwarz theorem)成立: 如果 f 属于 $L[0,2\pi]$ 且在点 φ_0 上是连续的, 则

$$\lim_{(\rho,\varphi)\to(1,\varphi_0)} f(\rho,\varphi)=f(\varphi_0)$$

而与点 $M(\rho,\varphi)$沿怎样的路径趋向于点 $P(\lambda,\varphi_0)$ 无关, 只要这一路径保持在单位圆内.

参考文献

[1] Бари, Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961. (英译本: Bary, N. K., A treatise on trigonometric series, Pergamon, 1964).

А. А. Захаров 撰

【补注】 与上述 Schwarz 定理有关的一个定理是 Fatou 定理(Fatou theorem): 如果 $f\in L[0,2\pi]$, 则对于几乎所有 φ_0, 当 $M(\rho,\varphi)$ 沿单位圆内而不与单位圆相切的路径趋向于 $P(1,\varphi_0)$时, 有

$$\lim_{(\rho,\varphi)\to(1,\varphi_0)} f(\rho,\varphi)=f(\varphi_0).$$

见[A2], pp. 129−130.

参考文献

[A1] Zygmund, A., Trigonometric series, 1−2, Cambridge Univ. Press, 1979.

[A2] Tsuji, M., Potential theory in modern function theory, Maruzen, 1959.

张鸿林 译

Abel 问题[Abel problem; Абеля задача]

在竖直平面(s,τ)内求满足下述条件的曲线: 如果一个质点由曲线上纵坐标为 x 的点出发, 从静止状态开始在重力作用下沿曲线滑动, 那么经过时间 $T=f(x)$ 以后它将达到坐标轴 $O\tau$, 这里函数 $f(x)$ 是事先给定的. 这个问题是 N. H. Abel 在 1823 年提出的, 它的解决归结为一个第一类积分方程即 **Abel 积分方程**(Abel integral equation)——已被解出. 事实上, 如果 ω 是所求曲线的切线同坐标轴 $O\tau$ 之间的夹角, 则有

$$\frac{ds}{d\tau} = -\sqrt{2g(x-s)}\sin\omega.$$

把这个方程从 0 到 x 积分, 并且设

$$\frac{1}{\sin\omega} = \varphi(s), \quad -\sqrt{2g}\Phi(x) = f(x),$$

则得到关于未知函数 $\varphi(s)$ 的积分方程

$$\int_0^x\frac{\varphi(s)\,ds}{\sqrt{x-s}} = f(x).$$

解出 $\varphi(x)$, 便得到所求曲线的方程. 上面得到的这个方程的解是

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{f(0)}{\sqrt{x}}+\int_0^x\frac{f'(\tau)\,d\tau}{\sqrt{x-\tau}}\right].$$

参考文献

[1] Abel, N. H., Solutions de quelques problèmes à l'aide d'intégrales défines, in *Oeuvres Complètes, nouvelle éd.*, Vol. 1, Grondahl and Son, Christiania, 1881, 11−27.

Б. В. Хведелидзе 撰

【补注】 在 $f(x)=$常数的情况下, 这就是 Chr. Huy-

ghens 首先解决的著名的等时问题(tautochrone problem),他证明这条曲线是一摆线(cycloid).

参考文献

[A1] Jerri, A. J., Introduction to integral equations with applications, M. Dekker, 1985, Sect. 2. 3.

[A2] Hochstadt, H., Integral equations, Wiley (Interscience), 1973.

[A3] Moiseiwitsch, B. L., Integral equations, Longman, 1977.

张鸿林 译

Abel 求和法 [Abel summation method; Абеля метод суммирования]

数项级数求和法之一．如果对于任何实数 $x\,(0<x<1)$，级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

都收敛,且

$$\lim_{x\to 1-0}\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = S,$$

则称级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

按 Abel 法(A 法)是可和的(summable by the Abel method (A-method)),其极限为数 S. 这种求和法在 L. Euler 的著作甚至 G. Leibniz 的著作中已经出现．它之所以称为"Abel 求和法",是因为关于幂级数之和的连续性的 **Abel 定理** (Abel theorem)的缘故．Abel 求和法属于完全**正则求和法**(regular summation methods),它比一切 **Cesàro 求和法** (Cesàro summation methods)更强．应用 Abel 求和法以及 Tauber 定理可以证明级数的收敛性．

同 Abel 求和法密切相关的是 A^* 求和法．设 z 是一个复数,$|z|<1$;如果当 z 沿任何不与单位圆相切的路径趋向于 1 时,都有

$$\lim \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = S,$$

则称级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

按 A^* 法是可和的,其和为数 S.

参考文献

[1] Hardy, G. H., Divergent series, Clarendon, 1949.

*[2] Бари, Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961 (英译本: Bary, N. K., A treatise on trigonometric series, Pergomon, 1964).

А. А. Захаров 撰 张鸿林 译

Abel 定理 [Abel theorem; Абеля теорема]

1)关于代数方程的 Abel 定理:对于任意 n 次代数方程,当 $n\geqslant 5$ 时,用它的系数的根式来表示它的解的公式是不存在的．这个定理是 N. H. Abel 在1824 年证明的([1]). Abel 定理也可作为 **Galois 理论**(Galois theory)的一个推论而得到,由这一理论还可推出更一般的定理:对于任何 $n\geqslant 5$,都存在整系数的代数方程,其根不能通过有理数的根式来表示．关于任意域上的代数方程的 Abel 定理的现代表述,见**代数方程**(algebraic equation).

2)关于幂级数的 Abel 定理:考虑幂级数

$$S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-b)^k, \qquad (*)$$

其中 a_k, b, z 都是复数．如果这个级数在点 $z=z_0$ 上收敛,则它在任何以 b 为心,以 $\rho<|z_0-b|$ 为半径的圆盘 $|z-b|\leqslant\rho$ 内绝对一致收敛．这个定理是由 N. H. Abel 证明的([2])．由这个定理可以推出:存在数 $R\in[0,\infty]$,使得当 $|z-b|<R$ 时级数(*)收敛,而当 $|z-b|>R$ 时级数(*)发散．这个数 R 称为级数(*)的收敛半径(radius of convergence),而圆盘 $|z-b|<R$ 称为级数(*)的收敛圆盘(disc of convergence).

3) Abel 连续性定理(Abel continuity theorem):如果幂级数(*)在收敛圆盘的边界点 z_0 上收敛,则它在以 z_0, z_1, z_2 为顶点的任何闭三角形 T 内是连续函数,其中 z_1, z_2 处于收敛圆盘内．特别是,

$$\lim_{\substack{z\to z_0,\\ z\in T}} S(z) = S(z_0).$$

这个极限沿半径总是存在的:级数(*)沿收敛圆盘的任何连接点 b 和 z_0 的半径一致收敛．特别是,这个定理可以用来计算在收敛圆盘的边界点上收敛的幂级数之和．

4)关于 Dirichlet 级数的 Abel 定理:如果 **Dirichlet 级数**(Dirichlet series)

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s},\ \ s=\sigma+it,\ \ \lambda_n>0$$

在点 $s_0=\sigma_0+it_0$ 上收敛,则它在半平面 $\sigma>\sigma_0$ 内收敛,在任何角 $|\arg(s-s_0)|\leqslant\theta<\pi/2$ 内一致收敛．这是关于幂级数的 Abel 定理的推广(取 $\lambda_n=n$,并且设 $e^{-s}=z$).由这个定理可知,Dirichlet 级数的收敛区域是某个半平面 $\sigma>c$,其中 c 是级数的收敛点的横坐标．

对于通常的 Dirichlet 级数(当 $\lambda_n=\ln n$时),如果它的系数的和函数 $A_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ 具有某种渐近性,则下述定理成立:如果

$$A_n = B n^{s_1}(\ln n)^{\alpha} + O(n^{\beta}),$$

其中 B, s_1, α 是复数,β 是实数,$\sigma_1-1<\beta<\sigma_1, \sigma_1=\operatorname{Re} s_1$,则当 $\sigma_1<\sigma$ 时 Dirichlet 级数收敛,函数 $\varphi(s)$ 能够正则地延拓到半平面 $\beta<\alpha$,点 $s=s_1$ 除外,而且,如果 $\alpha\neq -1$,

$-2,\cdots$，则

$$\varphi(s)=B\,\Gamma(\alpha+1)s(s-s_1)^{-\alpha-1}+g(s)\,;$$

如果 $\alpha=-1,-2,\cdots$，则

$$\varphi(s)=B\frac{(-1)^{-\alpha}}{(-\alpha-1)!}s(s-s_1)^{-\alpha-1}\ln(s-s_1)+g(s).$$

这里的 $g(s)$ 当 $\sigma>\beta$ 时是正则函数.

例如，Riemann ζ 函数 ($A_n=n$，$B=1$，$s_1=1$，$\alpha=0$，$\beta>0$) 至少在半平面 $\sigma>0$ 内是正则的，点 $s=1$ 除外，在这一点上它具有残数等于1的一阶极点．这个定理可以按多种方式推广．例如，如果

$$A_n=\sum_{j=1}^{k}B_j n^{s_j}(\ln n)^{\alpha_j}+O(n^{\beta}),$$

其中 $B_j,s_j,\alpha_j(1\leqslant j\leqslant k)$ 是任意复数，且 $\sigma_k-1<\beta<\sigma_k<\cdots<\sigma_1$，则当 $\sigma>\sigma_1$ 时 Dirichlet 级数收敛，$\varphi(s)$ 在区域 $\alpha>\beta$ 内是正则的，点 $s_1,s_2,\cdots,s_k$ 除外，在这些点上它具有代数或对数奇异性．根据 A_n 的渐近性，这类定理为研究 Dirichlet 级数在给定半平面内的性质提供了某些信息．

参考文献

[1] Abel, N. H., Oeuvers complètes, Vol. 1, Christiania, 1881.

[2] Abel, N. H., Untersuchungen über die Reiche $1+mx/2+m(m-1)x^2/(2\cdot1)+\cdots$, *J. Reine Angew. Math.*, 1 (1826), 311－339.

[3] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967 (英译本: Markushevich, A. I., Theory of functions of a complex variable, 1, Chelsea, 1977).

Л. П. Купцов 撰

【补注】 关于 Abel 定理 2)－4) 的更多内容，见 [A1].

参考文献

[A1] Hardy, G. H., Divergent series, Clarendon, 1949.

张鸿林 译 蒋正新 校

Abel 变换 [Abel transformation; Абеля преобразование]. 分部求和法 (summation by parts) 变换

$$\sum_{k=1}^{N}a_k b_k=a_N B_N-a_1 B_0-\sum_{k=1}^{N-1}B_k(a_{k+1}-a_k),$$

其中数 a_k,b_k 是给定的，B_0 是任意选取的，而

$$B_k=B_{k-1}+b_k=B_0+b_1+\cdots+b_k,$$
$$k=1,\ldots,N.$$

Abel 变换是**分部积分法** (integration by parts) 公式在离散情况下的对应公式.

如果 $a_N\to0$ 且序列 $\{B_k\}$ 是有界的，则 Abel 变换可应用于级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k b_k=\sum_{k=1}^{\infty}(a_k-a_{k+1})B_k-a_1 B_0.$$

应用 Abel 变换可以证明数项级数和函数项级数的几个收敛性准则 (见 **Abel 准则** (Abel criterion))．一个级数经过 Abel 变换往往可以得到另一个其和相同、收敛性更好的级数．此外，应用 Abel 变换通常可以得到某些估计 (见 **Abel 不等式** (Abel inequality))，特别是用来研究级数的收敛速度．这种变换是 N. H. Abel 引入的 ([1]).

参考文献

[1] Abel, N. H., Untersuchungen über die Reihe $1+mx/2+m(m-1)x^2/(2\cdot1)+\cdots$, *J. Reine Angew. Math.*, 1 (1826), 311－339.

[2] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, т. 1, 2 изд, М., 1967 (英译本: Markushevich, A. I., Theory of functions of a complex variable, 1, Chelsea, reprint, 1917).

[3] Whittaker, E. T. and Watson, G. N., A course of modern nalysis, 1－2, Cambridge Univ. Press, 1952.

Л. П. Купцов 撰 张鸿林 译

Abel 范畴 [Abelian category; Абелева категория]

显示所有 Abe 群的范畴的某些特性的一种范畴．Abel 范畴是作为同调代数的抽象构造的基础而被引进的 ([4])．范畴 $\mathfrak{A}$ 称为 Abel 范畴 ([2])，如果它满足下列的公理：

A0. 存在一个零对象 (见**范畴的零对象** (null object of a category)).

A1. 每个态射都有一个核 (kernel) (见**范畴中的态射的核** (kernel of a morphism in a category)) 与一个上核 (cokernel).

A2. 每个单态射都是一个**正规单态射** (normal monomorphism)，从而它作为某一态射的核出现；每个满态射都是一个**正规满态射** (normal epimorphism).

A3. 对每一对对象都存在一个积 (product) 与一个上积 (coproduct) (见**范畴中一族对象的积** (product of a family of objects in a category)).

在定义一个 Abel 范畴时，常假定 $\mathfrak{A}$ 是一个局部的**小范畴** (small category)．一个 Abel 范畴中两个对象 A 与 B 之上积也称为这些对象的直和 (direct sum)，并记成 $A\oplus B$，$A\coprod B$ 或 $A\dot{+}B$.

Abel 范畴的例子.

1) Abel 范畴的对偶范畴也是一个 Abel 范畴.

2) 在一个具有单位元的任意结合环 R 上的所有左单式模与所有的 R 模同态组成一个范畴 ${}_R\mathfrak{M}$，它是一个 Abel 范畴 (例如所有 Abel 群的范畴).

3) 一个 Abel 范畴的任何**完全子范畴** (full subcategory) 仍是一个 Abel 范畴．所谓一个完全子范畴是指这样一个子范畴，对于它的每个态射，它也必包含该态射的核与上核，而且对于它所包含的每一对对象 A 与 B，它也必包含它们的积与上积.

左单式模的范畴 ${}_R\mathfrak{M}$ 的上述类型的子范畴取尽了所有的小 Abel 范畴，因此，下述的 Mitchell 定理 (Mitchell theorem)是有效的：每个小 Abel 范畴都可以完全精确地嵌入到某一范畴 ${}_R\mathfrak{M}$ 中去.

4) 图 $\mathfrak{F}(\mathfrak{D},\mathfrak{A})$ 的任何范畴都是 Abel 范畴，这里 $\mathfrak{D}$ 是 Abel 范畴 $\mathfrak{A}$ 上的图概形. 在概形 $\mathfrak{D}$ 中，可以区别出交换关系的集合 C，它是 $\mathfrak{D}$ 中具有公共起点与终点的道路 $\varphi=(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)$ 和 $\psi=(\psi_1,\cdots,\psi_m)$ 之对 (φ,ψ) 的集合. 那么，范畴 $\mathfrak{F}(\mathfrak{D},\mathfrak{A})$ 中由满足条件

$$D(\varphi)=D(\varphi_1)\cdots D(\varphi_n)=D(\psi_1)\cdots D(\psi_m)=D(\psi)$$

的所有图 $D:\mathfrak{D}\to\mathfrak{A}$ 所生成的完全子范畴是一个 Abel 范畴. 特别地，如果 $\mathfrak{D}$ 是一个小范畴，并且集合 C 是由所有具有形式 $(\alpha\beta,\gamma)$ 的对所组成的，其中 $\gamma=\alpha\beta$，那么，相应的子范畴就是从 $\mathfrak{D}$ 到 $\mathfrak{A}$ 的一位共变函子 (functor) 的 Abel 范畴.

假定在一个小范畴 $\mathfrak{D}$ 中，零对象是存在的. 于是一个函子 $F:\mathfrak{D}\to\mathfrak{A}$ 称为正规化的 (normalized)，如果它将一个零对象变成一个零对象. 在函子的范畴中，由正规化的函子所生成的完全子范畴就将是一个 Abel 范畴. 特别地，如果 $\mathfrak{D}$ 是一个以所有整数为对象的范畴，其零对象是 N，而其非零非恒等态射形成一个序列

$$\cdots\to(-1)\xrightarrow{d_{-1}}0\xrightarrow{d_0}1\xrightarrow{d_1}2\to\cdots$$

其中 $d_nd_{n+1}=0$，$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$，那么，由正规化的函子所生成的相应的子范畴称为 $\mathfrak{A}$ 上的复形范畴 (category of complexes). 在复形范畴上，定义了一些加法函子 Z^n,B^n,H^n，它们分别对应于 n 维闭链，n 维边缘与 n 维同调，都取值于 $\mathfrak{A}$ 内. 它们成为同调代数的发展基础.

5) 一个 Abel 范畴 $\mathfrak{A}$ 的一个完全子范畴 $\mathfrak{A}_1$ 称为稠密的 (dense)，如果它包含它的对象的所有**子对象** (subobject) 与**商对象** (quotient object)，且若对**正合序列** (exact sequence)

$$0\to A\to B\to C\to0$$

$B\in\mathrm{Ob}\,\mathfrak{A}_1$ 当且仅当 $A,C\in\mathrm{Ob}\,\mathfrak{A}_1$. 于是商范畴 $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}_1$ 就可构造如下. 设 $(R,\mu]$ 是直和 $A\oplus B$ 的一个子对象，π_1 与 π_2 为直和的射影，并设正方形

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\mu\pi_1} & A\\ \mu\pi_2\downarrow & & \downarrow\alpha\\ B & \xrightarrow[\beta]{} & X\end{array}$$

为上泛的(即一个上纤维积). 子对象 (R,μ) 称为一个 $\mathfrak{A}_1$ 子对象，如果 $\mathrm{Coker}\,\mu\pi_1,\ \mathrm{Ker}\,\beta\in\mathfrak{A}_1$. 两个 $\mathfrak{A}_1$ 子对象称为等价的，如果它们包含某个 $\mathfrak{A}_1$ 子对象.

由定义，集合 $H_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A}_1}(A,B)$ 是由 $\mathfrak{A}_1$ 子对象的等价类组成的. 二元关系的通常乘法同这样引进的等价关系是相容的，这就使得构造商范畴 $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}_1$ 成为可能，它是一个 Abel 范畴. **忠实函子** (faithful functor) $T:\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}/\mathfrak{A}_1$ 是这样定义的，对每个态射 $\alpha:A\to B$ 指定它在 $A\oplus B$ 中的对应图形. 一个子范畴 $\mathfrak{A}_1$ 称为一个局部化子范畴 (localizing subcategory)，如果 T 有一个完全单叶的右伴随函子 $Q:\mathfrak{A}/\mathfrak{A}_1\to\mathfrak{A}$.

6) 对于任何拓朴空间 X，X 上的所有左 G 模的范畴是一个 Abel 范畴，这里的 G 是 X 上有单位元环的层.

对任何 Abel 范畴 $\mathfrak{A}$ 都可引进态射的部分和，使得 $\mathfrak{A}$ 变成一个**加性范畴** (additive category). 为此原因，在一个 Abel 范畴中，任一对对象的积与上积都是恒等的. 再者，在定义一个 Abel 范畴时，只要假定或者积或者上积存在就够了. 任何 Abel 范畴都是一个具有唯一双范畴结构的**双范畴** (bicategory). 这些性质刻画了一个 Abel 范畴：一个具有有限积的范畴是 Abel 范畴，当且仅当它是一个加性范畴，每个态射 α 都有一个核与一个上核，并且可以分解成积

$$\alpha=\mathrm{Coker}(\mathrm{Ker}\,\alpha)\theta\,\mathrm{ker}(\mathrm{Coker}\,\alpha),$$

其中的 θ 是一个同构.

上面所引的 Mitchell 定理构成了 Abel 范畴中的所谓"图表追踪"法的基本原理：对于有关交换图的任何命题，如果它对左模的所有范畴 ${}_R\mathfrak{M}$ 都是正确的，而且它是某个态射序列的正合性的结果，那么，它在所有的 Abel 范畴中也必然是正确的.

在一个局部小 Abel 范畴中，一个任意的对象的 $\mathfrak{A}$ 子对象形成一个 **Dedekind 格** (Dedekind lattice). 如果任何对象族的积(或上积)都在 $\mathfrak{A}$ 中存在，那么这个格将是完全的. 已经知道，这些条件都将具备，如果在 $\mathfrak{A}$ 中有一个生成对象 U，并且如果上积

$$\coprod_{i\in I}U_i,\quad U_i=U,$$

对任何集合 I 都存在. 例如，这些条件是被 **Grothendieck 范畴** (Grothendieck category) 所满足的，此范畴等价于模范畴对其局部化子范畴所得到的商范畴 (Gabriel-Popescu 定理 (Gabriel-Popescu theorem)).

参考文献

[1] Bucur, I. and Deleanu, A., Introduction to the theory of categories and functors, Wiley, 1968.

[2] Freyd, P., Abelian categories: An introduction to the theory of functors, Harper and Row, 1964.

[3] Gabriel, P., Des categories Abéliennes, *Bull. Soc. Math. France*, 90 (1962), 323 – 448.

[4] Grothendieck, A., Sur quelques points d'algèbre homologique, *Tohoku Math. J.*, 9 (1957), 119 – 221.

М. Ш. Цаленко 撰

【补注】 在此文中，态射的合成的写法是从左到右的，即 $\varphi\psi$ 表示 $\varphi: A\to B$、$\psi: B\to C$ 的合成．一个稠密的子范畴更常称为一个 Serre 子范畴(Serre subcategory)．

参考文献

[A1] Mitchell, B., Theory of categories, Acad. Press, 1965.

[A2] Popescu, N., Abelian categories with applications to rings and modules, Acad. Press, 1973.

周伯埙 译

Abel 微分 [Abelian differential; Абелев дифференциал]

在紧或闭的 Riemann 曲面 S 上的全纯或亚纯微分(见 **Riemann 曲面上的微分** (differential on a Riemann surface))．

设 g 是曲面 S 的亏格(见**曲面的亏格** (genus of a surface))；$a_1b_1\cdots a_gb_g$ 是 S 的典范同调基的闭链．根据这些奇点的性状，可把 Abel 微分区分成 Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ 类，并且有真包含关系 Ⅰ ⊂ Ⅱ ⊂ Ⅲ．第一类 Abel 微分(Abelian differential of the first kind)就是在 S 上处处全纯的一阶微分，且在每个点 $P_0\in S$ 的一个邻域 U 内它具有形式 $\omega=p\,dz=p(z)dz$，这里 $z=x+iy$ 是 U 内的局部单值化变量，$dz=dx+idy$，$p(z)$ 是 U 内 z 的全纯或正则的解析函数．Abel 微分相加或它与一个全纯函数相乘可以用自然的方式定义：如果

$$\omega=p\,dz,\quad \pi=q\,dz,\quad a=a(z),$$

则

$$\omega+\pi=(p+q)\,dz,\quad a\omega=(ap)\,dz.$$

第一类 Abel 微分构成一个 g 维向量空间 $\mathfrak{A}$．再引入标量积

$$(\omega,\pi)=\iint_S \omega\star\bar{\pi},$$

其中 $\omega\star\bar{\pi}$ 是 ω 与星共轭微分 $\bar{\pi}$ 的外积 (exterior product)，空间 $\mathfrak{A}$ 成为 Hilbert 空间．

设 $A_1, B_1, \cdots, A_g, B_g$ 是第一类 Abel 微分 ω 的 A 周期和 B 周期，即积分

$$A_j=\int_{a_j}\omega,\quad B_j=\int_{b_j}\omega,\quad j=1,\dots,g,$$

那么有以下关系式：

$$\|\omega\|^2=i\sum_{j=1}^{g}(A_j\bar{B}_j-B_j\bar{A}_j)\geqslant 0. \qquad (1)$$

如果 $A_1', B_1', \cdots, A_g', B_g'$ 是另一个第一类 Abel 微分 π 的周期，那么有

$$i(\omega,\bar{\pi})=\sum_{j=1}^{g}(A_jB_j'-B_jA_j')=0. \qquad (2)$$

关系式(1)和(2)称为第一类 Abel 微分的 Riemann 双线性关系 (bilinear Riemann relations)．可以选取第一类 Abel 微分的一个典范基，即空间 $\mathfrak{A}$ 的一个典范基 $\varphi_1, \cdots, \varphi_g$，使得

$$A_{ij}=\int_{a_j}\varphi_i=\delta_{ij},$$

这里 $\delta_{ii}=1$，$\delta_{ij}=0$，若 $i\neq j$．于是 B 周期

$$B_{ij}=\int_{b_j}\varphi_i$$

的矩阵 (B_{ij}) $(i,j=1,\cdots,g)$ 是对称的，而且虚部的矩阵 $(\operatorname{Im}B_{ij})$ 是正定的．A 周期全为零或 B 周期全为零的第一类 Abel 微分恒等于零．如果第一类 Abel 微分 ω 的所有周期全为实数，那么 $\omega=0$．

第二类和第三类 Abel 微分 (Abelian differentials of the second and third kinds) 通常是亚纯微分，即在 S 上至多只有有限多个奇点(为极点)的解析微分，它们有局部表达式：

$$\left(\frac{a_{-n}}{z^n}+\cdots+\frac{a_{-1}}{z}+f(z)\right)dz, \qquad (3)$$

其中 $f(z)$ 是正则函数，n 是极点的阶(若 $a_{-n}\neq 0$)，且 a_{-1} 是极点的残数．如果 $n=1$，这个极点称为单的．第二类 Abel 微分就是所有残数都为零的亚纯微分，即具有局部表达式

$$\left(\frac{a_{-n}}{z^n}+\cdots+\frac{a_{-2}}{z^2}+f(z)\right)dz$$

的亚纯微分．第三类 Abel 微分是一个任意的 Abel 微分．

设 ω 是具有 A 周期 $A_1, \cdots, A_g$ 的一个任意 Abel 微分；那么 Abel 微分 $\omega'=\omega-A_1\varphi_1-\cdots-A_g\varphi_g$ 的 A 周期都是零，称为正规化 Abel 微分 (normalized Abelian differential)．特别地，当 P_1 和 P_2 是 S 上任意两点时，可以构造一个在 P_1 有奇点 $(1/z)\,dz$，在 P_2 有奇点 $(-1/z)dz$ 的正规化 Abel 微分 $\omega_{1,2}$ 称为第三类正规 Abel 微分．设 ω 是任意 Abel 微分，它在点 $P_1, \cdots, P_n$ 处分别有残数 $c_1, \cdots, c_n$；那么总有 $c_1+\cdots+c_n=0$．如果 P_0 是 S 上一个任意点，$P_0\neq P_j$ $(j=1,\cdots,n)$，那么 ω 可表示成一个第二类正规化 Abel 微分 ω_2，有限个第三类正规 Abel 微分 $\omega_{j,0}$ 以及第一类 Abel 基微分 φ_k 的线性组合：

$$\omega=\omega_2+\sum_{j=1}^{n}c_j\omega_{j,0}+\sum_{k=1}^{g}A_k\varphi_k.$$

设 ω_3 是只在 $P_j(j=1,\cdots,n)$ 有残数 c_j 的单极点的第三类 Abel 微分，ω_1 是任意的一个第一类 Abel 微分：

$$A_k=\int_{a_k}\omega_1,\quad B_k=\int_{b_k}\omega_1,$$

$$A_k'=\int_{a_k}\omega_3,\quad B_k'=\int_{b_k}\omega_3,\quad k=1,\dots,g,$$

这里的闭链 a_k，b_k 不通过 ω_3 的极点．设点 $P_0\in S$ 不在闭链 a_k，b_k 上，L_j 是从 P_0 到 P_j 的一条道路．那么可得第一类和第三类 Abel 微分的双线性关系 (bilinear relations)：

$$\sum_{k=1}^{g}(A_k B_k' - B_k A_k') = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} c_j \int_{L_j} \omega_1.$$

在第一类和第二类 Abel 微分间也有类似的双线性关系.

除了被称为循环周期(cyclic period)的 A 周期和 B 周期 A_k, B_k $(k=1,\cdots,g)$外, 一个任意的第三类 Abel 微分还具有沿着围绕极点 P_j 的零同调闭链的形如 $2\pi_i c_j$ 的极周期(polar period). 于是对任意的闭链 γ 有

$$\int_{\gamma}\omega_3 = \sum_{k=1}^{g}(l_k A_k + l_{g+k}B_k) + 2\pi i \sum_{j=1}^{n} m_j c_j,$$

这里 l_k, l_{g+k} 和 m_j 都是整数.

Abel 微分的重要性质可用除子描述. 设 (ω) 是 Abel 微分 ω 的除子(divisor), 即 (ω) 是一个形如 $(\omega)=P_1^{\alpha_1}\cdots P_n^{\alpha_n}$ 的表达式, 其中 P_j 是 ω 的所有零点和极点, α_j 是它们的重数或阶数. Abel 微分 ω 的除子的次数 $d[(\omega)]=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$ 仅依赖 S 的亏格, 且总有 $d[(\omega)]=2g-2$. 设 $\mathfrak{a}$ 是某个已给的除子. 用 $\Omega(\mathfrak{a})$ 表示其除子 (ω) 是 $\mathfrak{a}$ 的倍数的 Abel 微分 ω 的复向量空间, 用 $L(\mathfrak{a})$ 表示其除子 (f) 是 $\mathfrak{a}$ 的倍数的 S 上亚纯函数 f 的向量空间. 则 $\dim\Omega(\mathfrak{a})=\dim L(\mathfrak{a}/(\omega))$. 关于这些空间的维数的另一重要信息包含在 Riemann - Roch 定理(Riemann - Roch theorem)中: 等式

$$\dim L(\mathfrak{a}^{-1}) - \dim\Omega(\mathfrak{a}) = d[\mathfrak{a}] - g + 1$$

对任意除子 $\mathfrak{a}$ 成立. 由上述可知, 例如当 $g=1$, 即在环面上时, 亚纯函数不能有单独的单极点.

设 S 是任意紧 Riemann 曲面, 其上有满足不可约代数方程 $F(z, w)=0$ 的亚纯函数 z 和 w. 那么 S 上任意 Abel 微分都可表成 $\omega=R(z, w)dz$, 其中 $R(z, w)$ 是 z 和 w 的一个有理函数; 反之, 表达式 $\omega=R(z, w)dz$ 是一个 Abel 微分. 这意味着任意 **Abel 积分** (Abelian integral)

$$\int R(z, w)\,dz = \int\omega$$

是紧 Riemann 曲面 S 上的某个 Abel 微分的积分.

亦见**代数函数** (algebraic function).

参考文献

[1] Springer, G., Introduction to Riemann surfaces, Addison - Wesley, 1957, Chapt. 10.

[2] Nevanlinna, R., Uniformisierung, Springer, 1953, Chapt. 5.

[3] Чеботарев, Н. Г., Теория алгебраических функций, М.-Л., 1948.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 代替 [3] 的另一本好的参考文献是 [A1].

参考文献

[A1] Lang, S., Introduction to algebraic and abelian functions, Addison - Wesley, 1972.

陈志杰 译

Abel 函数 [Abelian function; Абелева функция]

单复变量的**椭圆函数** (elliptic function) 概念在多复变量情形的一种推广. 在复空间 $\mathbf{C}^p(p\geq1)$ 中变量为 $z_1,\cdots,z_p$, $z=(z_1,\cdots,z_p)$ 的亚纯函数 $f(z)$ 称为 Abel 函数, 如果在 $\mathbf{C}^p$ 中有 $2p$ 个行向量

$$w_\nu = (\omega_{1\nu},\ldots,\omega_{p\nu}),\ \ \nu=1,\ldots,2p,$$

它们在实数域上是线性无关的并且使得对所有的 $z\in\mathbf{C}^p$, 有 $f(z+w_\nu)=f(z)$, $\nu=1,\cdots,2p$. 向量 w_ν 称为 Abel 函数 $f(z)$ 的周期 (periods) 或周期系 (system of periods). Abel 函数 $f(z)$ 的所有周期在加法下成为 Abel 群 Γ, 称为周期群 (period group) (或周期模 (period module)). 这个群的基称为 Abel 函数的周期基系 (basis system of periods), 或称为基本周期系 (system of basic (或 primitive) periods). Abel 函数 $f(z)$ 称为退化的 (degenerate), 如果存在变量 $z_1,\cdots,z_p$ 的一个线性变换, 它将 $f(z)$ 变为一个较少变量的函数; 否则 $f(z)$ 称为非退化 Abel 函数 (non - degenerate Abelian function). 退化 Abel 函数是由具有无穷小周期来识别的, 即对任何 $\varepsilon>0$ 都可找到一个周期 w_ν 使得

$$\| w_p \| = \sqrt{\sum_{k=1}^{p}|\omega_{kp}|^2} < \varepsilon.$$

如果 $p=1$, 则非退化 Abel 函数是单复变量的椭圆函数. 每个带周期群 Γ 的 Abel 函数自然地等同于复环面 (complex torus) $\mathbf{C}^p/\Gamma$ (即商空间 $\mathbf{C}^p/\Gamma$) 上的一个亚纯函数 (见**拟 Abel 函数** (quasi - Abelian function)).

Abel 函数的研究开始于 19 世纪, 当时它与第一类 **Abel 积分** (Abelian integral) 的反演 (见 **Jacobi 反演问题** (Jacobi inversion problem), [1], [2]) 有联系. 由解这个问题得到的 Abel 函数称为特殊 Abel 函数 (special Abelian functions); 在早期的工作中, 只有这样的函数有时才被认为是 Abel 函数. 命 $u_1,\cdots,u_p$ 为在 Riemann 曲面 F 上构造的第一类线性无关的正规 Abel 积分:

$$u_1 = \int_{c_1}^{x} du_1,\ldots,u_p = \int_{c_p}^{x} du_p,$$

并命

$$z_j = \int_{c_1}^{x_1} du_j + \cdots + \int_{c_p}^{x_p} du_j,\ \ j=1,\ldots,p$$

为一个给定的和系, 其中积分下限 $c_1,\cdots,c_p$ 固定在曲面 F 上. 于是可定义特殊 Abel 函数为上限 $x_1,\cdots,x_p$ 的具有 p 个坐标的所有有理函数, 后者也可看作 F 上 p 个点 $z_1,\cdots,z_p$ 的函数. 用 K.Weierstrass 引进的记号, 任何特殊 Abel 函数 $Al(z)$ 都可表为

$$Al(z) = Al(z_1,\ldots,z_p) =$$
$$= R[x_1(z_1,\ldots,z_p),\ldots,x_p(z_1,\ldots,z_p)].$$

相应于特殊 Abel 函数的复环面 $\mathbf{C}^p/\Gamma$ 是代数曲线的

Jacobi 簇(Jacobi varieties)．．

矩阵 W 称为 Abel 函数 $f(z)$ 的周期矩阵(period matrix)，指它的列向量是 Abel 函数 $f(z)$ 的周期基，具有维数 $p\times 2p$．一个给定的 $p\times 2p$ 维矩阵 W 为某一非退化 Abel 函数的周期矩阵的充分必要条件是它满足下列条件 (Riemann - Frobenius 条件(Riemann - Frobenius conditions))：它必须是一个 Riemann 矩阵 (Riemann matrix)，即必须存在一个元素是整数而阶数是 $2p$ 的反对称非退化方阵 M，使得 1) $WMW^T=0$，其中 W^T 是 W 的转置矩阵；2) 矩阵 $iWM\overline{W}^T$ 确定一个正定 Hermite 型 ([3])．如果条件 1) 和 2) 分别表为方程和不等式，就得到一个由 $p(p-1)/2$ 个 Riemann 方程(Riemann equations)所成的方程组和 $p(p-1)/2$ 个 Riemann 不等式(Riemann inequalities)．数 p 称为矩阵 W 和相应的 Abel 函数 $f(z)$ 的亏格(genus)．W 的列向量 $w_v=\mathrm{Re}\,w_v+i\mathrm{Im}\,w_v$，看作是实 Euclid 空间 $\mathbf{R}^{2p}$ 中的向量，它定义了 $f(z)$ 的周期超平行体(period parallelotope)．

对应于相同周期矩阵 W 的所有 Abel 函数构成一个 Abel 函数域(Abelian function field) K_W．如果域 K_W 包含一个非退化 Abel 函数，那么它在域 $\mathbf{C}$ 上的超越次数是 p；于是环面 $\mathbf{C}^p/\Gamma$ 是一个 **Abel 簇** (Abelian variety)，而 K_W 变为它的有理函数域．另一方面，如果 K_W 的所有 Abel 函数都是退化的，那么 K_W 同构于一个维数低于 p 的 Abel 簇上的有理函数域．亦见拟 **Abel 函数** (quasi - Abelian function)．

与椭圆函数的情形一样，任何 Abel 函数都可表为两个整超越 θ 函数的商(见 **θ 函数** (theta - function))，它也可表为 **θ 级数**(theta - series)．一个给定的 Riemann 矩阵 W 可决定一类 θ 级数，由它可以构造域 K_W 的所有 Abel 函数．

对特殊的 Abel 函数，利用独立变量 $z_1,\cdots,z_p$ 的线性变换常可以将矩阵 W 变为如下形式：

$$W=\left\|\begin{matrix}\pi i & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1p}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & \cdots & \pi i & a_{p1} & \cdots & a_{pp}\end{matrix}\right\|.$$

这时矩阵 $\|a_{jk}\|$ $(j,\ k=1,\cdots,p)$ 的元素之间的 Riemann 关系，保证了矩阵的对称性 $a_{jk}=a_{kj}$ 和实部矩阵 $\|\mathrm{Re}\,a_{jk}\|$ $(j,k=1,\cdots,p)$ 的正定性．然而，当 $p>3$ 时，$\|a_{jk}\|$ 的元素 a_{jk} 中仅有 $3(p-1)$ 个独立元素，即和在其上反演问题可解的 Riemann 曲面 F 的保形参模的个数一样多 (见 **Riemann 曲面的模**(moduli of a Riemann surface))．除 Riemann 关系以外，在此情形 a_{jk} 之间有 $(p-2)(p-3)/2$ 个超越关系，在 $p=4$ 的情形，这些关系的明显形式是 F. Schottky 在 1886 年首先发现的；关于这个领域的以后发展的回顾见[5]．

特殊的 Abel 函数可以表为属于一个特殊类型的两个具有半整数特征数的整 θ 函数的商．这些表示给出特殊 Abel 函数的许多性质，它是椭圆函数的许多性质的拓广．因此，Abel 函数 $f(z)$ 关于任意变元 z_j 的导数是 Abel 函数；任意 $p+1$ 个 Abel 函数满足一个代数方程；任何 Abel 函数都可用某 $p+1$ 个 Abel 函数有理地表示，例如可以用任意 Abel 函数和它的 p 个一阶偏导数表示；Abel 函数满足加法定理 (addition theorem)，即 Abel 函数在点 $a+b\in\mathbf{C}^p$ 上的值可以用某 $p+1$ 个 Abel 函数在点 a，$b\in\mathbf{C}^p$ 上的值有理地表示．

Abel 函数在代数几何学中具有重要的意义，它可作为某一类代数簇的单值化(uniformization)手段．

参考文献

[1] Springer, G., Introduction to Riemann surfaces, Addison - Wesley, 1957.

[2] Чеботарев, Н. Г., Теория алгебраических функций, М. - Л., 1948, гл. 8, 9.

[3] Siegel, C. L., Automorphe Funktionen in mehrerer Variaben, Math. Inst. Göttingen, 1955.

[4] Weil, A., Introduction à l'étude des variétés kahlériennes, Hermann, 1958.

[5] Mumford, D., Curves and their Jacobians, Univ. of Michigan Press, 1975.

[6] Stahl, H., Theorie der Abelschen Funktionen, Leipzig, 1896.

[7] Clebsch, A. and Gordan, P., Theorie der Abelschen Funktionen, Teubner, 1866.

[8] Conforto, F., Abelsche Funktionen und algebraische Geometrie, Springer, 1956.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 周期基系也称为周期基 (period basis)．除了[5] 以外还可参考更新的[A1]．Riemann - Frobinius 条件也称为 Riemann 双线性关系(Riemann bilinear relations) 或简称为 Riemann 关系 (Riemann relations). Schottky 问题 (Schottky problem) 关系到满足 Riemann 条件的矩阵空间中所有 Jacobi 行列式空间的描述，它最近已被解决，见 **Jacobi 簇** (Jacobi variety).

参考文献

[A1] Arbello, E., Cornalba, M. Griffiths, P. A. and Harris, J., Geometry of algebraic curves, 1, Springer, 1985.

钟同德 译

Abel 群 [Abelian group ; Абелева группа]

一个群，其运算是交换的，见**交换性** (commutativity)．N. H. Abel 在用根式解代数方程的理论中使用了这种群，因而这样命名．习惯上将 Abel 群的运算写成加法记号，即用加号(+)表示运算，称为加法．用零记号(0)表示中性元，称为零(在乘法记号中，它称为单位元)．

Abel 群的例子．所有**循环群** (cyclic group) 都是 Abel 群，特别地，整数加法群是 Abel 群．循环群的所

有直和(direct sum)是 Abel 群. 有理数加法群 **Q** 也是 Abel 群,而且它是局部循环群(locally cyclic group),即它的所有有限生成的子群都是循环群. 最后,p^{∞} **型群** (group of type p^{∞}) (或**拟循环群** (quasi-cyclic group)$\mathbf{Z}_{p^{\infty}}$)是 Abel 群,其中 p 是任意素数.

Abel 群簇中的**自由合成** (free composition) 与直和是一致的. **自由 Abel 群** (free Abelian group) 是无限循环群的直和. 自由 Abel 群的每个子群仍是自由 Abel 群. Abel 群中所有有限阶元素的集合形成一个子群,称为 Abel 群的挠子群 (周期部分) (torsion subgroup (periodic part) of the Abelian group). Abel 群模它的挠子群所成的商群是**无挠群** (group without torsion). 于是,每个 Abel 群都是无挠群藉助于挠群的扩张. 这个扩张并不总是分裂的,即挠群通常不是直和因子.每个元素的阶是一个固定素数 p 的幂的 Abel 挠群称为对于 p 的准素群 (primary group) (群论中一般使用术语 p 群). 每个挠群唯一地分裂成对应于不同素数的一些准素群的直和.

有限生成的 Abel 群的完全分类是已知的. 这由有限生成 Abel 群的基本定理 (fundamental theorem of finitely generated Abelian groups) 给出: 每个有限生成的 Abel 群是有限多个非分裂的循环子群的直和,这些循环子群中有一些是有限准素群,而另一些是无限的 (G. Frobenius, L. Stickelberger). 特别地,有限 Abel 群分裂成准素循环群的直和. 一般说来,这样的分解不唯一,但有限生成 Abel 群分解成非分裂循环群的直和的任何两个分解式是同构的,故无限循环直和因子的个数及准素直和因子的阶的集合不依赖于分解的选择. 这些数称为有限生成 Abel 群的不变量 (invariant of finitely generated Abelian group). 它们构成了下述意义下的不变量完全组:两个(有限生成的) Abel 群同构,当且仅当它们有相同的不变量. 有限生成 Abel 群的子群本身是有限生成的.

Abel 群不一定是(即使无限多个)循环群的直和. 对于准素群,已有了这种分解存在的充分必要条件,即所谓 Куликов 准则. 令 A 是对于某素数 p 的准素 Abel 群. A 中的非零元素 a 称为 A 中无限高的元素 (element of infinite height),如果对于任何整数 k,方程 $p^k x=a$ 在 A 中是可解的;如果这方程仅当 $k\leqslant n$ 时可解,则称 a 为高为 n 的元素 (element of hight n). Куликов 准则 (Kulikov criterion) 说,准素 Abel 群 A 是循环群的直和,当且仅当它是子群的一个上升序列的并,并且序列中每个子群的元素的高的集合是有界的. 如 Abel 群是循环群的直和,则它的任何子群本身是这样的直和. 不能分解成直和的(非分裂的)准素 Abel 群是准素循环群及群 $\mathbf{Z}_{p^{\infty}}$.

Abel 群中元素 $g_1,\cdots,g_k$ 的有限集称为线性相关的 (linearly dependent),如果存在不全为 0 的整数 $n_1,\cdots,n_k$ 使得 $\sum_{i=1}^{k} n_i g_i=0$. 如果不存在这样的数,则称为线性无关的 (linearly independent). A 中元素的任意集合称为线性相关的,如果存在线性相关的有限子集. 不是挠群的 Abel 群有极大的线性无关集. 所有极大线性无关集的势是相同的,称为该 Abel 群的秩 (rank, Prüfer 秩 (Prüfer rank)). 挠群的秩考虑为零,自由 Abel 群的秩与它的自由生成元的集合的势一致.

每个秩为 1 的无挠群同构于有理数加法群的某个子群,对于这些群,可用型的语言完全地描述. 无挠 Abel 群的每个元素决定一个特征 (characteristic) 数集. 它是一些非负数和符号 ∞ 组成的可数序列,这序列可由下述方法构造. 设将素数按升序排出: $p_1, p_2,\cdots$, 由元素 a 决定这个序列如下:如方程 $a=p_k^{s_k}x$ 在群中可解,而方程 $a=p_k^{s_k+1}x$ 不可解,则序列的第 k 项为 s_k,而若方程 $a=p_k^{s}x$ 对任何 s 都可解,则第 k 项为 ∞. 两个特征数集等价,如果它们可能除去有限多项外都相等,且符号 ∞ 在两个序列中出现在相同的位置. 两个线性相关的元素的特征数集是相等的. 特征数集的等价类称为型 (type). 每个秩为 1 的无挠 Abel 群具有唯一决定的型,称为该群的型;不同构的群有不同的型.

无挠的 Abel 群如果能分解成秩为 1 的群的直和,则称为完全分裂的 (completely split). 完全分裂群的子群不都是完全分裂的,虽然每个直和因子可以是这样. 对每个整数 n,存在秩为 n 的无挠 Abel 群,它不能分解(分裂)为直和,对可数的无挠 Abel 群,能构造出不变量的完全系.

Abel 群称为完全的 (complete) 或可除的 (divisible),如果对它的任何元素 a 和任意整数 m,方程 $mx=a$ 在群中有解. 所有可除 Abel 群结果是同构于 **Q** 及群 $\mathbf{Z}_{p^{\infty}}$ 的群的直和,而同构于 **Q** 的分量的集合的势,以及同构于 $\mathbf{Z}_{p^{\infty}}$(对每个 p)的分量的集合的势形成这可除群的一个完全的、独立的不变量组. 每个 Abel 群可以同构地嵌入到某个可除 Abel 群中. 可除 Abel 群,且仅有它们是 Abel 群范畴中的内射对象. 可除 Abel 群是包含它的每个 Abel 群的直和因子. 因此 Abel 群是一个可除 Abel 群和一个所谓约化群 (reduced group),即不包含非平凡可除子群的群的直和. 约化 Abel 群的分类仅对某些特殊情形是已知的. 例如, Ульм 定理 ([1]) 给出了所有可数的约化 Abel 挠群的分类.

Abel 群理论源于数论,但现在已广泛应用于很多近代数学理论中. 例如有限 Abel 群特征标的对偶理论已相当多地推广成局部紧 Abel 群的对偶理论. 同调代数的建立使得 Abel 群的一系列问题的解决成为可能. 例如,能够对一个群通过另一个群的所有扩张的集合进行分类. 模理论同 Abel 群理论紧密相连,后者可看成整数环上的模. Abel 群理论的许多结果可用于主理想

环上模的情况．由于它们的相对简单性，又已被彻底研究过（例如，这可由Abel群的初等理论（elementary theory）的可解性所证实），以及有足够多样的对象可利用，因此Abel群成为数学各个领域中例子的经常来源．

参考文献

[1] Курош, А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967（中译本：А. Г. 库洛什，群论（上，下），高等教育出版社，1982－1987）．

[2] Fuchs, L., Abelian groups, Hungarian Acad. Sci., Budapest, 1958．

[3] Fuchs, L., Infinite abelian groups, I, Academic Press, 1970．

[4] Kaplansky, I., Infinite Abelian groups, Michigan Univ. Press, 1954．

[5] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1965, М., 1967, 9－44．

[6] Итоги науки и техники. Алгебра Топология. Геометрия. т, 10, М., 1972, 5－45．

Ю. Л. Ершов 撰

【补注】 自1973年[3]的第2卷[A2]出版后的有关有限秩无挠Abel群理论发展的介绍见[A1]．文献[A3]－[A5]对于Abel群的新近结果和现代研究给出了很好的阐述．

参考文献

[A1] Arnold, D. M., Finite rank torsion free abelian groups and rings, Lect. Notes in Math., 931, Springer, 1982．

[A2] Fuchs L., Infinite abelian groups, 2, Acad. Press, 1973．

[A3] Göbel, R. and Walker, E. (eds.), Abelian group theory, Lect. Notes in Math., 874, Springer, 1981．

[A4] Göbel, R., Lady, L. and Mader, A. (eds.), Abelian group theory, Lect. Notes in Math., 1006, Springer, 1983．

[A5] Göbel, R., Metelli, C., Orsatti, A. and Salce, L. (eds.), Abelian groups and modulus, CISM courses and lectures, 287, Springer, 1984．

石生明 译　许以超 校

Abel积分 [**Abelian integral**；**Абелев интеграл**]，代数积分（algebraic integral）

代数函数（algebraic function）的积分，即形如

$$\int_{z_0}^{z_1} R(z, w)\,dz \qquad (1)$$

的积分，其中 $R(z,w)$ 是变量 z，w 的某个有理函数，z 和 w 由一个代数方程

$$F(z, w) \equiv a_0(z)w^n + a_1(z)w^{n-1} + \cdots + a_n(z) = 0 \qquad (2)$$

相联系，系数 $a_j(z)$ 是 z 的多项式，$j=0,\cdots,n$．对应于方程(2)，有一个紧 **Riemann 曲面**（Riemann surface）F，它是 Riemann 球面的一个 n 叶覆叠．在这个Riemann曲面上，z，w，从而 $R(z,w)$ 都可看作是 F 上的点的单值函数．

于是，积分(1)就作为 F 上的 **Abel 微分**（Abelian differential）$\omega=R(z,w)\,dz$ 沿某一可求长路径 L 的积分 $\int_L \omega$ 给出．一般说来，只指定路径 L 的起点 z_0 和终点 z_1 并不能完全决定 Abel 积分(1)的值，换句话说，积分(1)应是路径 L 的起点和终点的多值函数．

F 上的 Abel 积分的性质首先依赖于 F 的拓扑结构，尤其依赖于一个称为曲面 F 的亏格（见**曲面的亏格**）（genus of a surface）g 的拓扑不变量．亏格 g 与叶数 n，支点数 ν（按重数计算）由关系式 $g=(\nu/2)-n+1$ 联系．当 $g=0$ 时，变量 z 和 w 可由某个参数 t 有理地表示，故 Abel 积分变成了关于 t 的有理函数的积分．例如，在 $w^2=a_0z+a_1$ 和 $w^2=a_0z^2+a_1z+a_2$ 这些初等情况下就会发生上述情形．

若 $g\geqslant 1$，则任一Abel积分可表示为初等函数与三类典型Abel积分（canonical Abelian integrals）的线性组合的形式．如果 ω 是一个第一类 Abel 微分，那么积分 $\int_L \omega$ 就称为第一类Abel积分（Abelian integral of the first kind）．换句话说，第一类Abel积分是以这样的事实为特征的：对路径 L 的一个固定的起点 z_0，它们是上限 z_1 的函数，这个函数在 F 上处处有限，通常是多值的．这样一个特征例如可以用来构造非紧Riemann曲面上类似于第一类 Abel 积分的积分．任一第一类Abel积分可以表示为微分 $\varphi_1,\cdots,\varphi_g$ 的 g 个线性无关的第一类正规Abel积分（normal Abelian integral of the first kind）

$$u_1=\int_L \varphi_1,\ \ldots,\ u_g=\int_L \varphi_g$$

的线性组合的形式，微分 $\varphi_1,\cdots,\varphi_g$ 构成第一类 Abel 微分的典型基．如果曲面 F 沿同调典型基组成的循环 $a_1b_1\cdots a_gb_g$ 割开，就得到一个单连通区域 F^*．对于所有具有固定起点 z_0 和固定终点 z_1 的路径 $L^*\subset F^*$，积分 $\int_{L^*}\varphi_i$ 都是上限 z_1 的单值函数．这样，沿连接 z_0 和 z_1 的任意路径 $L\subset F$ 的积分 $u_i=\int_L \varphi_i$ 的多值性就可由下述事实完全刻画出来：它与积分 $\int_{L^*}\varphi_i$ 仅相差一个第一类微分的基的 A 周期 A_{ij} 和 B 周期 B_{ij} 的整线性组合．这些周期构成维数为 $g\times 2g$ 的周期矩阵（period matrix），它满足双线性 Riemann 关系，见 **Abel 微分**（Abelian differential）．

若 ω 是一个第二类 Abel 微分，则积分 $\int_L \omega$ 称为第二类 Abel 积分（Abelian integral of the second

kind). 此积分作为上限的函数, 在 F 上除极点外, 无任何其他奇点. 第二类正规化 Abel 微分的 Abel 积分称为第二类正规 Abel 积分 (normal Abelian integral of the second kind).

一个第三类 Abel 积分 (Abelian integral of the third kind) 是一个任意的 Abel 积分. 它在 F 上通常有对数奇点. 但这样的奇点只能成对出现. 第三类正规 Abel 微分的 Abel 积分称为第三类正规 Abel 积分 (normal Abelian integral of the third kind). 任何 Abel 积分可以表示为第一、第二和第三类正规 Abel 积分的一个线性组合. 与第一和第二类 Abel 积分不同, 第三类 Abel 积分除有 A 周期和 B 周期 (称为循环周期 (cyclic periods)) 外, 通常也有所谓极周期 (polar periods). 极周期是沿同调于零但环绕着 Abel 积分的对数奇点的循环取的. 这些对数奇点是由具有非零留数的 Abel 微分 ω 的极点所引起的.

对于在同一 Riemann 曲面 F 上的任意的 Abel 积分, 有许多依赖于 F 的拓扑结构与共形结构的关系存在. 例如, 若 $\omega_{P_iP_j}$ 是一个以 P_i 和 P_j 为单极点的第三类正规 Abel 微分, 则对任意的点 P_1, P_2, P_3, P_4, 下述关于第三类 Abel 积分的参数与积分限的置换定理成立:

$$\int_{P_1}^{P_2}\omega_{P_3P_4} = \int_{P_3}^{P_4}\omega_{P_1P_2}$$

把 F 上的有理函数与 Abel 积分联系起来的关系通常称为 Abel 定理 (Abelian theorem). 例如, 借助于除子, 对于第一类 Abel 积分的 Abel 定理具有下述形式: F 上的除子 $\mathfrak{a}$ 是一个亚纯函数的除子, 当且仅当存在链 L 使得 $\partial L=\mathfrak{a}$ 且对 F 上所有第一类 Abel 微分, $\int_L\omega=0$. 对于第二类和第三类 Abel 积分也存在相应的 Abel 定理 ([4]). Abel 积分, 特别是 Abel 定理, 是 Riemann 曲面的 **Jacobi 簇** (Jacobi variety) 的超越结构的基础. 作为其上限的函数的 Abel 积分的反演问题又引出 **Abel 函数** (Abelian function), **椭圆函数** (elliptic function) 以及 θ 函数的概念, 见 **θ 函数** (theta-function); **Jacobi 反演问题** (Jacobi inversion problem).

历史上, Abel 积分理论是从考虑亏格 $g=1$ 的曲面开始的. 若写出一个形如

$$F(z,w)=w^2-f(z)=0$$

的方程, 其中 $f(z)$ 是 z 的三次或四次多项式, 则得到一个**椭圆积分** (elliptic integral), 它是方程所对应的 Abel 积分. 这些椭圆积分于 17 世纪末和 18 世纪初在 Jacobi Bernoulli 和 Johann Bernoulli 以及 G. Fagnano 的研究中作为二次曲线求长的结果而首次出现. L. Euler 建立了椭圆积分的加法定理. 这个定理是 N.H.Abel(1752) 的一个定理的特殊情形. Abel 和 C.G.J.Jacobi(1827) 提出并解决了椭圆积分的反演问题, 从此开始了椭圆函数理论的研究. 不过, 涉及这一理论的某些事实早在 18 世纪已由 C. F. Gauss 所建立. 而 Abel 和 Jacobi 则讨论了当 $g>1$ 时 Abel 积分反演的更加困难的情形. 在发展的最初阶段, 重点放在超椭圆积分, 对应的 $F(z,w)=w^2-f(z)$, $f(z)$ 是一个没有重根的五次或六次多项式. 这时, $g=2$ 而反演问题的困难已可看出. Abel 积分反演理论的主要进展要归功于B. Riemann (1851), 他引入了 Riemann 曲面的概念, 对大量重要的结果作了系统的阐述并给出了证明.

Abel 积分理论的多维推广构成了代数几何和复流形理论的论题.

参考文献

[1] Чеботарев, Н. Г., Теория алгебраических функций, М. - Л., 1948, гл. 8, 9.

[2] Springer, G., Introduction to Riemann surfaces, Addison - Wesley, 1957, Chapt. 10.

[3] Nevanlinna, R., Uniformisierung, Springer, 1953, Chapt. 5 (中译本: R. 尼凡林那, 单值化, 科学出版社, 1960).

[4] Bliss, G. A., Algebraic functions, *Amer. Math. Soc.*, 1933.

[5] Stahl, H., Theorie der Abelschen Funktionen, Leipzig, 1896.

[6] Шафаревич, И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 [A1] 是一个有趣而实用的补充参考文献.

参考文献

[A1] Lang, S., Introduction to algebraic and abelian functions, Addison - Wesley, 1972.

侯纪欣 译 何育赞 校

Abel 概形 [Abelian scheme; Абелева схема]

基概形 S 上的一个光滑群概形 (group scheme), 它的纤维都是 **Abel 簇** (Abelian variety). 下面是其等价定义: S 上的一个 Abel 概形或一个 Abel S 概形, 就是一个正常光滑群 S 概形, 它的所有纤维是几何连通的. 直观上, 一个 Abel S 概形就是由概形 S 参量化的一族 Abel 簇. Abel 簇的许多基本性质可移到 Abel 概形上. 例如, Abel S 概形 A 是一个交换群 S 概形 ([1]), 如果 S 是正规概形, 则 A 在 S 上是射影的 ([2]).

Abel 概形主要应用于对带有各种附加结构的 Abel 簇的参模概形的研究, 也用于 Abel 簇的约化理论. 见 **Néron 模型** (Néron model).

参考文献

[1] Mumford, D., Geometric invariant theory, Springer, 1965.

[2] Raynaud, M., Faisceaux amples sur les schémas en groupes et les espaces homogénes, Springer, 1970.

И. В. Долгачев 撰 陈志杰 译

Abel 簇 [Abelian variety; Абелево многообразие]

一个**代数群** (algebraic group), 它同时又是完全**代数簇** (algebraic variety). 完全性条件蕴含着对 Abel 簇的严格限制. 因而 Abel 簇可作为闭子簇嵌入射影空间; 非奇异簇到 Abel 簇的每个有理映射都是正则的; Abel 簇上的群律是交换的.

复数域 C 上的 Abel 簇理论, 本质上等价于由 C. G. J. Jacobi, N. H. Abel 及 B. Riemann 建立的 Abel 函数论. 如果 $\mathbf{C}^n$ 表示 n 维向量空间, $\Gamma\subset \mathbf{C}^n$ 是秩为 $2n$ 的格 (见**离散子群** (discrete subgroup)), 则商群 $X=\mathbf{C}^n/\Gamma$ 是**复环面** (complex torus). X 上的亚纯函数就是 $\mathbf{C}^n$ 上关于周期格 Γ 不变的亚纯函数. 如果 X 上的亚纯函数域 K 的超越次数是 n, 那么 X 可以有一个代数群结构. 由 X 的紧性, 这个群结构是唯一的, 而且这个结构的有理函数域与 K 重合. 这样构成的代数群是一个 Abel 簇, 而且域 C 上的每个 Abel 簇都可用这种方式得到. 确定 Γ 基的矩阵可化简为形式 $(E|Z)$, 其中 E 是单位矩阵, Z 是 $n\times n$ 阶矩阵. 复环面 $X=\mathbf{C}^n/\Gamma$ 是 Abel 簇当且仅当 Z 对称且有正定虚部. 这里应当指出的是, 作为实 Lie 群, 所有的簇 X 都同构, 但是对 X 的解析或代数结构来说, 这并不成立, 它们强烈地变化, 当格 Γ 形变时. 对周期矩阵 Z 的考察表明, 它的变化具有解析特征, 最后得出具有给定维数 n 的所有 Abel 簇的参模簇的构造. 这个参模簇的维数是 $n(n+1)/2$ (见**参模问题** (moduli problem)).

任意域 k 上 Abel 簇理论应归功于 A. Weil([1], [2]). 它在代数几何学本身及数学的其他领域, 特别是数论和自守函数论中, 有着许多应用. 对于每个完全代数簇, 都可以函子式地关联一个 Abel 簇 (见 **Albanese 簇** (Albanese variety), **Picard 簇** (Picard variety), **中间 Jacobi 簇** (intermediate Jacobian)). 这些构造是研究代数簇几何结构的有力工具. 例如可用来得到 **Lüroth 问题** (Lüroth problem) 的一个解. 另一个应用就是有限域上代数曲线的 Riemann 假设的证明——这个问题正是 Abel 簇的抽象理论的发端. 它也是 **l 进上同调** (l-adic cohomology) 的来源之一. 这种上同调的最简单的例子就是 Abel 簇的 **Tate 模** (Tate module). 它是 l^n 阶点的群 $X[l^n]$ 当 $n\to\infty$ 时的射影极限. 而这种群的结构的确定正是 Weil 理论的主要成果之一. 事实上, 若 m 与域 k 的特征 p 互素且 k 是代数闭域, 则群 $X[m]$ 同构于 $(\mathbf{Z}/m\,\mathbf{Z})^{2\dim X}$. 当 $m=p$ 时, 情况要复杂得多, 结果就导出了诸如**有限群概形** (finite group scheme), **形式群** (formal group) 和 **p 可除群** (p-divisible group) 等概念. 对 Abel 簇自同态, 特别是 **Frobenius 自同态** (Frobenius endomorphism) 在 Tate 模上自同态作用的研究, 使得有可能证明 (对有限域上代数曲线的) **Riemann 假设** (Riemann hypotheses), 也是 Abel 簇的复乘法理论中的主要工具. 另一些与 Tate 模有关的问题包括在这个模上基域闭包的 Galois 群的作用的研究. 由此导致 **Tate 猜想** (Tate conjectures) 以及 Tate - 本田理论, 它是用 Tate 模的语言描述有限域上的 Abel 簇 ([5]).

对局部域包括 p 进域上 Abel 簇的研究发展很快. 与 Abel 簇表示成商空间 $\mathbf{C}^n/\Gamma$ 在这种域上相类似的表示, 通常称为单值化, 由 D. Mumford 和 M. Raynaud 构造出来. 与复数情形不同的是, 并非所有的 Abel 簇都能被单值化, 仅仅是可被模 p 约化为乘法群的那些才能被单值化 ([6]). 整体 (数或函数) 域上的 Abel 簇的理论在 **Diophantus 几何学** (Diophantine geometry) 中起重要作用. 其主要结果是 Mordell - Weil 定理 (Mordell - Weil theorem): 定义在有理数域的有限扩域上 Abel 簇的有理点所成的群是有限生成的.

参考文献

[1] Weil, A., Courbes algébriques et variétés abéliennes. Variétés abéliennes et courbes algébriques, Hermann, 1971.

[2] Weil, A., Courbes algébriques et variétés abéliennes. Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent, Hermann, 1948.

[3] Weil, A., Introduction à l'étude des variétés kahlériennes, Hermann, 1958.

[4] Lang, S., Abelian varieties, Springer, 1983.

[5] Mumford, D., Abelian varieties, Oxford Univ. Press, 1974.

[6] Манин, Ю. И., Итоги науки и техники, Сер. Современные проблемы математики, т. 3, М., 1974, 5–93.

[7] Serre, J.-P., Groupes algébriques et corps des classes, Hermann, 1959.

[8] Siegel, C. L., Automorphe Funktionen in mehrerer Variablen, Math. Inst. Göttingen, 1955.

Б. Б. Венков, А. Н. Паршин 撰

【补注】 关于 Tate 猜测的新信息可见 [A3]. 关于 Tate - 本田理论亦见 [A4]. Mumford 的单值化理论在 [A1], [A2] 中有发展.

参考文献

[A1] Mumford, D., An analytic construction of degenerating curves over complete local rings, *Compos. Math.*, **24** (1972), 129–174.

[A2] Mumford, D., An analytic construction of degenerating Abelian varieties over complete local rings, *Compos. Math.*, **24** (1972), 239–272.

[A3] Faltings, G., Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern, *Invent. Math.*, **73** (1983), 349–366 (Erratum: *Invent. Math.*, **75** (1984), 381).

[A4] Tate, J., Classes d'isogénie des variétés abéliennes sur un corps fini (d'après T. Honda), in Sém. Bourbaki, Vol. 21, 1968–1969.

陈志杰 译

AB 正规子群 [**abnormal subgroup**; **абнормальная подгруппа**].

群 G 的子群 A，使对任何元素 $g\in G$ 有 $g\in\langle A,A^g\rangle$. 其中 $\langle A,A^g\rangle$ 是由 A 和它的共轭子群 $A^g=gAg^{-1}$ 生成的子群. 作为有限群 G 的 AB 正规子群的例子，可取任何 Sylow p 子群 $P\subset G$ 的正规化子 $N_G(P)$(见**子集的正规化子**(normalizer of a subset))，甚至可取任何一个不是 G 的正规子群的极大子群 $N\subset G$. 在有限**可解群**(solvable group)理论中，很多重要的子群类是 AB 正规的，还要用到群 G 的次 AB 正规子群(subabnormal subgroup) A 的概念，它由子群列

$$A=A_0\subset A_1\subset\cdots\subset A_n=G$$

定义，其中 A_i 在 A_{i+1} 中是 AB 正规的，$i=0,\cdots,n-1$.

参考文献

[1] Huppert, B., Endliche Gruppen, 1, Springer, 1967.

А. И. Кострикин 撰

【补注】 如今，A^g 大多定义为 $A^g=g^{-1}Ag$.

石生明 译 许以超 校

横坐标 [**abscissa**; **абсцисса**]

点的 Descartes **坐标** (coordinates)之一.

绝对形 [**absolute**; **абсолют**]

1)正则拓扑空间 X 的绝对形(absolute of a regular topological space)是完满不可约地映到 X 上的空间 aX，并且空间 X 的任何完满不可约的原象都与 aX 同胚. 每个正则空间 X 有唯一的绝对形. 空间 X 的绝对形总是极不连通的与完全正则的，并且通过变换 $\pi_X:aX\to X$ 而完满不可约地映到 X 上. 如果两个空间 X，Y 由一个单值或多值**完满不可约映射**(perfect irreducible mapping) $f:X\to Y$ 连接着，那么它们的绝对形同胚，并且存在一个同胚 $f_a:aX\to aY$，使得 $f=\pi_Y f_a\pi_X^{-1}$.

如果给定同胚 $f_a:aX\to aY$. 那么在一般情况下，映射 $f=\pi_Y f_a\pi_X^{-1}$ 是多值的、不可约的和完满的. 于是，绝对形及其同胚"控制"了正则空间的全体完满不可约映射类. 这个基本性质表明正则拓扑空间的绝对形是在正则空间和完满不可约映射这个范畴中的射影对象. 如果正则空间 X 是紧的，或终紧的，或在 Čech 意义下完全的，其相应性质也可以通过这个空间的绝对形显示出来. 仿紧空间的绝对形甚至是强仿紧的，并且是完满零维的. 但是，正规空间的绝对形本身未必是正规的. 如果 X 是完全正则空间，则其绝对形的 **Stone - Čech 紧化**(Stone - Čech compactification)是 X 的任一紧化的绝对形. 两个空间称为共绝对形的(co - absolute)，如果它们的绝对形同胚.

这样一来，正则空间类可以分为共绝对形空间的不交(两两不交)类. 一个空间 X 与某度量空间共绝对形，当且仅当它是含有一个稠密的 σ 离散开集系的仿紧羽状空间. 一个紧空间与某个可度量化紧统共绝对形，当且仅当它有可数 π 权. 一个紧空间有可数 π 权，并且没有孤立点，当且仅当它与完满 Cantor 集共绝对形. 于是，所有没有孤立点的可度量化紧统与完满 Cantor 集共绝对形. 一个可数可度量化紧统的绝对形是自然数的 Stone - Čech 紧化的一种扩充. 极不连通空间的绝对形与它同胚. 于是，正则空间的绝对形(不论是什么样的)类与极不连通空间类一致. 因为一个非离散极不连通空间不会包含两两不同点的收敛序列，所以任何非离散空间的绝对形是不可度量化的(甚至不满足第一可数性公理).

构造给定(正则)空间 X 的绝对形 aX 有多种方法，下述方法只是最简单的一种.

空间 X 的一个非空典范 κa 集，即典范闭集 A 的族 $\xi=\{A\}$，称为一条丝线(thread)，如果它是有向包含的(inclusion - directed)，也就是说，对族 ξ 中任意两个元素 A，A'，存在一个元素 A'' 包含在 $A\cap A'$ 中. 一条丝线 ξ 称为极大的(maximal)或者终极的(end)，若它不是与之不同的任何丝线的子族. 可以证明丝线存在；并且还可以证明，对每一个非空 κa 集 A，包含集合 A 作为其元素的所有丝线的集合 D_A 是非空的. 每条丝线都包含在某极大丝线中. 极大丝线 ξ 的元素的所有集合的交或为空集，或含一个单点 $x(\xi)$；在后一种情形，丝线 ξ 称为收敛(于点 $x(\xi)$)的(convergent). 在所有终极丝线(即极大丝线)的集合 $\overline{a}X$ 中，可以通过取所有集合 D_A 的全体作为闭集基引进一个拓扑. 这种拓扑是 Hausdorff 的和紧的. 在紧统 $\overline{a}X$ 中收敛终极丝线组成一个处处稠密的子空间. 由收敛终极丝线组成的空间 $\overline{a}X$ 的子空间同时是 X 的绝对形 aX；结果是 $\overline{a}X$ 等同于 aX 的 Stone - Čech 紧化 βaX. 若 X 不仅是正则的，而且是完全正则的，则算子 a 和 β 的交换式(formula of commutativity of operators)成立：

$$\overline{a}X=\beta aX=a\beta X.$$

В. И. Пономарев 撰

【补注】 上面给出的正则拓扑空间 X 的绝对形的定义不够精确. 一种比较好的(更精确的)定义是：正则拓扑空间 X 的绝对形是一个对 (aX,π_X)，其中 π_X 是从 aX 到 X 上的一个完满不可约映射，使得对于每个正则拓扑空间 Y 及从 Y 到 X 上的任意完满不可约映射 f，存在一个从 aX 到 Y 上的映射 g，使得 $\pi_X=fg$.

在西方文献中，终紧空间也称为 Lindelöf 空间(Lindelöf spaces)，典范闭集也称为正则闭集(regular closed sets 或 regularly closed sets). 极大丝线或终极丝线通常称为正则闭超滤子(regular closed ultrafilters).

上面给出的 $\overline{a}X$ 的简单构造法也可以这样叙述：正

则闭集族按照自然方式形成一个完全 **Boole 代数** (Boolean algebra). 于是,空间 $\overline{a}X$ 就是这个 Boole 代数的 **Stone 空间** (Stone space) (其上所有**超滤子** (ultrafilter) 的集合,用集合 D_A 作为闭集的**基**(base)使之拓扑化).

参考文献

[A1] Arkhangel'skiĭ, A. V. and Ponomarev, V. I., Fundamentals of general topology. Problems and exercises, Reidel, 1984 .

θ 邻近空间 (X,δ) 的 θ 绝对形 (θ-absolute of a θ-proximity space)是由**邻近空间**(proximity space)X_δ 及投射 $\pi_X: X_\delta \to X$ (它是一个正则的 θ 映射)所组成的对 (X_δ, π_X). 这里 θ 映射表示 θ 完满、不可约、θ 邻近-连续映射. 任意 θ 邻近空间有唯一的 θ 绝对形. θ 绝对形上任意正则 θ 映射是邻近等价的. 空间 (X,δ) 的 θ 绝对形是空间 (X,δ) 在正则 θ 映射下的极大原象. 对于每一个正则 θ 映射 $f:(X,\delta) \to (Y,\delta')$,存在一个邻近等价 $F: X_\delta \to Y_{\delta'}$, 使得图形

$$\begin{array}{ccc} X_\delta & \xrightarrow{F} & Y_{\delta'} \\ \pi_X \downarrow & & \downarrow \pi_Y \\ X & \xrightarrow[f]{} & Y \end{array}$$

可交换.

对于正则拓扑空间上的极大 θ 邻近,正则 θ 映射的概念等同于完满不可约映射,而 θ 绝对形的概念等同于正则拓扑空间的绝对形.

参考文献

[1] Пономарев, В. И., 《Успехи матем. наук》, 21 (1966), 101–132.

[2] Gleason, A. M., Projective topological spaces, *Illinois J. Math.*, 2 (1958), 4A, 482–489.

[3] Пономарев, В. И., 《Матем. сб.》, 60 (1963), 1, 89–119 .

[4] Федорчук, В. В., 《Матем. сб.》, 76 (1968), 4, 513–536.

В. В. Федорчук 撰

2) 射影几何学中的绝对形(absolute in projective geometry) 是由超平面(空间)的 **Klein 解释** (Klein interpretation)下的无穷远点的集合所组成的二次曲线(曲面). 绝对形可以用来引进射影平面(空间)上的度量(见**度量的射影定义** (projective determination of a metric)). 例如,一条线段 AB 的射影测度 (projective measure of a segment)定义为这样一个量,它与四个点的**交比**(double ratio) $(ABCD)$ 的自然对数成比例,其中 C 和 D 是直线 AB 与绝对形的交点.

А. Б. Иванов 撰 罗嵩龄、许依群、徐定宥 译

绝对连续性 [absolute continuity; абсолютная непрерывность]

1) 积分的绝对连续性 (absolute continuity of an integral)是(Lebesgue)积分的一种性质. 设函数 f 在集合 E 上是 μ 可积的. f 在 μ 可测子集 $e \subset E$ 上的积分是关于测度 μ 的绝对连续的集函数(见以下第三小节), 是指对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在数 $\delta > 0$, 使对于 $\mu(e) < \delta$ 的任意子集 e, 均有积分 $|\int_e f d\mu| < \varepsilon$. 一般地, 数量值或向量值函数 f, 关于有限加性的数量值或向量值集函数 μ 的积分, 是绝对连续函数.

А. П. Терехин, В. Ф. Емельянов 撰

2) 测度的绝对连续性 (absolute continuity of a measure)是测度论的一个概念. 测度 ν 关于测度 μ 是绝对连续的,是指 ν 关于 μ 是一个绝对连续的集函数. 因此,设 ν 和 μ 为在某 σ 代数 G 上定义的测度,并设 ν 为有限测度,那么 ν 关于 μ 为绝对连续,意味着从 $\mu(A)=0$ $(A \in G)$ 可得 $\nu(A)=0$. 广义有限测度(见**负荷** (charge)) ν 关于广义测度 μ 是绝对连续的,是指 $|\mu|(A)=0$ 蕴含着 $\nu(A)=0$, 这里 $|\mu|$ 是 μ 的全变差.

А. П. Терехин 撰

3) 函数的绝对连续性 (absolute continuity of a function)是比连续性更强的一个概念. 定义在线段 $[a, b]$ 上的函数 f 称为绝对连续的 (absolutely continuous), 是指对于任意正数 $\varepsilon > 0$, 存在一个 $\delta > 0$, 当互不相交的开区间 $(a_k, b_k) \subset (a, b)$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 满足条件

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$$

时,恒有不等式

$$\sum_{k=1}^{n}|f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$$

成立. 一个在线段上绝对连续的函数,必在该线段上连续. 反之并不成立. 例如 $f(x)=x\sin(1/x)$, 若 $0<x\leqslant 1$ 且 $f(0)=0$, 则它在 $[0,1]$ 上是连续的,但不是 $[0,1]$ 上的绝对连续函数. 在绝对连续的定义中,如果把区间 (a_k, b_k) 的互不相交条件去掉,那么函数将满足更强的条件,即带某常数的 **Lipschitz 条件** (Lipschitz condition).

如果 f 和 g 是两个绝对连续函数,那么它们的和、差以及积均为绝对连续函数;此外若 $g \neq 0$,那么商 f/g 也是绝对连续的. 两个绝对连续函数的复合不一定是绝对连续的. 然而,假如 f 是 $[a, b]$ 上的绝对连续函数,当 $x \in [a, b]$ 时有 $A \leqslant f(x) \leqslant B$, 而 $F(x)$ 在 $[A,B]$ 上满足 Lipschitz 条件,那么复合函数 $F[f(x)]$ 在 $[a,b]$ 上是绝对连续的. 假如 f 是 $[a, b]$ 上单调增加的绝对连续函数,而 F 是 $[f(a), f(b)]$ 上的绝对连续函数,则 $F[f(x)]$ 在 $[a, b]$ 上也是绝对连续的.

绝对连续函数把零测度集映射成零测度集, 也把可测集映成可测集. 把零测度集映成零测度集的连续的有界变差函数必为绝对连续函数. 每个绝对连续函数都可以表示为两个绝对连续的非减函数之差.

在 $[a,b]$ 上绝对连续的函数 f，必在此线段上具有有界变差，而且几乎处处具有有限导数 $f'(x)$。这个导函数在 $[a,b]$ 上可积，且下列等式成立：

$$f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)\,dt.$$

假如绝对连续函数的导数几乎处处为 0，那么函数本身必为常数。另一方面，对于 $[a,b]$ 上的任意可积函数 $\varphi(x)$，函数 $\int_a^x \varphi(t)dt$ 在该线段上是绝对连续的。因此，在某线段上绝对连续的函数的全体，等同于可用 Lebesgue 不定积分表示的函数全体，也就是说，可表示为某可积函数的带有变上限的 Lebesgue 积分与某常数之和的函数全体。

若 f 在 $[a,b]$ 上绝对连续，那么它的全变差(total variation)是

$$\mathrm{V}_a^b f(x)=\int_a^b |f'(x)|\,dx.$$

绝对连续性概念可以推广到多元函数与集函数(见以下第 4 小节)。

参考文献

[1] Колмогоров, А. Н., Фомин, С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 4 изд. М., 1976 (英译本: Kolmogorov, A. N. and Fomin, S. V., Elements of the theory of functions and functional analysis, Graylock, 1957－1961).

[2] Смирнов, В. И., Курс высшей математики, т. 5, М., 1959 (中译本: В. И. 斯米尔诺夫, 高等数学教程, 第五卷, 高等教育出版社, 1956)　　Л. Д. Кудрявцев 撰

4) 集函数的绝对连续性 (absolute continuity of a set function) 是通常应用于定义在集合 X 的子集所成的 σ 环 S 上可数加性集函数的一种概念。设 μ 和 ν 是定义在 S 上取值于 $[-\infty,\infty]$ 的两个可数加性集函数，这时 ν 关于 μ 是绝对连续的(记为 $\nu\ll\mu$)，是指 $|\mu|(E)=0$ 蕴含 $\nu(E)=0$。这里 $|\mu|$ 是 μ 的全变差：

$$|\mu|=\mu^{+}+\mu^{-},$$
$$\mu^{+}=\sup\{\mu(F)\colon E\supset F\in S\},$$
$$\mu^{-}=-\inf\{\mu(F)\colon E\supset F\in S\},$$

而 μ^+ 与 μ^- 都是测度，分别称为 μ 的正、负变差；根据 Jordan－Hahn 定理，$\mu=\mu^+-\mu^-$。由此可知，以下三种条件是相互等价的：1) $\nu\ll\mu$；2) $\nu^+\ll\mu$，$\nu^-\ll\mu$；3) $|\nu|\leqslant|\mu|$。若测度 ν 为有限的，那么 $\nu\ll\mu$ 当且仅当，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得 $|\mu|<\delta$ 蕴含 $|\nu|<\varepsilon$。根据 **Radon－Nikodým 定理** (Radon－Nikodým theorem)，若 μ 和 ν 均为(完全) σ 有限的 (即 $X\in S'$，且存在一列 $\{E_n\}$，$n=1,2,\cdots$，使得

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n=X,\quad |\mu(E_n)|,\ |\nu(E_n)|<\infty\ \Big)$$

且若 $\nu\ll\mu$)，那么在 X 上存在有限的可测函数 f 使得

$$\nu(E)=\int_E f\,d\mu,\quad E\in S.$$

反之，若 μ 为(完全) σ 有限的，而积分 $\int d\mu$ 有意义，那么 E 的集函数 $\int_E f d\mu$ 关于 μ 是绝对连续的。若 μ 和 ν 均为 (X,S) 上(完全) σ 有限测度，那么存在唯一定义的(完全) σ 有限测度 ν_1 和 ν_2，使得 $\nu=\nu_1+\nu_2$，$\nu_1\ll\mu$，而 ν_2 关于 μ 为奇异的(即存在集合 $A\in S$，使得 $|\nu_2|(A)=0$，$|\mu|(X\setminus A=0)$ (Lebesgue 定理(Lebesgue theorem))。定义在有限维 Euclid 空间(或更一般地，局部紧群)的 Borel 集类上的测度，如果关于 Lebesgue (Haar) 测度是绝对连续的，就称为绝对连续的测度。直线的 Borel 集类上的非负测度 μ 是绝对连续的，当且仅当它的相应的分布函数 $F(x)=\mu\{(-\infty,x)\}$ (作为实变量函数)是绝对连续的。集函数的绝对连续性概念，也可以推广到有限加性函数以及取向量值的函数上去。

参考文献

[1] Halmos, P. R., Measure theory, v. Nostrand, 1950 (中译本：R. 哈尔姆斯，测度论，科学出版社，1958).

[2] Neveu, J., Bases mathématiques du calcul des probabilités, Masson, 1970.　　В. В. Сазонов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Royden, H. L., Real analysis, Macmillan, 1968

[A2] Zaanen, A. C., Integration, North－Holland, 1967

[A3] Rudin, W., Principles of mathematical analysis, McGraw－Hill, 1953 (中译本：W. 卢丁，数学分析原理，人民教育出版社，1979).

[A4] Rudin, W., Real and complex analysis, McGraw－Hill, 1966 (中译本：W. 卢丁，实分析与复分析，人民教育出版社，1981).

[A5] Taylor, A. E., General theory of functions and integration, Blaisdell, 1965.

[A6] Aliprantz, C. D. and Burleinshaw, O., Principles of real analysis, North－Holland, 1981.

王斯雷 译　郑维行 校

绝对误差 [absolute error；абсолютная погрешность]

见误差 (error).

绝对几何学 [absolute geometry；абсолютная геометрия]

基于除平行线公理(第五公设)以外的 Euclid 公理的几何学。绝对几何学服从的假设，对 **Euclid 几何学** (Euclidean geometry) 和 **Лобачевский 几何学** (Lobachevskii geometry) 来说，是共同的。“绝对几何学”这

个名称是 J. Bolyai 在 1832 年引进的.

А. Б Иванов 撰 张鸿林 译

绝对矩 [**absolute moment; абсолютный момент**], 随机变量 X 的 $|X|^r (r>0)$ 的数学期望,通常记为 β_r,所以

$$\beta_r = \mathrm{E}|X|^r.$$

数 r 称为绝对矩的阶 (order). 如果 $F(x)$ 是 X 的分布函数,则

$$\beta_r = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^r dF(x), \quad (1)$$

例如,如果 X 的分布具有密度 $p(x)$, 则有

$$\beta_r = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^r p(x)\,dx. \quad (2)$$

式 (1) 和式 (2) 也分别称为分布函数 $F(x)$ 和密度 $p(x)$ 的绝对矩. 对于数 $r'(0<r'\leqslant r)$,由绝对矩 β_r 的存在,可以推出绝对矩 $\beta_{r'}$ 的存在以及 r' 阶矩 (moment) 的存在. 在概率分布及其特征函数的估计中常常出现绝对矩 (见 **Чебышев 不等式** (Chebyshev inequality); **Ляпунов 定理** (Lyapunov theorem)). 函数 $\log\beta_r$ 是 r 的凸函数,函数 $\beta_r^{1/r}$ 是 r 的非减函数, $r>0$.

Ю. В Прохоров 撰 张鸿林 译

正规空间的绝对收缩核 [**absolute retract for normal spaces; абсолютный ретракт нормальног пространства**]

一个拓扑空间 X, 使得任意正规空间 (normal space) Y 的任何闭子集 A 上的每一个映射 $g: A\to X$, 都可以扩张到全空间 Y. 正规空间的绝对收缩核的直积是正规空间的绝对收缩核,正规空间的绝对收缩核的任何收缩核 (见**拓扑空间的收缩核** (retract of a topological space)) 还是正规空间的绝对收缩核. 特别地,下述空间是正规空间的绝对收缩核: 单位区间 I; n 维立方 I^n; 以及 Hilbert 立方 I^ω. 双正规空间到正规空间绝对收缩核内的任何两个映射是同伦的; 而正规空间的双正规绝对收缩核可以收缩成一点.

М. И. Войцеский 撰

【补注】 正规空间的绝对收缩核 (absolute retract) (AR) 通常定义为这样的正规空间,把它作为闭子集嵌入任何正规空间时,它都是这个空间的收缩核. 满足本条目所述性质的空间称为正规空间的绝对开拓子 (absolute extensor) (AE). 可以证明, 一个空间是 (AR), 当且仅当它是 (AE). 绝对收缩核和绝对开拓子对任何空间类 (即不一定为正规空间) 都可以定义.

双正规空间 (binormal space) 是这样的空间 X, 使得积 $X\times I$ 为正规的. 可以证明,空间 X 是双正规的,当且仅当 X 是正规的并且是可数仿紧的 (见**仿紧性准则** (paracompactness criteria)).

参考文献

[A1] Hu, S. T., Theory of retracts, Wayne State Univ. Press, Detroit, 1965.

徐定宥、罗嵩龄、许依群 译

绝对可和性 [**absolute summability; абсолютная суммируемость**]

级数和序列的一种特殊类型的可和性,它与通常的可和性不同之处在于增添了一些附加条件. 对于**矩阵求和法** (matrix summation method) 来说,要求作为对应于给定求和法的变换的结果所得到的级数和序列是绝对收敛的. 设求和法 A 定义为由序列 $\{s_n\}$ 通过矩阵 $\|a_{nk}\|$ 到序列 $\{\sigma_n\}$ 的变换:

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}s_k, \quad n=0,1,\ldots.$$

这时序列 $\{s_n\}$ 按求和法 A 是绝对可和的 (absolutely summable) ($|A|$ 可和的), 其极限为 s, 如果它是 A 可和的且其极限为 s, 也就是说,如果

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n = s,$$

而且序列 $\{\sigma_n\}$ 具有有界变差:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\sigma_n-\sigma_{n-1}| < \infty. \quad (1)$$

如果 s_n 是级数

$$\sum_{k=0}^{\infty}u_k \quad (2)$$

的部分和,则级数 (2) 按 A 法是绝对可和的 (absolutely summable), 其和为 s. 条件 (1) 是使绝对可和性区别于通常可和性的附加要求. 关于对应由级数到序列的矩阵变换的求和法,可以类似地定义绝对可和性. 如果求和法定义为由级数 (2) 通过矩阵 $\|b_{nk}\|$ 到级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n \quad (3)$$

的变换,其中,

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^{\infty}b_{nk}u_k,$$

则附加条件是级数 (3) 的绝对收敛性. 对于序列到序列 (或者级数到级数) 的变换为恒等变换的这种特殊的求和法 A, 级数的绝对可和性同绝对收敛性是一致的.

对于非矩阵求和法,附加条件应适当修改. 例如,对于 **Abel 求和法** (Abel summation method), 附加条件是函数

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}u_k x^k$$

在半开区间 $0\leqslant x<1$ 上具有有界变差. 对于积分求和

法,绝对可和性在于要求相应的积分是绝对收敛的. 例如,对于 **Borel 求和法** (Borel summation method),积分

$$\int_0^\infty e^{-x}\sum_{k=0}^\infty \frac{u_k x^k}{k!}dx$$

必须是绝对收敛的.

如果一种求和法使得每个绝对收敛的级数都是绝对可和的,则称这种求和法保持级数的绝对收敛性. 如果每个这样的级数按这种方法都是可和的,且其和等于级数收敛之和,则称这种方法为绝对正则的 (absolutely regular). 例如,**Cesàro 求和法** (Cesàro summation methods) (C,k), 当 $k\geq 0$ 时是绝对正则的. Abel 求和法是正则的,通过矩阵 $\|b_{nk}\|$ 把级数变换到级数所定义的求和法是绝对正则的,其必要和充分条件为:

$$\sum_{n=0}^\infty |b_{nk}| \leq M,\ \ \sum_{n=0}^\infty b_{nk} = 1,\ k=0,1,\ldots$$

(Knopp-Lorentz 定理 (Knopp-Lorentz theorem)). 对于由其他类型的变换所定义的求和法,也有类似的条件.

绝对可和性的推广是 p 次绝对可和性 (absolute summability of degree p), 其中 $p\geq 1$. 例如,对于由序列 $\{s_n\}$ 到序列 $\{\sigma_n\}$ 的变换所定义的求和法, p 次绝对可和性与通常可和性的区别在于下面的附加限制:

$$\sum_{n=1}^\infty n^{p-1}|\sigma_n-\sigma_{n-1}|^p < \infty.$$

绝对可和性的概念是 E. Borel 就他的一种求和法引入的,不过同现代的表述不同:对绝对可和性要施加条件

$$\int_0^\infty e^{-x}\left|\sum_{k=0}^\infty \frac{u_{k+p}x^k}{k!}\right|dx < \infty$$

绝对可和性最初用来研究幂级数在收敛圆外的可和性. 由于涉及到可和级数的乘法问题,所以用 Cesàro 求和法 $((|C|,|k|)$ 可和性) 来定义和研究绝对可和性. 绝对可和性的一般定义很晚才提出, 并且在 **Fourier 级数求和法** (Summation of Fourier series) 的研究中得到广泛的应用.

参考文献

[1] Hardy, G. H., Divergent series, Clarendon, 1949.

[2] Kogbetliantz, E., Sommation des séries et intégrales divergentes par les moyennes arithmétiques et typiques, Gauthier-Villars, 1931.

[3] Knopp, K. and Lorentz, G. G., Beiträge zur absoluten Limitierung, Arch. Math. (Basel), 2(1949-1950), 10-16.

[4] Кангро, Г. Ф., в сб.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 12, М., 1974.

И. И. Волков 撰

【补注】

参考文献

[A1] Zeller, W. and Beekmann, W., Theorie der Limitierungsverfahren, Springer, 1970.

张鸿林 译 蒋正新 校

绝对拓扑性质 [**absolute topological property**; **абсолютное топологическое свойство**]

一个废弃的术语, 表示给定集合作为拓扑空间时的性质, 以与将该集合嵌入其他空间中时的性质相对照.

П. С. Александров 撰 徐定宥等 译

绝对值 [**absolute value**; **абсолютная величина**], 模 modulus), 实数 a 的

按下述方式定义的一个非负数,记作 $|a|$: 如果 $a\geq 0$, 则 $|a|=a$; 如果 $a<0$, 则 $|a|=-a$. 复数的绝对值(模) (absolute value (modulus) of a complex number): 复数 $z=x-iy$ (其中 x 和 y 为实数) 的绝对值(模) 是数 $+\sqrt{x^2+y^2}$. 对于绝对值,下列关系式成立:

$$|a| = |-a|,\ |a|^2 = |a^2| = a^2\ \ (a\text{是实数}),$$

$$|a|-|b| \leq |a+b| \leq |a|+|b|,$$

$$|a|-|b| \leq |a-b| \leq |a|+|b|,$$

$$|a\cdot b| = |a|\cdot|b|,\ \ \text{如果}\ \ b\neq 0\ \ \text{则}\ \ \frac{|a|}{|b|} = \left|\frac{a}{b}\right|.$$

绝对值的概念可以推广到任意域的情况;见**域上的范数** (norm on a field). 张鸿林 译

绝对收敛的反常积分 [**absolutely convergent improper integral**; **абсолютно сходящийся несобственный интеграл**]

一个反常积分,其被积函数的绝对值的积分是收敛的. 如果一个反常积分绝对收敛,则它在通常意义下也收敛. 作为一个具体例子,设给定形如

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\eta\to b}\int_a^\eta f(x)dx,\ \ -\infty<a<b\leq+\infty\ \ (*)$$

的广义积分,其中函数 $f(x)$ 在一切区间 $[a,\eta]$ $(a\leq\eta<b)$ 上是 Riemann(或 Lebesgue) 可积的.

积分 (*) 绝对收敛的必要和充分条件 (反常积分绝对收敛性的 Cauchy 准则 (Cauchy criterion)) 是: 对于任何 $\varepsilon>0$, 存在这样的 $\eta_\varepsilon(a\leq\eta_\varepsilon<b)$, 使得对于任何 η' 和 $\eta''(\eta_\varepsilon\leq\eta'<b,\ \eta_\varepsilon\leq\eta''<b)$, 不等式

$$\left|\int_{\eta'}^{\eta''}|f(x)|dx\right| < \varepsilon$$

成立.

如果一个反常积分绝对收敛, 则它等于其被积函数

的 Lebesgus 积分．存在收敛的、但不是绝对收敛的反常积分，例如

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

为了确定给定的积分是否绝对收敛，可以利用非负函数的反常积分的收敛性判别法；例如，利用**收敛性的比较判别法**（comparison criterion of convergence）可以证明积分

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x \ln x}{x^2} dx$$

是绝对收敛的．

对于大多数现有的多重反常积分的定义来说，在收敛性和绝对收敛性之间有着不同的联系．设 $f(x)$ 是在 n 维 Euclid 空间中的开集 G 上定义的函数．如果对于任何单调穷竭区域 G 的立方区域序列 $G_k(k=1,2,\cdots)$，即满足 $G_k \subset \bar{G}_k \subset G_{k+1}$ 和

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k = G,$$

当 $k \to \infty$ 时，Riemann 积分

$$\int_{G_k} f(x) dx$$

都存在极限，而且这个极限与上述区域序列的选取无关，则这个极限通常称为反常积分

$$\int_G f(x) dx.$$

因而当且仅当这样定义的反常积分绝对收敛时，它是收敛的．此外还存在其他多重反常积分的定义．例如，对于定义在整个空间 E^n 上并在任何半径为 $r<+\infty$ 的 n 维球 Q_r 上 Riemann 可积的函数 $f(x)$，可以由下列等式定义它在 E^n 上的反常积分：

$$\int_{E^n} f(x) dx = \lim_{r \to +\infty} \int_{Q_r} f(x) dx.$$

在这种情况下，又可由反常积分的绝对收敛性蕴含着通常意义下的收敛性，反之则不然．

参考文献

[1] Ильин, В. А., Позняк, Э. Г., Основы математического анализа, ч. 2, М., 1973.

[2] Кудрявцев, Л. Д., Математический анализ, т. 1, 2 изд., М., 1973.

[3] Никольский, С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1, М., 1975.

Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Apostol, T. M., Mathematical analysis, Addison-Wesley, 1969.

张鸿林 译　蒋正新 校

绝对收敛级数［**absolutely covergent series；абсолютно сходящийся ряд**］

一个（一般）具有复数项的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{1}$$

由其各项的绝对值构成的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \tag{2}$$

是收敛的．

级数（1）绝对收敛的必要和充分条件（级数的绝对收敛性的 Cauchy 准则（Cauchy criterion））是：对于任何 $\varepsilon>0$，存在这样的整数 n_ε，使得对于一切整数 $n>n_\varepsilon$ 和一切整数 $p \geqslant 0$，不等式

$$\sum_{k=n}^{n+p} |u_k| < \varepsilon$$

成立．如果一个级数绝对收敛，则它在通常意义下也收敛．级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^2}$$

（$i=\sqrt{-1}$）绝对收敛，而级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

收敛，但不绝对收敛．设

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m^* \tag{3}$$

是由与级数（1）相同的一些项组成的级数，但是一般地说，二者排列次序不同．由于级数（1）绝对收敛，所以级数（3）也绝对收敛，而且级数（3）的和等于级数（1）的和．如果两个级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad 和 \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

绝对收敛，则它们的任何线性组合

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda u_n + \mu v_n$$

也绝对收敛；把这两个级数各项的一切可能的两两乘积 $u_m v_n$ 按任意次序排列所构成的级数也是绝对收敛的，而且其和等于原来两个级数之和的乘积．绝对收敛的级数的这些性质，对于**多重级数**（multiple series）：

$$\sum_{(n_1,\cdots,n_k)} u_{n_1,\cdots,n_k} \tag{4}$$

来说也存在．如果一个多重级数是绝对收敛的，则它是收敛的，例如，在球形部分和及矩形部分和的意义下都是收敛的；而且在这两种情况下其和相同．如果多重级数（4）绝对收敛，则叠级数

$$\sum_{n_k=1}^{\infty} \cdots \sum_{n_1=1}^{\infty} u_{n_1,\cdots,n_k} \tag{5}$$

绝对收敛，也就是说，把级数（4）的各项按下标 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ 依次求和所得到的一切级数都是收敛的，这时，多重级数（4）的和与叠级数（5）的和是相等的，而且等于由级数

(4)的所有项构成的任何简单级数之和.

如果级数(1)的各项是某一具有范数‖·‖的Banach空间的元素，则当级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|u_n\|$$

收敛时，级数(1)称为绝对收敛的.上面讨论的绝对收敛的数项级数的那些性质，可以推广到绝对收敛的Banach空间元素的级数的情况，特别是，绝对收敛的Banach空间元素的级数在这个空间中是收敛的. 按类似的方式，可以把绝对收敛级数的概念推广到Banach空间中的多重级数的情况.

参考文献

[1] Ильин, В. А., Позняк, Э. Г., Основы математического анализа, ч. 1, 3 изд., М., 1971.

[2] Кудрявцев, Л. Д., Математический анализ, т. 1, 2 изд., М., 1973.

[3] Никольский, С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1, М., 1975.

Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】 一本有用的西方参考书是[A1].

参考文献

[A1] Apostol, T. M., Mathematical analysis, Addison-Wesley, 1969.

张鸿林 译

绝对平坦环 [**absolutely-flat ring; абсолютно плоское кольцо**]

一个环，其上的任何(右或左)模都是**平坦模**(flat module). 这种环和von Neumann正则环是一样的(见**正则环(在von Neumann意义下的)**(regular ring (in the sence of von Neumann))).

赵春来 译

绝对可积函数[**absolutely integrable function; абсолютно интегрируемая функция**]

一个函数，其绝对值是可积的. 如果函数$f(x)$在区间$[a,b](a<b)$上是Riemann可积的，则其绝对值在此区间上也是Riemann可积的，且

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

对于在n维Euclid空间中的立方体区域上Riemann可积的n元函数，也可得到类似的结论. 对于Riemann可积函数，逆命题不成立. 例如，考虑函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 取有理值时},\\ -1, & \text{当 } x \text{ 取无理值时}.\end{cases}$$

这个函数不是Riemann可积的，但其绝对值却是Riemann可积的. 对于Lebesgue可积函数，情况则不同：Lebesgue可测函数$f(x)$在n维空间的可测集合上是Lebesgue可积的(Lebesgue可和的)，当且仅当其绝对值在此集合上是Lebesgue可积的. 这时，下列不等式成立：

$$\left|\int_E f(x)\,dx\right| \leqslant \int_E |f(x)|\,dx$$

考虑在半开区间$[a,b)(a<b\leqslant+\infty)$上的反常一维Riemann积分或Lebesgue积分(相应地假设函数$f(x)$在任何区间$[a,\eta](a<\eta<b)$上是Riemann可积的或Lebesgue可积的). 这时，函数的绝对值的反常积分

$$\int_a^b |f(x)|\,dx$$

的存在蕴含着反常积分

$$\int_a^b |f(x)|\,dx$$

的存在；反之则不然(见**绝对收敛的反常积分**(absolutely convergent improper integral)). 应注意的是，如果反常积分

$$\int_a^b |f(x)|\,dx = \lim_{\eta\to b}\int_a^{\eta} |f(x)|\,dx$$

存在，则函数$f(x)$在区间$[a,b)$上是Lebesgue可积的，而且它的反常积分等于该Lebesgue积分.

在多元函数(自变量的个数$n>1$)的情况下，通常这样来定义反常积分，即使得函数的绝对值的反常积分的存在等价于函数本身的反常积分的存在.

设函数取值于一个具有范数‖·‖的Banach空间. 这时，如果积分

$$\int_E \|f(x)\|\,dx$$

存在，则称函数$f(x)$在可测集合E上是绝对可积的；而且，如果函数$f(x)$在E上是可积的，则有

$$\left\|\int_E f(x)\,dx\right\| \leqslant \int_E \|f(x)\|\,dx.$$

参考文献

[1] Ильин, В. А., Позняк, Э. Г., Основы математического анализа, ч. 1, 3 изд., М., 1971.

[2] Кудрявцев, Л. Д., Математический анализ, т. 1, 2 изд., М., 1973.

[3] Никольский, С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1, М., 1975 (中译本：С. М. 尼柯尔斯基，数学分析教程，第一卷，人民教育出版社，1980－1981).

[4] Schwartz, L., Cours d'analyse, 1, Hermann, 1967.

Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Royden, H. L., Real analysis, Macmillan, 1968.

[A2] Zaanen, A. C., Integration, North-Holland, 1967.

[A3] Rudin, W., Principles of mathmatical analysis, McGraw-Hill, 1953 (中译本：W. 卢丁，数学分析原理，人民教育出版社，1979).

[A4] Rudin, W., Real and complex analysis, McGraw-Hill, 1966(中译本:卢丁,实分析和复分析,人民教育出版社,1981).
[A5] Taylor, A. E., General theory of functions and integration, Blaisdell. 1965.
[A6] Aliprantz, C. D. and Burleinshaw, O., Principles of real analysis, North-Holland, 1981.
张鸿林 译

绝对无偏序列 [absolutely-unbiased sequence; абсолютно беспристрастная последовательность]

满足下述条件的随机变量序列 $\{X_n\}$:

$$\mathsf{E}(X_1) = 0 \quad 和 \quad \mathsf{E}(X_{n+1} | X_1, \ldots, X_n) = 0$$

绝对无偏序列的部分和 $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ 形成鞅 (martingale). 这两种序列的相互关系如下: 序列 $\{Y_n\}$ 形成鞅, 当且仅当 $Y_n = X_1 + \cdots + X_n + c\ (n = 1, 2, \cdots)$, 其中 $c = \mathsf{E}(Y_1)$ 是常量, $\{X_n\}$ 是一绝对无偏序列. 因此, 所有的鞅都同某一绝对无偏序列的部分和相联系. 数学期望为零的独立随机变量序列是绝对无偏序列的简单例子. 除了术语"无偏"之外, 在与公平博弈概念相联系时, 常常使用术语"公平". A. B. Прохоров 撰

【补注】 在[A1]中用"绝对公平"来代替"绝对无偏".

参考文献

[A1] Feller, W., An introduction to probability theory and its applications, 2, Wiley, 1971, 210.

【译注】 在一些文献中绝对无偏序列亦称鞅差序列 (martingale difference sequence). 刘秀芳 译

吸收状态 [absorbing state; поглощающее состояние], Марков 链 $\xi(t)$ 的

满足

$$\mathsf{P}\{\xi(t) = i \mid \xi(s) = i\} = 1 \quad 对一切\ t \geqslant s$$

的状态 i. 分支过程 (branching process) 就是具有吸收状态 0 的 Марков 链 (Markov chain) 的例子.

为了研究 Марков 链同到达某集合有关的轨道性质, 引进附加的吸收状态是方便的方法.

例. 考虑离散时间的并具有转移概率

$$p_{ij} = \mathsf{P}\{\xi(t+1) = j \mid \xi(t) = i\}$$

的时齐 Марков 链 $\xi(t)$ 的状态集 S, 其中 H 是一个可辨认的子集, 并假设我们需要求出概率

$$q_{ih} = \mathsf{P}\{\xi(\tau(H)) = h \mid \xi(0) = i\}, \quad i \in S, \quad h \in H,$$

其中 $\tau(H) = \min\{t > 0 : \xi(t) \in H\}$ 是首次到达集合 H 的时刻. 如果引入辅助 Марков 链 $\xi^*(t)$, 它与 $\xi(t)$ 的仅有区别是, 在 $\xi^*(t)$ 中所有的状态 $h \in H$ 都是吸收的, 那么对 $h \in H$, 概率

$$p^*_{ih}(t) = \mathsf{P}\{\xi^*(t) = h \mid \xi^*(0) = i\} =$$
$$= \mathsf{P}\{\tau(H) \leqslant t,\ \xi(\tau(H)) = h \mid \xi(0) = i\}$$

对 $t \uparrow \infty$ 是单调非降的, 而且

$$q_{ih} = \lim_{t \to \infty} p^*_{ih}(t), \quad i \in S, \quad h \in H. \qquad (*)$$

根据 Марков 链的基本定义

$$p^*_{ih}(t+1) = \sum_{j \in S} p_{ij} p^*_{jh}(t), \quad t \geqslant 0, \quad i \in S \setminus H, \quad h \in H,$$

$$p^*_{hh}(t) = 1, \quad h \in H; \quad p^*_{ih}(t) = 0, \quad i, h \in H,\ i \neq h.$$

利用 (*) 对 $t \to \infty$ 取极限, 便给出关于 q_{ih} 的线性方程组:

$$q_{ih} = \sum_{j \in S} p_{ij} q_{jh}, \quad i \in S \setminus H, \quad h \in H,$$

$$q_{hh} = 1, \quad h \in H; \quad q_{ih} = 0, \quad i, h \in H,\ i \neq h.$$

参考文献

[1] Feller, W., An introduction to probability theory and its applications, 1, Wiley, 1968 (中译本: W. 费勒, 概率论及其应用, 科学出版社, 上册, 1964; 下册, 1979).
A. M. Зубков 撰 陈培德 译

吸收律 [absorption laws 或 absorptive laws; поглощения законы]

如下恒等式

$$x \wedge (x \vee y) = x, \quad x \vee (x \wedge y) = x,$$

其中 $\wedge$ 和 $\vee$ 是某集合 L 上的二元运算. 如果这两个运算还满足交换律和结合律, 则由等价式

$$x \leqslant y \leftrightarrow x \vee y = y \qquad (*)$$

(或等价地, 由等价式 $x \leqslant y \leftrightarrow x \wedge y = x$) 定义的关系 $x \leqslant y$ 是序关系, $x \wedge y$ 是 x 和 y 的下确界, $x \vee y$ 是 x 和 y 的上确界. 另一方面, 如果有序集 $(L, \leqslant)$ 对任意两个元素 x 和 y 都含它们的下确界 $x \wedge y$ 和上确界 $x \vee y$, 则运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 不仅满足吸收律、交换律和结合律, 而且满足等价式 (*).

参考文献

[1] Rasiowa, E. and Sikorski, R., The mathematics of metamathematics, Polska Akad. Nauk, 1963.

B. H. Гришин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Cohn, P. M., Universal algebra, Reidel, 1981.

张锦文、赵希顺 译

抽象代数几何学 [abstract algebraic geometry; алгебраическая геометрия абстрактная]

代数几何学的分支, 它专门研究任意域上代数簇 (alge-

braic variety)及作为其推广——**概形**(scheme)的一般性质．虽然19世纪时已有抽象代数几何学的早期研究，它的主要发展却在20世纪50年代A. Grothendieck创建概形的一般理论以后．对任意域上代数几何学的兴趣起源于数论问题，特别是两个未知量的方程式理论．在抽象代数几何学的发展中起重要作用的是1924年E. Artin引入代数曲线的ζ函数的概念(见代数几何学中的**ζ函数**(zeta-function))以及1933年H. Hasse对椭圆曲线类似的Riemann假设的证明．当时正在发展中的任意常数域上代数曲线论在这个证明中起着极为重要的作用．

在20世纪的前20年，环论和域论的全面的发展为任意域上高维代数几何学的系统性建设打下了基础．B. L. van der Waerden在他的一系列论文(1933－1938)中把抽象代数几何学置于多项式理想论的基础上．特别地，他发展了非奇异射影代数簇上的**相交理论**(intersection theory)．在这个领域中的研究成果被总结在文献[4]中．

1940年，A. Weil指出对任意亏格的代数曲线的Riemann假设的证明需要建立任意域上高维簇的理论．为此他发展了任意基域上抽象(不必是射影的)代数簇的理论，除子理论，这种簇的相交理论以及Abel簇的一般理论，以前仅从解析观点研究Abel簇．从1946年Weil的书([9])出版后，长时间里赋值论和域论(Weil的"一般点""通用点"语言)被广泛地接受为抽象代数几何学的基础．

20世纪50年代初强有力的交换代数方法被引入抽象代数几何学([6]，[8])．J. P. Serre对**凝聚代数层**(coherent algebraic sheaf)的研究([7])进一步改变了抽象代数几何学的面貌．他首次把同调代数的思想和方法引进抽象代数几何学．抽象代数几何学和代数簇的概念同步发展．在Weil提出抽象代数簇的定义后，已经出现了这个概念的好几种推广，概形的概念表明是最有用的．对这些思想系统的阐述以及概形理论的发展是在1960年起由A. Grothendieck在一系列研究报告([5])中实现的，他把函子和范畴论的语言引入抽象代数几何学并且从根本上改造了这一领域中许多经典的构造．

抽象代数几何学的蓬勃发展归因于人们认识到在概形论的框架里有可能把古典的复数情形的几乎所有已知的概念，尤其是复解析流形的上同调论，应用到"抽象情形"．在抽象代数几何学的发展中，Weil猜测(1947)起了重要的作用，这个猜测假设存在一种使确定映射不动点个数的**Lefschetz公式**(Lefschetz formula)成立的上同调论，它也建立了在上述假设与代数簇的纯算术问题间的紧密联系(见代数几何学中的**ζ函数**(zeta-function))．

拓扑化范畴(topologized category)(Grothendieck拓扑)的概念有很多应用，它的发展为抽象代数几何的一些新分支奠定了基础：**可表示函子**(representable functor)，形式几何学(见**形式群**(formal group))，**Weil上同调**(Weil cohomology)；***K*理论**(*K*-theory)以及**群概形**(group scheme)．这样发展起来的思想和方法影响了很多数学分支(交换代数，范畴论，解析空间论和拓扑学)．

20世纪60年代末，代数簇的概念推广到**代数空间**(algebraic space)，这使得有可能把抽象代数几何学的范围拓广并且使它与代数几何学的其他分支更紧密地联系起来．

参考文献

[1] Grothendieck, A., The cohomology theory of abstract algebraic varieties, in Proc. Internat. Math. Congress Edinburgh, 1958, Cambridge Univ. Press, 1960, 103－118.

[2] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, M., **10**(1972), 47－112.

[3] Serre, J.-P., *Matematuka*, **7** (1963), 5, 3－93.

[4] Gröbner, W., Moderne algebraische Geometrie; die Idealtheoretische Grundlagen, Springer, Wien, 1949.

[5] Grothendieck, A. and Dieudonné, J., Eléments de géométrie algébrique, *Publ. Math. IHES*, **4**.

[6] Samuel, P., Méthodes d'algèbre abstraite en géométrie algébrique, Springer, 1955.

[7] Serre, J.-P., Faiseaux algébriques cohérentes, *Ann. of Math.* (2), **61** (1955), 2, 197－278.

[8] Zariski, O., Algebraic geometry. The fundamental ideas of abstract algebraic geometry, in Proc. Internat. Congress Mathematicians Cambridge, 1950, Amer. Math. Soc., **2** (1952), 77－89.

[9] Weil, A., Foundations of algebraic geometry, Amer. Math. Soc., 1946.

И. В. Долгачев 撰

【补注】 拓扑化范畴概念的系统发展及其应用是由Grothendieck，P. Deligne和很多其他人做的(见[A1]，[A2])．

参考文献

[A1] Deligne, P., La conjecture de Weil Ⅰ, *Publ. Math. IHES*, **43** (1974), 273－307.

[A2] Deligne, P., La conjecture de Weil Ⅱ, *Publ. Math. IHES*, **52** (1980), 237－252.

陈志杰 译

抽象解析函数[**abstract analytic function**；**аналитическая функция абстрактная**]，Banach空间的解析映射(analytic mapping of Banach spaces)

由复Banach空间X的某个区域D到复Banach空间Y的在D中处处Fréchet可微的(differentiable according to Fréchet)函数$f(x)$，即对于任何点$a \in D$，存在由X到Y的有界线性算子$\delta f(a, \cdot)$，满足下列关系式：

$$\lim_{\|h\| \to 0} \|h\|^{-1} \|f(a+h)-f(a)-\delta f(a,h)\| = 0.$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示 X 或 Y 上的范数; $\delta f(a,h)$ 称为函数 f 在点 a 上的 Fréchet 微分 (Fréchet differential).

另一种定义抽象解析函数概念的途径基于 Gâteaux 可微性. 由 D 到 Y 的函数 $f(x)$ 称为在 D 中弱解析的 (weakly analytic), 或在 D 中 Gâteaux 可微的 (differentiable according to Gâteaux), 如果对于空间 Y 上的每个连续线性泛函 y' 和每个元素 $h\in X$, 复函数 $y'(f(x+\xi h))$ 是复变量 ξ 在圆盘 $|\xi|<\rho(x,h)$ 中的解析函数, 其中 $\rho(x,h)=\sup\{|\xi|: x+\xi h\in D\}$. 区域 D 中的任何抽象解析函数在 D 中连续且弱解析. 逆命题亦真, 并且连续性条件可由局部有界性或 Baire 连续性来代替.

"抽象解析函数"这一术语有时在狭义下使用, 这时它被理解为在 Banach 空间或者甚至在局部凸线性拓扑空间 Y 中取值的复变量 z 的函数 $f(z)$. 在这种情形下, 复平面 $\mathbf{C}$ 的区域 D 中的任何弱解析函数是抽象解析函数, 也可以说, 函数 $f(z)$ 是区域 $D\subset\mathbf{C}$ 中的抽象解析函数, 当且仅当 $f(z)$ 在 D 中连续, 对于任何简单可求长的闭围线 $L\subset D$, 积分 $\int_L f(z)dz$ 为零. 对于复变量 z 的抽象解析函数 $f(z)$, Cauchy 公式成立 (见 **Cauchy 积分** (Cauchy integral)).

设 $f(x)$ 为 Banach 空间 X 的区域 D 中的弱解析函数. 这时, 作为复变量 ξ 的函数, $f(x+\xi h)$ 在区域 $\widetilde{D}=\{\xi: x+\xi h\in D\}(h\in X)$ 中具有所有阶导数, 并且这些导数都是由 $\widetilde{D}$ 到 Y 的抽象解析函数. 如果集合 $\{x+\xi h: |\xi|\leqslant 1\}$ 属于 D, 那么

$$f(x+h)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\delta^n f(x,h),$$

这里级数按范数收敛, 且

$$\delta^n f(x,h)=\left.\frac{d^n}{d\xi^n}f(x+\xi h)\right|_{\xi=0}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1}f(x+\xi h)\xi^{-n-1}d\xi.$$

一个由 X 到 Y 的函数 $y=P(x)$ 称为关于变量 x 的次数至多为 m 的多项式 (polynomial), 如果对于所有 x, $h\in X$ 和所有复数 ξ, 有

$$P(x+\xi h)=\sum_{\nu=0}^{m}P_\nu(x,h)\xi^\nu.$$

这里函数 $P_\nu(x,h)$ 与 ξ 无关. 如果 $P_m(x,h)\neq 0$, 则 $P(x)$ 的次数恰好是 m. 幂级数 (power series) 是指形式为 $\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)$ 的级数, 其中 $P_n(x)$ 是 n 次齐次多项式, 它对于所有复数 α 满足 $P_n(\alpha x)=\alpha^n P_n(x)$, $x\in X$. 任一在区域 D 中弱收敛的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)$ 按范数收敛于某个在 D 中的弱解析函数 $f(x)$, 且 $P_n(x)=\delta^n f(0,x)/n!$, $0\in D$. 函数 $f(x)$ 是 D 中的抽象解析函数, 当且仅当它可以在所有点 $a\in D$ 的邻域中展开为幂级数

$$f(a+h)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(h).$$

这里所有 $P_n(h)$ 在 X 中连续.

经典解析函数论中的许多基本结果, 例如**最大模原理** (maximum-modulus principle), 唯一性定理, **Vitali 定理** (Vitali theorem), **Liouville 定理** (Liouville theorems), 等等, 只要引进适当的变化, 都可应用于抽象解析函数. 在一个区域 D 中的所有解析函数的集合形成一个线性空间.

抽象解析函数的概念可以推广到更广的空间 X 和 Y 类, 例如局部凸拓扑空间, 任意完全赋值域上的 Banach 空间, 等等.

参考文献

[1] Hille, E. and Phillips, R., Functional analysis and semigroups, Amer. Math. Soc., 1957 (中译本: E. 希尔, R.S. 菲列浦斯, 泛函分析与半群, 上海科学技术出版社, 1964).

[2] Edwards, R.E., Functional analysis: theory and applications, Holt, Rinehardt, Winston, 1965.

[3] Schwartz, L., Cours d'analyse, 2, Hermann, 1967.

А. А. Данилевич, Е. Д. Соломенцев 撰 史树中 译

数学抽象 [abstraction, mathematical; абстракции математическая]

在以阐述基本数学概念为目的的思维活动中, 数学中的抽象或者思维抽象是其十分重要的组成部分. 在数学中最典型的抽象是"纯"抽象、理想化及其各种各样的多层次复合 (见 [5]).

"纯"抽象 ('pure' abstraction) 的思维活动是指在考虑某种情形时, 只把注意力集中到所讨论对象的某些 (关键的) 特性以及它们之间的相互关系之上, 而不管那些被认为是无关的性质和关系. 这种抽象活动的结果用一种适当的语言固定下来后便起到一般概念的作用. 这种数学抽象的典型例子是**同化抽象** (abstraction by identification).

理想化 (idealization) 思维活动意指在考虑某种情况时, 由人的想象而产生某个概念并成为人们的意识所考虑的对象. 在赋予这种由想象而产生的概念各种性质时, 不仅可以有初始对象实际具有的那些性质, 这与"纯"抽象活动的结果一样, 而且还可有另外一些假想的性质, 它们以改进的形式来反映初始对象的原来性质, 或者甚至可以是现实中根本没有的性质. 数学理想化的一个最传统的例子就是**实无穷抽象** (abstraction of actual infinity), 它导致了实无穷 (actual infinity) 概念的产生. 这个抽象是用集合论来发展数学的基础. 另一个传统的理想化是**潜在可实现性抽象** (abstraction of potential realizability), 它导致了潜无穷 (potential infinity) 概念的产生. 这个抽象再加上对实无穷抽象的拒

绝便形成了构造性数学的基础.

任何数学理论的特性在很大程度上取决于数学抽象的特性,这些数学抽象是表述该理论基本概念的基础.而对这种抽象进行分析则是数学基础的一个主要任务.对与这些论题有关的问题进行仔细的分析可以认识到下列因素的重要性: 1) 对由广泛的理想化进行复合而产生的抽象对象进行评价需要一种特殊的方法以便理解这些对象,而发展这种方法是一件困难的任务,它构成了一门特殊学科(即**语义学**(semantics))的主要内容; 2) 可以应用到任给的一个数学理论中的逻辑工具主要取决于该理论的基本概念的性质,从而也取决于表述这些概念时所采用的数学抽象的性质.见**直觉主义**(intuitionism); **构造数学**(constructive mathematics).

对在数学中所用抽象进行分析做出主要贡献的有 L. E. J. Brouwer ([1]), H. Weyl ([2]), D. Hilbert ([3]), A. A. Марков ([4]) 等.

参考文献

[1] Brouwer, L. E. J., De onbetrouwbaarheid der logische principes, *Tijdschrift voor Wijsbegeerte*, 2 (1908), 152-158.

[2] Weyl, H., Das Kontinuum, Chelsea, reprint, 1973.

[3] Hilbert, D., Grundlagen der Geometrie, Springer, 1913, Appendix Ⅷ.

[4] Марков, А. А., О логике конструктивной математики, М. 1972.

[5] Шанин, Н. А., 《Тр. матем. ин-та АН СССР》, 67 (1962), 15-294.

Н. М. Нагорный 撰 郑锡忠 译 莫绍揆 校

同化抽象 [abstraction by identification; абстракция отождествления]

构成一般抽象概念的一种方式. 当考虑各种不同的具体的原始对象时, 只考虑它们之间与某种目的有关的差别, 而不考虑它们之间与此目的无关的其他差别. 如果原始对象之间的差别仅仅在于与某种目的无关的方面, 就认为它们是相同的. 在语言学上, 同化抽象是把类似的原始对象等同起来, 视为一个单一对象, 并对其指定一个适当的专门术语. 例如把类似的字母、字、字母表视为相同, 就得到抽象的**字母**(letter)、**字**(word)、**字母表**(alphabet)(见[1]); 把等价的有理数基本序列视为相同就得到**实数**(real number)概念; 把彼此同构的群视为相同就得到抽象群的概念等等.

亦见**数学抽象**(abstraction, mathematical); **等价**(equivalence); **同构**(isomorphism).

参考文献

[1] Марков, А. А., Теория алгорифмов, 《Тр. Матем. ин-та АН СССР》, 42 (1954) (中译本: A. A. 马尔科夫, 算法论, 科学出版社, 1959, 1960).

[2] Марков, А. А., О логике конструктивной математики, М., 1972.

Н. М. Нагорный 撰 卢景波 译 王世强 校

实无穷抽象 [abstraction of actual infinity; абстракция актуальной бесконечности]

一种数学的理想化,它与数学中某种形式的无穷概念有关,这种无穷概念便是所谓的实无穷(actual infinity).

正如对待一个具有潜无穷步数的构造过程那样(例如: 从零开始逐步产生正整数的过程),实无穷抽象在于不管这种过程在原则上并不终结这个事实,而在假定它们已经终结的情况下考虑这个过程的结果,即假定其客体集合已经生成.于是所产生的集合(客体)已经在思想上被认为是实际"完成"的东西.实无穷抽象应用到上面所举的例子,便可把所有非负整数集(即**自然序列**(natural sequence))当作一个数学客体来考虑.

在逻辑上,承认实无穷抽象导致承认排中律而把它作为一条逻辑原理.

在以 G. Cantor 所建立的一般集合论为基础而构造整个数学时,实无穷抽象显得特别重要.实无穷抽象作为一种深远的理想化所生成客体的"现实性"是非直接的,尤其是当它与其他理想化过程重复地联用时更是如此.这样一来,在理解那些与这种客体有关的命题时会碰到一定的困难.在数学中不加限制地使用实无穷抽象作为产生数学客体的一种合理方法遭到了许多数学家(L. Kroneker, C. F. Gauss, D. Hilbert, H. Weyl, 等等)的反对. L. E. J. Brouwer (见**直觉主义**(intuitionism))和 A. A. Марков (见**构造数学**(constructive mathematics))提出了数学构造的另一种建设性方案,它们以潜在可实现性抽象作为基础而不借助于实无穷抽象.

亦见**数学抽象**(abstraction, mathematical).

Н. М. Нагорный 撰 郑锡忠 译 莫绍揆 校

潜在可实现性抽象 [abstraction of potential realizability; абстракция потенциальной осуществимости]

一种数学的理想化,与它相关的是数学中某种形式的无穷概念,即潜无穷(potential infinity)概念.

正如对待那些从理论上说可以无限期延伸的构造过程那样(例如,从零出发逐步生成正整数),潜在可实现性抽象在于不管这种过程在实现每一个联接步骤时可能出现的任何在空间、时间或材料方面的困难,把每一步都看成是潜在地可实现的.把潜在可实现性抽象应用到上面所给的例子,就等价于假定可以给任何自然数增加一个单位,可以构作任何两个自然数之和等等.但这并不意味着自然数序列可以作为一个实在的"无穷

客体"而存在.

承认潜在可实现性抽象在逻辑上可以导出数学归纳法原理.

在**构造数学** (constructive mathematics) 中,潜在可实现性抽象起着特别的作用.因为此时关于满足给定条件的构造性客体的存在性命题被看成是关于这种客体潜在可实现性的命题.

亦见**数学抽象** (abstraction, mathematical).

H. M. Нагорный 撰 郑锡忠 译 莫绍揆 校

收敛的加速 [**acceleration of convergence** ; **сходимости ускорение**],迭代法的

迭代法的一种修正构造,借助于这种方法,迭代法具有更大的**收敛速率** (rate of convergence). 所用的加速方法(加速过程)是多种多样的 (见[1] − [4]), 它既依赖于求解的问题也依赖于迭代法的类型. 迭代法可认为是包含自由迭代参数的一类迭代法中的特殊情形,这时收敛的加速可归结为这些参数的最优选择问题. 最优化问题可采用各种形式,并可归结为一种过渡,例如从求解线性代数方程组

$$Lu = f, \quad L = L^{*} > 0 \tag{1}$$

的简单迭代法

$$u^{n+1} = u^{n} - \tau(Lu^{n} - f), \tag{2}$$

过渡到带 Чебышев 参数的 Richardson 法或共轭梯度法. 类似的经典迭代法的收敛速率依赖于矩阵 L 的条件数 $\nu(L)$,对于大的 $\nu(L)$ 收敛速率可能很慢. 在这种情况下,特别是对于网格方程组的解,经常要用到这些方法的修正,这些可由它们不是用于(1), 而是用于其等价方程

$$B^{-1}Lu = B^{-1}f$$

来定义, 这里 $B = B^{*} > 0$ 是特别选定的算子 (见[2] − [4]).

算子 $B^{-1}L$ 在某 Euclid 空间上是自伴的和正定的,所得修正方法的收敛速率依赖于 $\nu(B^{-1}L)$. 类似的修正也被用于更一般的问题,其中包括非线性问题 (见**非线性方程, 数值方法** (non-linear equation, numerical methods)). 为了实现这些修正方法,能够有效地解方程组 $Bv = g$ 是很重要的,例如,(1)的修正导出关系式

$$u^{n+1} = u^{n} - \tau B^{-1}(Lu^{n} - f) \tag{3}$$

(见**计算量的极小化** (minimization of the labour of calculation)).

对于方法(2), 收敛加速的传统的通用方法之一是 δ^{2} 过程. 它和部分特征值问题的迭代法的一系列其他加速方法 (见[1])一起被使用.

在解非线性问题时,常常根据参数连续法选择一特殊的初始近似来实现收敛性的加速. 对这些同样的问题,有时也通过利用更高阶迭代法来实现收敛的加速 (例如 Newton - Канторович 法等).

在蒙特卡罗型概率迭代法中也用到各种收敛加速的方法 (见[2]).

参考文献

[1] Фаддеев, Д. К., Фаддеева, В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, 2 изд., М. - Л., 1963 (英译本: Faddeev, D. K. and Faddeeva, V. N., Computational methods of linear algebra, Freemaan, 1963).

[2] Бахвалов, Н. С., Численные методы, 2 изд., М. 1975 (英译本: Bakhvalov, N. S., Numerical methods: analysis, algebra, ordinary differential equations, Mir, 1977).

[3] Марчук, Г. И., Методы вычислительной математики, 2 изд., М., 1980.

[4] Самарский, А. А., Николаев, Е. С., Методы решения сеточных уравнений, М., 1978.

[5] Glowinski, R., Numerical methods for nonlinear variational problem, Springer, 1984.

[6] D'yakonov, E. G., On iterative methods with saddle operators, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR, New Series*, **292** (1987), 1037 − 1041 (俄文).

Е. Г. Дьяконов 撰

【补注】 在西方文献中,带 Чебышев 参数的 Riehadson 法通常称为 Чебышев **半迭代法** (Chebyshev semi-iterative method). 在 [A3] 和 [A7] 的第 5 章中广泛地分析了 Чебышев 迭代法. 对于 L 是非对称的情形, 可在 [A4] 中找到进一步的分析.

不像 Чебышев 迭代法, 共轭梯度法不需要精确估计 (1) 中迭代矩阵 $I - \tau L$ 的最大和最小特征值. 好的参考文献是 [A2] 和 [A6]. 在 [A5] 中讨论了进一步的发展.

预先用矩阵 B^{-1} 左乘方程组(2)常常称为**预处理** (pre-conditioning). 在 [A1] 中给出了这个技术的最新评述.

参考文献

[A1] Axelsson, O., Conjugate gradient type methods for unsymmetric and inconsistent systems of linear equations, *Linear algebra and its Appl.*, **34** (1980), 1 − 66.

[A2] Golub, G. H. and Loon, C. F. van, Matrix computations, North Oxford Academic, 1983.

[A3] Golub, G. H. and Varga, R. S., Chebyshev semi-iterative methods successive over-relaxation methods, and second-order Richardson iterative methods, Part Ⅰ, Ⅱ, *Numerical Math.*, **3** (1961), 147 − 156; 157 − 168.

[A4] Manteuffel, T. A., The Tchebychev iteration for nonsymmetric linear systems, *Numerical Math.*, **28** (1977), 307 − 327.

[A5] Meijerink, J. A. and Vorst, H. A. van der, An iterative solution method for linear systems of which the coefficient matrix is a symmetric M-matrix, *Math. Comp.*, **31** (1977), 148 – 162
[A6] Stewart, G. W., Conjugate gradients methods for solving systems of linear equations, *Numerical Math.*, **21** (1973), 284 – 297.
[A7] Varga, R. S., Matrix iterative analysis, Prentice Hall, 1962.

郭祥东译

误差积累 [accumulation of errors; накопление погрешности]，代数方程组的数值解中的

在计算过程各个阶段的舍入误差对代数方程组计算解的精确度的总影响．在线性代数数值方法中，对舍入误差的总影响的先验估计最普遍采用的技术是逆(或向后)分析方法．应用到解线性代数方程组

$$Ax = b \tag{1}$$

逆分析方案 (scheme of inverse analysis) 如下．假设应用某直接法 M，由此法算出的解 x_M 并不满足方程(1)，但它可以表示为扰动方程组

$$(A+F_M)x = b+k_M \tag{2}$$

的精确解．根据对矩阵 F_M 和向量 K_M 的范数所能找到的最佳先验估计来估计直接法的质量．这些"最佳"的 F_M 和 K_M 分别称为方法 M 的等价扰动矩阵和向量．

如果对 F_M 和 K_M 的估计是可得到的，那么近似解 x_M 的误差理论上可由不等式

$$\frac{\|x-x_M\|}{\|x\|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\operatorname{cond}(A)}{1-\|A^{-1}\|\,\|F_M\|}\left[\frac{\|F_M\|}{\|A\|}+\frac{\|k_M\|}{\|b\|}\right] \tag{3}$$

估计．这里 $\operatorname{cond}(A)=\|A\|\cdot\|A^{-1}\|$ 是矩阵 A 的条件数，并假定(3)中的矩阵范数从属于向量范数 $\|\ \|$.

实际上，$\|A^{-1}\|$ 的估计是很难预先知道的，(2)的主要意义在于它提供了比较不同方法的优劣的可能性．下面提出矩阵 F_M 的某些典型估计．

对用正交变换和浮点运算(假定方程(1)中的 A 和 b 是实的)的方法

$$\|F_M\|_E \leqslant f(n)\cdot\|A\|_F\cdot\varepsilon. \tag{4}$$

在这估计式中，ε 是计算机中的相对精度，$\|A\|_E=(\sum a_{ij}^2)^{1/2}$ 是 Euclid 矩阵范数，$f(n)$ 是 Cn^k 型函数，这里 n 是方程组的阶．常数 C 和指数 k 的精确值依赖于如舍入误差法，内积积累运算的利用等这样计算过程中的细节．通常 $k=1$ 或 $3/2$.

在 Gauss 型方法中，估计式(4)的右端项还包含另一因子 $g(A)$，它反映矩阵 A 的元素在方法的中间步骤中与其初始值相比增长的可能性(在正交法中不会发生这种增长)．为了减小 $g(A)$，应用各种主元方法，从而为矩阵元素的增长设置了界限．

在**平方根法** (square-root method) (或 Cholesky 法 (Cholesky method)) 中，当矩阵 A 是正定时，常用这个方法，我们有更强的估计：

$$\|F_M\|_E \leqslant C\|A\|_E\cdot\varepsilon.$$

存在直接法 (Gordan 法、加边法和共轭梯度法)，其逆分析方案的直接应用并不能产生有效的估计．在这种情况下，利用不同的论据去研究误差的积累 (见[6]－[9]).

参考文献

[1] Givens, W., Numerical computation of the characteristic values of a real symmetric matrix, U. S. Atomic Energy Commission Reports, Ser. ORNL, no. 1574 (1954).
[2] Wilkinson, J. H., The algebraic eigenvalue problem, Oxford Univ. Press, 1969.
[3] Wilkinson, J. H., Rounding errors in algebraic processes, Prentice Hall, 1962.
[4] Воеводин, В. В., Ошибки округления и устойчивость в прямых методах линейной алгебры, М., 1969.
[5] Воеводин, В. В., Вычислительные основы линейной алгебры, М., 1977.
[6] Peters, G. and Wilkinson, J. H., On the stability of Gauss-Gordan elimination with pivoting, *Commun. ACM*, **18** (1975), 1, 20 – 24.
[7] Broyden, C. G., Error propagation in numerical processes, *J. Inst. Math. and Appl.*, **14** (1974), 2, 131 – 140.
[8] Reid, J. K., Large sparse sets of linear equations, London-New York, 1971, 231 – 254.
[9] Икрамов, Х. Д., «Ж. вычисл. матем. и матем. физики», **18** (1978), 3, 531 – 545.

Х. Д. Икрамов 撰

【补注】 上面的参考文献[3]包含代数过程舍入误差分析较详细的叙述．另外还可提及 [A1] 和 [A5]．舍入分析的一个历史性的分析在 [A7] 中给出．更现代的发展(区间分析和自动误差分析)可在 [A2]，[A3] 和 [A8]中找到．**区间分析** (interval analysis) 的完整介绍在[A4]中给出．

参考文献

[A1] Forsythe, G. E. and Moler, C. B., Computer solution of linear algebric systems, Prentice Hall, 1967.
[A2] Larsen, J. and Sameh, A., Efficient calculation of the effects of roundoff errors, *ACM Trans. Math. Software*, **4** (1978), 228 – 236.
[A3] Miller, W. and Spooner, D., Software for roundoff analysis II, *ACM Trans. Math. Software*, **4** (1978), 369 – 390.
[A4] Stewart, G. W., Conjugate gradients methods for solving systems of linear equations, *Numer. Math.*, **21**

(1973), 284 – 297.

[A5] Wilkinson, J. H., Error analysis of direct methods of matrix inverson, *J. Assoc. Comput. Machinery*. **8** (1961), 281 – 330.

[A6] Wilkinson, J. H., Mordern error analysis, *SIAM Review*, **13**, 548 – 588.

[A7] Yohe, J. M., Softwere for interval arithmetic, *ACM Trans. Math. Software*, **5** (1979), 50 – 63.

舍入误差积累 (accumulation of rounding-offerrors) (或误差积累 (accumulation of errors)) 发生于当进行求解问题时,其解是连续执行大量算术运算的结果.

这样问题的重大部分出现在解线性或非线性代数问题中(见上面). 因而,人们常常最关心的是从微分方程近似中产生的代数问题. 这些问题表现出某些特殊的特性.

误差依据相同的(或甚至更简单的)支配计算误差积累的规律积累;当分析问题的求解方法时,需要研究它们.

研究计算误差的积累,有两种不同的途径. 在第一种途径中,假定每步的计算误差都以最不利的方式被引入,因而得到误差的控制估计 (majorizing estimate for the error). 在第二种途径中,假设误差是随机的并服从某种分布律.

误差积累的性质依赖于被解的问题、求解方法和初看起来似乎微不足道的其他各种因素:例如计算机运算的类型(定点或浮点),执行算术运算的次序等等. 例如,计算 N 个数的和

$$A_N = a_1 + \cdots + a_N,$$

运算的次序是重要的. 假设计算是在 t 位二进制数字浮点运算计算机上进行的,所有数都落在区间 $1/2 < |a_n| \leqslant 1$ 内. 借助于递推公式:

$$A_{n+1} = A_n + a_n, \quad n = 1, \ldots, N-1$$

直接计算 A_N,其控制误差估计是与 $2^{-t}N$ 同阶的. 还可以按另一种方式计算(见[1]). 首先成对地求和,$A_k^1 = a_{2k-1} + a_{2k}$(如果 $N = 2l+1$ 是奇数,令 $A_{l+1}^1 = a_{2l+1}$). 然后进一步成对求和,$A_k^2 = A_{2k-1}^1 + A_{2k}^1$,等等. 如果 $2^{m-1} < N \leqslant 2^m$,则利用公式

$$A_k^q = A_{2k-1}^{q-1} + A_{2k}^{q-1}, \quad A_k^0 \equiv a_k,$$

两两相加 m 步得到 $A_1^m = A_N$;这时控制误差估计是与 $2^{-t}\log_2^N$ 同阶的.

在典型问题中,数 a_m 根据公式,特别是递推公式计算,或顺序地出现在计算机操作存储器中;在这种情况下,使用刚才描述过的方案增加了计算机的存储负荷. 但是,可以这样组织计算的序列,使得操作存储器的负荷总不多于 $\sim \log_2 N$ 个单元.

在微分方程数值解中,可能遇到如下的情况:当网格间距 h 趋于零时,误差以 $(a(h))^{h^{-q}}$ 增长,这里 $q > 0$,而且 $\overline{\lim}_{h\to 0}|a(h)| > 1$. 这样的解法属于不稳定法 (unstable methods) 的范畴,它们没有多大的实际意义.

在稳定法 (stable methods) 中,误差特有地将以速度 $A(h)h^{-q}$ 增长,这里 $\overline{\lim}_{h\to 0}|A(h)| < \infty$. 这样方法中的误差常常用下面的方式估计:先对扰动构造一个方程,无论这扰动是舍入误差还是其他误差,然后研究这个方程的解 (见[2], [3]).

在更复杂的情况中,利用等价扰动法 (method of equivalent perturbations) (见[1], [4]),它是在微分方程解的计算误差积累的研究中发展起来的 (见[3], [5], [6]). 把按照某些带舍入的标准方案的计算看作是对具有扰动系数的方程不带舍入的计算. 将原差分方程的解与带扰动系数的方程的解相比较,就可得到对误差的估计.

仔细地选择一方法,其中 q 和 $A(h)$ 尽可能地小. 当使用一个确定的解法时,常常将标准公式这样变形,使得 $q \leqslant 1$(见[3], [5]). 在常微分方程的情形中,这是特别重要的,那里在各种情况下,计算步数都非常大.

$A(h)$ 随积分区间的扩大而剧烈地增加. 所以目标是使用 $A(h)$ 尽可能小的方法. 当处理 Cauchy 问题时,在每个特定步中的舍入误差,相对于前一步,可认为是在初始数据中的误差. 因此 $A(h)$ 的下界依赖于微分方程的稍稍不同的解之差的特性,这个微分方程由小扰动方程定义.

在常微分方程 $y' = f(x, y)$ 的数值解中,小扰动方程具有形式

$$\eta' = f_y(x, y)\eta + S.$$

所以在区间 (x_0, X) 上解这个问题时,不能指望在计算误差的控制估计中的常数 $A(h)$ 本质上好于下式:

$$\int_{x_0}^{X} e^{\int_x^X f_y(t, y(t))\,dt}\,dx.$$

因此,解这样的问题,最普遍使用的方法是 Runge-Kutta 或 Adams 型一步方法(见[3], [7]),这里误差的积累基本上是通过小扰动方程的解确定的.

在许多方法中,误差的主项按类似的规律增长,而计算误差要更迅速地积累 (见[3]). 这样的方法实际应用的范围实质上是较窄的.

计算误差的积累基本上依赖于用来解网格问题的方法. 例如,当用打靶法或双扫描法解对应于常微分方程的网格边值问题时,误差积累表现如 $A(h)h^{-q}$,这里 q 是相同的. 这些方法中的 $A(h)$ 可以相差到这样的程

度，使得在某些情况下，这些方法之一变成无用的．当用打靶法解网格边值问题时、误差积累表现如 $c^{1/h}$, $c>0$, 而对双扫描法这是 Ah^{q}. 如果采用概率方法研究误差积累，在一些情形中假定误差先验地服从某种分布律（见[2]）；在另一些情形中在所考虑问题的空间上引入一度量，根据这个度量导出舍入误差的分布律（见[8]，[9]）．

当测量问题解的精度时，对于计算误差积累的估计，控制方法和概率方法在定性上常常产生相同的结果：两种情形误差积累或都在允许界限内，或都超出去．

参考文献

[1] Воеводин, В. В., Вычислительные основы линейной алгебры, М., 1977.

[2] Шура-Бура, М. Р., 《Прикл. матем. и механ.》, **16** (1952), 5, 575－588.

[3] Бахвалов, Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975（英译本：Bakhvalov, N. S., Numerical methods: analysis, algebra, ordinary differential equations, Mir, 1977）.

[4] Wilkinson, J. H., The algebraic eigenvalue problem, Oxford Univ. Press, 1969.

[5] Бахвалов, Н. С., в кн.: Вычислительные методы и программирование, в. 1, М., 1962, 69－79.

[6] Годунов, С. К., Рябенький, В. С., Разностные схемы, 2 изд., М., 1977（英译本：Godunov, S. K. and Ryabenkil, V. S., The theory of difference schemes, North-Holland, 1964）.

[7] Бахвалов, Н. С., 《Докл. АН СССР》, **104** (1955), 5, 683－686.

[8] Бахвалов, Н. С., 《Ж. вычислит. матем. и матем. физики》, **4** (1964), 3, 399－404.

[9] Лапшин, Е. А., 《Ж. вычислит. матем. и матем. физики》, **11** (1971), 6, 1425－1436.

Н. С. Бахвалов 撰

【补注】 舍入误差的统计处理可在下面的参考文献中找到．应注意的是统计分析给出更实际的界限，但计算要困难得多．

参考文献

[A1] Henrici, P., Discrete variable methods in ordinary differential equations, Wiley, 1962.

[A2] Henrici, P., Error propagation for difference methods, Wiley, 1963.

[A3] Hull, T. E. and Swenson, J. R., Tests of probabilistic models for propagation of roundoff errors, *Commun. ACM*, **9** (1966), 108－113.

郭祥东 译

聚点 [**accumulation point**; **накопления точка**]，集合 A 的

拓扑空间 X 的点 x，使 x 的任何邻域都含有 A 中异于 x 的点．一个集合可能有许多聚点；但也可能一个也没有．例如，在通常拓扑下，任何实数都是全体有理数集的聚点．在离散空间中不存在有聚点的集合．在空间 X 中集合 A 的所有聚点的集合称为（A 的）导出集 (derived set)．在 T_1 空间中，集合的聚点的任何邻域都含有集合的无限多个点．

上述概念和**邻近点** (proximate point) 以及**完全聚点** (complete accumulation point) 的概念有区别．特别地，集合的任意点都是集合的邻近点，但未必是聚点（反例：离散空间的任意点）．

А. В. Архангельский 撰　方嘉琳 译

作用 [**action**; **действие**]

由一个函数的定积分表示的泛函，其定态值决定在给定主动力作用下力学系统在空间某两个有限位置 P_0 和 P_1 间满足一定条件的运动学上可能运动类中的实际运动．

人们区分出现在相应的定态作用原理中的 Hamilton 作用，Lagrange 作用和 Jacobi 作用．

Hamilton 作用 (Hamiltonian action)

$$\int_{t_0}^{t_1}(T+U)\,dt$$

在一完整系统的运动学上可能运动类中定义，对于这些运动，系统的初始和终结位置以及其间的运动时间与实际运动的相应量相同．

Lagrange 作用 (Lagrangian action)

$$\int_{t_0}^{t}2T\,dt$$

和 Jacobi 作用 (Jacobian action)

$$\int_{P_0}^{P_1}\sqrt{2(U+h)}\,ds,$$

$$ds^2=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\,dq_i\,dq_j$$

在一完整守恒系统的运动学上可能运动类中定义，对于这些运动，系统的初始和终结位置以及恒定能量 h 与实际运动的相应量相同．这里 T 为系统的动能，而对于守恒系统

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j,$$

此处 $\dot{q}_i$ 为广义 Lagrange 坐标，$U(q)$ 为主动力的力函数．

详见**经典力学的变分原理** (variational principles of classical mechanics)；**Hamilton-Остроградский 原理** (Hamilton-Octrogradski principle)；**Lagrange 原理** (Lagrange principle)；**Jacobi 原理** (Jacobi principle)．

В. В. Румянцев 撰　唐锦荣 译

群在流形上的作用 [action of a group on a manifold; действие группы на многообразии]

群在空间上的作用的一般概念中研究得最透彻的情形．拓扑群 G 作用在空间 X 上，如果每个 $g\in G$ 对应着 X（到自身）的一个同胚 φ_g，满足以下条件：1) $\varphi_g\circ\varphi_h=\varphi_{gh}$；2) 对单位元 $e\in G$，映射 φ_e 是恒等同胚；3) 映射 $\varphi: G\times X\to X$, $\varphi(g,x)=\varphi_g(x)$ 连续．如果 X 和 G 有附加结构，与这些结构相容的 G 的作用特别令人感兴趣；因此，若 X 是微分流形，而 G 是一个 Lie 群，则通常假定映射 φ 可微．

集合 $\{\varphi_g(x_0)\}_{g\in G}$ 称为点 $x_0\in X$ 关于群 G 的轨道 (orbit 或 trajectory)；轨道空间 (orbit space) 记作 X/G，也称为空间 X 关于群 G 的商空间 (quotient space)．一个重要的例子是 X 为 Lie 群，G 为其子群的情形；此时，X/G 是相应的**齐性空间** (homogeneous space)．经典的例子包括球面 $S^{n-1}=O(n)/O(n-1)$、Grassmann 流形 $O(n)/(O(m)\times O(n-m))$ 和 Stiefel 流形 $O(n)/O(m)$（见 **Grassmann 流形** (Grassmann manifold)；**Stiefel 流形** (Stiefel manifold)）．此处轨道空间是一个流形．如果群的作用不是自由的，例如，如果不动点集 X^G 非空，则通常不是这种情况．群的自由作用 (free action of a group) 是这样一个作用：若对任意 $x\in X$ 有 $gx=x$，则 $g=e$．反之，如果 X 是一个微分流形且 G 的作用可微，则 X^G 是一个流形；这个断言对 $\mathbf{Z}_p$ 上的上同调流形及 $G=\mathbf{Z}_p$ 也成立 (Smith 定理 (Smith theorem))．

如果 G 是非紧群，则空间 X/G 通常是不可分的，这正是对单个轨线及它们的相互位置有兴趣加以研究的原因．以微分方式作用在微分流形 X 上的实数群 $G=\mathbf{R}$ 是一个经典的例子．这种用局部坐标表述的动力体系的研究，等价于常微分方程组的研究，通常用到分析方法．

如果 G 是紧群，那么已经知道若 X 是一个流形，且每个 $g\in G\,(g\neq e)$ 非平凡地（即不对应规律 $(g,x)\to x$）作用在 X 上，则 G 是 Lie 群([8])．相应地，对紧群作用的主要兴趣是 Lie 群的作用．

设 G 是紧 Lie 群，X 是紧上同调流形．以下结果是典型的．X 中存在有限多个轨道型，且轨道的邻域看上去像直积（切片定理 (slice theorem)）；空间 X, X/G 和 X^G 的上同调结构之间的关系是有趣的．

如果 G 是紧 Lie 群，X 是微分流形，且作用

$$\varphi: G\times X\to X$$

可微，则自然得到以下的等价关系：$(X,\varphi)\sim(X',\varphi')$，当且仅当有可能找到 (X'',φ'')，使边界 $\partial X''$ 具有形式 $\partial X''=X\cup X'$ 且 $\varphi''|_X=\varphi$, $\varphi''|_{X'}=\varphi'$．如果群 G 自由地作用，则等价类可以从与分类空间 B_G 的下配边 $\Omega_*(B_G)$ 的一一对应中找到（见**下配边** (bordism)）．

近代（19 世纪 70 年代中叶）的结果，重要的部分是：1) 在关于群 G 和流形 X 的各种附加假定下，确定轨道的类型([6])；2) 群作用的分类；3) 找出流形 X 的整体不变量与 G 在 X^G 的不动点邻域中群作用的局部性质之间的关系．在解决这些问题时，以下理论和方法起很重要的作用：现代微分拓扑的方法（如换球术）；K_G 理论([1])，它与 G 向量丛的 K 理论类似；下配边和配边理论([3])；在 G 丛中伪微分算子研究的基础上研究群 G 作用的分析方法 ([2], [7])．

参考文献

[1] Atiyah, M. F., K-theory: lectures, Benjamin, 1967.

[2] Atiyah, M. F. and Singer, I. M., The index of elliptic operators, *Ann. of Math.*, (2), **87** (1968), 484–530.

[3] Бухштабер, В. М., Мищенко, А. С., Новиков, С. П., 《Успехи матем. наук》, **26** (1971), 2, 131–154.

[4] Conner, P. E. and Floyd, E. E., Differentiable periodic maps, Springer, 1964.

[5] Bredon, G., Introduction to compact transformation groups, Acad. Press, 1972.

[6] Hsiang, W. Y., Cohomology theory of topological transformation groups, Springer, 1975.

[7] Zagier, D. B., Equivariant Pontryagin classes and applications to orbit spaces, Springer, 1972.

[8] Proc. conf. transformation groups, Springer, 1968.

[9] Proc. second conf. compact transformation groups, Springer, 1972.

А. В. Зарелуа 撰

【补注】

参考文献

[A1] Petrie, T. and Randall, J. D., Transformation groups on manifolds, M. Dekker, 1984.

徐森林 译

零调连续统 [acyclic continuum; ациклический континуум]

具有平凡**同调群** (homology group) 的连续统．

П. С. Александров 撰　徐定宥等 译

零调元 [acyclic element; ациклический элемент]

连续统的分点与端点集合的一个分支．

А. А. Мальцев 撰　徐定宥等 译

Adams 法 [Adams method; Адамса метод]

解一阶微分方程组的 Cauchy 问题

$$y'=f(x,y),\ y(x_0)=y_0$$

的一种有限差分法．

当在定步长的格点 $x_n=x_0+nh$ 上进行积分时，计算公式具有下列形式：a) 外推公式

$$y_{n+1}=y_n+h\sum_{\lambda=0}^{k}u_{-\lambda}f(x_{n-\lambda},y_{n-\lambda});$$

b) 内插公式

$$y_{n+1} = y_n + h\sum_{\lambda=-1}^{k-1} v_{-\lambda} f(x_{n-\lambda}, y_{n-\lambda}).$$

对于同样的 k,后一公式给出的结果比较精确,但是,为了求 y_{n+1} 必须解一个非线性方程组.

在实际工作中,可以首先由公式 a) 求出一个近似值,然后按下列公式进行一两次校正:

$$y_{n+1}^{(i+1)} = y_n + h\sum_{\lambda=0}^{k-1} v_{-\lambda} f(x_{n-\lambda}, y_{n-\lambda}) + h v_1 f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(i)}),$$

当 $h|v_1|\|(\partial f/\partial y)\|<1$ 时,这个公式逐点收敛.对于 Adams 法来说,由公式 a) 开始计算时所需要的初始条件 $y_1,\cdots,y_k$,必须用某种特殊方法来确定. 解的误差可以写为下列形式:

$$\chi_{k+1}\left\{\int_{x_0}^{x_n}\Omega(x,t)y^{(k+2)}(t)dt\right\}h^{k+1}+O(h^{k+2}),$$

其中 $\Omega(x,t)$ 是方程组

$$\frac{d\Omega(x,t)}{dx} = f_y(x,y(x))\Omega(x,t)$$

当 $\Omega(t,t)=E$ 时的解.

上述误差中的一项 $O(h^{k+2})$ 的结构是这样的: 对于小的 h 值,在大的积分区间上,它与主项相比,总一致地为小量. 这意味着,当微分问题的解绝对稳定时,Adams 法可以在大的积分区间上应用. 特别是,与 **Milne 法** (Milne method) 不同, Adams 法可以用来求微分方程的稳定的周期解. 具有自动步长选择的标准 Adams 积分程序比标准 **Runge-Kutta** 法 (Runge - Kutta method) 复杂得多,因为改变步长的算法复杂得多,而且 y_k 的初始值的选择没有标准化.

对于方程 $y'=-ay\,(a>0)$ 的情况, 外推公式 a) 具有下列形式:

$$y_{n+1} = y_n + h\sum_{\lambda=0}^{k} u_{-\lambda}(-ay_{n-\lambda}).$$

这个方程的特解是 $y_n=C\mu^n$, 其中 μ 是方程

$$\mu^{k+1} = \mu^k - ah\sum_{\lambda=0}^{k} u_{-\lambda}\mu^{k-\lambda}$$

的一个根. 如果 $ah\sum_{\lambda=0}^{k}|u-\lambda|>2$,则这个方程的一个根是 $|\mu|>1$,而舍入误差迅速增加. 当进行具有自动步长选择的积分时,这会引起步长的不合理的减小.但是,在大多数情况下, Adams 法要比 Runge - Kutta 法经济省时;这种方法是 J. C. Adams 在 1855 年首先提出的.

参考文献

[1] Березин, И. С., Жидков, Н. П., Методы вычислений, 2 изд., т. 2, М., 1962 (英译本: Berezin, I. S. and Zhidkov, N. P., Computing methods, 2, Pergamon Press, 1973).

[2] Бахвалов, Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975 (英译本: Bakhvalov, N. S., Numerical methods: analysis, algebra, ordinary differential equations, Mir, 1977)

[3] Тихонов, А. Н., Горбунов, А. Д., 《Ж. вычисл. матем. и матем. физ.》, 2 (1962), 4, 537—548.

[4] Лозинский, С. М., 《Изв. высш. учебн. заведений. Математика》, 1958, 5, 52—90.

[5] Беленький, В. З., в сб., Вычислительные методы и программирование, М., 1965, 253—261.

[6] Бахвалов, Н. С., 《Докл. АН СССР》, **104** (1955), 5, 683—686

Н. С. Бахвалов 撰

【补注】 Adams 法是一种特殊的 k 或 $(k+1)$ 多步法 (multistep method). 在外推情况 a),它给出显式差分方程 (预估公式 (predicator formula)); 在内插情况 b),它给出隐式差分方程 (校正公式 (corrector formula)). 某一种特殊情况称为 Adams-Bashforth 法 (Adams-Bashforth method),即显式方法系列: $k=0$, $u_0=1$ (Euler 法); $k=1$, $u_0=3/2$, $u_{-1}=-1/2$; $k=2$, $u_0=23/12$, $u_{-1}=-4/3$, $u_{-2}=5/12$; 等等. 另一种特殊情况称为 Adams - Moulton 法 (Adams - Moulton method),即隐式方法系列: $k=1$, $v_1=1/2$, $v_0=1/2$ (梯形法则 (trapezoidal rule)); $k=2$, $v_1=5/12$, $v_0=2/3$, $v_{-1}=-1/12$; 等等.

参考文献

[A1] Fox, L. and Mayers, D. F., Computing methods for scientists and engineers, Clarendon Press, 1968.

[A2] Rosser, J. B., Solving differential equations on a hand-held programmable calculator, in G. H. Golub (ed.), Studies in numerical analysis, *Math. Assoc. Amer.*, 1984, 199—242.

张鸿林 译

加法 [addition; сложение]

基本算术运算之一. 加法的结果称为和 (sum). 两个数 a 与 b 之和记为 $a+b$, a 与 b 都称为被加数 (summand). 数的加法是交换的: $a+b=b+a$, 是结合的: $(a+b)+c=a+(b+c)$. 加法的逆运算称为减法 (subtraction).

Abel 群 (Abelian group; 采用加法记号时) 中的运算, **环** (ring) 中的使得其元素构成 Abel 群的二元运算,通常也称为加法. 这里,加法也是交换的和结合的. 有时,群中的非交换运算也称为加法,例如, **多算子群** (multi - operator group) 的情况就是如此.

О. А. Иванова 撰 张鸿林 译

集合的加法 [addition of sets; сложение множеств]

集合族 A_i 上的向量加法和某些其他的 (结合的和交换的) 运算. 最重要的情形是当 A_i 是 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 中的凸集.

在线性空间中 (带系数 λ_i) 的向量和 (vector sum) 由以下规则定义:

$$S = \sum_i \lambda_i A_i = \bigcup_{x_i \in A_i} \left\{ \sum_i \lambda_i x_i \right\},$$

这里 λ_i 是实数(见[1]). 在空间 $\mathbf{R}^n$ 中，向量和也称为 Minkowski 和(Minkowski sum). 体积 S 对于 λ_i 的依赖性涉及到**混合体积理论** (mixed-volume theory). 对于凸集 A_i，加法保持凸性而且归结于**支持函数**(support function)的加法，而对于 C^2 平滑 - 严格凸集 $A_i \subset \mathbf{R}^n$，它由在具有公共法线的点处的曲率半径的平均值的加法来刻画.

进一步的例子是不计平移的集合的加法，闭集的加法(伴随结果的闭包，见**凸集的线性空间**(convex sets, linear space of)，**凸集的度量空间**(convex sets, metrix space of))，集合连续族的积分，以及可换半群的加法(见[4]).

Firey p 和(Firey p-sum)定义于包含零的凸体类中. 当 $p \geq 1$ 时，p 和的支持函数定义为 $(\sum_i H_i^p)^{1/p}$，这里 H_i 为被加项的支持函数. 对于 $p \leq -1$，人们求得相应的配极体的 $(-p)$ 和，并取所得结果的配极(见[2]). Firey p 和对于 A_i 和 p 是连续的. p 和在子空间上的投影是投影的 p 和. 当 $p=1$ 时，p 和与向量和相同，当 $p=-1$ 时，称它为逆和(inverse sum) (见[1])，当 $p=+\infty$ 时，它给出被加项的凸壳. 当 $p=-\infty$ 时，给出它们的交. 对于这四个值，多面体的 p 和为多面体，而且当 $p=\pm 2$ 时，椭球的 p 和是椭球(见[2]).

Blaschke 和(Blaschke sum)是对于不计平移的凸体 $A_i \subset \mathbf{R}^n$ 所定义的. 它由面积函数的加法来定义(见[3]).

沿子空间的和(sum along a subspace)定义在一个向量空间 X 上，X 分解为两个子空间 Y 与 Z 的直和. 沿 Y 的 A_i 的和定义为

$$\bigcup_{z \in Z} \left\{ \sum_i (Y_z \cap A_i) \right\},$$

其中 Y_z 是 Y 的平移且 $Y_z \cap Z = \{z\}$ (见(1)).

参考文献

[1] Rockafeller, R. T., Convex analysis, Princeton Univ. Press, 1970.
[2] Firey, W. J., Some applications of means of convex bodies, *Pacif. J. Math.*, **14** (1964), 53-60.
[3] Firey, W. J., Blaschke-sums of convex bodies and mixed bodies, in Proc. Coll. Convexity Copenhagen, 1965.
[4] Dinghas, A., Minkowskische Summen und Integrale. Superadditive Mengenfunktionale. Isoperimetrische Ungleichungen, Paris, 1961.

В. П. Федотов 撰 宋方敏 译 莫绍揆 校

加法定理 [**addition theorem; адиционная теорема**]，关于权的

如果 Hausdorff 紧统 X 能表示为权 $\leq \tau$ 的子空间的无限基数 $\leq \tau$ 的集合的并，则 X 的权不超过 τ. (在[1]中作为问题提出的)加法定理在[3]中对于 $\tau = \aleph_0$、在[4]中对于一般情况，分别得到证明. 见**拓扑空间的权**(weight of a topological space).

参考文献

[1] Alexandroff, P. and Urysohn, P., Mémoire sur les espaces topologiques compacts, Amst., 1929.
[2] Engelking, R., General topology, PWN, 1977(译自波兰文).
[3] Смирнов, Ю. М., *Fund. Math.*, **43** (1956), 387-393.
[4] Архангельский, А. В., 《Докл. АН СССР.》, **126** (1959), 2, 239-241.
[5] Архангельский, А. В., Пономарев, В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974 (英译本: Arkhangel'skiĭ, A. V. and Ponomarev, V. I., Fundamentals of general topology. problems and exercises, Reidel 1984).

А. В. Архангельский 撰 方嘉琳 译

加性算术函数 [**additive arithmetic function; аддитивная арифметическая функция**]

单变量的算术函数，对于两个互素的整数 m, n，它满足条件

$$f(mn) = f(m) + f(n).$$

一个加性算术函数称为强加性的(strongly additive)，如果对于所有素数 p 和所有正整数 α，条件 $f(p^\alpha)=f(p)$ 成立. 一个加性算术函数称为完全加性的 (completely additive)，如果条件 $f(mn)=f(m)+f(n)$ 对于非互素的整数 m, n 也成立；在这种情形下 $f(p^\alpha)=\alpha f(p)$.

例如：函数 $\Omega(m)$ 是加性算术函数，它表示数 m 的全部素因子的个数 (重因子按其重数计算个数)；函数 $\omega(m)$ 是强加性的，它表示数 m 的不同的素因子的个数；而函数 $\log m$ 是完全加性的. И. П. Кубилюс 撰

【补注】 算术函数也称为数论函数 (number-theoretic function). 臧鸣皋 译 张明尧 校

加性范畴 [**additive category; аддитивная категория**]

一个范畴 $\mathfrak{C}$，其中对任何两个对象 X 与 Y，在态射的集合 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, Y)$ 上都定义了一个 Abel 群结构，使得态射的合成

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(Y, Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, Z)$$

是一个双线性的映射. 另一个必要条件是 $\mathfrak{C}$ 包含一个零对象(见**范畴的零对象**(null object of a category))，以及任何两个对象 X 与 Y 的积 $X \times Y$.

在一个加性范畴中，任何两个对象的直和 $X \oplus Y$ 都是存在的，且与它们的积 $X \times Y$ 同构. 加性范畴的**对偶范畴**(dual category)也是一个加性范畴.

从一个加性范畴 $\mathfrak{C}$ 到一个加性范畴 $\mathfrak{C}_1$ 的一个函子 $F: \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}_1$ 称为加性的(additive)，如果对 $\mathfrak{C}$ 中的任两个对象 X 与 Y，映射 F: $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(F(X), F(Y))$ 是 Abel 群的群同态. 一个加性范畴称为预 Abel 的(pre-Abelian)，如果任何态射都有一个核(kernel)与一个上核(cokernel)(见**范畴中的态射的核**(kernel of morphism in a category)).

在一个加性范畴中，对于一个态射 $u: X \to Y$，如果存在一个象 $\mathrm{Im}(u)$ 与一个上象 $\mathrm{Coim}(u)$，那么，就存在唯一的一个态射 $\bar{u}$: $\mathrm{Coim}(u) \to \mathrm{Im}(u)$，使 u 可分裂为合成

$$X \to \mathrm{Coim}(u) \to \mathrm{Im}(u) \to Y.$$

由定义，Abel 范畴是加性范畴. 非 Abel 的加性范畴的一个例子是给定的拓扑环上的拓扑模所组成的范畴，其中的态射是连续线性映射. 再一个例子是具有过滤 $\Gamma = \Gamma_0 \supset \Gamma_1 \supset \cdots \supset \Gamma_n = \{0\}$ 的 Abel 群的范畴，其中的态射是保持过滤的群同态.

参考文献

[1] Bucur, I. and Deleanu, A., Introduction to the theory of categories and functors, Wiley, 1968.

[2] Grothendieck, A., Sur quelques points d'algèbrique homologique, *Tohoko Math. J.*, **9** (1957), 119–121.

[3] Gruson, L., Complétion abélienne, *Bull. Sci. Math.* (2), **90** (1966), 17–40.

И. В. Долгачев 撰 周伯埙 译

加性除数问题 [additive divisor problem; аддитивная проблема делителей]

寻求形如

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{m \leqslant n} \tau_{k_1}(m)\tau_{k_2}(m+a), \\ &\sum_{m < n} \tau_{k_1}(m)\tau_{k_2}(n-m), \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

的和的渐近值的问题，此处 $\tau_k(m)$ 是把整数 m 分解成 k 个因子的不同分解方法的个数，因子的个数按重数计算. 这里，k_1 和 k_2 是 $\geqslant 2$ 的整数，a 是异于零的固定整数而 n 是充分大的数. 特别地，$\tau_2(m) = \tau(m)$ 是数 m 的**除数的个数**(number of divisors). 形如(1)的和分别表示方程

$$x_1 \cdots x_{k_1} - y_1 \cdots y_{k_1} = a, \quad (2)$$

$$x_1 \cdots x_{k_1} + y_1 \cdots y_{k_2} = n, \quad (3)$$

的解数. 加性除数问题的特殊情形 ($k_1 = k_2 = 2$, $k_1 = 2$ 和 $k_2 = 3$) 已在 [1]–[3] 中被研究过. 对 $k_1 = 2$ 和 k_2 为任意正整数时的加性除数问题已用 Ю. В. Линник ([4]) 的**离差法**(dispersion method) 予以解决.

参考文献

[1] Ingham, A. E., Some asymptotic formulae in the theory of numbers, *J. London Math. Soc.* (1), **2** (1927), 202–208.

[2] Esterman, T., On the representations of a number as the sum of two products, *Proc. London Math. Soc.* (2), **31** (1930), 123–133.

[3] Hooley, C., An asymptotic formula in the theory of numbers, *Proc. London Math. Soc.* (3), **7** (1957), 396–413.

[4] Линник, Ю. В., Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах, Л., 1961 (英译本: Linnik, Yu. V., The dispersion method in binary additive problems, Amer. Math. Soc., 1963).

Б. М. Бредихин 撰

【补注】 函数 $\tau_2(m) = \tau(m)$ 也可以用 $d(m)$ 或 $\sigma_0(m)$ 表示，见[A1]第 16.7 节.

参考文献

[A1] Hardy, G. H. and Wright, E. M., An introduction to the theory of numbers, Clarendon Press, 1979.

戚鸣皋 译 张明尧 校

加性函数 [additive function; аддитивная функция]，(集合上或区域上的)有限加性函数(finitely-additive function).

定义在集族 E 上的满足以下条件的实值函数 μ：对于 E 的任意有限个互不相交的集合 $\{E_1, E_2, \cdots, E_n\}$，如果其并集属于 E，则

$$\mu(\bigcup E_i) = \sum \mu(E_i) \quad (*)$$

可数加性集函数是一种重要的加性函数. 见**可数加性集函数**[countably-additive set function].

А. П. Терехин 撰

【补注】 设 E 为集合 X 上的 σ 代数，则在 E 上的(可能取值 $+\infty$ 的)非负函数 μ 是一个加性(additive)(有限加性(finitely-additive)，可数加性(countably-additive))测度(measure)，是指对于 E 的任意(有限，可数)个互不相交的集合 E_i，条件(*)成立.

通常所说的测度(measure)都是指可数加性测度.

参考文献

[A1] Royden, H. L., Real analysis, Macmillan, 1968.

王斯雷 译

加法群 [additive group; аддитивная группа]，环的

由给定环的所有元素关于环的加法运算构成的群，环的加法群总是 Abel 群.

О. А. Иванова 撰 彭联刚 译

可加噪声 [additive noise; шум аддитивный]

当信号通过**通信信道**(communication channel)

时一种叠加到信号上的干扰. 更确切地说,一种通信信道称为可加噪声信道,如果信道的转移函数 $Q(y, \cdot)$ 的密度 $q(y, \tilde{y})$, $\tilde{y}\in\mathscr{Y}$, $y\in\tilde{\mathscr{Y}}=\mathscr{Y}$ ($\mathscr{Y}$ 与 $\tilde{\mathscr{Y}}$ 分别为信道的输入与输出信号的值空间)仅由差值 $\tilde{y}-y$ 决定,也就是 $q(y, \tilde{y})=q(\tilde{y}-y)$. 在这种情形,信道的输出信号 $\tilde{\eta}$ 能够表示为输入信号 η 与被称为可加噪声的独立的随机变量 ζ 之和,于是 $\tilde{\eta}=\eta+\zeta$.

如果研究的信道在有限或无限的区间上具有离散或连续的时间,那么这个可加噪声信道可由关系式 $\tilde{\eta}(t)=\eta(t)+\zeta(t)$ 表示,其中 t 在给定的区间中, $\eta(t)$, $\tilde{\eta}(t)$ 与 $\zeta(t)$ 是随机过程,分别表示信道的输入、输出信号与可加噪声;此外,过程 $\zeta(t)$ 与 $\eta(t)$ 是独立的. 在特殊情形下,如果 $\zeta(t)$ 是 Gauss 随机过程, 那么所研究的信道称为 **Gauss 信道** (Gaussian channel).

参考文献

[1] Gallager, R., Information theory and reliable communication, McGraw-Hill, 1968.

[2] Харкевич, А. А., Борьба с помехами, 2изд., М., 1965.

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов 撰

【补注】 更一般地说,尤其在系统与控制理论及随机分析中,附加噪声一词被用来描述以下随机微分方程或观察方程的噪声部分: $dx=f(x, t)dt+dw$, $dy=h(x, t)dt+dv$, 其中 w, v 是 Wiener 噪声过程.形为 $dx=f(x, t)dt+g(x, t)dw$ 的一般随机微分方程具有多重噪声.

沈世镒 译

加性数论 [**additive number theory**; **аддитивная теория чисел**], 亦称堆垒数论

数论的分支,研究把整数分拆(或分解)为给定类型的被加数的问题,也研究这些问题在代数数域和格点集中的代数和几何类似. 这类问题称为**加性问题** (additive problems), 时常研究的是大整数的分拆问题.

加性数论中的经典问题包括:把一个数表示成 4 个平方数之和, 9 个立方数之和等 (见 **Waring 问题** (Waring problem)); 把给定的数表成不超过三个素数之和 (见 **Goldbach 问题** (Goldbach problem)); 以及把给定的数表成一个素数和两个平方数之和 (见 **Hardy-Littlewood 问题** (Hardy-Littlewood problem)). 加性数论问题的解决采用了解析的、代数的、初等的和混合的方法, 也用到基于概率概念的方法. 根据所用的方法, 加性问题构成数论各个分支——解析数论、代数数论和概率数论——的组成部分.

这个领域中最早的系统的结果是由 L. Euler 在 1748 年得到的,他利用幂级数研究把整数分拆为正被加数的问题; 特别是, 他研究了把一个数分拆为给定数目的被加数的问题.

加性数论中的许多经典问题是借助于生成函数解决的. 这一方法由 L. Euler 引进, 并且是 G. H. Hardy, J. E. Littlewood 和 И. М. Виноградов 发展的解析方法的基础. 作为第一步,对于给定的序列 $A_i=\{a_i\}$ (此处 $a_i\geq 0$ 是整数, $i=1, 2, \cdots$) 指定幂级数

$$f_i(z) = \sum_{0\leq a_i<\infty} z^{a_i},$$

同时考虑对应的生成函数

$$F(z) = \prod_{i=1}^{k} f_i(z) = \sum_{n=0}^{\infty} r(n) z^n,$$

其中 $r(n)=r_{k,A}(n)$ 是把数 n 表示成形式为

$$n = a_1 + \cdots + a_k,\ a_i \in A_i,\ A = \{A_1, A_2, \ldots\}$$

的表示法的个数. 这里, $r(n)$ 可用 Cauchy 积分计算. 在 Виноградов 方法中用三角和

$$f_i(\alpha) = \sum_{0\leq a_i\leq n} e^{2\pi i\alpha a_i},$$

$$r(n) = \int_0^1 F(\alpha) e^{2\pi i\alpha a_i} d\alpha$$

代替幂级数. 分离出处于有理点邻近的区间中的 $r(n)$ 的主要部分. 代替 $F(z)$ 的解析性质 (这些性质在某些加性数论问题中必定要用到与 **Riemann 假设** (Riemann hypotheses) 有关的假设), 在 $r(n)$ 的计算中起决定性作用的是根据 Виноградов 方法所作的三角和的纯算术估计以及由 Dirichlet L 函数理论的解析方法所得到的算术级数中的素数分布定律. 现已得知, 依赖于 k 的大小, 或者对所有 $n\geq 1$ 有 $r(n)\neq 0$; 或者对充分大的 n ($n\geq n_0(A)$) 有 $r(n)\neq 0$; 或者对几乎所有的 n, 关系式 $r(n)\neq 0$ 成立, 即

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{\sum_{n\leq x,\ r(n)\neq 0} 1}{x}\right\} = 1,$$

最后, 或者 $r(n)$ 还可以被表示成一个渐近公式. 满足上述性质之一的最小的数 k 分别用 $g(A)$, $G(A)$, $G_0(A)$ 及 $k_0(A)$ 表示. 当 $\{a_i\}=\{p\}$ (此处 $\{p\}$ 是素数序列) 且 $k=3$ 时, 就得到 Виноградов 定理 (Vinogradov theorem): 每个充分大的奇数可表成三个素数的和; 当 $k=2$ 时得到 Чудаков 定理 (Chudakov theorem): 几乎所有的偶数可表成两个素数的和.

加性数论中的某些问题是通过研究诸序列 $A_i=\{a_i\}$ 相加所得集合的构造而得以解决的, 对序列 A_i 只给出了它的密率 $d(A_i)=\inf_n A_i(n)/n$, 这里 $A_i(n)=\sum_{1\leq a_i\leq n} 1$. 如果 $A_1=\cdots=A_k=A$, 则 $d(A_i)$ 为正就蕴含 $g(A)<\infty$. 这一结果对于加性数论中零密率序列相加的问题的应用, 是通过从给定序列构造出一个有正密率的新序列而实现的. 这主要是用**筛法** (sieve method) 完成的, 用筛法可以证明 $d(A_i)$ 为正. Л. Г. Шнирельман 曾用此法证明了正整数可以表为有限个素数项的和, 而 Ю. В.

Линник 则求得了 Waring 问题的初等解．

把 V. Brun（见 **Brun 筛法**（Brun sieve））和 A. Selberg（见 **Selberg 筛法**（Selberg sieve））的初等筛法应用于加性数论中的一些问题所产生的结果，直到现在用解析工具所还不能得到．但是加性数论中某些问题的最完美的解是用解析方法和初等方法相结合而得到的．筛法中把素数从正整数序列中筛出的原理（见 **Eratosthenes 筛法**（Eratosthenes sieve））也被推广到别的序列中去．因此，在适当精度下，同时从序列 $\{m\}$ 和 $\{2n-m\}$ 中分别筛去 $\leqslant n^{\theta_1}$ 和 $\leqslant n^{\theta_2}$ 的素数（此处 $\theta_1<1$ 和 $\theta_2<1$ 是适当选择的正常数），就产生了所谓拟 Goldbach - Euler 问题（Goldbach - Euler quasi - problem）的解，这一问题是把一个偶数表示为两个数的和，其中一个数至多有 k_1 个素因子，而另一个至多有 k_2 个素因子．

Линник 于 1959 年用他自己创造的**离差法**（dispersion method）成功地解决了 Hardy - Littlewood 问题．他证明（[2]）任何充分大的整数可表成一个素数和两个整数平方的和．离差法还得到了一些所谓二元问题（binary problems）的解，也就是如何求方程 $\alpha+\beta=n$ 的解数 $Q(n)$，这里的 α 和 β 遍历给定的、在算术级数中分布足够好的序列．Линник 的方法包含了概率论的基本概念的应用，这些概念也曾被 П. Л. Чебышев 用于大数定律的证明．为此将给定的二元方程变为大量的辅助方程，这些方程的期望解数 $S_i(n)$ 与真正的解数 $Q_i(n)$ 有关．如果离差计算表明 $Q_i(n)$ 与 $S_i(n)$"在平均意义上"相差不大，那么 $Q(n)=\sum S_i(n)$（在允许的误差范围内）．离差法也被用于研究一般的 Hardy - Littlewood 方程．

离差法的应用范围与 Линник 在 1941 年发展起来的**大筛法**（large sieve）的应用范围互有交叉．大筛法可以借助于素数，随着个数增多的被舍弃剩余类而筛出序列来．实际上，大筛法是弱相关随机变量分布律的一个推论．

加性数论包括这样的问题，即其进行系统研究属于数论其他分支的问题：用二次或高次式表示整数的问题；Diophantine 方程的研究，该方程也可以在一般加性数论的范围内加以处理．

在近代数论中，加性数论的各个分支正在迅猛发展．有一种把加性数论的问题和方法转移到任意代数数域的趋势．

参考文献

[1] Виноградов, И. М., Избранные труды, М., 1952（英译本：Vinogradov, I. M., Selected works, Springer, 1985）.

[2] Линник, Ю. В., Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах, Л., 1961（英译本：Linnik, Yu. V., The dispersion method in binary additive problems, Amer. Math. Soc., 1963）.

[3] Hua, L. K., Abschätzungen von Exponentialsummen und ihre Anwendung in der Zahlentheorie, *Enzyklopaedie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, 1, 1959, Helft 13, Teil 1（中译本：华罗庚，指数和的估计及其在数论中的应用，科学出版社，1963）.

[4] Ostmann, H. H., Additive Zahlentheorie, Springer, 1956.

[5] Чудаков, Н. Г., 《Успехи матем. наук》, 4 (1938), 14 – 33.

[6] Бредихин, Б. М., 《Успехи матем. наук》, 20 (1965), 2 (122), 89 – 130.

[7] Davenport, H., Multiplicative number theory, Springer, 1980.

[8] Halberstam, H. and Richert, H. E., Sieve methods, Acad. Press, 1974.

Б. М. Бредихин 撰

【补注】 整数的分拆数的基本公式可以在 [A1] 的第 19 章中找到．推导这些公式可以用**生成函数**（generating function）的方法．

关于早期历史方面的权威参考书当然是 [A2]．

参考文献

[A1] Hardy, G. H. and Wright, E. M., An introduction to the theory of numbers, Clarendon Press, 1979.

[A2] Dickson, L. E., History of the theory of numbers, 1 – 3, Chelsea, reprint, 1971.

【译注】

参考文献

[B1] 华罗庚，堆垒素数论，科学出版社，1957．

[B2] 华罗庚，数论导引，科学出版社，1975．

戚鸣皋 译 张明尧 校

加性问题 [additive problems; аддитивные проблемы]

关于把整数分解（或分拆）为一些给定类型的被加数之和的数论问题．经典加性问题的解决曾导致新的数论方法的创立和发展．经典数论问题包括：

1) **Goldbach 问题**（Goldbach problem）：把大于 5 的奇数表示为三个素数之和；Euler - Goldbach 问题：把大于 2 的偶数表示为两个素数之和．这些问题是在 1742 年提出的．

2) **Waring 问题**（Waring problem）：把任何正整数表示为 $s=s(k)$ 个非负的 k 次幂之和，这里 $k\geqslant2$ 是给定的．它是 1770 年提出的．

3) 关于把正整数表示为不超过一定个数的素数之和的问题（弱 Goldbach 问题（weak Goldbach problem））．

4) **Hardy - Littlewood 问题**（Hardy - Littlewood problem）：把任何大于 1 的整数表示为一个素数与两个平方数之和（20 世纪 20 年代提出）．

5) 关于把一切足够大的偶数表示为分别含有不超过一定个数的素因数的两数之和的问题．

6) 关于把整数表示为含有三个或四个变量的二次形式的问题，以及类似的一些问题.

加性问题可以用解析方法、代数方法、初等方法和混合方法来解决(见**加性数论**(additive number theory)). 大量加性问题属于下述两种类型之一:

a) 三元加性问题,类型为 $n=\alpha+\beta+\gamma$,其中 α 和 β 属于足够稠密的、在算术级数中有良好分布的整数序列,γ 属于这样一个序列,它可能是稀疏的,但是对应的三角和具有良好的性质.

b) 二元加性问题,类型为 $n=\alpha+\beta$,其中 α 和 β 服从的条件与 a) 中叙述的相同.

解决关于足够大的 n 的三元加性问题的通用工具是 Hardy - Littlewood - Виноградов 的一般解析方法(见**Виноградов 法**(Vinogradov method)),解决二元加性问题,不能使用这种方法,而需要用到初等筛法的各种变形(见**筛法**(sieve method)). 一些特别强的结果是用**大筛法**(large sieve) 和**离差法**(dispersion method)得到的,应归功于 Ю В Линник. 上述类型 b) 的加性问题也是二元的,研究这类问题,需要应用二次型理论中的特殊的算术-几何方法.

参考文献

[1] Виноградов, И.М., Метод тригонометрических сумм в теории число, М., 1971(英译本: Vinogradov, I. M., The method of trigonometric sums in the theory of numbers, Interscience, 1954).

[2] Линник, Ю. В, Дисперсионный метод в Бинарных аддитивных задачах. Л., 1961(英译本: Linnik, Yu. V., dispersion method in binary additive problems, Amer. Math., Soc., 1963).

[3] Линник, Ю. В., Эргодические свойства алгебраических полей, Л., 1967(英译本: Linnik, Yu. V., Ergodic properties of algebraic field, Springer, 1968).

[4] Hua, L. K., Abschätzungen von Exponentialsummen und ihre Anwendung in der Zahlentheorie, in *Enzyklopaedie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendunen*, Vol. 1, 1959, Heft 13, Teil I.

Б. М. Бредихин 撰 张鸿林 译

加性关系 [additive relation; аддитивное отношение]

某个环 R 上两个模 A 与 B 的直和 $A\otimes B$ 的一个子模 r. 于是，一个加性关系也可以看作一个(不一定是单值的)映射 $r: A\to B$, 或者，更准确地，看作一个"多值的"同态，即由子模 Def r 到商模 $B/\mathrm{Ind}(r)$的一个同态 r^0, 这里

$$\mathrm{Def}\, r = \{a\in A: \exists b\in B\, (a,b)\in r\},$$

$$\mathrm{Ker}\, r = \{a\in A: (a,0)\in r\},$$

$$\mathrm{Ind}\, r = \mathrm{Ker}\, r^{-1}.$$

此处 $r^{-1}: B\to A$ 是与 r 相逆的关系，它是由所有使 $(a,b)\in r$ 的对 $(b,a)\in B\otimes A$ 所组成的. 反过来，如果给定了一个子模 $S\subset A$, 模 B 的一个商模 B/L, 以及一个同态 $\beta: S\to B/L$, 那么也存在一个唯一的加性关系 r: $A\to B$ 使 $r^0=\beta$.

如果给定了两个加性关系 $r: A\to B$ 与 $s: B\to C$, 那么，就像在其他的二元关系的情况一样，可以定义它们的积(product)$sr: A\to C$, 它就是所有这样的对 $(a,c)\in A\oplus C$ 的集合，即有一个元素 $b\in B$ 能使 $(a,b)\in r$，且 $(b,c)\in s$. 这个乘法是结合的. 再者，加性关系组成一个具有对合 $r\to r^{-1}$ 的范畴(见**具有对合的范畴**(category with involution)).

加性关系用于复形的正合列的连接同态的惯常的定义之中. 上述的考虑不仅在模范畴中有效，而且在其他的 Abel 范畴中也是有效的.

参考文献

[1] MacLane, S., Homology, Springer, 1963.

[2] Puppe, D., Korrespondenzen in Abelschen kategorien, *Math. Ann.*, 148 (1962), 1-30.

A. B. Михалев 撰 周伯壎 译

理想的加性理论 [additive theory of ideals; аддитивная теория идеалов]

近世代数的一个分支. 它的主要任务是把环(或其他的代数系统)的**理想**(ideal)表示成特殊类型的(准素的,叔的,原的,单列的等等)理想的有限交. 表示的类型应满足: 1) 对任何理想都存在一个表示,或换句话说,某种"存在性"定理必须成立; 2) 在某些限制下,表示的方法是唯一的,换句话说,某种"唯一性"定理必须成立. 理想的加性理论的基本原则是 20 世纪 20 和 30 年代由 E. Noether ([1]) 和 W. Krull ([2]) 引入的.

理想的加性理论的所有特色都在环的情形清楚地显示出来. 设 R 是一个 Noether 环,即理想满足极大条件的结合环,如果 A 是 R 的一个理想,则存在 R 的满足下述条件的最大的理想 N: 对于某个正整数 k, 有 $N^k\subseteq A$. 这个理想 N 称为 A(在 R 中)的**准素根**(primary radical),记为 $\mathrm{pr}(A)$. R 的一个理想 Q 被称为**准素的**,如果对于 R 的任意两个理想 A 和 B, 条件

$$AB\subseteq Q,\ A\nsubseteq Q \Rightarrow B\subseteq \mathrm{pr}(Q)$$

总成立. 对于准素理想有**相交定理**(intersection theorem): 具有相同准素根 P 的两个准素理想的交仍是以 P 为准素根的准素理想. 用这个定理可以证明一条**存在性定理**(existence theorem): 如果 R 是交换环, 则对于**任何**理想 $A\neq R$, 总可以把它表示成有限多个准素理想 A_i 的交

$$A = A_1\cap\cdots\cap A_n, \qquad (1)$$

使得任何理想 A_i 不包含其他理想的交,而且准素根

$pr(A_i)$两两不同．这样的表示称为不可缩的(non-contractible)或准素既约的(primarily reduced)([1]，[4])．对于这样的表示有唯一性定理(uniqueness theorem)：如果(1)式成立，且

$$A = B_1 \cap \cdots \cap B_m \qquad (2)$$

是理想 A 在环 R 中的另一个准素既约的表示，则 $m=n$，并且适当地调换理想 B_i 的顺序可以保证 $pr(A_i)=pr(B_i)$，其中 $1 \leqslant i \leqslant n$．

在数学的许多分支中都发现了 Noether 交换环的理想的加性理论(经典的理想加法理论)的大量应用．

如果环 R 是非交换环，则上述的存在性定理不再成立，但唯一性定理和相交定理仍然成立．这正是从20世纪30年代以来人们一次又一次地致力于发现经典的准素概念在非交换环上的推广，以使存在性定理仍能成立的原因．事实上，这样的推广已被发现([4])，即所谓叔性(见**叔理想**(tertiary ideal))，继而证明了在某种自然的限制下，叔性是准素性概念的唯一"好"的推广([6])，[7]，[8])．

在20世纪60年代，理想的加性理论进一步扩展到格论、带余系统以及乘法系统的大框架中．这刺激了关于非结合环、群的正规除子及模的子模等代数体系的理想加性理论的发展．

参考文献

[1] Noether, E., Idealtheorie in Ringbereichen, *Math. Ann*, **83** (1921), 24–66.

[2] Krull, W., Idealtheorie in Ringen ohne Endlichkeitsbedingung, *Math. Ann.*, **101** (1929), 729–744.

[3] Zariski, O. and Semuel, P., Commutative algebra, 1, Springer, 1975.

[4] Lesieur, L. and Croisot, R., Algèbre noethérienne noncommutative, Gauthier-Villars, 1963.

[5] Murata, K., Additive ideal theory in multiplicative systems, *J. Inst. Polytechn. Osaka City Univ.* (*A*), **10** (1959), 2, 91–115.

[6] Андрунакиевич, В. А., Рябухин, Ю. М., 《Изв. АН СССР Серия матем》, **31** (1967) 5, 1057–1090.

[7] Riley, J. A., Axiomatic primary and tertiary decomposition theory, *Trans. Amer. Math Soc.*, **105** (1962), 177–201.

[8] Горн, И. М., Рябухин, Ю. М., 《Матем. исследования》, **2** (1967), 1, 14–25.

[9] Fuchs, L., On primal ideals, *Proc. Amer Math. Soc.*, **1** (1950), 1–6.

[10] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1965, М., 1967, 133–180

В. А. Андрунакиевич 撰

【补注】 准素表示也称为准素分解(primary decomposition)．一般说来，对于 Noether 环 R 上的模 M 的子模 N 也存在准素分解，即有表示

$$N = \bigcap_i Q_i$$

其中每个 Ass (M/Q_i) 只含有一个素理想 $\mathfrak{p}_i$．(根据定义，对于一个模 M，与 M 相伴的素理想集合 Ass(M) 是满足下述条件的素理想 $\mathfrak{p}$ 的全体：存在 $x \in M$，使得 $\mathfrak{p}=\{r \in R : rx=0\}$．) 相应的唯一性定理也成立，即存在着既约分解．这当然是指不存在 i，使得 $\bigcap_{j\neq i} Q_j \subseteq Q_i$，以及各个 Ass $(M/Q_i)=\mathfrak{p}_i$ 互不相同．

参考文献

[A1] Bourbaki, N., Algèbre commutative, Hermann, 1961, Chapt. 3, 4.

赵春来 译

加性一致结构 [additive uniform structure; аддитивная равномерная структура]，拓扑除环 K 的

K 的加法群的一致结构．K 的交换拓扑群的一致结构的邻域基由使 $x-y \in V$ 的所有对 (x, y) 的集合 $\widetilde{V}$ 组成，其中 V 是0的任意邻域．拓扑除环 K 的覆盖关于加性一致结构是一致的，如果能找到类型为 $\{V_y : y \in k\}$ 的覆盖加细它，其中 V 是0的任意邻域且 $V_y=\{x+y : x \in V\}$．特别地，实直线的加性一致结构的基由已给固定长度的区间作成的所有覆盖组成．实直线就其加性一致结构而言，是有理数域的完全化．

群 $\mathbf{R}^n$ 的一致结构称为它的加性一致结构，是它的因子 $\mathbf{R}$ 的一致结构之积．基是由已给固定半径的(开)球面组成的所有覆盖组成的．　В. В. Федорчук 撰

【补注】 一致结构也称为一致拓扑(uniform topology)．一致结构的基也称为一致性(uniformity)．亦见**一致空间**(uniform space)．

参考文献

[A1] Isbell, J. R., Uniform spaces, Amer. Math. Soc., 1964.

方嘉琳 译

可加性 [additivity; аддитивность]

量的下述性质：当把一个整体以任何方式划分为若干部分时，一个量对应于整体的值等于这个量对应于各部分的值之和．例如，体积的可加性指的是：整个物体的体积等于它的各组成部分的体积之和．见**加性函数**(additive function)；**可数加性集函数**(countably-additive set function)．

张鸿林 译

阿代尔 [adèle; адель]

阿代尔群(adèle group)中的元素．阿代尔群是群 G_{k_v} 关于其指定的不变开子群 G_{O_v} 的限制拓扑直积

$$\prod_{v \in V} G_{K_v}(G_{O_v}),$$

这里的 G_k 是定义在某**整体域**(global field) k 上的一个**线性代数群**(linear algebraic group)，V 是 k 的**赋值**

(valuation)的集合，k_v 是 k 对于 $v\in V$ 的完全化，O_v 是 k_v 的整元素环．一个代数群 G 的阿代尔群记为 G_A．因为所有的群 G_{k_v} 都是局部紧的并且 G_{O_v} 是紧的，所以 G_A 是局部紧群．

例．1) 如果 G_k 是域 k 的加法群 k^+，则 G_A 具有自然的环结构，称之为 k 的阿代尔环(adèle ring)，记为 A_k．2) 如果 G_k 是域 k 的乘法群 k^*，则称 G_A 为 k 的伊代尔群 (idèle group)(此伊代尔群是阿代尔环 A_k 的单位群)．3) 如果 $G_k=\mathrm{GL}(n,k)$ 是 k 上的一般线性群，则 G_A 由满足下述条件的元素 $g=(g_v)\in\prod_{v\in V}G_v$ 组成：对几乎所有的赋值 v，$g_v\in\mathrm{GL}(n,O_v)$．

阿代尔群的概念最早是 C. Chevalley 为满足类域论的需要(在 20 世纪 30 年代)对代数数域引入的．在以后的 20 年中它被 M. Kneser 和 T. Tamagawa 推广到代数群 ([1]，[2])．他们指出，数域上的二次型的算术理论的主要结果可以很方便地用阿代尔群的语言表述出来．

在对角嵌入下，G_k 在 G_A 中的象是 G_A 的一个离散子群，被称为主阿代尔子群(subgroup of principal adèles)．如果用 ∞ 表示 k 的 Archimedes 赋值的全体，则

$$G_{A(\infty)}=\prod_{v\in\infty}G_{k_v}\times\prod_{v\notin\infty}G_{O_v}$$

称为整阿代尔子群 (subgroup of integer adèles)．如果 $G_k=k^*$，则阿代尔群 G_A 中的形如 $G_kxG_{A(\infty)}$ 的不同的双陪集的个数有限，且等于 k 的理想类数．对于任意的代数群，这种双陪集的个数是否有限是一个自然引出的问题．此问题与主阿代尔子群的约化理论，即与商空间 G_A/G_k 的基本区的结构有关．在 [5] 中证明了 G_A/G_k 是紧的，当且仅当 G 是 k 非迷向群(anisotropic group)．另一个已经解决的问题是代数数域上的商空间 G_A/G_k 在 **Haar 测度** (Haar measure)下具有有限体积的条件．因为 G_A 是局部紧的，所以这样的测度总是存在的．在此 Haar 测度下 G_A/G_k 的体积有限，当且仅当 G 没有有理的 k 特征(见**群的特征标**(character of a group))．这个数值 $\tau(G)$ —— G_A/G_k 的体积 —— 是代数群 G 的一个重要的算术不变量 (见**玉河数**(Tamagawa number))．在这些结果的基础上人们证明了([5])：对于任意的代数群 G 总有分解式

$$G_A=\bigcup_{i=1}^{m}G_kx_iG_{A(\infty)}$$

对于 k 是函数域的情形，代数群的阿代尔群的这种双陪集的个数的有限性也已证明，并建立了类似的约化理论 ([6])．阿代尔群的各种算术应用见 [4]，[7]．

参考文献

[1] Weil, A., Adèles and algebraic group, Princeton Univ. Press, 1961.

[2A] Tamagawa, T., Adèles, in algebraic groups and discontinuous subgroups, Proc. Symp. Pure Math., Vol. 9, Amer. Math. Soc., 1966, 113－121.

[2B] Kneser, M., Strong approximation, in Algebraic groups and discontinuous subgroups, Proc. Symp. Pure Math., Vol. 9, Amer. Math. Soc., 1966, 187－198.

[3] Cassels, J. W. S. and Fröhlich, A. (eds.), Algebraic number theory, Acad. Press, 1967.

[4] Платонов, В. П., Итоги науки. Алгебра. Геометрия. Топология, т. 11, М., 1973, 5－37 (英译本：Platonov, V. P., Algebraic groups, *J. Soviet Math.*, **4** (1975), 5, 463－482).

[5] Borel, A., Some finiteness properties of adèle groups over number fields, *Publ. Math. IHES*, **16** (1963) 5－30.

[6] Harder, G., Minkowskische Reduktionstheorie über Funktionenkörpern, *Invent. Math.*, **7** (1969), 33－54.

[7] Платонов, В. П., 《Труды матем. института им. Стеклова》, **132** (1973), 162－168.

[8] Weil, A., Basic number theory, Springer, 1974.

В. П. Платонов 撰

【补注】 设 I 是指标集．对每个 $v\in I$，设 G_v 是一个局部紧群，O_v 是它的一个紧开子群．依前面的记法，G_v 关于 O_v 的限制(拓扑)直积

$$G=\prod_{v\in I}G_v(O_v),$$

由所有满足下述条件的 $(x_v)\in\prod_{v\in I}G_v$ 组成：除有限多个 v 之外，都有 $x_v\in O_v$．在 G 上定义拓扑如下：单位元处的开集基取为 $\prod_{v\in I}U_v$，其中 U_v 为 G_v 的开子群，且除有限多个 v 之外，都有 $U_v=O_v$．这使得 G 成为一个局部紧群．

赵春来 译

绝热流动 [adiabatic flow；адиабатическое течение]

流体各部分之间以及流体同包围它的物体之间没有热交换的流动．如果可压缩流体的流动是绝热的和连续的，那么流体微团的熵不变．如果流动是定常的，即流场的特性与时间无关，则任意流体微团的动能与焓之和是常数．

参考文献

[1] Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М., Механика сплошных сред, 2 изд., М., 1954 (中译本：Л. Д. 朗道，Е. М. 栗弗席兹，连续介质力学，人民教育出版社，1958).

А. П. Фаворский 撰 晏名文 译

绝热不变量 [adiabatic invariant；адиабатический инвариант]

一个来源于物理学的术语，其数学含义不够精确．

绝热不变量通常定义为 **Hamilton** 系统(Hamiltonian system)在其参数绝热(即与系统的运动特征时间相比很慢地)变化(变化过程可以持续得如此之长,以至和绝热不变量不同,这些参数本身发生显著变化)时几乎不变的运动数量特征. 这样,对于最简单的系统

$$\frac{dx}{dt}=v,\quad \frac{dv}{dt}=-\omega^2(\varepsilon t)x, \qquad (*)$$

此处 ε 为小参数,而 $\omega(s)$ 为足够光滑的正函数,绝热不变量为

$$I=\omega x^2+\frac{v^2}{\omega}.$$

当 $\omega=$ 常数时系统(*)描述频率为 ω 的寻常谐振子;那么,在此情况下,若系统之参数的变化与振动周期相比是缓慢的,则其能量 $(v^2+\omega^2x^2)/2$ 正比于频率而变化,在此例以及其他许多情况下通常假定,若参数全然不变,则所研究的 Hamilton 系统是完全可积的,而其运动是拟周期性的(在本例中就是周期性的);还有其他推广也是众所周知的. 在许多数学家和天体力学家的关于接近完全可积的 Hamilton 系统的著作中根本不用"绝热不变量"这一术语,尽管那里所得的信息表明,在某些情况下有些量实际上是绝热不变量.

绝热不变量 $I(t)$ 的"近似不变性"的含义是,对于所研究的所有的 t, $I(t)-I(0)$ 保持为小量.(导数 $dI(t)/dt$ 完全可能与系统其他参数的导数为同阶量,但绝热不变量的变化不随时间积累.) 这样的近似不变性可能存在于很大但有限的时间域内(有限时间绝热不变量(temporal adiabatic invariants))或者存在于整个无限时间 t 轴上(定常绝热不变量(stationary adiabatic invariants)或永久绝热不变量(permanent adiabatic invariants)([1])). "系统参数缓慢变化"这个概念可用两种方法使其更精确: a) Hamilton 函数 H 为时间 t 的显函数(非自控系统), 但导数 dH/dt 为小量; b) 所研究的具有典型变量 p, q 的系统为具有变量 p, q, p', q' 的大系统的子系统,该大系统自身是自控的,而且是这样的,或者 p'、q' 变化缓慢,或者它们的变化对子系统影响很弱.

由于上述限制,绝热不变量的存在只在各种补充假定下才能被确认,而对这些假定很难给出准确的表述([1]). 上述类型的系统的有限时间绝热不变量实际上属于扰动理论的渐近方法范畴(如果此问题以更一般的方式提出,也可得到某些严格的结果([4])). 在证明某个量 $I(t)$ 的有限时间渐近不变性时,通常的方法是构造一个这样的量 $J(t)$, 使得 $I(t)$ 的值围绕 $J(t)$ 振荡,而 $dJ(t)/dt$ 比系统其他参数的导数具有较低的数量级. 这样,在例(*)中对于 $J=I+\varepsilon\omega' xv/\omega^2$(撇号"′"表示 ω 对 $s=\varepsilon t$ 的导数)直接微分得 $dJ(t)/dt=O(\varepsilon^2)$; 这保证了 I 是时间绝热不变量. 对于上述情况 a), 如果 H 以某种一般方式(特别是不存在周期性或者当 $t\to\pm\infty$ 时无极限)依赖于 t, 则永久绝热不变量是否存在是有问题的. 在上述情况 b) 中,永久绝热不变量问题与小分母有关([2]).

历史上绝热不变量在 Bohr - Sommerfeld 量子理论中起过重要作用,在此理论中可量子化的量必定是绝热不变量. 随着量子力学以后的进展, 这个规则失去了其重要性. 在现代物理中研究带电粒子在电磁场中的运动时使用了绝热不变量([3]). 此处重要的量是比值 $v_\perp^2/H$, 其中 H 是磁场强度, 而 $v_\perp$ 是在与向量 H 相垂直的平面上的粒子的速度分量; 若磁场强度沿 **Larmor 半径**(Larmor radius)不发生显著变化, 则此比值是绝热不变量.

还应指出, 量子力学中当状态绝热变化时, 除导致系统进入退化状态的过程外,某些量的值保持不变(例如量子数). 因此在量子力学中也可以讲绝热不变量,不过此概念在这里不起什么显著作用,所以通常不引进此术语.

参考文献

[1] Мандельштам, Л. И., Андронов, А. А., Леонтович, М. А., 《Журнал Руского физико - химического о - ва》, 60 (1928), 5, 413 – 419.

[2] Арнольд, В. И., 《Успехи матем наук》, 18(1963), 6, 91 – 192.

[3] Northrop, T., The adiabatic motion of charged particles, Interscience, 1963.

[4] Kasuga, T., On the adiabatic theorem for the Hamiltonian system of differential equations in the classical mechanics Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ, *Proc. Japan Acad.*, 37 (1961), 7, 366 – 382.

Д. В. Аносов, А. П. Фаворский 撰 唐锦荣 译

adic 拓扑 [adic topology; адическая топология]

环 A 的**线性拓扑**(linear topology),其中零元的基本邻域系由某双边理想 $\mathfrak{A}$ 的幂 $\mathfrak{A}^n$ 组成,于是这个拓扑称为 $\mathfrak{A}$ - adic 拓扑,理想 $\mathfrak{A}$ 称为这个拓扑的定义理想(defining ideal of a topology). 任意集合 $F\subset A$ 在 $\mathfrak{A}$ - adic 拓扑中的闭包等于 $\bigcap_{n\geq 0}(F+\mathfrak{A}^n)$; 特别地, 这个拓扑是可分的, 当且仅当 $\bigcap_{n\geq 0}\mathfrak{A}^n=(0)$. 在 $\mathfrak{A}$ - adic 拓扑中, 环 A 的可分完全化 $\hat{A}$ 同构于射影极限 $\varprojlim(A/\mathfrak{A}^n)$.

A 模 M 的 $\mathfrak{A}$ - adic 拓扑可以类似地定义: 它的零元的基本邻域系由子模 $\mathfrak{A}^nM$ 给出; 在这个 $\mathfrak{A}$ - adic 拓扑中, M 成为拓扑 A 模.

设 A 是具有单位元及 $\mathfrak{A}$ - adic 拓扑的交换环, $\hat{A}$ 是它的完全化; 若 $\mathfrak{A}$ 是有限型理想, 则 $\hat{A}$ 中的拓扑是 $\hat{\mathfrak{A}}$ - adic 拓扑,并且 $\hat{\mathfrak{A}}^n=\mathfrak{A}^n\hat{A}$. 若 $\mathfrak{A}$ 是极大理想, 则 A 是具有极大理想 $\mathfrak{A}$ 的局部环. 局部环拓扑(local ring topology)是由其极大理想确定的 adic 拓扑(m - adic 拓

扑(m - adic topology)).

研究环的 adic 拓扑的基本工具是 Artin - Rees 引理(Artin - Rees lemma):设 A 是可换 Noether 环,$\mathfrak{A}$ 是 A 中的理想,E 是有限型 A 模,F 是 E 的子模,则存在 k,使得对于所有的 $n \geqslant 0$,有下述等式:

$$\mathfrak{A}^n(\mathfrak{A}^k E \cap F) = \mathfrak{A}^{k+n} E \cap F$$

Artin - Rees 引理的拓扑解释表明 F 的 $\mathfrak{A}$ - adic 拓扑是由 E 的 $\mathfrak{A}$ - adic 拓扑诱导出的. 于是环 A 在 $\mathfrak{A}$ - adic 拓扑中的完全化 $\hat{A}$ 是平坦 A 模(见**平坦模**(flat module)),有限型 A 模 E 的完全化 $\hat{E}$ 恒等于 $E \oplus_A \hat{A}$,并且 Krull 定理(Krull theorem)成立: Noether 环的 $\mathfrak{A}$ - adic 拓扑是可分的,当且仅当集合 $1+\mathfrak{A}$ 不包含零因子. 特别地,若 $\mathfrak{A}$ 包含在这个环的(Jacobson)根内,则拓扑可分.

参考文献

[1] 英译本: Zariski, O. and Samuel, P., Commutative algebra, 2, Springer, 1975.

[2] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Commutative algebra, Addison - Wesley, 1972 (译自法文).

В. И. Данилов 撰 罗嵩龄等 译

伴随联络[adjoint connections; сопряженные связности]

线性联络 Γ 和 $\tilde{\Gamma}$, 使得关于对应的**共变微分法**(covariant differentiation)算子 ∇ 和 $\tilde{\nabla}$, 下式成立:

$$ZB(X, Y) =$$

$$= B(\nabla_Z X, Y) + B(X, \tilde{\nabla}_Z Y) + 2\omega(Z)B(X, Y),$$

其中 X, Y 和 Z 是任意向量场, $B(\cdot,\cdot)$ 是二次型(即对称双线性型), $\omega(\cdot)$ 是 1 形式(或共变向量场). 也可说 ∇ 和 $\tilde{\nabla}$ 关于 B 是相伴的. 写成坐标形式(其中 $X, Y, Z \Rightarrow \partial_i$, $B \Rightarrow b_{ij}$, $\omega \Rightarrow \omega_i$, $\nabla \Rightarrow \Gamma_{ij}^k$), 则为

$$\partial_k b_{ij} - \Gamma_{ki}^s b_{sj} - \tilde{\Gamma}_{kj}^s b_{is} = 2\omega_k b_{ij}.$$

对于联络 ∇ 和 $\tilde{\nabla}$ 的曲率算子 R 和 $\tilde{R}$ 以及挠率算子 T 和 $\tilde{T}$, 有如下关系:

$$B(R(U, Z)X, Y) + B(X, \tilde{R}(U, Z)Y) =$$

$$= 2\{\omega([U, Z]) - U\omega(Z) + Z\omega(U)\}B(X, Y),$$

$$B(Z, \Delta T(X, Y)) - B(\Delta T(Z, Y)X) =$$

$$= B(\Delta T(Z, X), Y), \quad \Delta T = \tilde{T} - T.$$

写成坐标形式则为

$$R_{rsi}^m b_{im} + \tilde{R}_{rsi}^m b_{jm} = -2(\partial_r \omega_s - \partial_s \omega_r) b_{ij},$$

$$\Delta T_{ij}^s b_{sk} - \Delta T_{kj}^s b_{si} - \Delta T_{ki}^s b_{sj} = 0.$$

参考文献

[1] Норден, А. П., Пространства аффинной связности, 2 изд., М., 1976

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 也有人把伴随联络称为**共轭联络**(conjugate connections).

在伴随联络的概念中有时不涉及 1 形式 ω. 严格地说, "伴随联络"这个名称应该称为"关于 B 和 ω 的伴随联络".

沈一兵 译

伴随微分方程[adjoint differential equation; сопряженное дифференциальное уравнение]

对于线性常微分方程 $l(y)=0$, 这里

$$l(y) \equiv a_0(t)y^{(n)} + \cdots + a_n(t)y, \tag{1}$$

$$y^{(\nu)} = \frac{d^\nu y}{dt^\nu}, \quad y \in C^n(I), \quad a_k \in C^{n-k}(I),$$

$$a_0(t) \neq 0, \quad t \in I;$$

$C^m(I)$ 是区间 $I=(\alpha,\beta)$ 上的 m 次连续可微的复值函数空间, 其伴随微分方程是线性常微分方程 $l^*(\xi)=0$, 这里

$$l^*(\xi) \equiv (-1)^n(\overline{a}_0\xi)^{(n)} + (-1)^{n-1}(\overline{a}_1\xi)^{(n-1)} + \tag{2}$$

$$+ \cdots + \overline{a}_n\xi, \quad \xi \in C^n(I)$$

(字母上的横线表示取复共轭). 对任意的纯量 λ, 显然有

$$(l_1 + l_2)^* = l_1^* + l_2^*, \quad (\lambda l)^* = \bar{\lambda} l^*.$$

方程 $l^*(\xi)=0$ 的伴随方程是 $l(y)=0$. 对于一切 n 次连续可微函数 $y(t)$ 和 $\xi(t)$, 下列 **Lagrange 恒等式**(Lagrange identity)成立:

$$\bar{\xi}l(y) - \overline{l^*(\xi)}y =$$

$$= \frac{d}{dt}\left\{\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j(a_{n-k}\bar{\xi})^{(j)}y^{(k-j-1)}\right\}.$$

由此得到 **Green 公式**(Green formula):

$$\int_s^\tau [\bar{\xi}l(y) - \overline{l^*(\xi)}y]\, dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j(a_{n-k}\bar{\xi})^{(j)}y^{(k-j-1)}\Big|_{t=s}^{t=\tau}.$$

如果 $y(t)$ 和 $\xi(t)$ 分别为 $l(y)=0$ 和 $l^*(\xi)=0$ 的任意解, 则

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j(a_{n-k}\bar{\xi})^{(j)}y^{(k-j-1)} \equiv \text{常数}, \quad t \in I.$$

如果已知方程 $l^*(\xi)=0$ 的 m ($\leqslant n$) 个线性无关的解, 则可使方程 $l(y)=0$ 降低 m 阶(见[1]-[3]).

对于微分方程组

$$L(x) = 0, \quad L(x) \equiv \dot{x} + A(t)x, \quad t \in I,$$

其中 $A(t)$ 是连续复值 $(n \times n)$ 矩阵, 其**伴随微分方程组**(adjoint system of differential equations)为

$$L^*(\psi) \equiv -\dot{\psi} + A^*(t)\psi = 0, \quad t \in I$$

(见[1], [4]), 其中 $A^*(t)$ 是 $A(t)$ 的 Hermite 伴随矩阵, Lagrange 恒等式和 Green 公式具有下列形式:

$$(\bar{\psi}, L(x)) - (\overline{L^*(\psi)}, x) = \frac{d}{dt}(\bar{\psi}, x),$$

$$\int_{\tau}^{T}[(\bar{\psi}, L(x)) - (\overline{L^*(\psi)}, x)]\,dt = (\bar{\psi}, x)\Big|_{t=\tau}^{t=T};$$

其中 $(\cdot\,,\,\cdot)$ 是标准纯量积(对应坐标的乘积之和). 如果 $x(t)$ 和 $\psi(t)$ 是方程 $L(x)=0$ 和 $L^*(\psi)=0$ 的任意解, 则

$$(\bar{\psi}(t), x(t)) \equiv 常数,\quad t\in I.$$

伴随微分方程的概念同**伴随算子**(adjoint operator)的一般概念密切相关. 例如, 如果 l 是按式(1)给出的由空间 $C^n(I)$ 到空间 $C(I)$ 的线性微分算子, 则 l 的伴随微分算子 l^* 把 $C(I)$ 的伴随空间 $C^*(I)$ 映射到 $C^n(I)$ 的伴随空间 $C^{n*}(I)$. 算子 l^* 在空间 $C^n(I)$ 上的限制由式(2)给出(见[5]).

对于线性偏微分方程也可定义其伴随方程(见[6], [5]).

设 $\Delta=[t_0, t_1]\subset I$, 而 U_k 是空间 $C^n(\Delta)$ 上的线性无关的线性泛函. 这时, 线性边值问题

$$l(y) = 0,\ t\in\Delta,\quad U_k(y) = 0, \tag{3}$$

$$k=1,\ldots,m,\quad m<2n$$

的**伴随边值问题**(adjoint boundary value problem)定义为

$$l^*(\xi) = 0,\quad U_j^*(\xi) = 0,\quad j=1,\ldots,2n-m. \tag{4}$$

这里 U_j^* 是空间 $C^n(\Delta)$ 上的描述**伴随边界条件**(adjoint boundary conditions)的线性泛函, 也就是说, 它们是这样定义的: 对满足条件 $U_k(y)=0\,(k=1,\cdots,m)$ 和 $U_j^*(\xi)=0\,(j=1,\cdots,2n-m)$ 的任何函数对 $y, \xi\in C^n(\Delta)$, 使得等式(见**Green 公式**(Green formulas))

$$\int_{t_0}^{t_1}[\bar{\xi}l(y) - \overline{l^*(\xi)}y]\,dt = 0$$

成立.

如果

$$U_k(y) \equiv \sum_{p=1}^{n}[\alpha_{kp}y^{(p-1)}(t_0) + \beta_{kp}y^{(p-1)}(t_1)]$$

是变量

$$y^{(p-1)}(t_0),\ y^{(p-1)}(t_1),\ p=1,\ldots,n$$

的线性形式, 则 $U_j^*(\xi)$ 是变量

$$\xi^{(p-1)}(t_0),\ \xi^{(p-1)}(t_1),\ p=1,\ldots,n$$

的线性形式.

例. 对于边值问题

$$\ddot{y} + a(t)y = 0,\quad 0\leqslant t\leqslant 1,$$

$$y(0) + \alpha y(1) + \beta\dot{y}(1) = 0,$$

$$\dot{y}(0) + \gamma y(1) + \delta\dot{y}(1) = 0,$$

其中 $a(t), \alpha, \beta, \gamma, \delta$ 都是实的, 其伴随边值问题具有下列形式:

$$\ddot{\xi} + a(t)\xi = 0,\quad 0\leqslant t\leqslant 1,$$

$$\alpha\xi(0) + \gamma\dot{\xi}(0) + \xi(1) = 0,$$

$$\beta\xi(0) + \delta\dot{\xi}(0) + \dot{\xi}(1) = 0.$$

如果边值问题(3)具有 k 个线性无关的解(这时, 边值问题的秩 $r=n-k$), 则伴随边值问题(4)只有 $m-n-k$ 个线性无关的解(它的秩 $r'=2n-m-k$). 当 $m=n$ 时, 问题(3)和(4)具有相同个数的线性无关的解. 所以, 当 $m=n$ 时, 边值问题(3)只有平凡解, 其必要充分条件是伴随边值问题(4)只有平凡解. Fredholm **抉择定理**(Fredholm alternative): 非齐次边值问题

$$l(y) = f(t),\quad U_k(y) = 0,\quad k=1,\ldots,n$$

具有解, 如果函数 $f(t)$ 同伴随边值问题(4)的一切非平凡解 $\xi(t)$ 都正交, 即

$$\int_{t_0}^{t_1}\bar{\xi}(t)f(t)\,dt = 0$$

(见[1]–[3], [7]).

对于本征值问题

$$l(y) = \lambda y,\quad U_k(y) = 0,\quad k=1,\ldots,n, \tag{5}$$

伴随本征值问题(adjoint eigen value problem)定义为

$$l^*(\xi) = \mu\xi,\quad U_j^*(\xi) = 0,\quad j=1,\ldots,n. \tag{6}$$

如果 λ 是(5)的一个本征值, 则 $\mu=\bar{\lambda}$ 是(6)的一个本征值. 分别对应于(5), (6)的本征值 λ, μ 的本征函数 $y(t), \xi(t)$ 是正交的, 如果 $\lambda\neq\mu$ (见[1]–[3]):

$$\int_{t_0}^{t_1}\bar{y}(t)\xi(t)\,dt = 0.$$

对于线性边值问题

$$L(x) \equiv \dot{x} + A(t)x = 0,\quad U(x) = 0,\quad t\in\Delta, \tag{7}$$

其中 U 是 n 维连续可微的复值向量函数空间 $C_n(\Delta)$ 上的 m 维向量泛函, $m<2n$, 伴随边值问题定义为

$$L^*(\psi) = 0,\quad U^*(\psi) = 0,\quad t\in\Delta \tag{8}$$

(见[1]). 其中 U^* 被定义为 $(2n-m)$ 维向量泛函, 使得等式

$$(\bar{\psi}(t), x(t))\Big|_{t=t_0}^{t=t_1} = 0$$

对于任何满足条件 $U(x)=0$, $U^*(\psi)=0$ 的函数对 $x(\cdot)$, $\psi(\cdot)\in C_n^1(\Delta)$ 都成立. 问题(7),(8)具有上面列举的类似性质(见[1]).

伴随边值问题的概念与伴随算子的概念密切相关([5]),对于偏微分方程的线性边值问题,也可定义伴随边值问题(见[6],[7]).

参考文献

[1] Kamke, E., Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen, 1, Chelsea, reprint, 1971(中译本: E. 卡姆克,常微分方程手册,科学出版社,1980).

[2] Наймарк, М. А., Линейные дифференциальные операторы, М., 1969(中译本: M. A. 纳依玛克,线性微分算子,科学出版社,1964)

[3] Coddington, E. A. and Levinson, N., Theory of ordinary differential equations, McGraw-Hill, 1955.

[4] Hartman, P., Ordinary differential equations, Birkhäuser, 1982.

[5] Dunford, N. and Schwartz, J. T., Linear operators, Spectral theory, 2, Interscience, 1963.

[6] Михайлов, В. П., Дифференциальные уравнения в частных производных, М., 1976.

[7] Владимиров, В. С., Уравнения математической физики. 4 изд., М., 1981.

Е. Л. Тонков 撰 张鸿林 译 蒋正新 校

伴随函子 [**adjoint functor**; **сопряженный функтор**]

一个概念,它表达了许多重要的数学结构,诸如自由泛代数、各种完全性、正向与反向极限等等的泛性与自然性.

设 $F:\mathfrak{K}\to\mathfrak{C}$ 是从一个范畴 $\mathfrak{K}$ 到一个范畴 $\mathfrak{C}$ 的一个变量的共变函子. F 诱导出一个函子

$$H^F(X, Y) = H_{\mathfrak{C}}(F(X), Y): \mathfrak{K}^*\times\mathfrak{C}\to\mathfrak{S},$$

这里 $\mathfrak{K}^*$ 是与 $\mathfrak{K}$ 相对偶的范畴, $\mathfrak{S}$ 是集合的范畴, 而 $H_{\mathfrak{C}}(X, Y)$: $\mathfrak{K}^*\times\mathfrak{C}\to\mathfrak{C}$ 是基本的集值函子. 函子 H^F 对第一个变量是反变的, 对第二个变量是共变的. 同样地, 任一个共变函子 $G:\mathfrak{C}\to\mathfrak{K}$ 诱导出一个函子

$$H_G(X, Y) = H_{\mathfrak{K}}(X, G(Y)): \mathfrak{K}^*\times\mathfrak{C}\to\mathfrak{S},$$

它也对第一个变量是反变的, 对第二个变量是共变的. 函子 F 与 G 是伴随的(adjoint), 或者形成一个伴随对(adjoint pair), 如果 H^F 与 H_G 是同构的, 即如果有一个自然变换 θ: $H^F\to H_G$ 能对所有对象 $X\in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$ 与 $Y\in\mathrm{Ob}\,\mathfrak{C}$ 在态射的集合 $H_{\mathfrak{C}}(F(X), Y)$ 与 $H_{\mathfrak{K}}(X, G(Y))$ 之间建立一个一一对应. 变换 θ 称为 F 关于 G 的添加(adjunction of F with G), F 称为 G 的左伴随(left adjoint)函子, 而 G 称为 F 的右伴随(right adjoint)函子(这写成 θ: FG, 或者简单地写成 $F(G)$). 变换 θ^{-1}: $H_G\to H^F$ 称为余添加(coadjunction).

设 θ: FG. 对所有的 $X\in\mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$ 与 $Y=\mathrm{Ob}\,\mathfrak{C}$, 设

$$\varepsilon_X = \theta(1_{F(X)}),\ \ \eta_Y = \theta^{-1}(1_{G(Y)}).$$

诸态射 $\{\varepsilon_X\}$ 与 $\{\eta_Y\}$ 定义了自然变换 ε: $\mathrm{Id}_{\mathfrak{K}}\to GF$ 与 η: $FG\to\mathrm{Id}_{\mathfrak{C}}$, 称为添加 θ 的单位(unit)与上单位(co-unit). 它们满足下列的等式:

$$G(\eta_Y)\varepsilon_{G(Y)} = 1_{G(Y)},\ \ \eta_{F(X)}F(\varepsilon_X) = 1_{F(X)}.$$

一般地, 一对自然变换 $\varphi:\mathrm{Id}_{\mathfrak{K}}\to GF$ 与 $\psi: FG\to\mathrm{Id}_{\mathfrak{C}}$ 引导出一个伴随对(或添加), 如果下列等式对所有对象 X 与 Y 都成立:

$$G(\psi_Y)\varphi_{G(Y)} = 1_{G(Y)},\ \ \psi_{F(X)}F(\varphi_X) = 1_{F(X)}.$$

一个自然变换 $\varphi:\mathrm{Id}_{\mathfrak{K}}\to GF$ 是某个添加的单位, 当且仅当对 $\mathfrak{K}$ 中任何态射 $\alpha: X\to G(Y)$, 在 $\mathfrak{C}$ 中有唯一的态射 α': $F(X)\to Y$ 使得 $\alpha=G(\alpha')\varepsilon_X$. 这个性质表达了这样的一个事实, $F(X)$ 是 X 上关于函子 G 在下列定义的意义下的一个自由对象. 一个对象 $Y\in\mathrm{Ob}\,\mathfrak{C}$ 连同一个态射 $\varepsilon: X\to G(Y)$ 是在一个对象 $X\in\mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$ 上自由的, 如果每一个态射 $\alpha: X\to G(Y')$ 都可对某个态射 α': $Y\to Y'$ 唯一地写成形式 $\alpha=G(\alpha')\varepsilon$. 一个函子 $G:\mathfrak{C}\to\mathfrak{K}$ 有一个左伴随函子, 当且仅当对每一个 $X\in\mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$ 有一个对象 Y, 它关于 G 在 X 上是自由的.

伴随函子的例子. 1) 若 $G:\mathfrak{C}\to\mathfrak{S}$, 这里 $\mathfrak{S}$ 是集合的范畴, 则 G 有左伴随函子, 当且仅当它是可表示的. 一个可表示的函子 $G\simeq H^A=H_{\mathfrak{C}}(A, Y)$ 有一个左伴随函子, 当且仅当在 $\mathfrak{C}$ 中所有上积 $\coprod_{x\in X}A_x$ 都存在, 其中 $X\in\mathrm{Ob}\,\mathfrak{S}$, 且对所有的 $x\in X$ 恒有 $A_x=A$.

2) 在集合的范畴 $\mathfrak{S}$ 中, 对于任何集合 A, 基本函子 $H^A(Y)=H(A, Y)$ 是函子 $X\times A$ 的右伴随.

3) 在 Abel 群范畴中, 函子 $\mathrm{Hom}(A, Y)$ 是对 A 取张量积的函子 $X\otimes A$ 的右伴随函子, 而挠群的完全子范畴的嵌入函子是这样一个函子的左伴随函子, 这个函子是取任何 Abel 群的挠部分.

4) 设 P: $\mathfrak{A}\to\mathfrak{S}$ 是从泛代数的任意的簇到集合的范畴 $\mathfrak{S}$ 的忘却函子. 函子 P 有一个左伴随 F: $\mathfrak{S}\to\mathfrak{A}$, 它对每一个集合 X 指定簇 $\mathfrak{A}$ 中以 X 为自由生成集合的自由代数与之对应.

5) 设 $\mathfrak{K}$ 为一个范畴, $\mathfrak{C}$ 为 $\mathfrak{K}$ 的一个任意的自反子范畴, 嵌入函子 $\mathrm{Id}_{\mathfrak{C},\mathfrak{K}}$: $\mathfrak{C}\to\mathfrak{K}$ 是 $\mathfrak{C}$ 反演的右伴随函子. 特别地, Abel 群范畴到群范畴的嵌入函子有一个左伴随函子, 使每个群 G 对应于它对其换位子群的商群.

伴随函子的性质. 一个给定的函子的左伴随函子是在函子的同构的意义下唯一确定的. 左伴随函子与上极限(例如上积)可交换, 并且分别将零对象与零态射对应到零对象与零态射.

设 $\mathfrak{K}$ 与 $\mathfrak{C}$ 是范畴, 它们都是在左边完全与局部小

的. 一个函子 $G:\mathfrak{G}\to\mathfrak{K}$ 有一个左伴随函子 $F:\mathfrak{K}\to\mathfrak{A}$，当且仅当下列条件满足：a) G 与极限可交换；b) 对每一个 $X\in\mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$，诸集合 $H(X,G(Y))$，$Y\in\mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$ 中至少有一个不是空的；c) 对每一个 $X\in\mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$，有一个集合 $S\subset\mathrm{Ob}\,\mathfrak{C}$ 使得每一个态射 $\alpha:X\to G(Y)$ 都可表示成形式 $\alpha=G(\alpha')\varphi$，这里 $\varphi:X\to G(B)$，$B\in S$，$\alpha':B\to Y$.

转到对偶范畴，我们可以在一个"左伴随函子"与一个"右伴随函子"的概念之间建立对偶性；这就帮助我们来从左伴随函子的性质推出右伴随函子的性质.

伴随函子的概念直接联系着一个范畴中的三元组(triple)(或单子)的概念.

参考文献

[1] Цаленко, М. Ш., Шульгейфер, Е. Г., Основы теории категорий, М., 1974.

[2] MacLane, S., Categories for the working mathematician, Springer, 1971.

М. Ш. Цаленко 撰

【补注】 一个范畴称为左边完全的(complete on the left)如果小图都有极限. 一个范畴称为左边局部小的(locally small on the left)，如果它有小的 hom 集合. 上面所说的"一个函子有一个左伴随函子，当且仅当a)，b)与c)成立"这句话称为 Freyd 伴随函子定理(Freyd adjoint functor theorem).

周伯埙 译

伴随群 [**adjoint group**; **присоединенная группа**]，群 G 的

线性群 Ad G，是 Lie 群或代数群 G 在伴随表示下的象，见 **Lie 群的伴随表示**(adjoint representation of a Lie group). 伴随群 Ad G 包含在 G 的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的自同构群 Aut $\mathfrak{g}$ 中，而它的 Lie 代数和 $\mathfrak{g}$ 的伴随代数 ad $\mathfrak{g}$ 重合. 连通的半单群是伴随型的群(group of adjoint type)(即同构于伴随群)，当且仅当它的根生成极大环面的有理特征标的格；这种群的中心是平凡的. 若基域为特征零且 G 是连通的，则 Ad G 被 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 唯一地决定，从而称为 $\mathfrak{g}$ 的伴随群或 $\mathfrak{g}$ 的内自同构群(group of inner automorphisms). 特别地，若 G 是半单群，则 Ad G 同 Aut $\mathfrak{g}$ 的单位元的连通分支重合.

参考文献

[1] Понтрягин, Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973 (中译本：Л. С. 邦德列雅金，连续群(上，下)，科学出版社，1978).

[2] Serre, J. P., Lie algebras and Lie groups, Benjamin, 1965.

[3] Humphreys, J. E., Linear algebraic groups, Springer, 1975.

А. Л. Онищик 撰

【补注】

参考文献

[A1] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Lie groups and Lie algebras, Addison-Wesley, 1975, Chapt. 2, 3 (译自法文).

石生明 译 许以超 校

伴随线性变换 [**adjoint linear transformation**; **сопряженное линейное преобразование**]，线性变换 A 的

在 Euclid 空间(或**酉空间**(unitary space)) L 上的线性变换 A^*，使得对所有的 $x,y\in L$，内积间的等式

$$(Ax,y)=(x,A^*y)$$

成立. 这是伴随线性映射概念的一个特殊情形. 变换 A^* 由 A 唯一地确定. 如果 L 是有限维的，那么每个 A 有伴随 A^*，它在一个基 $e_1,\cdots,e_n$ 中的矩阵 $\mathscr{B}$ 与 A 在同一基中的矩阵 $\mathscr{A}$ 之间存在如下关系：

$$\mathscr{B}=\overline{G}^{-1}\mathscr{A}^*\overline{G},$$

其中 $\mathscr{A}^*$ 是伴随于 $\mathscr{A}$ 的矩阵，而 G 是基 $e_1,\cdots,e_n$ 的 **Gram 矩阵**(Gram matrix).

在 Euclid 空间中，A 与 A^* 有相同的特征多项式、行列式、迹及特征值. 在酉空间中，它们的特征多项式、行列式、迹及特征值有复共轭的关系.

Т. С. Пиголкина 撰

【补注】 更一般地，术语"伴随变换"或"伴随线性映射"也用来表示一个线性映射 $\varphi:L\to M$ 的对偶线性映射 $\varphi^*:M^*\to L^*$. 这里 M^* 是 M 上(连续)线性泛函的空间，$\varphi^*(m^*)(l)=m^*(\varphi(l))$. 嵌入 $L\to L^*$，$M\to M^*$，$l\to(\cdot,l)$ 联系这两个概念. 亦见**伴随算子**(adjoint operator).

参考文献

[A1] Reed, M. and Simon, B., Functional analysis, 1, Acad. Press, 1972, Sect. 2.

李炳仁 译 王声望 校

伴随矩阵 [**adjoint matrix**; **сопряженная матрица**]，Hermite 伴随矩阵(Hermitian adjoint matrix)，复数域 $\mathbf{C}$ 上的给定矩阵(或方阵) A 的

一个矩阵 A^*，它的元素 a^*_{ik} 是矩阵 A 的元素 a_{ki} 的复共轭数，即 $a^*_{ik}=\overline{a}_{ki}$. 因此，伴随矩阵等于复共轭转置矩阵：$A^*=(\overline{A}')$，其中 $-$ 表示复共轭，$'$ 表示转置.

伴随矩阵的性质是

$$(A+B)^*=A^*+B^*,\ (\lambda A)^*=\overline{\lambda}A^*,$$

$$(AB)^*=B^*A^*,\ (A^*)^{-1}=(A^{-1})^*,\ (A^*)^*=A.$$

伴随矩阵对应于酉空间关于正交基的伴随线性变换.

关于参考文献，见**矩阵**(matrix).

Т. С. Пиголкина 撰 张鸿林 译

伴随模 [**adjoint module**; **сопряженный модуль**]，逆步模(contragradient module)，对偶模(dual module).

从给定模到其基环上的同态组成的模. 确切地

说,设 M 是环 R 的一个左模. 从 M 到 R 的同态组成的 Abel 群 $\mathrm{Hom}_R(M, R)$, 是一个左 R 模. 令

$$x(\varphi\lambda) = (x\varphi)\lambda, \quad x\in M, \quad \varphi\in \mathrm{Hom}_R(M, R), \quad \lambda\in R,$$

可使它成为一个右 R 模 M^*. 这个右模 M^* 称为 M 的伴随. 对于 $x\in M$, 可定义元素 $\bar{x}\in M^{**}$ 如下: $\bar{x}(\varphi)=x(\varphi)$, 对一切 $\varphi\in M^*$. 这定义了 M 到 M^{**} 的一个同态. 对任何左 R 模 C, 映射 $\zeta: M^*\otimes_R C\to \mathrm{Hom}_R(M, C)$ 由下式给出:

$$x((\varphi\otimes c)\zeta) = (x\varphi)c, \quad x\in M, \quad \varphi\in M^*, \quad c\in C,$$

它也是同态. 当 M 是有限生成射影模时, 上面的两个同态都是同构([2]). 由函子 Hom 的性质有 $(\sum M_\alpha)^*\approx \prod M_\alpha^*$ (这里 $\sum$ 为直和, $\prod$ 为直积), 且存在从 M^{***} 到 M^* 的一个同态. 合成映射 $M^*\to M^{***}\to M^*$ 是恒等映射, 但 M^{***} 不一定与 M^* 同构. Bass 意义下的无扭模 (torsion-free modules in the sense of Bass) 是那些使上面的同态 $M\to M^{**}$ 成为单同态的模. 这个性质等价于能将 M 嵌入若干个基环的直积. 若 R 是右及左 Noether 环, 则映射 $M\mapsto M^*$ 定义了有限生成左 R 模和有限生成右 R 模两个范畴之间的对偶, 当且仅当 R 是一个拟 Frobenius 环 (quasi-Frobenius ring).

参考文献

[1] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Algebra: Modules, Rings. Forms, 2. Addison-Wesley, 1975, Chapt. 4; 5; 6 (译自法文).

[2] MacLane, S., Homology, Springer, 1963.

[3] Мишина, А. П., Скорняков, Л. А., Абелевы группы и модули, М., 1969 (英译本: Mishina, A. P. and Skornyakov, L. A., Abelian groups and modules, Amer. Math. Soc., 1976).

Л. А. Скорняков 撰 冯绪宁 译

伴随算子 [**adjoint operator**; **сопряженный оператор**]

一个线性算子 $A^*: Y^*\to X^*$ (这里 X^* 与 Y^* 分别是局部凸空间 X 与 Y 的强对偶), 它由线性算子 $A: X\to Y$ 依照下面方式构造而成. 设 A 的定义域 D_A 在 X 中是处处稠密的. 如果对所有的 $x\in D_A$, 有

$$\langle Ax, g\rangle = \langle x, g^*\rangle, \qquad (*)$$

其中 $Ax\in Y$, $g\in Y^*$, $g^*\in X^*$, 那么 $A^*g=g^*$ 是一个由满足 (*) 的元 g 的集合 D_{A^*} 到 X^* 中唯一定义的算子. 如果 $D_A=X$ 且 A 是连续的, 则 A^* 也是连续的. 此外, 如果 X 与 Y 是赋范线性空间, 那么 $\|A^*\|=\|A\|$. 如果 A 是全连续的, 那么 A^* 也是全连续的. X 与 Y 是 Hilbert 空间的情形的伴随算子具有特别的兴趣.

参考文献

[1] Yosida, K., Functional analysis, Springer, 1980 (中译本: 吉田耕作, 泛函分析, 人民教育出版社, 1980).

[2] Riesz, F. and Szökefalvi-Nagy, B., Leçons d'analyse fonctionelle, Acad. Sci. Hongrie, 1953 (中译本: F. 黎茨, B. 塞克佛尔维-纳吉, 泛函分析讲义, 科学出版社, 第一卷 1963, 第二卷 1980).

В. И. Соболев 撰

【补注】 在西方文献中, 如上所定义的伴随算子通常称为对偶算子 (dual operator) 或共轭算子 (conjugate operator). 术语伴随算子对于 Hilbert 空间来说仍保留, 这时它定义为

$$(Ax, g)=(x, A^*g),$$

其中 $(\cdot, \cdot)$ 是 Hilbert 空间的内积.

参考文献

[A1] Taylor, A. E. and Lay, D. C., Introduction to functional analysis, Wiley, 1980.

李炳仁 译 王声望 校

伴随表示 [**adjoint representation**; **присоединенное представление**], Lie 群或代数群 G 的

群 G 在切空间 $T_e(G)$ 内 (或在 G 的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 内) 的线性表示 Ad, 它把每个 $a\in G$ 映成内自同构 $\mathrm{Int}\,a: x\to axa^{-1}$ 的微分 $\mathrm{Ad}\,a=d(\mathrm{Int}\,a)_e$. 如果 $G\subseteq \mathrm{GL}(V)$ 是空间 V 内一个线性群, 则

$$(\mathrm{Ad}\,a)X = aXa^{-1}, \quad X\in T_e(G) = \mathfrak{g}\subset \mathrm{End}(V).$$

核 Ker Ad 包含 G 的中心, 当 G 是连通的且基础域的特征为零时, Ker Ad 与中心重合. G 的伴随表示在 e 处的微分与 $\mathfrak{g}$ 的伴随表示 ad 一致.

一个 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的伴随表示 (adjoint representation of a Lie algebra) 是代数 $\mathfrak{g}$ 到通过以下公式作用的模 $\mathfrak{g}$ 内的线性表示 ad:

$$(\mathrm{ad}\,x)y = [x, y], \quad x, y\in\mathfrak{g},$$

其中 [,] 是代数 $\mathfrak{g}$ 中的方括号运算. 核 Ker ad 是 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的中心. 算子 $\mathrm{ad}\,x$ 是 $\mathfrak{g}$ 的导子并且称为内导子 (inner derivations). 象 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$ 称为伴随线性 Lie 代数 (adjoint linear Lie algebra), 它是 $\mathfrak{g}$ 的一切导子所组成的 Lie 代数 $\mathrm{Der}\,\mathfrak{g}$ 的一个理想, 而且 $\mathrm{Der}\,\mathfrak{g}/\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$ 是由伴随表示所定义的 $\mathfrak{g}$ 的一维上同调空间 $H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$. 特别地, 如果 $\mathfrak{g}$ 是特征为零的域上一个半单 Lie 代数, 则 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}=\mathrm{Der}\,\mathfrak{g}$.

参考文献

[1] Jacobson, N., Lie algebras, Interscience, 1962 (中译本: N. 贾柯勃逊, 李代数, 上海科学技术出版社, 1964).

[2] Понтрягин, Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973 (中译本: Л. С. 邦德列雅金, 连续群, 科学出版社, 1957, 1958).

[3] Serre, J.-P., Lie algebras and Lie groups, Benjamin, 1965.

[4] Humphreys, J. E., Linear algebraic groups, Springer, 1975.
А. Л. Онищик 撰

【补注】

参考文献

[A1] Bourbaki, N., Elements of mathematics, Lie groups and Lie algebras, Addison-Wesley, 1975 (译自法文).
郝钢新 译

伴随空间 [adjoint space; сопряженное пространство], 拓扑向量空间 E 的

由 E 上的连续线性泛函所组成的向量空间 E^*. 如果 E 是局部凸空间, 那么泛函 $f \in E^*$ 分离 E 的点 (Hahn-Banach 定理 (Hahn-Banach theorem)). 如果 E 是赋范空间, 那么 E^* 是关于范数

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$$

的 Banach 空间. 在 E^* 上有两种常用的 (通常是不同的) 自然拓扑: 由这个范数定义的强拓扑和弱 * 拓扑.

参考文献

[1] Райков, Д. А., Векторные пространство. М., 1962 (英译本: Raikov, D. A., Vector spaces, Noordhoff, 1965).
В. И. Ломоносов 撰

【补注】 代替术语伴随空间, 人们更经常使用术语对偶空间 (dual space). E^* 上的弱 * 拓扑 (weak-*-topology) 是 E^* 上的使所有的赋值映射 (evaluation mappings) $f \mapsto f(z)$ $(f \in E^*, x \in E)$ 连续的最弱的拓扑.

参考文献

[A1] Schaefer, H. H., Topological vector spaces, Macmillan, 1966.
史树中 译

伴随曲面 [adjoint surface; присоединенная поверхность]

与给定曲面 X 成 **Peterson 对应** (Peterson correspondence) 的曲面 Y, 并且使 Y 上的渐近网对应于 X 上具有等不变量的共轭网 σ, 反之亦然. 伴随曲面 Y 是 X 的**旋转标形** (rotation indicatrix), 反之亦然. 若 σ 是 X 的形变的一个主基, 则 Y 是 **Bianchi 曲面** (Bianchi surface).

И. Х. Сабитов 撰 沈一兵 译

调节法 [adjustment method; установления метод]

一种求解定常问题

$$Au = f \tag{1}$$

的方法. 在这种方法中, 解 u 被看作是一个包含同一算子 A 的非定常发展方程的 Cauchy 初值问题在 $t \to \infty$ 时的稳态极限解 (见 **Cauchy 问题** (Cauchy problem)). 这一发展方程可以具有如下形式:

$$\sum_{i=1}^{m} C_i \frac{d^i u(t)}{dt^i} = f - Au(t), \tag{2}$$

$$\left.\frac{d^k u}{dt^k}\right|_{t=0} = u_{0k}, \quad k = 0, \ldots, m-1.$$

其中 C_i 是一些适当的算子, 它们保证"调节极限" $\lim_{t \to \infty} u(t) = u$ 的存在.

调节法使能够用 (2) 的近似求解方法来构造求解方程 (1) 的**迭代算法** (iteration algorithm). 对非定常方程 (2) 可以利用一个稳定且收敛的、对 t 进行离散化 (差分) 的方法以得到近似解. 例如, 当 $m = 1$ 时, 有如下形式的显式方法:

$$C_1 \frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{\tau_n} = f - Au(t_n),$$

其中 $\tau_n = t_{n+1} - t_n > 0$. 这种方法可看作是求解方程 (1) 的一种迭代算法

$$C_1(u^{n+1} - u^n) = \tau_n(f - Au^n),$$

$$n = 0, 1, \ldots, \quad u^0 = u_{00},$$

其中 C_1 和 τ_n 此时可看作是这种 (迭代) 算法的特征.

修改算子 C_i 的形式并考虑在方程 (2) 中关于 t 的不同的离散化方法 (显式格式、隐式格式、分裂格式等), 可以得到多种不同类型的求解方程 (1) 的迭代算法. 对这些方法, 方程 (2) 成为**算法的闭包** (closure of a computational algorithm).

调节法的推广是**连续方法 (对参数化族的)** (continuation method (to a parameterized family)).

参考文献

[1] Бахвалов, Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975 (英译本: Bakhvalov, N. S., Numerical methods: analysis, algebra, ordinary differential equations, Mir, 1977).
[2] Годунов, С. К., Рябенький, В. С., Разностные схемы, 2 изд., М., 1977 (英译本: Godunov, S. K. and Ryaben'kii, V. S., The theory of difference schemes, North-Holland, 1964).
[3] Марчук, Г. П., Лебедев, В. И., Численные медоды в теории переноса нейтронов, М., 1971.
В. И. Лебедев 撰

【补注】 调节法亦称时间步进法 (time-stepping method). 当把一个椭圆型边值问题看作是一个 (耗散的) 抛物型问题的定常状态时, 这种时间步进法 ($m = 1$) 显得非常自然 (见 [A2]). 由于固有的 (数值的) 刚性, 应提倡使用隐式方法, 如 BDF.

通过构造一个稳定的力学系统使其平衡状态就是所要达到的最优状态, 还可以将类似的思想用于最优化理论. 这又导出 [A3] 中所有类型的迭代算法.

参考文献

[A1] Babuska, I. and Sobolev, S. L., The optimization of

numerical processes, *Appl. Mat.*, 10 (1965), 96–130.
[A2] Kubicek, M. and Hlavacek, V., Numerical solution of nonlinear boundary value problems with applications, Prientice-Hall, 1983.
[A3] Razumikhin, B. S., Physical models and equilibrium methods in programming and economics, Reidel, 1984.
[A4] Rheinboldt, W. C., Numerical analysis of parametrized nonlinear equations, Wiley, 1986. 金保侠 译

吸附作用 [adsorption; адсорбция]

界面(或固体表面)从气体或溶液中吸取物质.换句话说,吸附作用是从相体积中把被吸附物吸到吸附剂表面. 吸附作用是吸着作用的一种特殊情况.

落在吸附剂表面的被吸附物分子由于表面力的作用要滞留一段时间,其滞留时间取决于吸附剂和被吸附物的性质、温度 T 和压力 p, 然后被吸附物分子离开表面(退吸).在热力学平衡和分子平衡条件下,吸附率与退吸率相等.吸附剂的相对压力 $\varphi=p/p_s$ 同相对浓度 $\theta=c/c_s$(这里下标 s 表示常温下的极限值)之间的关系式称为吸附等温线 (adsorption isotherm).

单分子吸附作用的 Langmuir 方程 (Langmuir equation)的形式是

$$\varphi=\frac{\theta}{k(1-\theta)},$$

式中 k 是平衡常数,它近似描述吸附剂和被吸附物之间的相互作用.

Brunauer 方程([1])通常应用于多分子吸附且吸附剂具有均匀表面的情况.

Поснов 经验公式([2])广泛应用于毛细体:

$$\frac{1}{\theta}=A\ln\varphi+1,$$

式中 A 是由温度和吸附剂结构而定的系数.

参考文献

[1] Brunauer, S., Adsorption of gases and vapors, Princeton Univ. Press, 1943.
[2] Поснов, В. А., 《Ж. техн. физики》, 1953, 23, 865.
[3] Ильин, Б. В., Природа адсорбционных сил, М.-Л., 1952.
[4] Boer, J. H. de, The dynamical character of adsorption, Clarendon Press, 1968. А. В. Лыков 撰

【补注】 Brunauer-Emmett-Teller 方程,或者 BET 方程([A1])推广了 Langmuir 方程.该方程假定:多分子吸附作用中每一层均服从 Langmuir 方程.该方程有若干种修正形式,见[A2].

参考文献

[A1] Brunauer, S., Emmett, P. H., Teller, E., *J. Amer. Chem. Soc.*, **60** (1938), 309.
[A2] Brunauer, S., Copeland, L. E., Surface tension, adsorption, in E. U. Condon, H. Odishaw (eds.), Handbook of physics, Vol 2, McGraw-Hill, 1967, Chapt. 7. 佚名文 译 庄峰青 校

空气动力学中的数学问题 [aerodynamics, mathematical problems of; аэродинамики математические задачи]

解空气动力学基本方程所涉及的问题.这些方程精确地描述气态介质的运动规律和此种介质同在其中运动的物体之间的相互作用力.湍流是这一法则的例外,因为迄今为止,尚未建立满意的湍流数学模型.原则上讲,可以用有关方程的数学解充分完整地研究没有湍流或湍流可以忽略的过程.解这些方程的实际可能性同理论可能性是两回事.因此,对于不同类型的空气动力学过程,要对这些方程的各项进行量级估计,并在此基础上建立简化的数学模型,在此模型中已忽略完整的空气动力学方程组中的一个或一个以上的"小"项.甚至对于这样的简化模型也只能在最简单的情况下求得解析解,因而在空气动力学的实际工作中广泛采用数值方法.由于采用电子计算机,这些方法已经很流行.

根据空气动力学问题所涉及的方程的性质,这些问题可分为四大类:

1) 理想(无粘性和无热传导)流体空气动力学问题,"流体"一词在本文中用以表示液体和气体;

2) 粘性流体空气动力学问题;

3) 辐射气体空气动力学问题;

4) 稀薄气体空气动力学问题.

使 Reynolds 数(表示惯性力同粘性力之比的量级)无限增加,可以从一般方程得到理想流体方程.

在飞机、火箭应用空气动力学和船舶流体动力学的大多数问题中,Reynolds 数非常之大(10^6-10^8),以致在这种条件下理想流体模型可以精确地描述物体周围的流动过程,但是边界层区域除外.理想流体空气动力学方程是:

$$\rho\frac{d\mathbf{V}}{dt}=\rho\mathbf{g}-\nabla p$$

(运动方程);

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\operatorname{div}\mathbf{V}=0$$

(连续性方程);

$$\rho\frac{d}{dt}\left[\frac{\mathbf{V}^2}{2}+U\right]=\rho(\mathbf{g},\mathbf{V})-\operatorname{div}(p\mathbf{V})$$

(能量守恒方程).此处 $\mathbf{V}$ 是速度向量, ρ 是密度, p 是压力, $\mathbf{g}$ 是重力加速度, U 是内能.对于所求的函数,这是一个一阶方程组. 这一点对于发生化学反应的气体混合物也是对的.此时混合物各组分的传递方程加入前面的方程组中,而化学反应生成的热量则加到能量方程中去.

从理想流体模型可以导出许多简化模型.其中最重要的是没有重量的流体模型和不可压缩流体模型.前者是 Froude 数无限增大时一般模型的极限情况;Froude 数表示惯性力与重力之比的量级.当此模型应用于飞机和火箭的空气动力学问题时(Froude 数的量级为 $10^2 - 10^3$),它是很精确的.然而,在船舶流体动力学问题中重力变得重要,在气象学应用中更是如此(Froude 数的量级 ≤1).

设 ρ=常数,可以从一般方程组得到不可压缩流体方程.当 Mach 数(流体介质中的特征速度与特征声速之比)趋近于零时,可以得到这种形式的运动方程.在一般情况下这是不真实的,只有当 Froude 数 ≥1 (即 $Ma \ll Fr.$),以及拟定常过程的 Strouhal 数(液体或气体的不定常运动的相似准则)的量级≤1 时,不可压缩流体方程才成立.

不可压缩流体模型是最简单的模型.在此模型中整个方程组可以简化为一个速度势 $\Phi(\nabla\Phi = V)$ 的 Laplace 方程.然而,只有在没有重量的流体的平面平行运动和绕旋转体的轴对称运动情况中,空气动力学问题的求解才能转化为经典势流理论问题.

给定物体形状的绕流问题可用经典的共形变换方法求解.零冲角下旋转体绕流可用 Laplace 方程的外部 Neumann 问题的经典解确定.由于这些问题(翼剖面和机身的特性的确定)具有重要的实际意义,已经研究出许多解法,它们借助比较简单的计算可以获得满意的精确度.当然,如果采用电子计算机,就没有必要应用这些方法,因为解这些问题的精确数值方法是计算数学中最简单的问题.

在空间情况下速度势的 Neumann 问题的形式解,只在很特殊的情况下才对应于流动物理图景.在粘性流体中物体后面有一个涡旋尾迹相随.当 Reynolds 数增大时,这一尾迹变薄(对于无分离绕流),并且在极限情况下它变成一个无限薄的涡面,其涡层强度只有在特殊情况下(例如平面平行运动情况)才为零.因此,流动区具有不连续速度势的问题表示不可压缩流体的真实空间问题.这种不连续面的位置并不知道,因此,当流动中存在速度势的不连续面时,空间物体的精确绕流问题是很复杂的非线性问题.只有在线性近似中,即当假定有绕流的物体对基本主流形成小扰动时(小冲角下的薄翼),这一问题才能求解.在这种情况下涡面可视为水平面,并且可以假定:速度势沿流动方向有一常数间断.速度势的法向导数在物体的投影面上给出.根据这些假设已经求得一些解析解(对于圆形机翼和椭圆形机翼).对于其他形状机翼有一些数值方法用以解此问题,并且使求解工作大为简化(见**机翼理论** (wing theory)).

涉及重流体问题的主要困难是,自由面上速度势边界条件是非线性的.仅仅对波浪理论的平面问题已经求得精确解.关于有限波幅的空间波浪问题没有什么进展.另一方面,大量线性化(小波幅)问题已经解决.船舶运动的波阻实际上是基于线性理论计算的.

制造近声速和超声速飞机的可能性,对于可压缩流体空气动力学问题的研究起过促进作用.亚声速、跨声速和超声速所涉及的问题是以本质上不同的方法进行处理的.在亚声速范围内空气动力学方程为椭圆型,其解同不可压缩流动所求得的解定性地相似.

在可压缩流体空气动力学研究的第一阶段,主要研究可压缩性对有绕流的物体的空气动力特性的影响.所有这些方法都对于未扰动流动的速度作了某种线性化.Христианович 方法是一个例外,它可以求得亚声速空气动力学方程的精确解,尽管求解是对预先不知道形状的物体进行的.

实际上,亚声速空气动力学问题所遇到的困难同研究不可压缩流体时所遇到的困难是相同的.对于平面平行流动和轴对称流动问题,可用数值方法很易求解(见**积分关系式法** (integral - relation method; **调节法** (adjustment method)).在有不连续速度势的空间流动情况下,只能对线性化方程求解.通过初等变换这些方程可以化为不可压缩流体方程,其中边界条件和不连续面上的条件同不可压缩流体的一样.

从数学,包括计算数学的观点来看,跨声速空气动力学领域是最难研究的.几乎总是以激波而告终的局部超声速(抛物型)区的存在,排除任何解析近似的可能性.此外,这些问题显示出椭圆型方程的主要缺点——任何特定扰动的效应都在整个空间传播.解跨声速空气动力学问题最合适的方法是调节法,这种方法求解的是不定常空气动力学问题(从任意初始状态出发),而当时间趋于无穷大时,不定常问题的极限解就是物体的跨声速绕流的定常问题的解.这个方法工作量很大,但是,如果采用电子计算机,它是很适用的.

研究超声速空气动力学的数学方法可以分为三类:

1) 纯超声速流;

2) 形成局部亚声速区的混合流;

3) 气体中发生化学反应的高温高超声速流.

在更高的速度,因而更高的温度下,气体发生离解,并且辐射过程变得重要.可以说,高超声速空气动力学的这一部分形成一个单独的领域,因为所涉及的数学问题同"透明"气体情况下的问题很不相同.

纯超声速流问题已经研究得最彻底.提出的数值方法有特征线方法、有限差分方法和半特征线方法.利用这些方法,不仅对平面平行流或轴对称流,而且对空间流,可以求得比较简单的解.超声速流的线性理论也已经研究得很透彻.对于许多实际问题可以得到解析解.由于出现弱激波,这些问题可能稍为复杂一点.但是这

些困难是计算方面的,不是原理性的.

实际地讲,这些问题限于尖头物体绕流和内部空气动力学问题(发动机喷管计算).然而,如果超声速速度很高,尖头物体不能采用(尖头会烧蚀),局部亚声速流总是会在钝头附近出现.算好这一区域之后,其余流动(纯超声速流动)用超声速空气动力学方法计算.

同跨声速流的空气动力学问题比较,有局部亚声速区(甚至此区是混合型的)的超声速空气动力学问题的优点在于:此区通常是钝头附近的有界的狭窄范围.这就是为什么计算局部亚声速区时有可能发展有效的数值方法(积分关系式法、反问题方法、调整法).然而,应该指出,直到写稿时(1977)为止,对这些问题从来没有进行过严格的数学上的研究.也没有证明它们的解是存在与唯一的.因此,数值计算方法是在以下假设基础上发展起来的:当从亚声速区过渡到超声速区时,速度和加速度的连续条件保证有物理上现实的解存在.这一假设为所有数值计算结果所证实.

到此为止,文中所说的是先计算局部亚声速区(包括影响区的超声速部分),后用纯超声速空气动力学方法计算流动.

还有另一类有关绕薄物体的高超声速流问题(开始发生化学反应以前).薄物体的高超声速绕流(钝形区除外)的特征是:沿主流的速度分量变化小.根据这一事实,可以简化方程,以致形状已定的薄物体的绕流问题(在平面流动和轴对称流动情况中)变成同一维定常流动问题一样.用此方法已经得到高超声速流的许多重要的定性特性,并且建立了近似的相似律.这些结果在分析数值计算结果时得到了广泛的应用,以致在很广的 Mach 数和物体几何参数范围内,这些数值计算结果化为很紧凑的关系式.

关于发生化学反应的气体的空气动力学问题,要联立解运动方程和化学动力学方程.虽然所得到的方程组更加复杂,但是求解所用的数值方法却同理想气体空气动力学中的方法基本相同.所不同的是,计算量要多得多.在实际工作中这样的计算做得很多,而且由于在此温度范围内风洞不能模拟自然条件,高超声速飞行器的空气动力特性主要靠数值方法求得.

粘性流体理论的主要方向有两个:粘性流体的完整方程(**Navier-Stokes 方程**(Navier-Stokes equations))理论和**边界层理论**(boundary-layer theory).边界层方程是 Navier-Stokes 方程在物体边界附近的渐近展开式的主项,流体质点完全地或部分地粘着于物体边界.正是这一事实严重干扰了有绕流的物体表面附近的理想流体的解.边界层方程的误差的量级是 $1/\sqrt{\mathrm{Re}}$.这表明,边界层理论仅仅对大 Reynolds 数成立,同时只在平滑的无分离绕流区域中成立.尽管边界层方程包括粘性应力的所有主项,但是它们的数学结构简单得多.虽然完整方程是椭圆型,边界层方程都是抛物线型,其特征线沿物体表面的法线方向.所以,可以"逐层"计算,即从边界层的一个剖面到另一剖面进行计算,不管两剖面之间的区域以外的条件如何.

因为边界层理论具有重要的实际意义(计算阻力、表面温度、在高超声速飞行条件下物体表面的破坏速率),结果研究出许多近似方法来进行这样一些计算(Pohlhausen 法,Кочин-Лойцянский 单参数法等).然而,如果采用电子计算机,所有这些近似方法都成为多余的了,因为求边界层方程的精确数值解没有困难,甚至在发生化学反应的高温气体这种困难情况下,也是如此.数值计算程序可以这样安排:每一步这个方程组都可对 x 变量(沿物体表面切向)分裂成一些分离的二阶微分方程.从计算观点来看,这是大有好处的.

上面所讲的方法适用于平面平行流和轴对称流.三维边界层结构更加复杂.三维边界层方程本身随有绕流的物体几何形状发生显著变化.三维边界层的计算方法的发展差得多,部分原因是实际工作中经常采用平面截面计算.虽然这样做缺乏理论根据,但是通常都能得到足够精确的结果.解精确的三维边界层方程原则上没有什么困难.

除了少数能得到解析解的特殊情况外,由于采用电子计算机,发展了一些解粘性流体完整方程组的方法.解这样的方程的主要困难是:方程是高阶的,而且影响区无界.在最简单的具有常粘性系数的粘性不可压缩流体的定常运动情况中,有人得到关于流函数 ψ 和速度旋度 ω 的两个二阶方程的方程组.它们可以写成如下无量纲形式:

$$\Delta\omega = 2\left\{\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial y}\right\},$$

$$\Delta\psi = \omega.$$

物体边界上的边界条件只有流函数 $\psi=$ 常数,$\partial\psi/\partial n=0$.只有通过某种迭代过程才能解这个四阶非线性方程组.迭代过程是这样安排的:每一迭代步可以得到分离的速度旋度方程和流函数方程.不仅方程是分离的,而且边界条件也发生这样的分离.于是,选定理想流体方程的解作为一次近似,可以得到如下的一组迭代:

$$\Delta\omega_{n+1} - 2\frac{\partial\omega_{n+1}}{\partial x} = 2\left\{\frac{\partial\varphi_n}{\partial y}\frac{\partial\omega_n}{\partial x} - \frac{\partial\varphi_n}{\partial x}\frac{\partial\omega_n}{\partial y}\right\},$$

$$\Delta\psi_{n+1} = \omega_{n+1},$$

物体边界上的边界条件是

$$\psi_{n+1} = 常数,\quad \omega_{n+1} = \alpha\frac{\partial\psi_n}{\partial n} + \omega_n,$$

式中 $\varphi=\psi-y$.这表明,得到了分离的旋度和流函数方

程组的$(n+1)$次近似.也可用调整法以类似的方式求解.不过,在这种情况下不需要取真实的不定常方程组,而可考虑如下抛物型方程组:

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}=\Delta\omega-2\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=\Delta\psi-\omega,$$

当做数值计算时,这个方程组用起来更加方便.

关于物体的粘性绕流问题,不仅是发展计算方法,而且涉及到一些基本问题的研究.例如,在大 Reynolds 数下(如圆柱绕流情况)是否存在定常解还不清楚.数值方法可以给出 Reynolds 数在几百以下的满意的解,但是,当 Reynolds 超过这些值时,数值计算不再收敛.

辐射气体和稀薄气体的空气动力学问题,仅仅在一些最简单的情况下得到了解决.然而,由于这些问题(在这两个领域内)具有重要的实际意义,已经提出了有关现象的数学模型.这样一些模型(辐射气体理论中的灰色辐射模型、弥散辐射模型,稀薄气体理论中的 Crook 模型)通常不是完整方程的极限情况,仅仅是完整方程所描述的关系的定性反映.解这些问题的计算工作量非常之大.这些问题的解决取决于电子计算机效能的提高.

参考文献

[1] Кочин, Н. Е. Кибель, И. А., Розе, Н. В., Теоретическая гидромеханика, ч. 1–2, М., 1963 (中译本: Н. Е. 柯琴等,理论流体力学,高等教育出版社,1956).

[2] Христианович, С. А., Обтекание тел газом при больших дозвуковых скоростях, М., 1940.

[3] Седов, Л. И., Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, 2 изд., М., 1966 (英译本: Sedov, L. I., Two-dimensional problems in hydrodynamics and aerodynamics, Acad. Press, 1965).

[4] Hayes, W., Probstein, R. F., Hypersonic flow theory, Acad. Press, 1966 (中译本: W. D. 海斯, R. F. 普洛布斯坦,高超音速流理论,第一卷,无粘流,科学出版社,1979).

[5] Черный, Г. Г., Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью, М., 1959.

[6] Belotserkovskiĭ, O. M. and Chushkin, P. I., The numerical solution of problems in gas dynamics, in Basic developments in fluid dynamics, Vol. 1, Acad. Press, 1965, 1–126.

[7] Чушкин, П. И., Метод характеристик для пространственных сверхзвуковых течений, М., 1968.

[8] Обтекание затупленных тел сверхзвуковым потоком газа, 2, изд., М., 1967.

[9] Metody numeryczne w mechanice plynow. Wroclaw, 1969 (波兰文).

А. А. Дородницын 撰

【补注】 在能量守恒方程中$(\mathbf{g},\mathbf{V})$表示两个向量的点积.关于处理象等离子体和恒星气体力学这样的分支学科或空气动力学(磁和电空气动力学)的材料,见**磁流体动力学中的数学问题**(magneto-hydrodynamics, mathematical problems in).

参考文献

[A1] Bachelor, G. K., An introduction to fluid dynamics, Cambridge Univ. Press, 1970.

[A2] Pai, S. I., Viscous flow, v. Nostrand, 1956.

[A3] Howarth, L. (ed.), Modern development in fluid dynamics, High speed flow, 1–2, Oxford Univ. Press, 1953 (中译本: L. 霍华斯编,流体动力学的新发展(高速流),科学出版社,1958).

[A4] Birkhoff, G., Hydrodynamics, a study in logic, fact and similitude, Princeton Univ. Press, 1960.

[A5] Kármán, Th. von, et al. (eds.), High speed aerodynamics and jet propulsion, 1–2, Princeton Univ. Press, 1964.

[A6] Pai, S. I., Radiation gas dynamics, Springer, 1966.

[A7] Ferraro, V. C. A., Plumpton, C., An introduction to magneto-fluid mechanics, Oxford Univ. Press, 1966.

[A8] Kogan, M. V., Rarified gas dynamics, Acad. Press, 1969 (译自俄文).

[A9] Bers, L., Mathematical aspects of transsonic gas dynamics, Wiley, 1958.

晏名文 译

仿射代数集 [**affine algebraic set**; **аффинное алгебраическое множество**],仿射代数 k 集(affice algebraic k-set)

给定的代数方程组的解集.设 k 是一个域,$\bar{k}$ 是它的代数闭包.Descartes 积 $\bar{k}^n$ 的子集 X 称为仿射代数 k 集(affine algebraic k-set),如果它的点是多项式环(ring of polynomials) $k[T]=k[T_1,\cdots,T_n]$ 的某个族 S 的公共零点.$k[T_1,\cdots,T_n]$ 中在 X 上等于 0 的所有多项式的集 $\mathfrak{A}_X$ 构成一个理想,称为仿射代数 k 集的理想(ideal of affine algebraic k-set).理想 $\mathfrak{A}_X$ 与由族 S 生成的理想 $I(S)$ 的根基,即对某个自然数 m 有 $f_m\in I(S)$ 的多项式 $f\in k[T_1,\cdots,T_n]$ 的集合等同(Hilbert 零点定理(Hilbert Nullstellensatz);见 **Hilbert 定理**(Hilbert theorem) 3)).两个仿射代数集 X 和 Y 相等当且仅当 $\mathfrak{A}_X=\mathfrak{A}_Y$.仿射代数集 X 可由 $\mathfrak{A}_X$ 的生成元系定义.特别地,任何仿射代数集可由有限个多项式 $(f_1,\cdots,f_k)\in k[T]$ 定义.等式 $f_1=\cdots=f_k=0$ 称为仿射代数集 X 的方程(equations of the affine algebraic set).$\bar{k}^n$ 的仿射代数集关于交与并的运算构成一个格.交 $X\cap Y$ 的理想等于它们的理想之和 $\mathfrak{A}_X+\mathfrak{A}_Y$,而并 $X\cup Y$ 的理想是它们的理想的交 $\mathfrak{A}_X\cap\mathfrak{A}_Y$.集合 $\bar{k}^n$ 是仿射代数集,称为域 k 上仿射空间(affine space over the field),记为 $\mathbf{A}_k^n$;它对应着零理想.$\bar{k}^n$ 的空子集也是

具有单位理想的仿射代数集．商环 $k[X]=k[T]/\mathfrak{A}_X$ 称为 X 的坐标环(coordinate ring)．它等于 X 上 k 正则函数环，即有下述性质的 $\bar{k}$ 值函数 $f:X\to\bar{k}$ 的环：存在多项式 $F\in k[T]$，使得对所有 $x\in X$，$f(x)=F(x)$．仿射代数集称为不可约的(irreducible)，如果它不是两个仿射代数真子集的并．其等价定义就是 $\mathfrak{A}_X$ 为素理想．不可约仿射代数集与射影代数集是古典代数几何学的研究对象．它们分别被称为域 k 上的仿射代数簇(affine algebraic variety)及射影代数簇(projective algebraic variety)(或 k 簇)．仿射代数集具有拓扑空间的结构．仿射代数子集是这个拓扑(**Zariski 拓扑**(Zariski topology))的闭子集．仿射代数集是不可约的当且仅当它作为拓扑空间不可约．仿射代数集概念的进一步发展就引出了**仿射簇**(affine variety)和仿**射概形**(affine scheme)的概念．

参考文献

[1] Zariski, O. and Samuel, P., Commutative algebra, 2, Springer, 1975.

[2] Шафаревич, И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972(英译本: Shafarevich, I. R., Basic algebraic geometry, Springer, 1977).

[3] Hartshorne, R., Algebraic geometry, Springer, 1977.

И. В. Долгачев, В. А. Исковских 撰

【补注】 一个拓扑空间称为不可约的，如果它不是两个真闭子空间的并．

陈志杰 译

仿射联络 [affine connection; аффинная связность]

光滑流形 M 上的一种微分－几何结构(differential - geometric structure)，即附属于 M 的光滑纤维丛 E 以 n 维仿射空间 $A_n(n=\dim M)$ 为其典型纤维时，流形上的一类特殊联络(见**流形上的联络**(connections on a manifold))．这种 E 的结构使得在每点 $x\in M$ 指定一个仿射空间 $(A_n)_x$，它与中心仿射切空间 $T_x(M)$ 恒同．在仿射联络下，起点为 x_0 的每条光滑曲线 $L\in M$ 和其上每点 x_t 给出一个仿射映射 $(A_n)_{x_t}\to(A_n)_{x_0}$，它满足如下所述的条件．设 M 由坐标邻域覆盖，使每个坐标邻域都有一个 $(A_n)_x$ 内的光滑仿射标架场．这些标架的原点与 x 重合(即给定了 n 个光滑向量场，它们在区域的每点 x 是线性独立的)．我们的要求是，当 $t\to 0$，x_t 沿 L 趋向 x_0 时，映射 $(A_n)_{x_t}\to(A_n)_{x_0}$ 趋于成为恒同映射，并且它与恒同映射的偏差的主要部分关于某个标架可由下列线性微分形式组来定义：

$$\left.\begin{aligned}\omega^i &= \Gamma^i_k\,dx^k,\quad \det|\Gamma^i_k|\neq 0,\\ \omega^i_j &= \Gamma^i_{jk}\omega^k.\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

因此，对于映射 $(A_n)_{x_t}\to(A_n)_{x_0}$，在 x_t 的标架的象由 $(A_n)_{x_0}$ 中位置向量为 $e_i[\omega^i(X)t+\varepsilon^i(t)]$ 的点和 n 个向量 $e_i[\delta^i_j+\omega^i_j(X)t+\varepsilon^i_j(t)]$ 所组成，其中 X 是 L 在 x_0 的切向量，且

$$\lim_{t\to 0}\frac{\varepsilon^i(t)}{t}=0,\quad \lim_{t\to 0}\frac{\varepsilon^i_j(t)}{t}=0.$$

具有仿射联络的流形 M 称为仿射联络空间(space with an affine connection)．当标架场在任一点 $x\in M$ 的标架按公式 $e_i=A^{i'}_i e_{i'}$，$e_{i'}=A^i_{i'}e_i$ 变换时，即在原点为 x 的切空间 $(A_n)_x$ 内，当遍取标架主纤维丛 P 的任意元素时，形式(1)就由下列 P 上的 1 形式所代替：

$$\left.\begin{aligned}\omega^{i'} &= A^{i'}_j\omega^j,\\ \omega^{i'}_{j'} &= A^{i'}_k\,dA^k_{j'}+A^{i'}_k A^l_{j'}\,\omega^k_l,\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

而 2 形式

$$\left.\begin{aligned}\Omega^i &= d\omega^i+\omega^i_j\wedge\omega^j,\\ \Omega^i_j &= d\omega^i_j+\omega^i_k\wedge\omega^k_j.\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

作如下变换：

$$\Omega^{i'}=A^{i'}_j\Omega^j,\quad \Omega^{i'}_{j'}=A^{i'}_k A^l_{j'}\Omega^k_l,$$

其中 $\Omega^{i'}$ 和 $\Omega^{i'}_{j'}$ 是(2)按(3)的方式作成的．方程(3)称为 M 上仿射联络的结构方程(structure equations)．这里，方程的左边(所谓的挠率形式 Ω^i 和曲率形式 Ω^i_j)是半基(见**挠率形式**(torsion form)；**曲率形式**(curvature form))，即它们是 $\omega^k\wedge\omega^l$ 的线性组合：

$$\left.\begin{aligned}\Omega^i &= \frac{1}{2}S^i_{jk}\omega^j\wedge\omega^k,\\ \Omega^i_j &= \frac{1}{2}R^i_{jkl}\omega^k\wedge\omega^l.\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

定义在 P 上且满足方程(3)(其左边有(4)的形状)的 1 形式 ω^i 和 ω^i_j 全体确定了 M 上的某个仿射联络．对于一曲线 $L\in M$，映射 $(A_n)_{x_t}\to(A_n)_{x_0}$ 可如下得出．在曲线 L 的起点 x_0 的坐标邻域内选取一光滑标架场，并且标架在点 x_t 的象定义为下列方程组的解 $\{x(t),e_i(t)\}$：

$$\left.\begin{aligned}du &= (\omega^i)_{x(t)}(\dot{x}(t))u_i,\\ du_j &= (\omega^i_j)_{x(t)}(\dot{x}(t))u_i,\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

它满足初始条件 $u(0)=0$，$u_i(0)=e_i$，其中 $x^i=x^i(t)$ 是曲线 L 的定义方程．在 $(A_n)_{x_0}$ 内，以 x_0 为原点的位置向量 $x(t)$ 的端点的轨迹就是周知的 L 的展开(development)．可选择坐标邻域内的标架场使 $\omega^i=dx^i$；于是 $\omega^i_j=\Gamma^i_{jk}dx^k$．在坐标邻域的相交部分，$dx^{i'}=(\partial x^{i'}/\partial x^j)\omega^j$，即 $A^{i'}_j=\partial x^{i'}/\partial x^j$，且

$$\Gamma^{i'}_{j'k'}=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\Gamma^i_{jk}+\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i},\qquad(6)$$

$$\left.\begin{aligned}S^i_{jk} &= \Gamma^i_{jk}-\Gamma^i_{kj},\\ R^i_{jkl} &= \frac{\partial\Gamma^i_{jl}}{\partial x^k}-\frac{\partial\Gamma^i_{jk}}{\partial x^l}+\Gamma^i_{pk}\Gamma^p_{jl}-\Gamma^i_{pl}\Gamma^p_{jk}.\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

这里 S^i_{jk} 和 R^i_{jkl} 分别是 M 上仿射联络的**挠率张量**(torsion tensor)和**曲率张量**(curvature tensor). M 上一个仿射联络也可用每个坐标邻域内的一组函数 Γ^i_{jk} 来定义，使得在两个坐标邻域的相交部分它们按公式(6)变换. 函数组 Γ^i_{jk} 称为仿射联络对象(object of the affine connection). 把

$$\omega^i = dx^i,\quad \omega^i_j = \Gamma^i_{jk}\, dx^k$$

代入(5)，藉助它便得映射 $(A_n)_{x_t}$.

若在点 x_0 的某个邻域内给定一向量场 $X=\xi^i e_i$，则当 $(A_n)_{x_t} \to (A_n)_{x_0}$ 时，向量 $X_{x(t)}$ 被映为向量 $\xi^i(x_t)e_i(t)$ (其中 $\{e_i(t)\}$ 是方程组(5)的解). 它在 $(A_n)_{x_0}$ 中 $t=0$ 时的微分:

$$(d\xi^i+\xi^j\omega^i_j)e_i = \left(\frac{\partial\xi^i}{\partial x^k}+\xi^j\Gamma^i_{jk}\right)dx^k e_i$$

称为向量场 X 关于给定仿射联络的**共变微分**(covariant differential). 这里

$$\nabla_k\xi^i = \frac{\partial\xi^i}{\partial x^k}+\xi^j\Gamma^i_{jk}$$

构成一张量场，称为场 $X=\xi^i e_i$ 的**共变导数**(covariant derivative). 若给定第二个向量场 $Y=\eta^k e_k$，则 X 沿 Y 方向的共变导数定义为

$$\nabla_Y X = \eta^k\nabla_k\xi^i e_i$$

它关于任一标架场也可由下式定义:

$$\omega^i(\nabla_Y X) = Y\omega^i(X)+\omega^i_k(Y)\omega^k(X).$$

M 上的一个仿射联络也可用双线性算子 ∇ 来定义，它对每两个向量场 X 和 Y，指定一个向量场 $\nabla_Y X$，并且具有性质:

$$\nabla_Y(fX) = (Yf)X+f\nabla_Y X,\quad \nabla_{fY}X = f\nabla_Y X,$$

其中 f 是 M 上的光滑函数. 这些定义之间的关系可由公式 $\nabla_{e_k}e_j=\Gamma^i_{jk}e_i$ 来体现，其中 $\{e_i\}$ 是标架场. 挠率张量场和曲率张量场

$$S(X,Y) = S^i_{jk}\xi^j\eta^k e_i = \Omega^i(X,Y)e_i,$$

$$R(X,Y)Z = (R^i_{jkl}\xi^k\eta^l)\zeta^j e_i = \Omega^i_j(X,Y)\omega^j(Z)e_i$$

可用下述公式定义:

$$S(X,Y) = \nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,Y],$$

$$R(X,Y) = \nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_{[X,Y]}Z.$$

一个向量场 X 称为沿曲线 L 是平行的(parallel)，如果 $\nabla_{\dot{x}(t)}X_{x(t)}=0$ 关于 t 恒成立，即沿 L 有

$$d\xi^i+\xi^j\omega^i_j = 0.$$

平行向量场可用来实现向量(一般地，张量)在仿射联络下的**平行位移**(parallel displacement)，它表示由映射 $(A_n)_{x_t} \to (A_n)_{x_0}$ 定义的切向量空间的线性映射 $T_{x_t}(M) \to T_{x_0}(M)$. 在这个意义下，任一仿射联络生成 M 上的一个**线性联络**(linear connection).

在给定的仿射联络下，若一条曲线 L 的展开是直线，则称 L 为测地线(geodesic line)；换言之，经过适当的参数化，L 的切向量场 $\dot{x}(t)$ 沿 L 自身是平行的. 在局部坐标系下，测地线由下列方程组确定:

$$\frac{d^2x^i}{dt^2}+\Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = 0.$$

过每点沿每个方向都有一条测地线.

M 上的仿射联络与 $(A_n)_x$ $(x\in M)$ 中由它们生成的自由仿射标架主纤维丛上的联络之间存在着一一对应关系，起点和终点均为 x 的闭曲线对应仿射变换 $(A_n)_x \to (A_n)_x$，它们构成已给仿射联络的**非齐次和乐群**(holonomy group). 对应的线性自同构 $T_x(M) \to T_x(M)$ 构成齐次和乐群. 根据和乐定理(holonomy theorem)，这些群的 Lie 代数由挠率 2 形式 Ω^i 和曲率 2 形式 Ω^i_j 定义. 后者满足 Bianchi 恒等式(Bianchi identities)

$$d\Omega^i = \Omega^i_j\wedge\omega^j-\omega^i_j\wedge\Omega^j,$$

$$d\Omega^i_j = \Omega^i_k\wedge\omega^k_j-\omega^i_k\wedge\Omega^k_j.$$

特别当 $\Omega^i=0$ 时，即对于无挠的仿射联络，这些恒等式就化为:

$$R^i_{jkl}+R^i_{klj}+R^i_{ljk} = 0,$$

$$\nabla_m R^i_{jkl}+\nabla_k R^i_{jlm}+\nabla_l R^i_{jmk} = 0.$$

仿射联络的概念在 1917 年出现于 Riemann 几何中(以 **Levi-Civita 联络**(Levi-Civita connection)的形式)；在 1918－1924 年期间，由于 H. Weyl ([1]) 和 E. Cartan ([2]) 的工作，它才有了独立的含义.

参考文献

[1] Weyl, H., Raum. Zeit. Materie, Springer, 1923.

[2] Cartan, E., Sur les variétés a connexion affine et la théorie de la relativité généralisée, *Ann. Scient. École norm. Supér.*, **40** (1923), 325－412; **41** (1924), 1－25; **42** (1925), 17－88.

[3A] Cartan, E., Sur les variétés à connexion projective, *Bull. Soc. Math. France*, **52** (1924), 205－241.

[3B] Cartan, E., Sur les espaces à connexion conforme, *Ann. Soc. Polon. Math.*, **2** (1923), 171－221.

[4] Рашевский, П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967 (中译本: П. К. 洛薛夫斯基, 黎曼几何与张量解析, 高等教育出版社, 1955).

[5] Постников, М. М., Вариационная теория геодезических, М., 1965.

Ю. Г. Лумисте 撰

【补注】 代替文献[3A], [3B], 可参考[A1]. 常用的较新英文参考文献是[A2]和[A3].

参考文献

[A1] Lichnerowicz, A., Théorie globale des connexions et des groups d' holonomie, Cremonese, 1955.

[A2] Kobayashi, S. and Nomizu, K., Foundations of differential geometry, 1, Wiley (interscience), 1963

[A3] Sternberg, S., Lectures on differential geometry, Prentice - Hall, 1964. 沈一兵 译 陈维桓 校

仿射标架 [affine coordinate frame; аффинный репер]

n 维仿射空间 A_n 的 n 个线性无关向量 $\mathbf{e}_i(i=1,\cdots,n)$ 和一点 O 的集合，这个点 O 称为原点，向量 $\mathbf{e}_i$ 称为标度向量．在该仿射标架下，任何点 M 由 n 个数定义 —— 坐标 x^i，它出现于位置向量 $\overline{OM}$ 关于标度向量的分解式：$\overline{OM}=x^s\mathbf{e}_s$(求和约定)．两个具体的仿射标架可确定空间 A_n 中的唯一的一个把第一个标架变换成第二个标架的仿射变换（亦见**仿射坐标系** (affine coordinate system))． A. П. Широков 撰

【补注】 一个等价的且更为有用的定义如下．n 维仿射空间的一个仿射标架是 $n+1$ 个点 $P_0,\cdots,P_n$ 的集合，这些点在仿射意义下是线性无关的，即向量 $P_0P_i(i=1,\cdots,n)$ 在对应的向量空间中是线性无关的，定义中向量 $\mathbf{e}_i$ 的独立性应理解为在对应向量空间中的独立性．

参考文献

[A1] Snapper, E. and Troyer, R. J., Metric affine geometry, Academic Press, 1971. 杨 路、张景中、侯晓荣 译

仿射坐标系 [affine coordinate system; аффинная система координат]

仿射空间 (affine space) 中的一个直线坐标系．平面上的一个仿射坐标系由一对不共线的有序向量 $\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$(一个**仿射基** (affine basis)) 和一点 O(**坐标原点** (coordinate origin)) 来定义．通过原点 O 且平行于基向量的直线称为**坐标轴** (coordinate axes)．向量 $\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$ 规定了坐标轴的**正向**．平行于向量 $\mathbf{e}_1$ 的轴称为**横轴** (abscissa axis)，而平行于向量 $\mathbf{e}_2$ 的轴称为**纵轴** (ordinate axis)．一个点 M 的**仿射坐标** (affine coordinates) 由一对有序数 (x,y) 给出，它们是向量 $\overline{OM}$ 关于基向量分解的系数：

$$\overline{OM} = x\mathbf{e}_1+y\mathbf{e}_2.$$

第一个数 x 称为 M 的**横坐标** (abscissa)，第二个数 y 称为 M 的**纵坐标** (ordinate)．

三维空间的一个仿射坐标系由一个线性独立的有序三元向量组 $\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$，$\mathbf{e}_3$ 和一点 O 来定义．和平面的情形一样，可以定义坐标轴(横轴，纵轴和竖轴 (applicate axis)) 以及一点的坐标．通过一对坐标轴的平面称为**坐标平面** (coordinate plane)． A. C. Пархоменко 撰 杨 路、张景中、侯晓荣 译

仿射曲率 [affine curvature; аффинная кривизна]

一般**仿射群** (affine group) 或其子群的几何学中平面曲线的微分不变量．仿射曲率通常理解为么模仿射(或等仿射)群的几何学中曲线的微分不变量．在这种仿射(或更确切地说，等仿射)几何学中，一条平面曲线 $y=y(x)$ 的曲率可用下列公式计算：

$$k = -\frac{1}{2}[(y'')^{-2/3}]'',$$

而曲线的仿射(或更确切地，等仿射)弧长是

$$s = \int (y'')^{1/3}\, dx.$$

曲线在点 M_0 的仿射曲率的几何解释是：设 M 是曲线上邻近 M_0 的点，s 为弧 M_0M 的仿射弧长，σ 为与曲线相切于 M_0 和 M 的抛物线的仿射弧长．那么，曲线在 M_0 的仿射曲率是

$$k_0 = \pm \lim_{M\to M_0} \sqrt{\frac{720(\sigma-s)}{s^5}}.$$

在空间曲线和曲面的仿射理论中，也有仿射曲率的概念，它们分别类似于 Euclid 微分几何学的相应概念．参考**仿射微分几何学** (affine differential geometry)．

A. П. Широков 撰 沈一兵 译

仿射微分几何学 [affine differential geometry; аффинная дифференциальная геометрия]

几何学的一个分支，讨论曲线和曲面在**仿射群** (affine group) 或其子群的变换下不变的微分 - 几何性质．等仿射空间的微分几何学研究得最为透彻．

等仿射平面 (equi - affine plane) 上任两向量 $\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$ 有一个不变量 $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ —— 由 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 构成的平行四边形的曲面面积．借助这个概念，对于非直线的曲线 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$，可作不变参数

$$s = \int_{t_0}^{t} |(\dot{\mathbf{r}},\ddot{\mathbf{r}})|^{1/3}\, dt,$$

即所谓**等仿射弧长** (equi - affine arc length)．微分不变量

$$k = \left(\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}\right)$$

称为平面曲线的**等仿射曲率** (equi - affine curvature)．常等仿射曲率是**二阶曲线**的特征．除差一等仿射变换外，自然方程 $k=f(s)$ 确定一条曲线．向量 $\mathbf{n}=d^2\mathbf{r}/ds^2$ 给出了平面曲线的仿射法线方向；在 $k\neq 0$ 的点 M，其仿射法线是曲线与点 M 切线平行的弦的中点轨迹的切线，且重合于与曲线在点 M 有三阶切触的抛物线的直径．

在一般仿射群下，要考虑曲线的另外两个不变量：仿射弧长 σ 和仿射曲率 κ．它们可用上面引进的不

变量 s 和 k 来表示:

$$\sigma = \int k^{1/2} ds, \quad \kappa = \frac{1}{k^{3/2}} \frac{dk}{ds}$$

(在等仿射几何学中，为简单计，s 和 k 本身也简称为仿射弧长和仿射曲率.)平面曲线的中心仿射弧长、中心仿射曲率、等中心仿射弧长及等中心仿射曲率可用类似的方式构造.

在等仿射空间(equi - affine space)中，对任意三个向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 可指定不变量 $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$，它是由这些向量构成的定向平行六面体的体积. 一条曲线 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ $(\mathbf{r} \in C^3)$ 的自然参数(等仿射弧长)由下列公式定义:

$$s = \int_{t_0}^{t} |(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dddot{\mathbf{r}})|^{1/6} dt.$$

微分不变量 $\kappa=(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''')$, $\tau=-(\mathbf{r}'', \mathbf{r}''', \mathbf{r}'''')$ 分别称为空间曲线的等仿射曲率 (equi - affine curvature) 和等仿射挠率 (equi - affine torsion). 其中撇"′"表示关于自然参数的微分. 曲线的研究归结为选择某个活动标架; 其中定义在所研究曲线四阶微分邻域内的向量

$$\left\{\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dddot{\mathbf{r}}+\kappa\frac{\dot{\mathbf{r}}}{4}\right\}$$

组成的标架特别重要. 空间曲线的中心仿射理论已有详细讨论([5]).

对于等仿射空间中的非可展曲面 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u^1, u^2)$，可以作下列张量:

$$g_{ij} = \frac{a_{ij}}{|a|^{1/4}},$$

其中 $a_{ij}=(r_1, r_2, r_{ij})$, $a=\det(a_{ij})$, $r_i=\partial_i \mathbf{r}$, $r_{ij}=\partial_{ij}\mathbf{r}$. 向量

$$\mathbf{N} = \frac{1}{2} g^{ks} \nabla_k r_s,$$

确定了曲面的仿射法线方向，其中 ∇_k 是关于度量张量 g_{ij} 的共变导数. 仿射法线通过密切 Lie 二次曲面的中心，求导方程

$$\partial_j r_i = \overset{1}{\Gamma}{}^{k}_{ij} r_k + g_{ij} N$$

定义了曲面的第一类内蕴联络 $\overset{1}{\Gamma}{}^{k}_{ij}$. 同时还有第二类内蕴联络 $\overset{2}{\Gamma}{}^{k}_{ij}$，它由下列求导方程定义:

$$\partial_j v_i = \overset{2}{\Gamma}{}^{k}_{ij} v_k + A_{ij} v,$$

其中 v 是决定曲面的切平面的一个共变向量，它满足规范化条件 $\mathbf{N}v=1$. 在 А. П. Норден ([3])意义下，联络

$$\overset{1}{\Gamma}{}^{k}_{ij} \quad 和 \quad \overset{2}{\Gamma}{}^{k}_{ij}$$

关于张量 g_{ij} 是共轭的. 从张量

$$T^k_{ij} = \frac{1}{2}\left\{\overset{1}{\Gamma}{}^{k}_{ij} - \overset{2}{\Gamma}{}^{k}_{ij}\right\}$$

可构造下列三阶对称共变张量:

$$T_{ijk} = g_{ks} T^s_{ij}.$$

前者在**射影微分几何学** (projective differential geometry)中也起着重要作用. 还可以构造曲面的两个基本形式: 二次型(quadratic form)

$$\varphi = g_{ij} du^i du^j$$

和 Fubini - Pick 三次型(Fubini - Pick cubic form)

$$\psi = T_{ijk} du^i du^j du^k.$$

它们由从配极条件 (apolarity condition)

$$g^{ij} T_{ijk} = 0.$$

联系起来. 满足附加可微性条件的这两个形式，除差一等仿射变换外，唯一地确定曲面. 所有这些叙述在高维情形有类似的推广.

在仿射和等仿射空间中，可区分出许多特殊的曲面类: 仿射球面(其仿射法线构成一丛)，旋转仿射曲面(其仿射法线与一常义或广义直线相交)，仿射极小曲面等.

等仿射空间中除曲线和曲面外，还研究其他的几何对象，如直线汇和线丛，向量场等.

在三维和高维空间中，与等仿射微分几何学平行发展的还有一般仿射群及其子群的微分几何学(中心仿射、等中心仿射、辛仿射、双仿射等).

参考文献

[1] Blaschke, W., Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie, Affine Differentialgeometrie, 2, Springer, 1923.

[2] Salkowski, E., Affine Differentialgeometrie, W. de Gruyter, 1934.

[3] Норден, А. П., Пространства аффинной связности, М. - Л., 1950.

[4] Итоги науки. Геометрия, 1963, М., 1965, 3－64.

[5] Широков, П. А., Широков, А. П., Аффинная дифференциальная геометрия, М., 1959.

А. П. Широков 撰

【补注】 W. Blaschke 之后的仿射微分几何学的发展情况，见[A1].

参考文献

[A1] Simon, U., Zur Entwicklung der affine Differentialgeometrie nach Blaschke, in Wilhelm Blaschke gesammelte Werke, Vol. 4, Thales Verlag, 1985, 35－88.

【译注】

参考文献

[B1] 苏步青, 仿射微分几何, 科学出版社, 1982 (英译本: Buchin, S., Affine differential Geometry, Science

Press and Gordon & Breach Publishing Co., 1983).
[B2] 李安民、赵国松、仿射微分几何，四川教育出版社，1990.
沈一兵 译

仿射距离 [affine distance；аффинное расстояние]

在**等仿射平面**(equi-affine plane)上由两个线元素决定的一个不变量．一个点 M 和通过它的一条直线 m 一起称为一个线元素 (M,m)．对于两个线元素 (M,m) 和 (N,n)，其仿射距离是 $2f^{1/3}$，其中 f 是三角形 MNP 的面积而 P 是直线 m 与 n 的交点．对于切于抛物线的两个元素，其仿射距离等于该抛物线的仿射弧长(见**仿射参数**(affine parameter))．在三维等仿射空间中，仿射距离也可用两两关联的点、直线和平面构成的元素来定义．

А. П. Широков 撰
杨 路、张景中、侯晓荣 译

仿射几何学 [affine geometry；аффинная геометрия]

几何学的分支，其中研究图形在**仿射变换**(affine transformation)下不变的性质．例如，三点在一直线上这一简单关系，或直线(平面)的平行性．A.F. Möbius 在19世纪上半叶首先研究了这样的几何映象的性质，这些映象彼此是仿射变换的结果．但是，"仿射几何学"这一概念则是随着1872年**埃尔兰根纲领**(Erlangen program)的出现才产生的．依照这个纲领，每一个变换群有它自己的几何学，它们所研究的是图形在该群的变换下不变的性质．仿射变换群包含各种各样的子群．因此，除去一般的仿射几何学以外，产生了相应于这些子群的从属于仿射几何的几何学——**等仿射几何学**(equi-affine geometry)，**中心仿射几何学**(centro-affine geometry)，等等．仿射几何也研究对应于特殊变换子群的微分几何的问题(见**仿射微分几何学**(affine differential geometry))．

参考文献

[1] Александров, П. С., Лекции по аналитической геометрии…, М., 1968.
[2] Ефимов, Н. В., Высшая геометрия, 4 изд., М., 1961.

Е. В. Шикин 撰

【补注】[A1], [A2]是两个英文版参考文献．

参考文献

[A1] Borsuk, K., Multidimensional analytic geometry, PWN, 1969.
[A2] Meserve, B. E., Fundamental concepts of geometry, Addison-Wesley, 1955.

杨 路、张景中、侯晓荣 译

仿射群 [affine group；аффинная группа]

仿射空间(affine space)的基本变换群．它是射影群的一个子群，且可用这样的射影变换来表示，这些变换把射影空间的一个固定超平面映射到其自身(见**射影变换**(projective transformation))．

А. П. Широков 撰
杨 路、张景中、侯晓荣 译

仿射包 [affine hull；аффинная оболочка]，向量空间中集合 M 的

包含 M 的所有仿射线性子空间的交集．

В. А. Залгаллер 撰 陈公宁 译

仿射极小曲面 [affine minimal surface；аффинная минимальная поверхность]

仿射平均曲率为零的曲面．与普通极小曲面只包含鞍点不同，仿射极小曲面也可包含椭圆点．例如，椭圆抛物面仅由椭圆点组成，并且是仿射极小曲面．

Е. В. Шикин 撰

【译注】在等仿射几何中，仿射极小曲面是仿射不变面积变分问题的极值曲面．Calabi 曾计算仿射不变面积的第二变分([B1])，发现在很多重要情形下，它是负的．因此，他建议改称为仿射极大曲面．有关仿射极值曲面的研究还很不成熟．不少重要问题，如 Plateau 问题和仿射 Bernstein 问题，都尚未彻底解决，见[B1]和[B2]．

参考文献

[B1] Calabi, E., Hypersurfaces with maximal affinely invariant area, *Amer. J. Math.*, **104**(1982), 91－126.
[B2] Chern, S. S., Affine minimal hepersurfaces, *Proc. Jap.-U. S. Semin.*, Tokyo, 1977, 17－30.

沈一兵 译

仿射态射 [affine morphism；аффинный морфизм]

概形的态射 $f:X\to S$，使得 S 中每个开仿射子概形的原象也是一个**仿射概形**(affine scheme)．概形 X 称为仿射 S 概形(affine S-scheme)．

设 S 是一个概形，A 是 $\mathcal{O}_S$ 代数的拟凝聚层，U_i 是 S 内开仿射子概形，它们构成 S 的一个覆叠．那么把仿射概形 Spec $\Gamma(U_i,A)$ 粘合起来就确定一个仿射 S 概形，记为 Spec A．反之，可用仿射态射 $f:X\to S$ 定义的任何仿射 S 概形都同构于(作为 S 上概形)概形 Spec $f_*\mathcal{O}_X$．S 概形 $f:Z\to S$ 到仿射 S 概形 Spec A 中 S 态射的集合与 $\mathcal{O}_S$ 代数层的同态 $A\to f_*\mathcal{O}_Z$ 成一一对应．

概形的闭嵌入或仿射概形的任意态射都是仿射态射；仿射态射的其他例子是整态射以及有限态射．因而概形正规化的态射是仿射态射．仿射态射在复合及基变换下仍保持是仿射态射．

参考文献

[1] Grothendieck, A., The cohomology theory of abstract algebraic varieties, in Proc. Internat. Math. Congress Edinburgh, 1958, Cambridge Univ Press, 1960,

103–118.

[2] Dieudonné, J., Grothendieck, A., Elements de géometrie algébrique, *Publ. Math. IHES*, 4 (1960).

В. И. Данилов, И. В. Долгачев 撰

【补注】 $f: X \to S$ 称为有限态射 (finite morphism)，如果存在 S 的开仿射子概形的覆叠 (S_α)，使得对所有的 α，$f^{-1}(S_\alpha)$ 是仿射的，并且 $f^{-1}(S_\alpha)$ 的环 B_α 作为 S_α 的环 A_α 上的模是有限生成的．态射是整的，如果 B_α 在 A_α 上是整的，即每个 $x\in B_\alpha$ 都在 A_α 上是整的，这意指它是系数在 A_α 中的首一多项式的根，或等价地，对每个 $x\in B_\alpha$，模 $A_\alpha[x]$ 是有限生成 A_α 模．

参考文献

[A1] Hartshorne, R., Algebraic geometry, Springer, 1977

陈志杰 译

仿射法线 [affine normal; аффинная нормаль]

在仿射空间中，借助于超曲面的三阶微分邻域，在超曲面的每点以仿射不变方式所定义的直线；最本质的是超曲面的主二次型非蜕化．在平面曲线上一点 M 处的仿射法线重合于与曲线在点 M 有三阶切触的抛物线的直径，若利用相切的超二次曲面，则对于超曲面的仿射法线可作出类似的解释．特别地，一个超二次曲面的仿射法线与它的直径重合．

А. П. Широков 撰　沈一兵 译

仿射参数 [affine parameter; аффинный параметр]，仿射弧长 (affine arc length)

曲线在仿射群 (affine group) 变换下保持不变的参数，为了确定它，必须知道曲线位置向量的最低阶的导数．最熟知的仿射参数是关于等仿射变换不变的，即关于仿射么模群 (affine unimodular group) 不变的参数，对于平面曲线 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$，这个仿射参数可用下式计算：

$$s=\int_{t_0}^{t}|(\dot{\mathbf{r}},\ddot{\mathbf{r}})|^{1/3}\,dt,$$

其中 $(\dot{\mathbf{r}},\ddot{\mathbf{r}})$ 是向量 $\dot{\mathbf{r}}$ 和 $\ddot{\mathbf{r}}$ 的斜积．特别地，对于抛物线上一弧段 M_0M_1 的仿射长度，其仿射参数是 $s=2f^{\frac{1}{3}}$，其中 f 是由弦 M_0M_1 和抛物线在点 M_0 与 M_1 的切线所构成的三角形的面积．在一般仿射群或其任一子群的几何学中，用类似方法可引进空间曲线的仿射参数．

А. П. Широков 撰

【补注】 上述公式给出的弧长有时也称作特殊仿射弧长 (special affine arc length)．

测地线理论中也用到"仿射参数"的概念．在仿射联络下一条测地线 (geodesic)（自平行曲线）的仿射参数 (affine parameter) 是测地线的一种参数化表示 $x(t)$，使得相应的共变导数 ∇，有方程

$$\nabla_{\dot{x}(t)}\,\dot{x}(t)=0$$

（见[A3]）．

参考文献

[A1] Spivak, M., Differential geometry, 2, Publish or Perish, 1970.

[A2] 苏步青，仿射微分几何，科学出版社，1982（英译本：Buchin, S., Affine differential geometry, Science press and Gordon & Breach Publishing Co., 1983).

[A3] O'Neill, B., Semi-Riemannian geometry, Academic Press, 1983.

沈一兵 译　陈维桓 校

仿射伪距离 [affine pseudo-distance; аффинное псевдорасстояние]

数 $\rho=(\overline{MM^*},\mathbf{t})$，它等于向量 $\overline{MM^*}$ 与 $\mathbf{t}$ 的向量积的模，其中 M^* 是等仿射平面 (equi-affine plane) 上任一点，M 是平面曲线 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(s)$ 上一点，s 是曲线的仿射参数，$\mathbf{t}=d\mathbf{r}/ds$ 是曲线在点 M 的切向量．这个数 ρ 称为从 M^* 到 M 的仿射伪距离．若固定 M^* 不动，而 M 沿曲线运动，则 M^* 到 M 的仿射伪距离取到临界值，当且仅当 M^* 位于曲线在点 M 的仿射法线上．在等仿射空间中，对于给定超曲面，仿射伪距离可用类似方式定义．

А. П. Широков 撰　沈一兵 译

仿射概形 [affine scheme; аффинная схема]

仿射簇 (affine variety) 概念的推广，在概形论中起着局部对象的作用．设 A 是有单位元的交换环．一个仿射概形由拓扑空间 Spec A 和 Spec A 上的一个环层 $\widetilde{A}$ 组成，这里的 Spec A 是 A 的所有素理想（称为仿射概形的点 (points of the affine scheme)）的集合，被赋予 **Zariski 拓扑** (Zariski topology)（或类似地，赋予谱拓扑），这个拓扑的开集基由子集 $D(f)=\{\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}\,A: f\notin\mathfrak{p}\}$ 组成，其中 f 遍取 A 的元素．局部环的层 $\widetilde{A}$ 用条件 $\Gamma(D(f),\widetilde{A})=A_f$ 定义，这里 A_f 是环 A 关于乘法系 $\{f^n\}_{n\geq 0}$ 的局部化，见**交换代数的局部化** (localization in a commutative algebra)．

仿射概形首先由 A. Grothendieck 引进（[1]），他创立了概形论．概形 (scheme) 就是局部同构于仿射概形的环化空间．

若环 A 是 Noether 的（或相应地，整的，无幂零元的，整闭的，正则的），则仿射概形 Spec$A$ 称为 Noether 的 (Noetherian)（或相应地，整的 (integral)，约化的 (reduced)，正规的 (normal)，正则的 (regular)）．仿射概形称为连通的 (connected)（或相应地，不可约的 (irreducible)、离散的 (discrete)、拟紧的 (quasi-compact)），如果拓扑空间 Spec$A$ 也具有相应的性质．仿射概形的空间 Spec$A$ 总是紧的（通常不是 Hausdorff 的）．

如果把仿射概形的态射作为局部环化空间的态射，那么仿射概形成为一个范畴．每个环同态 $\varphi: A\to B$ 可

按以下方式定义仿射概形的态射：(Spec B, $\widetilde{B}$) → (Spec A, $\widetilde{A}$)，它由连续映射 ${}^a\varphi$: Spec B → Spec A(${}^a\varphi(\mathfrak{p})=\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ 对 $\mathfrak{p}\in$ Spec B)以及环层的同态 $\widetilde{\varphi}: \widetilde{A} \to {}^a\varphi_* \widetilde{B}$ 构成，后者把层 $\widetilde{A}$ 在集 $D(f)$ 上的截面 a/f 变换成截面 $\varphi(a)/\varphi(f)$. 从任意概形 $(X, \mathcal{O}_X)$ 到仿射概形 (Spec A, $\widetilde{A}$) 内的态射(它也称为 Spec$A$ 的 X 值点 (X - valued point)) 与环同态 $A \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ 一一对应；因此对应 $A \to$ (Spec A, $\widetilde{A}$) 是从有单位元的交换环的范畴到仿射概形范畴内的一个反变函子，它建立了这些范畴的反等价性. 特别地，在仿射概形的范畴里，存在有限直和与纤维积，它们对偶于环的直和与张量积的构造，与环的满同态对应的仿射概形的态射称为仿射概形的闭嵌入 (closed imbedding of affine schemes).

仿射概形的最重要的例子是仿射簇；其他例子是仿射群概形 (group scheme).

类似于层 $\widetilde{A}$ 的构造，对于 A 模 M 也可构造 Spec A 上的 $\widetilde{A}$ 模层 $\widetilde{M}$

$$\Gamma(D(f), \widetilde{M}) = M_f = M \otimes_A A_f.$$

这样的层称为拟凝聚的. A 模的范畴等价于 Spec A 上 $\widetilde{A}$ 模的拟凝聚层的范畴；射影模对应于局部自由层. 仿射概形上拟凝聚层的上同调空间由 Serre 定理 (Serre theorem) 描述：

$$H^q(\mathrm{Spec}A, \widetilde{M}) = 0 \ , \ \text{如果} \ q > 0.$$

这个定理的逆 (仿射性的 Serre 准则) 断言，如果 $(X, \mathcal{O}_X)$ 是紧可分概形且对任何拟凝聚 $\mathcal{O}_X$ 模层 F 有 $H^1(X, F) = 0$，则 X 是仿射概形. 也存在仿射性的其他准则 ([1], [4]).

参考文献

[1] Grothendieck, A. amd Dieudonné, J., Eléments de géométrie algébrique, *Publ. Math. IHES*, 4(1960).

[2] Dieudonné, J., Algebraic geometry, *Adv. in Math.*, 1 (1969), 233－321.

[3] Манин, Ю. И., Лекции по алгебраической геометрии, ч. 1, М., 1970.

[4] Goodman, J. and Hartshorne, R., Schemes with finitedimensional cohomology groups, *Amer. J. Math.*, **91** (1969), 258－266.

В. И. Данилов, И. В. Долгачев 撰

【补注】 当然，参考文献 [A1] 是标准的. 它取代了 [3]. 而 [A2] 则可取代 [1].

参考文献

[A1] Hartshorne, R., Algebraic geometry, Springer, 1977.

[A2] Grothendieck, A. and Dieudonné, J., Eléments de géométrie algébrique, 1, Springer, 1971.

陈志杰 译

仿射空间 [**affine space**; **аффинное пространство**]，域 k 上的一个集合 A (其元素被称为仿射空间的点)，它对应于 k 上的一个向量空间 L (称为 A 的相伴空间) 和一个由集合 $A\times A$ 到空间 L 且具有下述性质的映射 (元素 $(a, b)\in A\times A$ 的象由 $\overrightarrow{ab}$ 表示，称为具有起点 a 和终点 b 的向量)：

a) 对于任意固定的点 a，映射 $x \to \overrightarrow{ax}$ $(x\in A)$ 是 A 到 L 上的一个双射；

b) 对任意点 $a, b, c\in A$，关系

$$\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} + \overrightarrow{ca} = \overrightarrow{0}$$

成立，其中 $\overrightarrow{0}$ 表示零向量. 仿射空间 A 的维数取为 L 的维数. 点 $a\in A$ 和向量 $l\in L$ 定义了另一个点，记为 $a+l$，即空间 L 的向量加法群自由和可迁地作用于对应于 L 的仿射空间.

例 1) 空间 L 的向量集是一仿射空间 $A(L)$，它的相伴空间就是 L. 特别地，纯量域是一个维数为 1 的仿射空间，如果 $L=k^n$，则 $A(k^n)$ 称为域 k 上的 n 维仿射空间 (n - dimensional affine space)，且其点 $a=(a_1, \cdots, a_n)$ 和 $b=(b_1, \cdots, b_n)$ 确定向量 $\overrightarrow{ab}=(b_1-a_1, \cdots, b_n-a_n)$.

2) 域 k 上的射影空间中任一超平面的余是一仿射空间.

3) 线性 (代数或微分) 方程组的解集是一仿射空间，其相伴空间是对应齐次方程组的解空间.

仿射空间 A 的一子集 A' 称为 A 的一仿射子空间 (affine subspace) (或线性流形 (linear manifold))，是指向量 $\overrightarrow{ab}$ $(a, b\in A')$ 的集合形成 L 的子空间. 每一仿射子空间 $A'\subset A$ 有形式 $a+L'=\{a+l : l\in L'\}$，这里 L' 是 L 的某个子空间，而 a 是 A' 的任一元素.

仿射空间 A_1 和 A_2 之间的映射 $f: A_1 \to A_2$ 称为仿射的 (affine)，指存在相伴向量空间的一个线性映射 $\varphi: L_1 \to L_2$，使得对于所有 $a\in A_1$, $l\in L_1$ 有 $f(a+l)=f(a)+\varphi(l)$. 双射仿射映射称为仿射同构 (affine isomorphism). 所有相同维数的仿射空间互相同构.

仿射空间 A 到其自身的仿射同构形成一个群，称为仿射空间 A 的仿射群 (affine group)，记为 Aff(A). 仿射空间 $A(k^n)$ 的仿射群记为 $\mathrm{Aff}_n(k)$，每一元素 $f\in \mathrm{Aff}_n(k)$ 由公式

$$f((a_1, \ldots, a_n)) = (b_1, \ldots, b_n)$$

给出，其中

$$b_i = \sum_j a_i^j a_j + c_i,$$

(a_i^j) 是可逆矩阵. 仿射群 Aff(A) 包含一不变子群，称为 (平行) 移动子群 (subgroup of (parallel) translations)，它由那样的映射 $f: A\to A$ 所组成，其对应的 $\varphi: L\to L$ 是恒等映射. 这个群同构于向量空间 L 的加群. 映射 $f\to\varphi$ 定义一个 Aff(A) 到一般线性群 GL 的满同

态，以平移子群为其核．如果L是一Euclid空间，那么正交群的前象称为Euclid运动子群(subgroup of Euclidean motions)．特殊线性群SGL的前象称为等仿射子群(equi-affine subgroup)(见仿射幺模群(affine unimodular group))．对于给定的$a\in A$和任意$l\in L$，使得$f(a+l)=a+\varphi(l)$的那些映射$f:A\to A$所组成的子群$G_a\subset \mathrm{Aff}_n(A)$称为中心仿射子群(centro-affine subgroup)；它同构于空间L的一般线性群GL．

在代数几何中，**仿射代数集**(affine algebraic set)常称为仿射空间．有限维的仿射空间能配备一个带有Zariski拓扑的**仿射簇**(affine variety)结构(亦见**仿射概形**(affine scheme))．

与非交换域k上的向量空间相伴的仿射空间由类似的方式构成．

参考文献

[1] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Algebra: Algebraic structures. Linear algebra, 1, Addison-Wesley, 1974, Chapt. 1; 2(译自法文).

И. В. Долгачев　А. П. Широков 撰

【补注】 仿射同构也称为仿射直射变换(affine collineation)，等仿射群也称为Euclid群(Euclidean group)，

参考文献

[A1] Berger, M., Geometry, 1, Springer, 1987, Chapt. 2 (中译本:M. 贝尔热，几何，1，科学出版社，1987).

杨　路、张景中、侯晓荣 译

仿射球面 [affine sphere; аффинная сфера]

仿射法线(affine normal)相交于一点的曲面．若此交点在无穷远处(或者说是伪的)，则该仿射球面称为伪的(improper)；否则称为真的(proper)．特别地，任何二阶曲面都是仿射球面．伪的凸仿射球面是椭圆抛物面．

E. B. Шикин 撰

【译注】 伪仿射球面也称为抛物型仿射球面，它的法线也可说成是平行的．椭圆型和双曲型仿射球面都是真仿射球面．整体仿射微分几何学的重要课题之一是完全仿射球面的分类．E. Calabi、丘成桐，郑绍远，A. B. Погорелов, T. Sasaki等人对此做出了重要贡献([B1])．李安民在[B2]的基础上，最终彻底解决了关于完全仿射球的Calabi猜想([B3])．

参考文献

[B1] 李安民、赵国松，仿射微分几何，四川教育出版社，1990.

[B2] Cheng, S.Y. and Yau, S.T., Complete affine hypersurfaces, Part I., *Comm. Pure Appl. Math*, **39** (1986), 839-866.

[B3] Li, A. M., Calabi conjecture on hyperbolic affine hyperspheres, *Math. Z.*, **203** (1990), 483-491.

沈一兵 译

仿射张量 [affine tensor; аффинный тензор]

p重n维向量空间E_n与q重对偶向量空间E_n^*的张量积(tensor product)的元素．这种张量称为(p,q)型的，数$p+q$为张量的价或次．一旦选定E_n的基$\{\mathbf{e}_i\}$，借助于n^{p+q}个分量$T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}$就可以定义一个$(p,q)$型仿射张量，这里$T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}$随着基$\mathbf{e}'_i=A_i^s\mathbf{e}_s$的变化按公式

$$T'^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}=A'^{i_1}_{k_1}\cdots A'^{i_p}_{k_p}A^{l_1}_{j_1}\cdots A^{l_q}_{j_q}T^{k_1\cdots k_p}_{l_1\cdots l_q}$$

进行变换，其中$A_j^sA_s'^i=\delta_j^i$．通常说张量的分量关于上标实行反变变换，关于下标实行共变变换．

A. П. Широков 撰

【补注】 上面所描述的仿射张量通常简称为张量(tensor).

参考文献

[A1] Dubrovin, B. A., Fomenko, A. T. and Novikov, S. T., Modern geometry-methods and applications, Springer, 1984 (译自俄文).

[A2] Greub, W. H., Multilinear algebra, Springer, 1967.

[A3] Dodson, C. T. J. and Poston, T., Tensor geometry, Pitman, 1977.

龚明鹏 译

仿射挠率 [affine torsion; аффинное кручение]

等仿射空间中曲线的微分不变量之一：

$$\tau=-(\mathbf{r}'',\mathbf{r}''',\mathbf{r}''''),$$

其中撇"′"表示关于曲线位置向量的仿射参数的微分．对于具有其他基本群(如中心仿射群)的空间中的曲线，引入了类似的概念．

【补注】

参考文献

[1] 苏步青，仿射微分几何，科学出版社，1982 (英译本:Buchin, S., Affine differential geometry, Science Press and Gordon & Breach Publishing Co., 1983).

A. П. Широков 撰　沈一兵 译

仿射变换 [affine transformation; аффинное преобразование], Euclid空间的

平面或空间到它自身的一一点映射，使得一直线上的三点所对应的三点也在一直线上．因此，通过仿射变换，直线变换成直线．平面的仿射变换把相交线变换成相交线，平行线变换成平行线．空间的仿射变换导致把每一个平面映到某个平面的仿射映射；它把相交平面映射成相交平面，平行平面映射成平行平面．此外，两条直线的相互定位也被保持：相交直线被映射成相交直线，平行直线被映射成平行直线，偏斜线

被映射成偏斜线．

在仿射变换下，位于同一直线或平行直线上的有向线段的比等于它们映象的比．（在 Euclid 平面内）两个可测图形的面积比以及（在 Euclid 空间中）两个可测体的体积比也被保持．在仿射变换下，平面（空间）的一组向量被一一映射成平面（空间）的一组向量，并且这个映射是线性的．在一个仿射坐标系中，仿射变换由非退化（非齐次）**线性变换**（linear transformation）定义．因此，在平面的情形，一个仿射变换由以下公式解析地表示：

$$x' = c_{11}x + c_{12}y + c_{13},$$
$$y' = c_{21}x + c_{22}y + c_{23},$$

且有附加条件

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

空间的仿射变换用类似的方式定义．

在仿射变换下，代数曲线变成代数曲线，且保持该曲线的阶．特别地，二阶曲线变成二阶曲线．此外，椭圆变成椭圆、双曲线变成双曲线，抛物线变成抛物线，等等．

仿射变换的例子：等距变换，相似变换，平面对一直线的均匀收缩．平面中每一仿射变换是一个等距变换和两个对两条互相垂直的直线的均匀收缩的乘积．空间中每一仿射变换是一个等距变换和三个对于两两垂直的三张平面的均匀收缩的乘积．

仿射变换形成一个群；相似变换构成这个群的一个子群；等距变换的集是相似变换群的一个子群．

仿射变换是保持直线的最一般的平面（空间）到其自身的一一映射．

参考文献

[1] Александров, П. С., Лекции по аналитической геометрии ···, М., 1968.

[2] Постников, М. М., Аналитическая геометрия, М., 1973.

A. C. Пархоменко 撰

【补注】 如同上面采用坐标，则相似变换有形式

$$x' = c_{11}x + c_{12}y + c_{13}, \quad y' = -ec_{12}x + ec_{11}y + c_{23}.$$

而位似变换有形式 $x' = c_{11}x + c_{13}$，$y' = c_{22}y + c_{23}$．这构成了仿射变换群的另一个有趣子群．

参考文献

[A1] Coxeter, H. S. M., Introduction to geometry, Wiley, 1961.

[A2] Meserve, B. E., Fundamental concepts of geometry, Addison-Wesley, 1955.

杨 路、张景中、侯晓荣 译

仿射幺模群［**affine unimodular group**；**аффинная унимодулярная группа**］，亦称均匀仿射群（equi-affine group）

一般仿射群（affine group）的子群，由 n 维仿射空间中满足 $\det(A)=1$ 的仿射变换

$$x \mapsto \bar{x} = Ax + a \qquad (*)$$

组成．若把向量 x 和 $\bar{x}$ 看成 n 维 Euclid 空间 E^n 中点的直角坐标，则变换（*）保持 E^n 中的 n 维区域的体积不变．由此能在具有基本仿射幺模群的均匀仿射空间中引入体积的概念．若在（*）中令 $a=0$，则得到中心仿射幺模变换群，它同构于全体行列式为 1 的 n 阶矩阵的群．这样的矩阵群称为 n 阶幺模群（unimodular group）或 n 阶特殊线性群（special linear group），用 $SL(n)$ 表示．

A. П. Широков 撰　石生明 译　许以超 校

仿射簇［**affine variety**；**аффинное многообразие**］，仿射代数簇（affine algebraic variety）

仿射代数集（affine algebraic set）概念的推广．仿射簇是域 k 上有限型的约化**仿射概形**（affine scheme）X，即 $X=\mathrm{Spec}\,A$，其中 A 是没有幂零元的有限型交换 k 代数．设 $k[T_1,\cdots,T_n]$ 为 k 上多项式环，仿射簇 $X=\mathrm{Spec}\,k[T_1,\cdots,T_n]$ 称为 k 上仿射空间（affine space），记为 $\mathbf{A}_k^n$．仿射概形是仿射簇当且仅当它同构于仿射空间的一个约化闭子概形．k 代数 A 的每个生成元系 $x_1,\cdots,x_n$ 都能用公式 $\varphi(T_i)=x_i$ 定义一个满同态 $\varphi: k[T_1,\cdots,T_n] \to A$．设 $\bar{k}$ 是 k 的代数闭包．由理想 $\ker\varphi$ 的所有多项式的公共零点组成的集合 $\bar{k}^n$ 的子集是 k 上仿射代数集．这种仿射代数集的坐标环同构于环 A．反之，k 上每个仿射代数集定义一个代数簇 $\mathrm{Spec}\,k[X]$，这里 $k[X]$ 是 X 的坐标环．仿射簇的点集与相应的仿射代数集的不可约子簇一一对应．

对于每个仿射簇 $X=\mathrm{Spec}\,A$ 可以建立 k 代数范畴上的一个函子，它由下述对应定义

$$B \to X(B) = \mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(A, B).$$

当 $B=\bar{k}$（相应地，$B=k$）时，集合 $X(\bar{k})$（相应地，$X(k)$）的元素称为 X 的几何点（geometric point）（相应地，有理点（rational point））．集合 $X(\bar{k})$ 与环 A 的极大理想集 $\mathrm{Specm}(A)$，并与坐标环同构于 A 的代数集 V 的点集成一一对应，空间 X 的谱拓扑在它的处处稠密的子集 $\mathrm{Specm}(A)$ 上诱导一个拓扑，它对应于 V 上的 Zariski 拓扑．

И. В. Долгачев 撰

【补注】 "簇"这个名字往往指代数闭域上有限形的约化不可约概形．

参考文献

[A1] Shafarevich, I. R., Basic algebraic geometry, Springer, 1977（译自俄文）．

陈志杰 译

仿射 [**affinity**; **аффинитет**]

仿射变换 (affine transformation) 的简称，定义为非退化线性代换

$$\tilde{x}^i = A^i_j x^j + a^i.$$

А. П. Широков 撰

杨 路、张景中、侯晓荣 译

仿射量 [**affinor**; **аффинор**]

(1,1) 型**仿射张量** (affine tensor)．给定分量为 f^i_j 的仿射量相当于给定由法则 $v^i = f^i_j v^j$ 确定的相应向量空间的一个自同态．恒等自同态对应于唯一的仿射量．每个仿射量联系着一个矩阵 $\|f^i_j\|$，这种对应关系建立了仿射量代数与矩阵代数之间的同构关系．在文献中有时把仿射量定义为一般 (仿射) 张量．

А. П. Широков 撰

【补注】 这里所考虑的即是线性代数的同构 $V \otimes V \simeq \mathrm{End}(V)$.

龚明鹏 译

复数的标记 [**affix of a complex number**; **аффикс комплексного числа**]

复数 $z = a + bi$ 在其几何表示中的标记，指的是复平面上与这个复数对应的点，即具有 Descartes 坐标 (a, b) 的点，有时把复数的标记看成复数本身．

张鸿林 译

Airy 方程 [**Airy equation**; **Эйри уравнение**]

二阶线性常微分方程

$$y'' - xy = 0.$$

它最初出现在 G. B. Airy 的光学研究中 ([1])．它的通解可以用 ±1/3 阶的 **Bessel 函数** (Bessel functions) 来表示：

$$y(x) = c_1\sqrt{x}J_{1/3}\left[\frac{2}{3}ix^{3/2}\right] + $$
$$+ c_2\sqrt{x}J_{-1/3}\left[\frac{2}{3}ix^{3/2}\right].$$

因为 Airy 方程在各种物理、力学问题以及渐近分析中起着重要作用，所以把它的解划为专门的一类特殊函数 (见 **Airy 函数** (Airy functions))．

复平面 z 上的 Airy 方程

$$w'' - zw = 0$$

的解具有下述基本性质：

1) 每个解都是 z 的整函数，能够表示为幂级数

$$w(z) = w(0)\left[1 + \frac{z^3}{2\cdot 3} + \frac{z^6}{(2\cdot 3)\cdot(5\cdot 6)} + \cdots\right] +$$
$$+ w'(0)\left[z + \frac{z^4}{3\cdot 4} + \frac{z^7}{(3\cdot 4)\cdot(6\cdot 7)} + \cdots\right],$$

它对于一切 z 收敛．

2) 如果 $w(z) \not\equiv 0$ 是 Airy 方程的解，则 $w(\omega z)$ 和 $w(\omega^2 z)$ 也是它的解，这里 $\omega = e^{2\pi i/3}$，其中任何两个解都是线性无关的，下列恒等式成立：

$$w(z) + w(\omega z) + w(\omega^2 z) \equiv 0.$$

参考文献

[1] Airy, G. B., On the intensity of light in the neighbourhood of a caustic, *Trans. Cambridge Philos. Soc.*, 6 (1838), 379–402.

[2] Бабич, В. М., Булдырев, В. С., Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн, М., 1972.

[3] Abramowitz, M and Stegun, I. A. (eds.), Hand-book of mathematical functions, Appl. Math. Series. Vol 55, Nat Bureau of Standards, 1946.

М. В. Федорюк 撰 张鸿林 译

Airy 函数 [**Airy functions**; **Эйри функции**]

Airy 方程 (Airy equation) 的特解．

第一 Airy 函数 (或简称 Airy 函数) 定义为

$$\mathrm{Ai}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) dt.$$

对于复数 z，

$$\mathrm{Ai}(z) = \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \exp\left(zt - \frac{t^3}{3}\right) dt,$$

其中 $\gamma = (\infty e^{-2\pi i/3}, 0] \cup [0, +\infty]$ 是复平面 t 上的周线．第二 Airy 函数定义为

$$\mathrm{Bi}(z) = i\omega^2 \mathrm{Ai}(\omega^2 z) - i\omega \mathrm{Ai}(\omega z), \quad \omega = e^{2\pi i/3}.$$

对于实数 x，函数 $\mathrm{Ai}(x)$ 和 $\mathrm{Bi}(x)$ 是实函数．

另一类 Airy 函数是 В. А. Фок 引入的：

$$v(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{Ai}(z),$$
$$w_1(z) = 2e^{i\pi/6}v(\omega z),$$
$$w_2(z) = 2e^{-i\pi/6}v(\omega^{-1}z);$$

在这种情况下，$v(z)$ 称为 Airy - Фок 函数 (Airy - Fok function) (Airy - Фок 函数 (Airy - Fock function))．下列恒等式成立：

$$v(z) = \frac{w_1(z) - w_2(z)}{2i}, \quad \overline{w_1(z)} = w_2(\bar{z}). \tag{1}$$

函数 $v(z)$，$w_1(z)$ 和 $w_2(z)$ 中的任何两个都是线性无关

的.

最重要的 Airy 函数是 $v(z)$(或 $\mathrm{Ai}(z)$). 它沿实轴的渐近性质由下式给出:

$$v(x) = \frac{1}{2}\frac{x^{-1/4}}{\sqrt{\pi}}\exp\left[-\frac{2}{3}x^{3/2}\right][1+O(x^{-3/2})],$$

$$x \to +\infty,$$

$$v(x) = \frac{|x|^{-1/4}}{\sqrt{\pi}}\left[\sin\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2}+\frac{\pi}{4}\right)\right.$$

$$\left. + O(|x|^{-3/2})\right], \quad x \to -\infty,$$

因此, 当 $x>0$, $x \gg 1$ 时 $v(x)$ 迅速减小, 而当 $x<0$, $|x| \gg 1$ 时 $v(x)$ 强烈振动. 当 $x \to +\infty$ 时, 函数 $w_1(x)$ 和 $w_2(x)$ 按指数方式增加. 对于复数 z, Airy 函数具有下列渐近展开式: 当 $|z| \to \infty$ 时,

$$v(z) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}}z^{-1/4}\exp\left[-\frac{2}{3}z^{3/2}\right] \times \tag{2}$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n z^{-3n/2}, \text{对 } |\arg z| \leqslant \pi - \varepsilon,$$

$$w_1(z) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}}z^{-1/4}\exp\left[\frac{2}{3}z^{3/2}\right] \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty}a_n z^{-3n/2}, \text{对 } \left|\arg z - \frac{\pi}{3}\right| \leqslant \pi - \varepsilon,$$

其中

$$a_n = \frac{\Gamma\left(3n+\frac{1}{2}\right)9^{-n}}{(2n)!}.$$

函数 $w_2(z)$ 的渐近展开式具有形式(2),但只在扇形

$$\left|\arg\left(z+\frac{\pi}{3}\right)\right| \leqslant \pi - \varepsilon$$

中成立,这里, $\varepsilon \in (0,\pi)$ 是任意数,分枝 $\sqrt{z}$ 和 $\sqrt[4]{z}$ 在半轴 $(0,\infty)$ 上是正的,其渐近展开式关于 $\arg z$ 一致成立,并且能够逐项微分任意次. 在其余的扇形 $|\arg(-z)| < \varepsilon$ 中, 函数 $v(z)$ 的渐近展开式可以利用(1)通过 $w_1(z)$ 和 $w_2(z)$ 的渐近展开式来表示; 因此 $v(z)$ 的渐近展开式在复 z 平面的不同扇形中具有不同的形式. 这个事实是 G. G. Stokes 首先证明的([2]), 因此称为 Stokes 现象 (Stokes phenomenon).

在研究下列形式的快速振动函数的积分时便出现 Airy 函数:

$$I(\lambda,\alpha) = \int_a^b e^{i\lambda S(x,\alpha)}f(x,\alpha)\,dx,$$

对于 $\lambda>0$, $\lambda \to +\infty$. 这里, f 和 S 是光滑函数, S 是实的, α 是实参数. 如果对于微小的 $\alpha \geqslant 0$, 相 S 具有两个邻近的非退化平稳点 $x_1(\alpha)$ 和 $x_2(\alpha)$, 且当 $\alpha=0$ 时二者重合, 例如, 如果

$$S(x,\alpha) = \alpha x - x^3 + O(x^4), \text{当 } x \to 0 \text{ 时},$$

则对于微小的 $\alpha \geqslant 0$, 当 $\lambda \to +\infty$ 时, 这个积分在点 $x=0$ 的邻域的渐近值, 可以通过 Airy 函数 v 及其导数来表示(见[6]). 在研究单焦点附近的短波场时往往会出现这种积分(见[7]和[8]); 因而在研究这个问题时会产生 Airy 函数([1]).

考虑二阶微分方程

$$y'' + \lambda^2 q(x) y = 0, \tag{3}$$

其中 $q(x)$ 是区间 $I=[a,b]$ 上的光滑实值函数, $\lambda>0$ 是大参数. 函数 $q(x)$ 的零点称为方程(3)的转向点(turning points)(或转移点(transfer points)). 设

$$a < x_0 < b, \ q(x_0) = 0, \ q'(x_0) \neq 0$$

(这样的点称为简单的(simple)), 则

$$q(x) \neq 0, \text{ 当 } x \in I, x \neq x_0 \text{ 时}, \ q'(x_0) > 0.$$

设

$$\xi(x) = \left[\frac{2}{3}\int_{x_0}^{x}\sqrt{q(t)}\,dt\right]^{2/3}, \quad \operatorname{sign}\xi(x) = \operatorname{sign}(x-x_0),$$

则

$$Y_0(x) = (\xi'(x))^{-1/2}\mathrm{Ai}(-\lambda^{2/3}\xi(x)),$$
$$Y_1(x) = (\xi'(x))^{-1/2}\mathrm{Bi}(-\lambda^{2/3}\xi(x)).$$

方程(3)具有线性无关的解 $y_0(x)$ 和 $y_1(x)$, 使得当 $\lambda \to +\infty$ 时,

$$y_j(x) = Y_j(x)\left[1+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right], \quad a \leqslant x \leqslant x_0, \ j=0,1,$$

$$y_0(x) = Y_0(x)\left[1+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right] + Y_1(x)O\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

$$y_1(x) = Y_1(x)\left[1+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right] + Y_0(x)O\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

$$x_0 \leqslant x \leqslant b,$$

关于 x 一致成立.

这个结果已从各方面推广: 关于解的渐近级数已经得到; $q=q(x,\lambda)$ 的情况已被研究(例如, 如果 $q(x,\lambda)$ 可以展开为渐近级数 $q \sim \sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n}q_n(x)$, $\lambda \to +\infty$); 在多重转向点附近解的渐近性状也已考察. 另一些推广涉及到方程

$$w'' + \lambda^2 q(z) w = 0, \tag{4}$$

其中函数 $q(z)$ 在复 z 平面的区域 D 中是解析的, 设 l 是

等高线

$$\mathrm{Re}\int_{z_0}^{z}\sqrt{q(t)}\,dt = 0$$

的从转向点 z_0 出发且不包含其他转向点的最大连通分支;这时,l 称为 Stokes 线(Stokes line). 如果 $q=-z$ (即(4)是 Airy 方程),则 Stokes 线是射线 $(-\infty,0)$ 和 $(0, e^{\pm i\pi/3})$. 类似地,如果 z_0 是(4)的简单转向点,则存在三条从 z_0 出发的 Stokes 线 l_1, l_2 和 l_3, 在 z_0 处相邻两线之间的夹角等于 $2\pi/3$, 设 S_j 是点 z_0 的邻域, 从中除去了 Stokes 线 $l_j (j=1,2,3)$ 的邻域. 如果把 S_j 适当编号,则方程(4)具有三个解 $\tilde{w}_j(z) (j=1,2,3)$, 使得当 $\lambda\to+\infty$ 时

$$\tilde{w}_j(z) \sim \frac{1}{\sqrt{\xi(z)}} v(-\lambda^{2/3}\omega^j\xi(z)), \quad \omega = e^{2\pi i/3},$$

其中 $z\in S_j$.

当研究高阶常微分方程和方程组在简单转向点附近的渐近解时,也会出现 Airy 函数.

参考文献

[1] Airy, G. B., *Trans. Cambridge Philos. Soc*, **6** (1838), 379-402.

[2] Stokes, G. G., *Trans. Cambridge Philos. Soc.*, **10** (1857), 105-128.

[3] Фок, В. А., Таблицы функций Эйри, М., 1946.

[4] Segun, A. and Abramowitz, M., Handbook of mathematical functions, Appl. Math. Ser., Vol. 55, Nat. Bur. Stand., 1970.

[5] Бабич, В. М., Булдырев, В. С., Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн, М., 1972.

[6] Федорюк, М. В., Метод перевала, М., 1977

[7] Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М., Теория волн, 6 изд., М., 1976 (英译本: Landau, L. D. and Lifshitz, E. M., The classical theory of fields, Addison-Wesley, 1951).

[8] Маслов, В. П., Федорюк, М. В., Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики, М., 1976.

[9] Дородницын, А. А., «Успехи матем. наук», 6 (1952), 7, 3-96.

[10] Wasow, W., Asymptotic expansions for ordinary differential equations, Interscience, 1965.

[11] Федорюк, М. В., Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, М., 1983.

М. В. Федорюк 撰

【补注】 Airy 函数可以通过修正的第三类 **Bessel 函数** (Bessel functions)来表示:

$$\mathrm{Ai}(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{3}}\sqrt{x}\;K_{1/3}\left[\frac{2}{3}x^{2/3}\right].$$

函数 Ai(z) 满足微分方程 $w''(z)=zw(z)$, 见[A2].

参考文献

[A1] Olver, F. W. J., Asymptotics and special functions, Acad. Press, 1974.

[A2] Lebedev, N. N., Special functions and their applications, Dover, reprint, 1972 (译自俄文).

张鸿林 译 蒋正新 校

Aitken 格式 [Aitken scheme; Эйткена схема]

在逐次应用公式

$$L_k(x) = L_{(0,\ldots,k)}(x) = \tag{*}$$

$$= \frac{1}{x_k-x_0}\begin{vmatrix} L_{(0,\ldots,k-1)}(x) & x_0-x \\ L_{(1,\ldots,k)}(x) & x_k-x \end{vmatrix}, \quad k=1,2,\ldots$$

的基础上,计算关于节点 $x_0, \cdots, x_n$ 的插值多项式 $L_n(x)$ 在点 x 处之值的方法,其中 $L_{(l,\ldots,m)}(x)$ 是以 $x_l, \cdots, x_m$ 为插值节点的插值多项式, 特别地有 $L_{(i)}(x)=f(x_i)$ (见**插值公式**(interpolation formula)).应用(*)的计算过程,当两个次数接邻的插值多项式之值在所要求的小数位数之内相一致时,即可终止.对于以表格形式给出的函数, 经重新编排插值节点的序号使得 $|x-x_i|$ 递增, Aitken 格式是便于对其进行插值的.

参考文献

[1] Березин, И. С., Жидков, Н. П., Методы вычислений, 3 изд., т. 1, М., 1966 (英译本: Berežin, I. S. and Zhidkov, N. P., Computing methods. 1, Pergamon Press, 1973).

[2] Бахвалов, Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975 (英译本: Bakhvalov, N. S., Numerical methods: analysis, algebra, ordinary differential equations, Mir, 1977).

М. К. Самарин 撰

【补注】 Aitken 在[A1]中发表了他的方法的要旨.当必须在同一范围内实行若干个插值时,Aitken 格式是不利的. 在这种情形中, Lagrange 多项式的计算可用在 Newton 插值公式的构造中使用均差的方法来替代.

参考文献

[A1] Aitken, A. C., On interpolation by iteration of proportional pasts, without the use of differences, *Proc. Edingburgh Math. Soc.*, **3** (1932), 2, 56-76.

[A2] Hildebrand, F. B., Introduction to numerical analysis, McGraw-Hill, 1974.

李家楷 译

Albanese 簇 [Albanese variety; Альбанезе многообразие]

典范地关联于代数簇 X 的 **Abel 簇** (Abelian variety) Alb (X), 它是以下万有问题的解: 存在态射 $\varphi: X\to \mathrm{Alb}(X)$, 使得 X 到 Abel 簇 A 内的任何态射 $f: X\to A$ 都可分解为积 $f=\tilde{f}\cdot\varphi$, 这里 $\tilde{f}: \mathrm{Alb}(X)\to A$ (这样命名是纪念 G. Albanese). 若 X 是复数域上非奇异完全簇, 则 Albanese 簇可如下描述: 设 Ω^1 是 X 上处处正则的一次微分形式的空间. 拓扑空间 X 的每个一维闭链 γ 决定 Ω^1 上的线性函数 $\omega\to\int_\gamma\omega$, 映射 $H_1(X, \mathbf{Z})$

→ $(\Omega^1)^*$ 的象成为 $(\Omega^1)^*$ 内的一个格 Γ，商空间 $(\Omega^1)^*/\Gamma$ 与 X 的 Albanese 簇相同．从代数观点来看，Albanese 簇可看成在 X 的 0 次零维闭链的群 Z 的某个商群上定义代数结构的一个方法．若 X 是非奇异完全代数曲线，则它的 Picard 簇和 Albanese 簇都称为它的 **Jacobi 簇**(Jacobi variety)．若基域的特征等于零，则有以下等式

$$\dim \mathrm{Alb}(X) = \dim_k H^0(X, \Omega_X^1) = \dim_k H^1(X, \mathcal{O}_X)$$

数 $\dim \mathrm{Alb}(X)$ 称为簇 X 的非正则性 (irregularity of the variety)．若域具有有限特征，则以下不等式成立：

$$\mathrm{irr}(X) \leqslant \dim H^0(X, \Omega_X^1), \quad \mathrm{irr}(X) \leqslant \dim H^1(X, \mathcal{O}_X).$$

若基域具有正特征，则可能有

$$\dim H^1(X, \mathcal{O}_X) \neq \dim H^0(X, \Omega_X^1).$$

Albanese 簇对偶于 **Picard 簇** (Picard variety)．

参考文献

[1] Baldassarri, M., Algebraic varieties, Springer, 1956.

[2] Lang, S., Abelian varieties, Springer, 1983.

А. Н. Паршин 撰　陈志杰 译

反照率法 [**Albedo method; Альбедный метод**]，迁移理论中的

迁移方程边值问题的一种解法．反照率法是**矩阵因子分解方法**(matrix factorization method)的一个变种，增加厚度的一系列层的反射和传送的矩阵起着因子分解系数的作用．实际上，反照率法仅用于一维空间问题，既求反射和传送系数，又求在介质中迁移方程的解．

参考文献

[1] Березин, И. С., Жидков, Н. П., Методы вычислений, 2 изд., т. 2, М., 1962 (英译本: Berezin, I. S. and Zhidkov, N. P., Computing methods, Pergamon Press, 1973).

[2] Гермогенова, Т. А. и др., Альбедо нейтронов, М., 1973, гл. 2.

Т. А. Гермогенова 撰　孙和生 译

Александров - Čech 同调与上同调 [**Aleksandrov - Čech homology and cohomology; Александрова - Чеха гомологии и когомологии**]，谱同调与上同调(spectral homology and cohomology)

满足所有 **Steenrod - Eilenberg 公理** (Steenrod - Eilenberg axioms) (正合性公理可能除外) 以及某个连续性条件的同调论与上同调论．Александров - Čech 同调群(模) (Aleksandrov - Čech homology groups (modules)) $H_n(X, A; G)$ ([1], [2]) 定义为空间 X 的所有开覆盖 α 上的逆向极限 $\lim_{\leftarrow} H^n(\alpha, \alpha'; G)$；这里 α 不仅代表覆盖，也代表它的网，α' 是 α 的子复形，它是 α 限制在闭集 A 上的网 (见**集合族的网** (nerve of a family of sets))．在同伦的意义下，由 β 到 α 的包含映射所定义的单纯投射 $(\beta, \beta') \to (\alpha, \alpha')$ 的存在性，确保可以过渡到极限．Александров - Čech 上同调群 (Aleksandrov - Čech cohomology groups) $H^n(X, A; G)$ 定义为正向极限 $\lim_{\rightarrow} H^n(\alpha, \alpha'; G)$．同调群满足除正合公理外的所有 Steenrod - Eilenberg 公理．上同调群满足所有的公理，部分地由于这个原因，上同调群常常更有用．如果 G 是紧群或域，则正合公理对紧统范畴上的同调群也成立．另外，Александров - Čech 同调群和上同调群有连续性：当 $X = \lim_{\leftarrow} X_\lambda$ 时，其同调(上同调)群等于紧统 X_λ 的同调(上同调)群的相应极限．Александров - Čech 理论是满足 Steenrod - Eilenberg 公理(除上面提到的那个外)和这种连续性条件的唯一理论．在仿紧空间范畴上，常用到 Eilenberg - Maclane 空间的映射刻画上同调；尽管该上同调等价于**层论**(sheaf theory)中定义的上同调．上同调也可以用某上链复形的上同调来定义，这使得有可能用上链的层进行运算．应用于同调的类似的思想，包含在 N. Steenrod，A. Borel 及其他人首创的同调论中，它满足包括正合性公理在内的所有公理 (但连续性除外)．Александров - Čech 同调及上同调，包括经上述修改的，被应用于连续映射理论中的同调问题，变换群理论 (与商空间的联系)，广义流形理论 (特别是各种对偶关系)，解析空间论 (例如，定义同调的基本类) 及同调维数理论等等．

参考文献

[1] Aleksandroff, P. S. [P. S. Aleksandrov], Untersuchungen über Gestalt und Lage abgeschlossener Mengen beliebiger Dimension, *Ann. of Math.* (2), **30** (1929), 101－187.

[2] Čech, E., Théorie générale de l'honologie dans un espace quelconque, *Fund. Math.*, **19** (1932), 149－183.

[3] Steenrod, N. E. and Eilenberg, S., Foundations of algebraic topology, Princeton Univ. Press, 1966.

[4] Скляренко, Е. Г., Теория гомологий и аксиома точности, 《Успехи матем. наук》, **24** (1969), 5 (149), 87－140.

Е. Г. Скляренко 撰

【补注】 也常把 Александров - Čech 上同调称为 Čech 上同调(Čech cohomology)．　　高红铸 译　彭天堂 校

Александров 紧化 [**Aleksandrov compactification; Александрова бикомпактное расширение**]，Александров 紧扩张 (Aleksandroff compact extension)

在局部紧、非紧、Hausdorff 空间 X 中添加一点 ∞ 而得到的唯一 Hausdorff **紧化** (compactification) αX．点 ∞ 的任意邻域具有形式 $\{\infty\} \cup (X \setminus F)$，其中 F 为 X 中某紧统．Александров 紧化 αX 是 X 的所有紧化的集合 $B(X)$ 中的最小元．集合 $B(X)$ 中的最小元仅对

局部紧空间X存在，且必定和αX一致.

Александров 紧化是 П. С. Александров 定义的([1]).在拓扑学中起着重要作用.例如，n维Euclid空间的 Александров 紧化$\alpha \mathbf{R}^n$恒等于n维球面；自然数集的 Александров 紧化$\alpha \mathrm{N}$同胚于连同极限点的收敛序列空间；"开" Möbius 带的 Александров 紧化和实射影平面RP^2一致．关于 Александров 紧化有病态的情形，即存在完满正规，局部紧且可数紧空间X，它的 Александров 紧化具有维数 $\dim \alpha X < \dim X$ 且 $\operatorname{Ind} \alpha X < \operatorname{Ind} X$.

参考文献

[1] Aleksandroff, P. S., Ueber die Metrisation der im Kleinen kompakten topologischen Räumen. *Math. Ann.*, 92 (1924) 294－301.

В. В. Федорчук 撰

【补注】 Александров 紧化也称为单点紧化(one point compactification).

参考文献

[A1] Dugundji, J., Topology, Allyn and Bacon, 1966, Theorem 8.4.

方嘉琳 译

阿列夫，ℵ [aleph, ℵ; алефы, ℵ]

希伯莱文字母表中第一个字母．作为数学符号，阿列夫是由 G. Cantor 引进的，用来表示无穷良序集的**基数**(cardinal number).每个基数是某一阿列夫(**选择公理**(axiom of choice)的推论).但是，关于阿列夫的许多定理并没有利用选择公理也已被证明.对于每个序数α，用$\aleph_\alpha = w(\omega_\alpha)$表示小于$\omega_\alpha$的所有序数的集合的基数.特别地，$\aleph_0$是所有自然数的集合的基数，$\aleph_1$是所有可数序数的集合的基数，等等．如果$\alpha<\beta$，则$\aleph_\alpha<\aleph_\beta$.基数$\aleph_{\alpha+1}$是继$\aleph_\alpha$之后的最小基数.广义连续统假设(generalized continuum hypothesis)陈述为：对于任何序数α，有$2^{\aleph_\alpha}=\aleph_{\alpha+1}$.如果$\alpha=0$，则上述等式取形式$2^{\aleph_0}=\aleph_1$，这就是**连续统假设**(continuum hypothesis)的内容.所有小于$\aleph_\alpha$的阿列夫的集合按照大小是全序的，并且它的**序型**(order type)是α．阿列夫的和、积与幂的定义是显然的.这里有

$$\aleph_\alpha+\aleph_\beta=\aleph_\alpha\cdot\aleph_\beta=\aleph_{\max(\alpha,\beta)}$$

下列公式是经常遇到的.Hausdorff 递归公式(Hausdorff recursive formula):

$$\aleph_{\alpha+n}^{\aleph_\beta}=\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}\cdot\aleph_{\alpha+n}$$

当$\alpha=0$时，它的特别情况是 Bernstein 公式(Bernstein formula):

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}=2^{\aleph_\beta}\cdot\aleph_n.$$

Tarski 递归公式(Tarski recursive formula)：如果α是一极限序数且$\beta<\mathrm{cf}(\alpha)$，则

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}=\sum_{\xi<\alpha}\aleph_\xi^{\aleph_\beta}.$$

这里$\mathrm{cf}(\alpha)$表示序数α的共尾特征.正如基数的情况那样，可以把阿列夫区分为奇异阿列夫(singular alephs)，正则阿列夫(regular alephs)，极限阿列夫(limit alephs)，弱不可达阿列夫(weakly inaccessible alephs)，强不可达阿列夫(strongly inaccessible alephs)，等等.例如，当α是一个极限序数且$\mathrm{cf}(\alpha)<\alpha$时，$\aleph_\alpha$就是一个奇异阿列夫.在所有阿列夫中，不存在最大的阿列夫．Cantor 已经指出，所有阿列夫的集合是没有意义的，即不存在这样的集合.亦见**全良序集**(totally well-ordered set)；**连续统假设**(continuum hypothesis)；**集合论**(set theory)；**序数**(ordinal number)；**基数**(cardinal number).

参考文献

[1] Александров, П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, М.-Л., 1948(中译本：П. С. 亚历山大罗夫，集与函数的泛论初阶，高等教育出版社，1955).

[2] Hausdorff, F., Set theory, Chelsea, reprint, 1978(中译本：F. 豪斯道夫，集论，科学出版社，1960).

[3] Cohen, P. J., Set theory and the continuum hypothesis, Benjamin, 1966.

[4] Kuratowski, K. and Mostowski, A., Set theory, North-Holland, 1968.

Б. А. Ефимов 撰

【补注】 关于阿列夫幂的一个较新定理是由 J. Silver 在1974年证明的，见[A2].一个特别情况是说，如果对于所有的$\xi<\omega_1$，有

$$2^{\aleph_\xi}=\aleph_{\xi+1}\text{，对一切 }\xi<\omega_1$$

则

$$2^{\aleph_{\omega_1}}=\aleph_{\omega_1+1}.$$

关于这一论题，一本适当的较新的补充参考书是[A1].

参考文献

[A1] Levy, A., Basic set theory, Springer, 1979.

[A2] Silver, J., On the singular cardinals problem, in *Proc. Internat. Congress Mathematicians Vancouver*, 1974, Vol. 1, 1975, 265－268.

张锦文 译

阿列夫零 [aleph-zero; алеф-нуль]

一切可数无限集的**基数**(cardinal number)，记为$\aleph_0$.

П. С. Александров 撰 张鸿林 译

Alexander 对偶性 [Alexander duality; Александера двойственность]

拓扑空间的互补子集的同调性质之间的联系，由于这种联系，一个集合的同调性质能用它的补集的某些性质定义.这方面的第一个定理是用集合论语言而不是代

数拓扑语言阐述的.在 1892 年, C. Jordan 证明了一条简单闭曲线将平面分成两个区域并构成两部分的公共边界 (Jordan 定理 (Jordan theorem)). 这个定理于 1911 年被 H. Lebesgue 和 L. E. J. Brouwer (各自独立地)推广到 $(n+1)$ 维球面(或 Euclid)空间中的 n 维流形的情形; 这个事实与 r 维流形(在 n 维空间中)被一个 $(n-r-1)$ 维流形所环绕的性质之间也建立了一种联系 (Lebesgue). Brouwer 在 1913 年证明了平面被一个闭子集所划分的区域个数仅依赖于这个集合的拓扑性质.这种对偶性最先是由 J. W. Alexander 在 1922 年用纯粹同调语言表述的 ([1]). Alexander 定理 (Alexander theorem) ([2], [3], [4]) 指出, n 维球面空间中的(有限)多面体 Φ 的 r 维模 2 Betti 数等于其补集的 $(n-r-1)$ 维模 2 Betti 数. П. С. Александров 在 1927 年把这个定理推广至任意闭集 Φ. 这个定理所表达的对偶性称为 Alexander 对偶性 (Alexander duality).

这种对偶性发展的下一个重要阶段是 Понтрягин 定理 (Pontryagin theorem) ([2], [3], [4]) (1934), 它指出 n 维球面流形 M^n 中闭集 A 的以紧群 X 为系数的 r 维同调群 (homology group) $H_r(A, X)$, 与其补集 $B=M^n\setminus A$ 的以(离散)群 Y 为系数的 $(n-r-1)$ 维同调群是对偶的.这里 Y 是在特征论的意义下与 X 是对偶的,它们的纯量积定义了源于纯量倍数的同调类的任何闭链的环绕系数.这个定理称为 Alexander - Понтрягин 定理 (Alexander - Pontryagin theorem); 其中阐述的对偶性称为 Alexander - Понтрягин 对偶性 (Alexander - Pontryagin duality) 或 **Понтрягин 对偶性** (Pontryagin duality). 其后的一系列文献导致了 Александров 定理 ([5], [7]), 这个定理与 Понтрягин 定理的不同之处在于 A 可以是 M^n 的任意子集, 群 X 可以是紧的或离散的, $H_r(A, X)$ 和 $H_{n-r-1}(B, Y)$ 指的是 Александров - Čech 同调群 (见 **Александров - Čech 同调和上同调** (Aleksandrov - Čech homology and cohomology)), 其中一个有紧支集, 而另一个是谱型的.对任意集合, Alexander 对偶性的形式是通过把后面的一种群换成对偶系数群上同维数的对偶上同调群而得到的.

在以后的推广中,球面流形被更一般的流形(在某些维数上零调的**同调流形** (homology manifold)) 代替, Александров - Čech 群被 Ситников - Steenrod 群 (投影型群) 和其他群代替; 系数群被模、层代替, 等等.

参考文献

[1] Alexander, H. J. W., A proof of the invariance of certain constants of analysis situs, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **16** (1915), 148–154.

[2] Александров, П. С., Комбинаторная топология, М. - Л., 1947 (英译本: Aleksandrov, P. S., Combinatorial topology, Graylock, Rochester, 1956).

[3] Pontrgagin, L. S., The general topological theorem of duality for closed sets, *Ann. of Math.*, **35** (1934), 4, 904–914.

[4] Lefschets, S., Algebraic topology, Amer. Math. Soc., 1955.

[5] Александров, П. С., 《Матем. сб.》, **21** (1947), 3, 161–232.

[6] Александров, П. С., Топологические теоремы двойственности, ч. 1–2, 《Тр. матем. ин-та им. В. А. Стеклова》, М., **48** (1955); **54** (1959).

[7] Чогошвили, Г. С., в кн., Тр. 4 Всес. матем. съезда, М., **2** (1964), 57–62.

[8] Kaplan, S., Homology properties of arbitrary subsets of Euclidean spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **62** (1947), 248–271.

[9] Bourgin, D. G., Modern algebraic topology, Macmillan, 1963.

[10] Chogoshvili, G. S., On homology theory of non-closed sets, in General topology and its relations to modern analysis and algebra. Proc. Symp. Prague, 1961, 123–132.

Г. С. Чогошвили 撰 高红铸 译 彭天堂 校

Alexander 不变量 [**Alexander invariants; Александера инварианты**]

与流形 $\widetilde{M}$ 的一维同调的模结构相关的不变量, 其中 $\widetilde{M}$ 上有一个秩为 a 并以 $t_1, \cdots, t_a$ 为固定生成元系的自由 Abel 群 J^a 的自由作用.

流形 $\widetilde{M}$ 到轨道 (orbit) 空间 M 的投影为对应于同态 $\gamma: G\to J^a$ 的核 K_a 的**覆叠** (covering). 其中 $\pi_1(M)=G$ 为流形 M 的**基本群** (fundamental group). 因为 $K_a=\pi_1(\widetilde{M})$, 群 $B_a=K_a/K_a'$ 同构于一维同调群 $H_1(\widetilde{M}, \mathbf{Z})$, 其中 K_a' 为核 K_a 的**换位子子群** (commutator subgroup). 由扩张 $1\to K_a\to G\to J^a\to 1$ 生成的扩张(*): $1\to B_a\to G/K_a'\to J^a\to 1$ 决定了 B_a 的群 J^a 的整数群环 $\mathbf{Z}(J^a)$ 上的一个模结构 (见**群代数** (group algebra)). 由 J^a 在 $\widetilde{M}$ 上的作用亦诱导出 B_a 上相同的结构. J^a 的生成元 t_i 的固定选取使得以 t_i 为变量的 Laurent 多项式环 $L_a=L_a(t_1, \cdots, t_a)=Z[t_1, t_1^{-1}, \cdots, t_a, t_a^{-1}]$ 等同于 $\mathbf{Z}(J^a)$. 纯代数化的方法可由扩张(*)定义一个模扩张 (**): $0\to B_a\to A_a\to I_a\to 0$, 反之亦然 ([5]). 其中 I_a 是同态 $\varepsilon: L_a\to\mathbf{Z}$ $(\varepsilon t_i=1)$ 的核. 模 A_a 称为覆叠 $\widetilde{M}\to M$ 的 Alexander 模 (Alexander module of the covering). 在 J. W. Alexander ([1]) 的最初工作中, 当 $M=M(k)$ 为三维球面 S^3 中某个 μ 重连接 k 的补空间时, 覆叠对应于连接群的交换化同态 $\gamma_\mu: G(k)\to J^\mu$, A_μ 为连接 k 的 Alexander 模 (Alexander module of the link). 与下文相关的 $G=G(k)$ 的主要性质有: G/G' 为自由 Abel 群, 群 G 的亏量为 1, G 具有表现 $\{x_1, \cdots, x_{m+1}; r_1, \cdots, r_m\}$ 使得 $\gamma_\mu(x_i)=t_i$ $(1\leqslant i\leqslant\mu)$; $\gamma_\mu(x_i)$

$=1$ $(i>\mu)$ (见**纽结和连接图** (knot and link diagrams)). 在连接的情形, 生成元 $t_i\in J^\mu$ 对应于分支 $k_i\subset k$ 的纬线, 并由这些分支的和球面的定向决定.

一般地, M 为 S^n 中 μ 个 $(n-2)$ 维球面 k_i 构成的 k 的补空间 $M(k)$. 除了同态 γ_m 外, 也考虑同态 $\gamma_\sigma: G(k)\to J$, 其中 $\gamma(x)$ 等于代表 x 的**幺拟群** (loop) 关于所有 k_i 的连接系数的和.

模 A_μ 的模关系矩阵 $\mathfrak{M}_\mu$ 称为 Alexander 覆叠矩阵 (Alexander covering matrix), 在链环的情形, 称为 Alexander 连接矩阵 (Alexander link matrix). 它也可以由下面矩阵得到:

$$\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right)^{\gamma_a\varphi},$$

其中 $\{x_i; r_i\}$ 为群 G 的一个表现. 若 $\mu=1$, 去掉 $\mathfrak{M}_\mu$ 中的零列可得模 B_μ 的模关系矩阵 $\mathfrak{N}_\mu$. 矩阵 $\mathfrak{M}_\mu$ 和 $\mathfrak{N}_\mu$ 在相差某个由模的不同表现诱导的转移变换下由模 A_μ 和 B_μ 定义, 它们可用来计算一些模不变量. Alexander 理想 (Alexander ideals) 为模 A_μ 的理想, 即环 L_μ 的理想序列 $E_i(A_\mu)$: $(0)\subseteq E_0\subseteq\cdots\subseteq E_{i-1}\subseteq E_i\subseteq\cdots\subseteq(1)$, 其中 E_i 由 $\mathfrak{M}_\mu$ 的阶为 $(m-i)\times(m-i)$ 的子式生成, 而对 $m-i<1$ 有 $E_i=L_\mu$. 亦可使用反向排序的序列. 因为 L_μ 既为 Gauss 环又为 Noether 环, 于是每个理想 E_i 均包含在某个极小主理想 (Δ_i) 内; 其生成元 Δ_i 在相差单位除子 t_i^k 的意义下是唯一的. Laurent 多项式 $\Delta_i(t_1,\cdots,t_\mu)$ 简称为 k (或覆叠 $\widetilde{M}\to M$) 的 Alexander 多项式 (Alexander polynomial). 若 $\Delta_i\neq0$, 则乘上 $t_1^{k_1}\cdots t_\mu^{k_\mu}$ 使 $\Delta_i(0,\cdots,0)\neq0$ 且 $\neq\infty$. 对同态 γ_σ 相应地有模 $\bar{A}$, 理想 $\bar{E}_i$ 及多项式 $\bar{\Delta}_i$, 分别称为 k (或覆叠 $\widetilde{M}_\sigma\to M$) 的 Alexander 约化模 (Alexander reduced module), Alexander 约化理想 (Alexander reduced ideals) 及 Alexander 约化多项式 (Alexanderreduced polynomials). 若 $\mu=1$, 则 $A_\mu=\bar{A}$. 将 $\mathfrak{M}_\mu$ 中所有的 t_i 变为 t 可得 $\mathfrak{M}(\bar{A})$. 若 $\mu\geqslant2$, 则 $\bar{\Delta}_1$ 可被 $(t-1)^{\mu-2}$ 整除. 多项式 $\nabla(t)=\bar{\Delta}_1(t)/(t-1)^{\mu-2}$ 即所谓的细川多项式 (Hosokawa polynomial). $A(k)$ 的模性质在 [4], [8], [10] 中研究过. 对连接的情形尚未彻底弄清. 对 $\mu=1$, 群 $H_1(\widetilde{M}; R)$ 在任意包含 $\mathbf{Z}$ 并使 $\Delta(0)$ 可逆的环 R 上, 特别地在有理数域上, 是有限生成的 ([7]), 又若 $\Delta(0)=+1$, 则在 $\mathbf{Z}$ 上亦然. 这时 $\Delta(t)$ 为变换 t: $H_1(\widetilde{M};R)\to H_1(\widetilde{M};R)$ 的特征多项式. $\Delta_i(t)$ 的阶等于 $H_1(\widetilde{M};R)$ 的秩; 特别地, $\Delta_i(t)=1$, 当且仅当 $H_1(\widetilde{M};\mathbf{Z})=0$. 当 $n=3$ 时, 连接理想具有下述对称性质: $E_i=\bar{E}_i$, 这里横线表示 E_i 在自同构下的象, 其中的自同构由将所有 t_i 变成 t_i^{-1} 的变换生成. 由此对某些整数 N_i 有 $\Delta_i(t_1^{-1},\cdots,t_\mu^{-1})^*=t_1^{N_1}\cdots t_\mu^{N_\mu}\Delta_i(t_1,\cdots,t_\mu)$. 这一对称性可由纽结和连接群的 Fox - Trotter 对偶得到. 它也可由流形 $\widetilde{M}$ 的 **Poincaré 对偶性** (Poincaré duality), 同时考虑 J^μ 的自由作用而得到 ([3]). 若 $\Delta(t_1,\cdots,t_\mu)\neq0$, 则链复形 $C_*(\widetilde{M})$ 在环 L_μ 的分式域 P_μ 上是零调的 $(n=3)$, 并且可相应地定义嵌入 $L_\mu\subset P_\mu$ 的 **Reidemeister 挠率** (Reidemeister torsion) $\tau\in P_\mu/\Pi$, 这里 Π 为 L_μ 的可逆元素群. 若 $\mu=2$, 则 $\tau=\Delta_1$, 若 $\mu=1$, 则 $\tau=\Delta_1/(t-1)$ (相差 L_μ 的可逆元). 对 $n=3$, Δ 的对称性可由 τ 的对称性得到. 当 $\mu=1$ 时, 由 $\Delta_i(t)$ 的对称性及性质 $\Delta_i(1)=\pm1$, 可知 $\Delta_i(t)$ 的阶为偶数. $\nabla(t)$ 的阶也为偶数 ([4]). 纽结多项式 $\Delta_i(t)$ 的下述性质这样刻画: $\Delta_i(1)=\pm1$; $\Delta_i(t)=t^{2k}\Delta_i(t^{-1})$; Δ_{i+1} 整除 Δ_i; 对大于某 N 的所有 i 有 $\Delta_i=1$, 即对任意满足这些性质的 $\Delta_i(t)$, 均有纽结 k 使它们恰为 Alexander 多项式. 细川多项式 ([4]) 对任何 $\mu\geqslant2$ 由性质 $\nabla(t)=t^{2k}\nabla(t^{-1})$ 刻画; 二维纽结的多项式 Δ_1 由 $\Delta_1(1)=\pm1$ 刻画.

Alexander 不变量, 首先对 Alexander 多项式, 是区别纽结和连接的强有力工具. 在二重点少于 9 的纽结表中仅有 3 对不能用 Δ 区别 (见**纽结表** (knot table)). 亦见**纽结理论** (knot theory); **交错纽结和连接** (alternating knots and links).

参考文献

[1] Alexander, J. W., Topological invariants of knots and links, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **30** (1928), 275–306.

[2] Reidemeister, K., Knotentheorie, Chelsea, reprint, 1948.

[3] Blanchfield, R. C., Intersection theory of manifolds with operators with applications to knot theory, *Ann. of Math.*, (2), **65** (1957), 2, 340–356.

[4] Hosokawa, F., On ∇- polynomials of links, *Osaka J. Math.*, **10** (1958), 273–282.

[5] Crowell, R. H., Corresponding groups and module sequences, *Nagoya Math. J.*, **19** (1961), 27–40.

[6] Crowell, R. H. and Fox, R. H., Introduction to knot theory, Ginn, 1963.

[7] Neuwirth, L., Knot groups, Princeton Univ. Press, 1965.

[8] Crowell, R. H., Torsion in link modules, *J. Math. Mech.*, **14** (1965), 2, 289–298.

[9] Levine, J., A method for generating link polynomials, *Amer. J. Math.*, **89** (1967), 69–84.

[10] Milnor, J. W., Multidimensional knots, in Conference on the topology of manifolds, Vol. 13, Boston, 1968, 115–133.

A. B. Чернавский 撰

【译注】 对 S^3 中的纽结或连接 K, J. H. Conway 引进了 Conway 多项式 $\nabla_K(z)$, 它与 Alexander 约化多项式的关系是 $\bar{\Delta}_1(t)=\nabla_K(t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}})$. Conway 多项式的意义在于它可利用递归方法直接从连接图来计算而不必考虑矩阵或行列式 ([B1]).

近年来, 在纽结和连接理论中有许多重大进展, 其中最重要的是 V. F. R. Jones 于 1985 年通过构造经典辫群在 von Neumann 代数中的表示而发现的 Jones

多项式,以及 E. Witten 关于拓扑量子场论与 Jones 多项式关系的工作. 参见[B2]-[B6].

参考文献

[B1] Conway, J. H., An enumeration of knots and links, in Computational Problems in Abstract Algebra, Pergamon, 1970, 329-358.

[B2] Jones, V. F. R., A polynomial invariant for knots via von Neumann algebra, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **12** (1985), 103-112.

[B3] Freyd, P., Yetter, D., Hoste, J., Lickorish, W. B. R., Millett, K. and Ocneanu, A., A new polynomial invariant of knots and links, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **12** (1985), 239-246.

[B4] Kauffman, L. H., State models and the Jones polynomial, *Topology*, **26** (1987), 395-407.

[B5] Witten, E., Quantum field theory and the Jones polynomial, *Commun. Math. Phys.*, **121** (1989), 351-399.

[B6] Turaev, V. G., The Yang-Baxter equation and invariants of links, *Invent. Math.*, **92** (1988), 527-553.

李贵松 译 陈贵忠 校

Альфа语言 [Al'fa; Альфа]

苏联为了通过计算机解决科学和技术问题而研制的一种**算法语言**(algorithmic language). 它在某种程度上是**Algol 语言**(Algol)翻版性质的推广. 对出现在 Algol 语言中的量,增加了复数和有内部维数的组成分量(向量、矩阵等). 还补充了用来引入复合和多维量表示的说明. 引入了一类特定函数常规程序,其主体用表达式定义. 它能够通过小数点显示自然数的计算,使用累加和乘积符号以及不等式链. 有一种辅助循环,其中在不引入枚举参数的情况下能执行所期望次数的重复. 主要程序设计系统包括 Альфа语言(用于 M-20 型机),Algibr 语言(用于 M-220/BESM-6复合机)和 Альфа-6语言(用于BESM-6机).

参考文献

[1] Ершов, А. П., Кожухин, Г. И., Волошин, Ю. М., Входной язык для систем автоматического программирования, Новосиб., 1964.

[2] АЛЬФА —— система автоматизации программирования, Новосиб., 1967.

[3] Ершов, А. П., Кожухин, Г. И., Поттосин, И. В., Руководство к пользованию системой АЛЬФА, Новосиб., 1968.

[4] Руководство к пользованию системой автоматизации программирования АЛЬФА-6, Новосиб., 1975.

А. П. Ершов 撰 钱宝峰 译 仲萃豪 校

Алгамс 语言 [Algams; Алгамс]

主要为在中等功能的电子计算机上使用而开发的一种**算法语言**(algorithmic language). 是于 1963-1966 年由社会主义国家科学院全面合作委员会任命的中型计算机自动程序设计小组开发的,被建议作为社会主义国家间算法交流的标准语言. 它是在 Algol-60 语言(见 **Algol 语言** (Algol))的基础上,为便于**转换**(translation)过程,加上了一些限制. 最重要的限制包括禁止过程的递归使用,要求过程形式参数的必要说明,在使用标识符(标记除外)前对它们的说明,简化命名表达式的结构. 在称为 Algol-60子集的规范统一语言中,所述的这些限制是与施于 Algol-60 语言上的那些限制一致的. 同时,在 Алгамс 语言中也引入了一些新特点,包括 Algol-60 语言上不存在的外部标识符和部分标识符. 外部标识符(external identifiers)是存放在机器外存储器中数组的名称. 外部数组的读与写由一个标准交换过程来实现. 数组之前的部分标识符(part identifiers)与存放在外存储器中的程序相分离,这个程序把它再次调用到工作存储器中进入相应的数组. 当机器的工作存储器的容量比较小时,用这种方法,可增强语言的使用效率. 此外,Алгамс 语言包括输入和输出过程的详细描述,在用其他语言描述它们时还包括过程体的更确切的定义.

参考文献

[1] Описание языка АЛГАМС, в сб., Алгоритмы и алгоритмические языки, М., 1968, 3, 3-56.

[2] Lyubimskii, E. Z. and Martynyuk, V. V., Refinement of the definition of the Algams language, *Programming and Computer Software*, 2 (1976), 73-74 (*Programmirovanie*, 1 (1976), 87-88).

В. В. Луцикович 撰 钱宝峰 译 仲萃豪 校

代数 [algebra; алгебра]

1)数学的一个分支(见**代数学** (algebra)). 这个词可以用来构成合成词,例如**同调代数**(homological algebra)、**交换代数**(commutative algebra)、**线性代数**(linear algebra)、**多重线性代数**(multilinear algebra)和**拓扑代数**(topological algebra).

2)**算子环**(operator ring)的特殊情况:域上的、体上的或交换环上的代数(有时为线性代数或向量代数). 结合代数(从前称为"超复系"(hypercomplex systems)和非结合代数都是这种意义下的代数.

3)**泛代数**(universal algebra)的同义词. 包括诸如 **Boole 代数**(Boolean algebra)、**一元代数**(unary algebra)等这样一些代数.

张鸿林 译

代数学 [algebra; алгебра]

研究**代数运算**(algebraic operation)的一个数学分支.

历史综述. 最简单的代数运算——正整数和正有理数的算术运算——在最古老的数学教科书中也会见

到，表明这些运算的主要性质甚至在古代就已知道了. 特别地，Diophantus 的《算术》(Arithmetic，公元 3 世纪)对代数思想和符号的建立有重要的影响. "代数"这个词起源于 Mohammed al - Khwarizmi 的著作《代数学》(Al jabr al - muqabala，公元 9 世纪)，这本书描述求解某些问题的一般方法，这些问题可化简为一次或二次代数方程. 15 世纪结束时，开始使用现代符号"+"和"−"来代替过去流行的用繁琐的语言描述数学运算. 接着又有了幂及根式的符号，并且出现了括号. 16 世纪末，F. Viete 首先用拉丁字母表示问题中的常数和变数. 大多数当代的代数符号早在 17 世纪中叶就已知道了，它标志着代数学的"史前时期"的结束. 代数学的真正发展发生在后 3 个世纪，这期间，对本学科的主要内容的看法有了根本的改变.

17－18 世纪中，"代数学"被理解为在代数符号上进行计算的科学(由字母组成的公式的"恒等"变换，**解代数方程**(algebaic equation)，等等)，与算术(arithmetic)不同，算术处理是对明显的数字进行的计算. 然而，假定符号代表实际的数：整数或分数. 那个时期的最好的教科书之一，L. Euler 的《代数学引论》(Introduction to algebra)的内容简表中包括整数、分数和小数、根、对数、一次到四次代数方程、级数、加法、Newton 的二项式及 Diophantus 方程等. 因而到 18 世纪中叶，代数学或多或少地相当于今日的"初等代数".

18 和 19 世纪的代数学处理的主要内容是多项式. 历史上，首要的问题是求解一个未知数的代数方程，即求解下述类型的方程：

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0.$$

其目标是推导出由系数经加、减、乘、除及开方所构成的公式来表示方程的根("用根式求解"). 即使在最早的时代，数学家们也能解一次和二次方程. 16 世纪，意大利数学家又作出实质性的进展：发现了解三次方程(见 **Cardano 公式** (Cardano formula))及四次方程(见 **Ferrari 法**(Ferrari method))的公式. 在以后的 3 个世纪中，为求解高次方程而寻找类似的公式，结果徒劳无功；与此有关，对于任意复系数代数方程的复根的存在性，至少要找出一个"无公式"的证明成为主要兴趣. 这个定理在 17 世纪首先由 A. Girad 所叙述，而直到18 世纪末才由 C. F. Gauss 粗略地证明(见**代数学基本定理**(algebra, fundamental theorem of)). 最后，1824 年 N. H. Abel 证明了高于四次的方程一般不能用根式求解，而 1830 年 E. Galois 对代数方程使用根式的可解性给出了一个一般性的判别法，见 **Galois 理论** (Galois theory). 那个时期是忽视其他问题的，正如 J. Serret 在他的高等代数教程(1849)中指出的，代数学被理解为"方程分析".

一个未知数的代数方程的研究伴随着多个未知数的代数方程，特别是线性方程组的研究. 线性方程组的研究导致了**矩阵**(matrix)和**行列式**(determinant)概念的引入. 矩阵本质上是独立的理论，矩阵代数和它的应用范围远远超出了求解线性方程组.

从 19 世纪中叶以后，代数学最终地从方程论转向代数运算的研究. 代数运算公理研究的第一次尝试可追溯到 Euclid 的"关系论"，但是在这方向上毫无进展，因为即使最简单的算术运算——长度的比或面积的比——也不可能有几何解释. 由于**数**(number)的概念的逐渐推广和深入研究以及在完全不是数的对象上进行算术运算的出现才使进一步的进展成为可能. 最先的例子是 Gauss 的"二元二次型的合成"及 P. Ruffini 和 A. L. Cauchy 的**置换**乘法. 代数运算的抽象概念出现在 19 世纪中叶对**复数**(complex number)研究的环境中. 那时出现了 G. Boole 的**逻辑代数**(algebra of logic)，H. Grassmann 的**外代数**(exterior algebra)，W. Hamilton 的**四元数**(quaternion)以及 A. Cayley 的矩阵计算，同时 C. Jordan 发表了关于**置换**(permutation)群的重要论文.

这些研究为代数学在 19 世纪末向近代发展阶段转移开辟了道路，这个近代发展阶段是以对从前各孤立的代数学概念在共同的公理基础进行提炼以及代数学应用范围显著扩大为标志的. 代数学及代数运算的一般理论的近代观点于20 世纪初在 D. Hilbert, E. Steinitz, E. Artin 和 E. Noether 的影响下得以明确，而在 1930 年由于 B. L. van der Waerden 的《近世代数》(Modern algebra)一书的出现才完全确立.

代数学的主要内容，它的主要分支及与其他数学分支的联系. 近世代数学的主要内容是集合及这些集合(即代数及泛代数，见**代数**(algebra)；**泛代数**(universal algebra)中的术语)上的代数运算，且在**同构**(isomorphism)下进行考察. 这意味着从代数学观点看，集合本身和作为代数运算的载体的集合是不加区别的，而在这个意义下，真正的研究内容是代数运算本身.

长期以来，实际上进行的研究仅涉及到少数基本类型的泛代数，它们是在数学发展和应用中自然地出现的.

最重要的且被研究得最彻底的代数类型之一是**群**(group)，这种代数具有满足结合律的二元运算，含有单位元，且对每个元素有逆元素. 历史上，群的概念是泛代数的第一个例子，实际上到 19 世纪末它在很多方面成为代数结构的，且一般地成为数学结构的范例. 群的推广如**半群**(semi - group)，**拟群**(quasi - group)和**幺拟群**(loop)的独立研究，在很晚以后才开始.

环和域是具有两个二元运算的很重要的代数类型.环和域中的运算通常称为加法和乘法. 环的加法由**Abel群** (Abelian group) 公理规定,而乘法对于加法还被分配律所规定,见**环和代数** (rings and algebras). 最初仅研究具有结合律乘法的环,并且结合律的要求有时还成了环的定义的一部分, 见**结合环与结合代数** (associative rings and algebras). 非结合环的研究(见**非结合环与非结合代数** (non - associative rings and algebras)), 当今完全被认为是独立的学科. **除环** (skew - field) 是一个结合环,它的全部非零元的集合是乘法群. **域** (field) 是一个除环,它的乘法是交换的. 数域,即在加法、减法、乘法、被非零数的除法下封闭的数集,蕴含在代数方程的早期的研究中. 结合的交换环和域是**交换代数** (commutative algebra) 及紧密相关的领域**代数几何学** (algebraic geometry) 的主要研究对象.

具有两个二元运算的另一个重要的代数类型是**格** (lattice). 格的典型例子有:一个给定集合的子集的系统,它具有集合论的并和交的运算;还有正整数的集合,它的运算是取最小公倍数和最大公约数.

域上的线性(或向量)空间也可以作为泛代数来处理,它具有一个二元运算(加法)和一个一元运算(用基域的数量作乘法). 除环上的线性空间也已被研究.如果用环来代替数量的集合,就可得到更一般的概念:模. 代数学的一个重要部分即**线性代数** (linear algebra),用于研究线性空间、模和其中的线性变换, 以及与它们有关的问题. 它的一部分,线性方程论和矩阵论早在19世纪就已形成了. 一个紧密相关的学科是**多重线性代数** (multilinear algebra).

任意泛代数的一般理论(有时称之为"泛代数")的最初的研究要追溯到20世纪30年代,是由G. Birkhoff进行的. 同时期, А. И. Мальцев 和 A. Tarski 奠定了**模型** (model) (即其中有着显著关系的集合) 理论的基础. 后来,泛代数理论和模型论紧密联系在一起,以致产生了一门新的学科,称为**代数系统** (algebraic system)理论,它介于代数学和数理逻辑之间,它的题材是集合,集合上定义了代数运算及一些关系.

由于在泛代数中引进了与代数运算相匹配的附加结构,从而创造了代数学和其他数学领域之间的许多中间学科. 这些学科包括**拓扑代数** (topological algebra) (包括**拓扑群** (topological group) 和 **Lie 群** (Lie group) 理论), **赋范环** (normed ring) 理论, 微分代数, 各种有序的代数结构理论. 起源于代数学和拓扑学的**同调代数** (homological algebra) 产生于 20 世纪 50 年代,凭本身的资格而成为一门学科.

代数学在近代数学中的作用极端重要,而且数学进一步"代数化"是一种趋势.研究许多数学对象的一个典型方法是构造适于表达这些对象行为的代数系统,虽然有时这些对象远离代数学. 例如: Lie 群的研究在很大程度上可以化为它们的对应物: **Lie 代数** (Lie algebra) 的研究.类似的方法还应用于拓扑学:用某种标准的方法,对每个拓扑空间指派**同调群** (homological group) 的无穷序列,作为它的代数映象的这些序列能够很正确地评价空间本身的性质. 拓扑学中近代的重要发现都是用代数作为工具而得到的, 见**代数拓扑学** (algebraic topology).

乍看起来,把问题先翻译成代数语言,然后用代数语言解决它们,再将代数语言翻译回去,这只是繁复的手续,但实际上这种方法是高度方便的且有时是唯一可行的.因为藉助于代数化,不仅可用纯语言的考虑,而且还可使用形式的代数计算这个有力工具去解决问题,所以有时可以克服高度复杂的困难. 代数学在数学中的作用可与近代计算机在解决实际问题中的作用相比拟.

代数学的概念和方法广泛应用于数论(见**代数数论** (algebraic number theory))、**泛函分析** (functional analysis)、微分方程理论、几何学(见**不变量理论** (invariants, theory of)、**射影几何学** (projective geometry)、**张量代数** (tensor algebra))及其他数学学科中.

除了在数学中的基本作用外,从应用的观点看,代数学也是很重要的;例如在物理学(有限群表示论在量子力学中; 离散群在结晶学中)、控制论(见**自动机理论** (automata, theory of)及数理经济学(见**线性不等式** (linear inequality))中的应用.

参考文献

[1] История математики с древнейших времен до начала XIX столетия, т. 1 – 3, М., 1970 – 1972.

[2] Мальцев, А. И., К истории алгебры в СССР за первые 25 лет. 《Алгебра и логика》, 10 (1971), 1, 103 – 118.

[3] Математика, ее содержание, методы и значение. Сб. статей, т. 1 – 3, М., 1956 (中译本: 数学——它的内容,方法和意义, 1 – 3 卷,科学出版社, 1988).

[4] Курош, А. Г., Курс высшей алгебры, 10 изд., М., 1971 (中译本: A. Г. 库洛什, 高等代数教程, 高等教育出版社, 1962).

[5] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Algebra: Algebraic structures. Linear algebra, I, Addison - Wesley, 1974, Chapt. 1; 2 (译自法文).

[6] Waerden, B. L. van der., Algebra, 1 – 2, Springer, 1967 – 1971 (中译本: B. L. 范德瓦尔登, 代数学 (1, 2), 科学出版社, 1978).

[7] Lang, S., Algebra, Addison - Wesley, 1974.

[8] Мальцев, А. И., Алгебраические системы, М., 1970 (英译本: Mal'tsev, A. I., Algebraic systems, Springer, 1973).

亦见各代数学科条目中的参考文献.

Ю. И. Мерзляков, А. И. Ширшов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Lidl, R. and Pilz, G., Applied abstract algebra, Springer, 1984.

[A2] Jacobson, N., Lectures in abstract algebra, 1-3, v. Nostrand, 1951-1964 (中译本: N.贾柯勃逊,抽象代数学,1-3,科学出版社,1987).

[A3] Jacobson, N., Basic algebra, Ⅰ, Ⅱ, W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1980 (中译本: N.雅各布森,基础代数,高等教育出版社,1987,1988).

石生明 译 许以超 校

代数学基本定理 [algebra, fundamental theorem of; алгебры основная теорема]

下述定理:任何复系数多项式在复数域中都有一个根. 这个定理首先是由 A. Girad 于 1629 年和 R. Descartes 于 1637 年提出的,其表述方式与现在所取的方式不同. C. Maclaurin 和 L. Euler 使得定理的表述更为精确,并且给出与现代表述等价的一种形式:任何实系数多项式都能分解为实系数的一次和二次因式之积. J. d'Alembert 于 1746 年首先给出代数学基本定理的一个证明. 在 18 世纪后半期, L. Euler, P. Laplace, J. L. Lagrange 和其他人又相继给出一些证明. 所有这些证明都预先假设多项式的一些"理想的"根确实存在,然后去证明在这些根中至少有一个是复数. C. F. Gauss 最先在不假设多项式的根实际存在的情况下,证明了代数学基本定理. 他的证明实质上在于构造多项式的分裂域. 这个定理的所有证明都要涉及到实数和复数的某种形式的拓扑性质. 而拓扑的作用最终导致到单一的假设:奇次的实系数多项式具有一个实根.

参考文献

[1] Курош, А. Г., Курс высшей алгебры, изд. 9, М., 1968, 147-155, 345-349 (中译本: A. Г.库洛什,高等代数教程,人民教育出版社,1962).

[2] Lang, S., Algebra, Addison-Wesley, 1974.

[3] Башмакова, И. Г., сб.: Историко-математические исследования, в. 10, 257-304.

В. Н. Ремесленников 撰

【补注】 基于 Brouwer 不动点定理的一个证明,见[A1].

参考文献

[A1] Arnold, B. H., A topological proof of the fundamental theorem of algebra, *Amer. Math. Monthly*, **56** (1949), 465-466.

张鸿林 译

函数代数 [algebra of functions; алгебра функций]

作为极大理想空间 $\mathfrak{M}$ 上的连续函数代数来实现的半单交换 **Banach 代数** (commutative Banach algebra) A.

如果 $a \in A$,而 f 是定义在元素 a 的谱 (spectrum) (即函数 $\hat{a}=a$ 的值集)上的某个函数,那么 $f(a)$ 是 $\mathfrak{M}$ 上的某个函数. 当然,它不一定满足 $f(a) \in A$. 然而,如果 f 是整函数,那么 $f(a) \in A$ 对于任何 $a \in A$ 成立. 利用 Cauchy 积分公式可在本质上加强这个结果: 如果函数 f 在元素 a 的谱的某个邻域内解析,那么 $f(a) \in A$,且映射 $f \to f(a)$ 是在 $a \in A$ 的谱的某个邻域内解析的函数所构成的代数到 A 的同态. 这个命题对于非半单交换 Banach 代数也成立. 而且,一般来说,这个在给定元素的谱的邻域内解析的函数类不能再扩充. 例如,如果 $A=L_1(\mathbf{Z})$,且对于所有谱在区间 $[0,1]$ 中的 $a \in A$ 有 $f(a) \in A$,那么 f 在该区间的某邻域内解析.

在个别情形中,$f(a)$ 也可以对于多值解析函数 f 来定义,但是这样的定义会遇到内在的困难. 例如,设 A 是在圆盘 $|z| \leqslant 1$ 中的连续函数代数,且要求其中的函数都在圆盘 $|z|<1$ 中解析和满足条件 $f'(0)=0$. 单位圆盘自然恒同于 A 的极大理想空间. 在极大理想空间上连续的函数 $f_1(z)=z$ 不属于 A,但它是二次方程

$$f_1^2 - z^2 = 0$$

的解,这里 $z^2 \in A$.

如果 A 是具有极大理想空间 X 的半单代数, $f \in C(X)$,且

$$p(f) \equiv f^n + a_1 f^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \quad a_i \in A,$$

其中 p 满足 $p'(f) \in \varepsilon(A)$,后者是 A 的单位元素群(从而 f 是 p 的单根),那么 $f \in A$. 类似地有: 如果 $f \in C(X)$, $\exp(f) \in A$,那么 $f \in A$.

一个函数代数称为一致收敛代数 (uniformly convergent algebra) (或一致代数 (uniform algebra)),如果这个代数中的范数所定义的收敛概念等价于函数 $\hat{a}$ 在极大理想空间上的一致收敛性. 如果对于所有 $a \in A$,等式 $\|a^2\| = \|a\|^2$ 成立,那么 A 是一致代数. 一致代数的一般例子是在某个拓扑空间上的有界连续函数代数对于自然的 sup 范数来说的闭子代数.

如果 A 是一致代数,且它的极大理想空间是可距的,那么在所有环形边界(不仅是闭边界)中,存在极小边界 Γ_0,其闭包是 Шилов 边界. 集合 Γ_0 由"峰点"组成: x_0 称为峰点 (peak point),如果存在函数 $f \in A$ 使得 $|f(x)| < |f(x_0)|$ 对于所有 $x \neq x_0$ 成立. 在所讨论的情形中,对于极大理想空间中的任何点存在集中于 Γ_0 上的表示测度.

一个函数代数称为解析的 (analytic),如果该代数中所有在极大理想空间的非空开子集上为零的函数恒为零. 类似地可定义关于边界解析的代数. 任何解析代数是关于 Шилов 边界解析的; 反之通常不真.

一个函数代数 A 称为正则的 (regular),如果对于代数 A 的极大理想空间 X 中的任何闭子集 F 和任何不包

含在 F 中的点 x_0,有可能求得函数 $f \in A$,使得对于所有 $x \in F$,有 $f(x)=1$,而 $f(x_0)=0$. 所有正则代数是正规的,即对于任何两个不相交的闭集 $F, F_0 \subset X$,存在元素 $f \in A$,使得 $f(x)=1$ 对于所有 $x \in F$ 成立, 而 $f(x)=0$ 对于所有 $x \in F_0$ 成立. 特别是,在正则代数中,对于空间 X 的任何有限开覆盖 $\{U_i\}(1 \leqslant i \leqslant m)$ 存在属于 A 的单位分解,即函数组 $f_1, \cdots, f_n$, 满足

$$f_1(x)+\cdots+f_n(x) \equiv 1$$

和

$$f_i(x)=0 \qquad \text{如果 } x \notin U_i.$$

一个函数 g 称为局部属于函数代数 A,如果对于任何点 $x_0 \in X$,存在它的某个邻域,使得在这个邻域中该函数重合于代数中的某函数. 局部属于一个正则代数的任何函数自身是该代数的元素.

函数代数的一个元素称为实的 (real),如果对于所有 $x \in X$, $\hat{f}(x)$是实的. 如果 A 是具有实生成元 f_α 的代数,且对于所有 f_α 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ln \| \exp(itf_\alpha) \| \frac{dt}{1+t^2} < \infty ,$$

那么 A 是正则的.

Banach 代数中的一个理想 (ideal) 称为准素的 (primary),如果它只被包含在一个极大理想中. 如果 A 是正则函数代数,那么每个极大理想 x_0 中有一个最小闭准素理想 $J(x_0)$,它包含在 x_0 中的任何闭准素理想之中. 理想 $J(x_0)$ 是由在 $x_0 \in X$ 的某个(依赖于 f 的)邻域中为零的函数 $f \in A$ 全体所形成的理想的闭包.

在带伴随单位元的绝对收敛 Fourier 级数的代数中,任何极大理想重合于对应的准素理想.

设 A 是代数 $C(X)$ 的闭子代数,其中 X 是某个紧统(它不一定重合于 A 的极大理想空间). 设 A 分离紧统 X 的点,即对于任何两个不同的点 $x_1, x_2 \in X$,存在代数 A 中的函数 f,使得 $f(x_1) \neq f(x_2)$. 代数 A 称为对称的 (symmetric),如果函数 f 与函数 $\overline{f(x)}$ 同属于此代数,根据 Stone - Weierstrass 定理,如果 A 是对称的,那么 $A=C(X)$. 代数 A 称为反对称的 (anti-symmetric),如果由条件 $f, \bar{f} \in A$ 可得出 f 是常数函数. 特别是,解析函数代数是反对称的. 一个子集 $S \subset X$ 称为(关于代数 A 的)反对称性集 (set of anti-symmetry),如果任何在 S 上取实值的函数 $f \in A$ 在该集合上为常数. 按照这个定义,代数是反对称的,是指整个 X 是反对称性集. 在一般情形下,空间 X 可表示为一些不相交的闭的极大反对称性集的并. 每个极大反对称性集是一些峰集的交(集合 P 称为峰集 (peak set),如果存在函数 $f \in A$,使得 $f|_P=1$,且当 $x \notin P$ 时, $|f(x)|<1$). 由此得到,代数 A 在极大反对称性集 Y 上的限制 $A|_Y$ 是代数 $C(Y)$ 的闭(反对称)子代数. 如果 X 是代数 A 的极大理想空间,那么极大反对称性集是连通的. 如果一个连续函数在每个极大反对称性集上重合于代数 A 中的某个函数,那么这个函数本身也属于 A. Stone - Weierstrass 定理的这一推广使得原则上有可能把对任意的一致代数的研究归结为对反对称代数 A 的研究. 然而,对任意的代数的研究不可能归结为对解析代数的研究: 存在 $R(X)$(代数 $C(X)$ 的闭子代数)型的代数的例子,它不与 $C(X)$ 重合,且是反对称的和正则的.

设 $\mathrm{Re}(A)$ 是形式为 $\mathrm{Re}(f)$ $(f \in A)$ 的实函数空间; 如果 $\mathrm{Re}(A)$ 是代数或者 $\mathrm{Re}(A)$ 在 $C(X)$ 中是闭的,那么 $A=C(X)$. 空间 X 可以看作代数 A 的极大理想空间的一部分; 因而,在 X 上不仅可以考虑极大理想空间的通常拓扑,而且也可以考虑由 X 到 A 的对偶空间的嵌入所引进的度量. 在这个度量意义下的距离将表示为 ρ_A. 对于任何点 $x_1, x_2 \in X$,不等式 $\rho_A(x_1, x_2) \leqslant 2$ 成立; 关系式 $\rho_A(x_1, x_2)<2$ 是一个等价关系,其等价类称为 Gleason 部分 (Gleason parts). 如果 X 是圆盘 $|z| \leqslant 1$, A 是 $C(X)$ 中的由在 $|z|<1$ 中解析的函数所组成的闭子代数,那么距离 ρ_A 是非 Euclid 的,且圆周上的和圆盘内部的单点集可以看作 Gleason 部分. Gleason 部分不一定具有解析结构: 任何 σ 紧的完全正则空间同胚于某个代数的极大理想空间的 Gleason 部分,使得这个代数在该部分的限制包含所有有界连续函数. 两点属于同一个 Gleason 部分这一事实可以用 Шилов 边界上的表示测度来刻画: 两个这样的点具有两个互为绝对连续的、具有有界导数的表示测度. $\mathrm{Re}(A|_\Gamma)$ 在 $C(\Gamma)$ 中稠密的代数称为 Dirichlet 代数 (Dirichlet algebra); 如果 P 是有多于一点的 Dirichlet 代数的极大理想空间中的 Gleason 部分,那么存在圆盘 $|z|<1$ 到 P 的一一连续映射 ψ,使得对于任何函数 $f \in A$,函数 $f(\psi(z))$ 在 $|z|<1$ 中解析. 这样, P 具有使函数 $f \in A$ 都解析的结构; 当 P 赋以极大理想空间的通常拓扑时,映射 ψ 一般不是同胚,但是当 P 被赋以距离 ρ_A 时, ψ 是同胚.

参考文献见 **Banach 代数** (Banach algebra).

E. A. Горин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Gamelin, T. W., Uniform algebras, Prentice-Hall, 1969.
[A2] Stout, E. L., The theory of uniform algebras, Bogden and Quigley, 1971.

史树中 译

逻辑代数 [algebra of logic; алгебра логики]

数理逻辑的一个分支, 研究具有逻辑含义(真,假)的命题及其逻辑运算.

逻辑代数创始于 19 世纪中叶 G. Boole 的工作 ([1], [2]),此后又被 C. S. Peirce, П. С. Порецкий, B. Russel, D. Hilbert 等人所发展. 逻辑代数的发展是用代数方法

解决传统逻辑问题的一种尝试．随着19世纪70年代集合论的诞生，命题及其逻辑运算成为逻辑代数的主要对象．命题(proposition)是指可以问它是真或假的陈述．例如，命题“鲸鱼是一种动物”是真的，而陈述“所有的角都是直角”是假的．逻辑中常用的联接词“并且”，“或者”，“如果…那么…”，“等价于”，以及“否定”等等，可以用来从已知的命题构造新的更“复杂”的命题．例如，给定命题“$x>2$”和“$x\leqslant 3$”，可用联接词“并且”得到命题“$x>2$ 并且 $x\leqslant 3$”；用联接词“或者”，可以得到“$x>2$ 或者 $x\leqslant 3$”，等等．

上述方法得到的复合命题的真假值，与初始命题的真假值有关，也与作为命题运算的联接词的算法有关．通常用数字“1”表示真，用“0”表示假，联接词“并且”，“或者”，“如果…那么…”和“等价于”分别用符号&(合取(conjunction))，$\vee$(析取(disjunction))，$\rightarrow$(蕴涵(implication))和$\sim$(等价(equivalence))表示，否定(negation)用符号上面加一杠 − 表示．除了个体命题(individual propositions)，例如上述例子中给出的命题，还用到变元命题(variable propositions)，即可以取任何事先给定的个体命题为值的变元，亦称命题变元(proposition variable)．然后可以归纳地给出公式的概念，这是复合命题概念的形式化．用字母 $A, B, C, \cdots$，表示个体命题，用 $x, y, z, \cdots$，表示命题变元．这些字母中的每一个都被看成是一个公式(formula)．用 * 号表示上面列出的任何一个联接符号．如果 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 是公式，则 $(\mathfrak{A} * \mathfrak{B})$ 和 $\bar{\mathfrak{A}}$ 也是公式(例如 $((x\&y)\rightarrow\bar{z})$ 是公式)．联接号和否定号被看成是代表真假值的数字0和1的运算，而运算的结果仍是数字0和1．合取 $x\&y=1$，当且仅当 x, y 都等于1；析取 $x\vee y=0$，当且仅当 x, y 都等于0；蕴涵 $x\rightarrow y=0$，当且仅当 $x=1$ 且 $y=0$；等价 $x\sim y=1$，当且仅当 x 和 y 等值；否定 $\bar{x}=1$，当且仅当 $x=0$．如果一个公式中命题符号的值已经取定，则这个公式的值是0或1也就可以确定．这说明任何一个公式都可以看成是说明或表示逻辑代数的一个函数(function)的方法，这种函数的定义域是0, 1，取值也是0, 1．如果两个公式 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{B}$ 表示的函数是相同的，则称这两个公式相等($\mathfrak{A}=\mathfrak{B}$)．逻辑代数的主要内容就是处理逻辑代数的函数以及函数间的运算．假设函数的自变量和函数本身都取值于一个有限集 E，则逻辑代数的函数类就得以扩充，函数间的运算的个数也得以扩充．逻辑代数有时就被看成是这后一种概念．然而，从实际应用来看，最重要的情况还是集合 E 只有两个元素，所以这种情况将用最多的篇幅来加以讨论．这里列出的结果也都与研究命题的另一途径——称为**命题演算**(propositional calculus)密切相关．

常用一些表来说明逻辑代数的函数，这种表含有变元的值的所有组合，以及对于这些组合的函数值．现在给出函数 $\bar{x}$, $x\&y$, $x\vee y$, $x\rightarrow y$, 和 $x\sim y$ 的一览表如下：

x	y	$\bar{x}$	$x\&y$	$x\vee y$	$x\rightarrow y$	$x\sim y$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

逻辑代数的任何一个函数表都可以类似地构造．这称为逻辑代数函数的列表说明法(tabular way of specifying)．这种表有时称为真假值表(truth table)．下列诸等式在公式的等价变换中起着重要作用：

$$x\&y = y\&x,\ x\vee y = y\vee x \tag{1}$$

(交换律(law of commutativity))；

$$(x\&y)\&z = x\&(y\&z),\ (x\vee y)\vee z = x\vee(y\vee z) \tag{2}$$

(结合律(law of associativity))；

$$x\&(x\vee y) = x,\ x\vee(x\&y) = x \tag{3}$$

(吸收律(law of absorption))；

$$x\&(y\vee z) = (x\&y)\vee(x\&z), \tag{4}$$

$$x\vee(y\&z) = (x\vee y)\&(x\vee z)$$

(分配律(law of distributivity))；

$$x\&\bar{x} = 0 \tag{5}$$

(矛盾律(law of contradiction))；

$$x\vee\bar{x} = 1 \tag{6}$$

(排中律(law of the excluded middle))；

$$x\rightarrow y = \bar{x}\vee y, \tag{7}$$

$$x\sim y = (x\&y)\vee(\bar{x}\&\bar{y}).$$

只要应用这些等式，即使不用真假值表，也可以得到新的等式．这些新等式是由所谓恒等变换(indentity transformations)得到的．一般地说，恒等变换改变表达式，而不改变由表达式表示的函数．例如，由吸收律可以导出幂等律(law of idempotency)$x\vee x=x$．上面的这些等式使我们可以省略一些括号从而化简公式的记法．例如，根据关系式(1)和(2)，可以把公式 $((\cdots(\mathfrak{A}_1\&\mathfrak{A}_2)\&\cdots)\&\mathfrak{A}_s)$ 和 $((\cdots(\mathfrak{B}_1\vee\mathfrak{B}_2)\vee\cdots)\vee\mathfrak{B}_s)$ 写成更简单的记法 $\mathfrak{A}_1\&\mathfrak{A}_2\&\cdots\&\mathfrak{A}_s$ 和 $\mathfrak{B}_1\vee\mathfrak{B}_2\vee\cdots\vee\mathfrak{B}_s$．前一式称为因子 $\mathfrak{A}_1,\cdots,\mathfrak{A}_s$ 的合取(conjunction of the factors)，后者称为项 $\mathfrak{B}_1,\cdots,\mathfrak{B}_s$ 的析取(disjunction of the terms)．如果把常数0和1，蕴涵式和等价式都当作函数，那么，由等式(5)，(6)和(7)可以看出，它们也可以由合取、析取和否定来表示．这样逻辑代数的任何一个函数都可以用只含符号 &，$\vee$ 和 − 的公式表示．

含有命题变元，&，∨，→，~，⁻ 中的一些符号以及常量0和1的所有公式的集合称为这些符号和常量上的一个语言(language)．等式(1)－(7)表明，&，∨，→，~，⁻，0和1上的语言中的任何一个公式都可以找到&，∨，⁻，0和1上的语言中的一个与之等价的公式；例如

$$(x\to y)\sim z=((\bar{x}\vee y)\& z)\vee(\overline{(\bar{x}\vee y)}\&\bar{z}).$$

在后一语言中有一类公式起特殊作用，这类公式可以写成 $\mathfrak{A}_1\vee\cdots\vee\mathfrak{A}_s$，0或1的形式，其中 $s\geq 1$；每个 $\mathfrak{A}_i$ 或是一个命题变元，或是命题变元的否定，或是它们的合取；每个 $\mathfrak{A}_i$ 中都不包含相等的因子，也不同时含有形如 x 和 $\bar{x}$ 的因子；并且所有的 $\mathfrak{A}_i$ 两两不等．这里括号可以省去不写，因为总假设合取运算比析取"更强"，即对给定的变元的值计算公式的值时，先计算 $\mathfrak{A}_1,\cdots,\mathfrak{A}_s$ 的值．这样的表达式称为析取范式(disjunctive normal form)．&，∨，→，~，⁻，0，1上的语言中表示逻辑代数的任一非0函数的每个公式 u，都可以借助于等式(1)－(7)变换为等价的析取范式，其中含有 u 的所有变元以及任意几个另外的变元，并且这一析取范式中每个 $\mathfrak{A}_i$ 含有的变元都相同．这样的析取范式称为公式 u 的完满析取范式(perfect disjunctive normal form)；0的完满析取范式是0本身．化为完满析取范式的可能性构成了判断两个给定公式是否相等的一种算法的基础．这种算法的过程如下：先把给定的公式 u_1 和 u_2 化成含有 u_1 和 u_2 中全部变元的完满析取范式，再比较这两个范式，如果两式相同，则 $u_1=u_2$，否则 $u_1\neq u_2$．在逻辑代数及其应用中起重要作用的是缩约析取范式(contracted disjunctive normal form)，即满足下列条件的析取范式：1)不含有两个 $\mathfrak{A}_i$，$\mathfrak{A}_j$ 使 $\mathfrak{A}_i$ 的每个因子都含于 $\mathfrak{A}_j$ 中．2)对任意两个元素 $\mathfrak{A}_i$ 和 $\mathfrak{A}_j$，如果其中之一含有某个变元作因子，而另一个含有这个变元的否定(并设这一对元素中再没有满足这种性质的另一个变元)，则(在同一析取范式中)存在一个元素 $\mathfrak{A}_k$ 等价于 $\mathfrak{A}_i$，$\mathfrak{A}_j$ 中其他因子的合取．任何一个析取范式通过等式(1)－(7)都可以化为相等的缩约析取范式．例如，公式 $(x\sim(y\to z))\to(x\& z))$ 的缩约析取范式是 $\bar{x}\&\bar{y}\vee z\vee x\& y$．公式 u_1 和 u_2 相等，当且仅当它们的缩约析取范式相同．除了析取范式之外，还用到合取范式(conjunctive normal form)，即析取范式中用符号∨代换&，&代换∨，0代换1得到的表达式．例如，由析取范式 $x\& y\vee\bar{x}\& z$ 得到合取范式 $(x\vee y)\&(\bar{x}\vee z)$．一个运算(或函数) f 称为运算 ψ 的对偶(dual)运算，如果解释 f 的真假值表是由解释 ψ 的真假值表中用1代换0，0代换1得到的(函数值也代换)．这样，合取和析取是互为对偶的运算，否定与它本身对偶．常数0和1也互为对偶，等等．公式的一种变换称为对偶变换(dual transformation)，如果这种变换是将所有的运算符号用它们的对偶符号代替，并且用1代换0，0代换1．如果等式 $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}$ 是真的，并且 $\mathfrak{A}^*$ 是 $\mathfrak{A}$ 的对偶式而 $\mathfrak{B}^*$ 是 $\mathfrak{B}$ 的对偶式，则 $\mathfrak{A}^*=\mathfrak{B}^*$ 也是真的，这一等式称为前面一个等式的对偶(dual)等式；这就是所谓对偶原理(dual principle)．定律(1)，(2)和(3)中每一对等式都是对偶等式的例子；等式(5)对偶于等式(6)；每个合取范式对偶于某个析取范式．完满合取范式(perfect conjunctive normal form)和缩约合取范式(contracted conjunctive normal form)分别定义为其对偶式是完满析取范式和缩约析取范式的合取范式．完满和缩约析取和合取范式被用来审定一个给定公式的所有假设和所有推论．一个公式 $\mathfrak{A}$ 的假设(hypothesis of a formula)理解为一个公式 $\mathfrak{B}$，使得 $(\mathfrak{B}\to\mathfrak{A})=1$；一个公式 $\mathfrak{A}$ 的推论(consequence of a formula)是一个公式 $\mathfrak{B}$，使 $(\mathfrak{A}\to\mathfrak{B})=1$．一个公式 $\mathfrak{A}$ 的假设称为简单的(simple)，如果它是几个变元或变元的否定的合取，并且只要去掉其中任意一个因子就不再是公式 $\mathfrak{A}$ 的假设．同样，$\mathfrak{A}$ 的一个推论称为简单的(simple)，如果它是变元和变元的否定的析取式，并且只要去掉其中一个元素就不再是 $\mathfrak{A}$ 的推论．条件和结论的审定基于指出一种算法，把给定的公式变换成它的所有简单假设和推论，再用定律(2)－(7)变成其余所有的假设和推论．这一算法基于如下事实．如果 $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}$，则 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 有同样的假设和同样的推论．析取范式中的一个元素就是这个析取范式的一个假设，而合取范式的一个因子是这个合取范式的推论．如果 $\mathfrak{A}$ 是命题 $\mathfrak{B}$ 的一个假设，则 $\mathfrak{A}\&\mathfrak{C}$ 也是 $\mathfrak{B}$ 的假设；如果 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathfrak{B}$ 的一个推论，则 $\mathfrak{A}\vee\mathfrak{C}$ 也是 $\mathfrak{B}$ 的推论．如果 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{C}$ 都是命题 $\mathfrak{B}$ 的假设，则 $\mathfrak{A}\vee\mathfrak{C}$ 也是 $\mathfrak{B}$ 的假设．如果 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{C}$ 都是 $\mathfrak{B}$ 的推论，则 $\mathfrak{A}\&\mathfrak{C}$ 也是 $\mathfrak{B}$ 的推论．一个完满析取范式只有它自己的一些元素的析取或与之等价的析取范式是其假设(不含原析取范式中不出现的字母)．一个完满合取范式只有它自己的一些因子的合取或与之等价的命题的合取是其推论．一个缩约析取范式是它的所有简单假设的析取；一个缩约合取范式是它的所有简单推论的合取．缩约析取范式有重要的应用．值得注意的第一个问题是逻辑代数函数的极小化，这是控制(开关)系统合成问题的一个部分．逻辑代数函数的极小化(minimization of functions of the algebra of logic)是对给定的逻辑代数函数构造一个表示这个函数的析取范式，使其所有元素中因子数的和最小，即其复杂性最小．这种析取范式称为极小的(minimal)．给定的非常数逻辑代数函数的每个极小析取范式都可以从这个函数的缩约析取范式中去掉一些元素而得到．对某些函数，其缩约析取范式就是极小析取范式．这种情况出现于，

例如，单调函数(monotone functions)，即由&，∨，0，1上的语言所能表示的函数.

在&，∨，→，～，0，1，+上的语言中，当符号+解释为模2的加法时，下列关系是恒真的:

$$x \vee y = ((x\&y)+x)+y, \quad (8)$$

$$x \rightarrow y = \bar{x}\&y, \quad x \sim y = (x+y)+1, \quad (9)$$

$$x+y = (x\&y)\vee(\bar{x}\&\bar{y}), \quad 1 = x\vee\bar{x} \quad (10)$$

这些等式使得&，∨，→，～，0，1上的语言中的公式可以翻译成&，+，1上语言中的公式，并且反之亦真. 后一种语言里的恒等变换是通过有关合取的等式以及下面一些等式实现的:

$$x+y = y+x, \quad (11)$$

$$(x+y)+z = x+(y+z), \quad (12)$$

$$x\&(y+z) = x\&y+x\&z, \quad (13)$$

$$x\&y = x, \quad x+(y+y) = x, \quad x\&1 = x. \quad (14)$$

同前面一样，这里把合取看成是比+号更强的联接号. 如同&，∨，→，～，－，+，1上语言的情形，这些等式，加上恒等变形足以导出&，+，1上语言中的任意恒等式. 这个语言中的一个命题称为约化多项式(reduced polynomial)，如果它形如 $\mathfrak{A}_1+\cdots+\mathfrak{A}_s$，其中$\mathfrak{A}_i$等于1或是一个变元，或是几个非否定变元的合取，对$i\neq j$，$\mathfrak{A}_i\neq\mathfrak{A}_j$，$s\geqslant 1$，否则等于1+1. 例如，表示式$x\&y\&z+x\&y+1$是一个约化多项式. 逻辑代数的任意一个多项式都可以通过恒等变形变成一个约化多项式. 等式 $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}$ 恒真，当且仅当 $\mathfrak{A}$ 的约化多项式与 $\mathfrak{B}$ 的约化多项式相同. 除了以上提到的语言之外还有与它们等价的其他语言. 两种语言称为等价的(equivalent)，如果通过一些变换法则可以把一种语言中的任一公式变成第二种语言中一个与之等价的公式，而且反之亦真. 只要在任何一种由运算(和常量)组成的系统上建立这样一种语言就够了，这种语言要能用系统中的运算(和常量)表示逻辑代数的任意一个函数. 这样的系统称为函数完全的(functionally complete). 完全系统的例子有$\{\overline{x\vee y}\}$，$\{x\vee y,\bar{x}\}$，$\{x+y,1,x\&y\}$，等等. 存在一种算法可以用来确定逻辑代数函数的一个有限系统的完全性或不完全性. 这种算法是基于如下事实. 逻辑代数的一个函数系统是完全的，当且仅当它包含函数$f_1(x,y,\cdots,v)$和$f_2(x,y,\cdots,v)$，使$f_1(0,0,\cdots,0)=1$且$f_2(1,1,\cdots,1)=0$，同时还有函数f_3，f_4和f_5，使$f_3\neq f_3^*$，f_4不是单调函数，并且f_5的约化多项式含有一个多于一个因子的元素$\mathfrak{A}$. 另外也有建立在不是函数完全的运算系统上的语言，这种语言有无限多种，其中有无限多个两两不可比的语言(指无法用恒等变换把一种语言翻译成另一种语言). 然而，对建立在逻辑代数的一些运算上的任何一种语言，都存在这个语言中有限多个等式组成的系统，使任何一个等式可以由系统中等式经过恒等变换推出来. 这种系统称为语言中一个演绎完全的等式系统(deductively complete system of equalities). 例如，等式(1)－(6)便构成&，∨，－，0，1上语言的一个完全的等式系统.

当结合着完全的等式系统考虑上述的各种语言时，语言的基本运算的真假值表也好，命题是变元的值这种规定也好，有时都排除一边，取而代之的是考虑语言的各种解释. 每种解释包括一个由(用作变元的值的)对象组成的集合，以及这个集合的对象之间的某些运算，这些运算要满足本语言中一个完全的等式系统里的所有等式，这样一来，&，∨，¯，0，1上的语言变成了**Boole代数**(Boolean algebra)的语言；&，+，1上的语言变成了(有单位元的)**Boole环**(Boolean ring)的语言；&，∨，－上的语言变成了**分配格**(distributive lattice)的语言，等等.

历史上，逻辑代数的发展主要受应用它的问题的推动. 它的一个重要应用就是电路理论. 在某些情况下，电路不能用通常的二值逻辑代数来描述，而必须考虑**多值逻辑**(many-valued logic).

参考文献

[1] Boole, G., The mathematical analysis of logic: being an essay towards a calculus of deductive reasoning, Macmillan, 1847.

[2] Boole, G., An investigation of the laws of thought, on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities, Dover, reprint, 1951.

[3] Порецкий, П. С., О способах решения, логических равенств и об обратном способе математической логики, в кн.: Собрание протоколов заседаний секции физико-матем. наук Общества естествоиспытателей при Казанском ун-те, т. 2, Казань, 1884, 161－330.

[4] Hilbert, D., Ackerman, W., Grundzüge der theoretischen Logik, Dover, reprint, 1946.

[5] Новиков, П. С., Элементы математической логики, изд., М., 2 (1973) (英译本: Novikov, P. S., Elements of mathematical logic, Edinburgh, 1964).

[6] Яблонский, С. В., Гаврилов, Г. П., Кудрявцев, В. Б., Функции алгебры логики и классы Поста, М., 1964.

В. Б. Кудрявцев 撰

【补注】 在Boole函数理论中，缩约析取范式也称为简化析取范式(abridged disjunctive normal form)，见**Boole函数的范式**(Boolean functions, normal forms of).

沈复兴 译 王世强 校

测度代数 [algebra of measures; алгебра мер]

局部紧Abel群G上复值有界变差的正则Borel测

度全体所构成的代数 $M(G)$，它有通常的线性运算，且以卷积 $\lambda*\mu$ 为其乘法．见**抽象调和分析**（harmonic analysis, abstract）．测度 $\lambda,\mu\in M(G)$ 的卷积完全由以下的条件所确定：对于 G 上具有紧支集的任意连续函数 f，

$$\int_G f\,d(\lambda*\mu)=\int_G\int_G f(x+y)\,d\lambda(x)\,d\mu(y).$$

假如将测度的全变差定义为它的范数，$M(G)$ 就成为复数域上的交换 **Banach 代数**（Banach algebra）．测度代数 $M(G)$ 有一个单位元，就是集中在群的零元的 δ 测度．$M(G)$ 内的所有离散测度构成一个闭的子代数．

对于**群代数**（group algebra）$L_1(G)$ 中的每个函数 f，可以通过等式

$$\mu_f(E)=\int_E f\,dx$$

产生一个相应的测度 $\mu_f\in M(G)$（关于 Haar 测度的积分）．这是一个等距同构嵌入 $L_1(G)\to M(G)$．在此嵌入下的象是 $M(G)$ 中的一个闭理想．

测度 $\mu\in M(G)$ 的 Fourier - Stieltjes 变换（Fourier - Stieltjes transtorm of a measure）是由下式定义的在其对偶群 $\hat G$ 上的函数 $\hat\mu$：

$$\hat\mu(\chi)=\int_G\bar\chi\,d\mu.$$

因此，$\widehat{\lambda*\mu}=\hat\lambda\cdot\hat\mu$；并且当 $\hat\mu\equiv0$ 时，$\|\mu\|=0$．特别地，$M(G)$ 是没有根式的代数．

当群 G 为非离散时，测度代数 $M(G)$ 的结构非常复杂：它不对称，它的极大理想组成的空间有许多病态性质．例如，这个空间具有一些无限维解析集，且其中的自然嵌入群 $\hat G$ 甚至在它的 Шилов 边界里也不是稠密的．然而，幂等测度，即满足 $\mu*\mu=\mu$ 的测度是已知的．任意一个幂等测度一定是一个有限整数组合 $n_1\mu_1+\cdots+n_k\mu_k$，其中 $\mu_i=\chi_i\nu_i$，ν_i 为紧子群上的 Haar 测度，而 χ_i 为特征．在 $G=\mathbf{Z}$ 的情形，这表示由 0 和 1 组成的数列 (c_m) 是圆周上某测度的 Fourier - Stieltjes 变换，当且仅当 (c_m) 除了至多有限项以外，它是一个周期的数列．

在一般情形下，有关幂等测度的定理可以自然地用极大理想空间的零维上同调空间来解释．关于测度代数极大理想空间的其他上同调群的满意描述现在也已经知道．特别地，由此可以检验对 $M(G)$ 中可逆测度是否可以取其对数（一维积分上同调）．

参考文献

[1] Rudin, W., Fourier analysis on groups, Interscience, 1962.

[2] Taylor, J. L., The cohomology of the spectrum of a measure algebra, *Acta Math.*, **126**(1971), 195－225.

Е. А. Горин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Graham, C. C. and McGehee, O. C., Essays in commutative harmonic analysis, Springer, 1979.

[A2] Taylor, J. L., Measure algebras, *Amer. Math. Soc.*, 1972.

王斯雷 译　郑维行 校

集代数 [**algebra of sets; алгебра множеств**]

某集合 Ω 的若干子集组成的一个非空集类，关于集合论的有限次运算（并、交、取补）是封闭的．要使一个集合 Ω 的某些子集所成的集类成为集代数，它必须（而且也只须）关于有限并以及取补的运算是封闭的．关于可数并封闭的集代数称为集合的 σ 代数（σ - algebra of sets）．每个集合的 σ 代数关于集合论的可数次运算都是封闭的．

例子．1) 任意集合 Ω 的有限子集以及它们的补集组成的类是一个集代数；Ω 的至多为可数个子集及其补集组成的类是一个集合的 σ 代数．

2) 有限个形如

$$\{x\in\mathbf{R}:\ a\leqslant x<b\},\quad -\infty\leqslant a\leqslant b\leqslant+\infty$$

的区间之并的全体构成一个集代数．

3) 设 Ω 为拓扑空间；由 Ω 的开子集所生成的集合的 σ 代数 B（换言之，含 Ω 的所有开子集的最小的集合的 σ 代数）称为 Ω 的子集的 Borel σ 代数（Borel σ - algebra），而 B 中的集合称为 Borel 集（Borel sets）．

4) 设 $\Omega=\mathbf{R}^T$，其中 T 为任意集合（即 Ω 为 T 上实函数的全体）；形如

$$\{\omega\in\Omega:\ (\omega(t_1),\ldots,\omega(t_k))\in E\}$$

的集合的全体 A 构成一个集代数，其中 E 为 $\mathbf{R}^k$ 的 Borel 集；在随机过程理论中，**概率测度**（probability measure）通常是最初仅对这种集代数有定义，然后再延拓到更广的集类（由 A 生成的 σ 代数）上去．

5) $\mathbf{R}^k$ 中所有的 Lebesgue 可测集构成集合的 σ 代数．

代数（相应地，σ 代数）是有限加性（相应地，σ 加性）测度的自然定义域．根据测度延拓定理，定义在一个代数 A 上的任意 σ 有限且 σ 加性测度，都可以唯一地延拓成为由 A 生成的 σ 代数上的 σ 加性测度．

参考文献

[1] Dunford, N. and Schwartz, J. T., Linear operators, General theory, I, Interscience, 1958.

[2] Halmos, P. R., Measure theory, v. Nostrand, 1950 （中译本：R．哈尔姆斯，测度论，科学出版社，1958）．

[3] Neveu, J., Bases mathématiques du calcul des probabilités, Masson, 1970.

В. В. Сазонов 撰

王斯雷 译

幂结合代数 [algebra with associative powers 或 power-associative algebra ; **алгебра с ассоциативными степенями**]

域 F 上的一个线性代数，它的每个元素生成一个结合子代数．给定域 F 上的所有幂结合代数的集合形成一个代数簇，如果域 F 的特征为0，那么这个代数簇由恒等式系

$$(x, x, x) = (x^2, x, x) = 0$$

确定，这里 $(x, y, z) = (xy)z - x(yz)$．如果 F 是特征为素数 p 的无限域，那么这个幂结合代数簇不能由任何有限个恒等式确定，但已经知道一个确定它的独立的无限恒等式系 ([3])．如果一个特征不为 2 的幂结合交换代数 A 有一个幂等元 $e \neq 0$，那么由 Peirce 分解 (Peirce decomposition)，可将 A 分解为向量子空间的直和：

$$A = A_0(e) \oplus A_{1/2}(e) \oplus A_1(e), \qquad (*)$$

这里 $A_\lambda(e) = \{a \in A : ea = \lambda a\}$ $(\lambda = 0, 1/2, 1)$．$A_0(e)$ 和 $A_1(e)$ 是子代数，$A_0(e)A_1(e) = 0$，$A_{1/2}(e)A_{1/2}(e) \subseteq A_0(e) + A_1(e)$，$A_\lambda(e)A_{1/2}(e) \subseteq A_{1/2}(e) + A_{1-\lambda}(e)$ $(\lambda = 0, 1)$．在幂结合代数的结构理论中，分解 (*) 起着基本的作用．

参考文献

[1] Albert, A. A., Power-associative rings. *Trans. Amer Math. Soc.*, **64** (1948), 552 - 593.

[2] Гайнов, А. Т.,《Успехи матем наук》, 12 (1957), 3 (75), 141 - 146.

[3] Гайнов, А. Т.,《Алгебра и логика》, 9 (1970), 1, 9 - 33.

А. Т. Гайнов 撰

【补注】 一个非零特征的域上的幂结合代数的集合形成一个由 $(x, x, x) = (x^2, x, x)$ 确定的簇，这一事实是在 [A1] 中证明的．

参考文献

[A1] Albert, A. A., On the power associativity of rings, *Summa Brasiliensis Math.*, **2** (1948), 21 - 33.

彭联刚 译

代数的代数 [algebraic algebra; алгебраическая алгебра]

域 F 上幂结合代数 A (特别地，结合代数)，其所有元素都是代数的 (元素 $a \in A$ 称为代数的 (algebraic)，如果由 a 生成的子代数 $F[a]$ 是有限维的，或等价地，元素 a 有系数在基域 F 中的零化多项式)．代数 A 称为有界次代数的代数 (algebraic algebra of bounded degree)，如果它是代数的且其元素的极小零化多项式的次数的集合是有界的．有界次代数的代数的子代数与同态象仍是有界次代数的代数．

例：局部有限代数 (特别地，有限维代数)、诣零代数及不可数域上有可数生成元集的结合除环．

下面假定所涉及的代数均为结合的．代数的代数的 **Jacobson 根** (Jacobson radical) 是诣零理想．本原代数的代数 A 同构于除环上向量空间的线性变换的稠密代数；如果 A 还是有界次的，则 A 同构于除环上的矩阵环．有限域上没有非零幂零元的代数的代数 (特别地，除环) 是交换的．因此，有限除环是交换的．有界次代数的代数满足一个多项式恒等式，见 **PI 代数** (PI-algebra)．代数的 PI 代数是局部有限的．如果基域是不可数的，则由代数的代数通过基域的扩张所得到的代数，及代数的代数的张量积，都是代数的代数．

参考文献

[1] Jacobson, N., Structure of rings, Amer. Math. Soc., 1956.

[2] Herstein, I., Noncommutative rings, Math. Assoc. Amer., 1968.

В. Н. Латышев 撰 王志玺 译

代数分支点 [algebraic branch point ; алгебраическая точка ветвления]，代数奇点 (algebraic singular point).

解析函数 $f(z)$ 的有限阶孤立分支点 a，具有下述性质：对于 f 在以 a 为其一个边界点的区域内开拓的任何正则元素，极限 $\lim_{z \to a} f(z)$ 存在．更确切地说，对于完全**解析函数** (analytic function) $f(z)$ 在复 z 平面内的一个奇点 a，在这个函数的某个以 z_0 为中心的正则元素 e_0 沿通过 a 的路径的开拓中，若满足下列条件，则称 a 为代数分支点 (algebraic branch point)：1) 存在正数 ρ 使得元素 e_0 可沿环域 $D = \{z : 0 < |z - a| < \rho\}$ 内任一连续曲线开拓；2) 存在正整数 $k > 1$ 使得若 z_1 是 D 内任一点，则元素 e_0 在 D 中的解析开拓恰产生函数 $f(z)$ 的 k 个以 z_1 为中心的不同的元素；若 e_1 是以 z_1 为中心的任一元素，则所有其余 $k-1$ 个以 z_1 为中心的元素可由 e_1 沿环绕点 a 的闭路径的解析开拓得到；3) 由 e_0 在 D 内开拓所得的所有元素在 D 内的点 z 的值，当 z 在 D 内趋于 a 时，趋于一个确定的有限或无穷极限．

数 $k-1$ 称为代数分支点的阶 (order)．由元素 e_0 在环域 D 内解析开拓得到的函数 $f(z)$ 的全部分支可在 a 的一个去心邻域内用广义 Laurent 级数 (Puiseux 级数 (Puiseux series)) 表示：

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n (z-a)^{n/k}, \quad m \geqslant 0.$$

如果点 $b = 0$ 是函数 $g(w) = f(1/w)$ 的一个代数分支点，则称无穷远点 $a = \infty$ 是函数 $f(z)$ 的一个代数分支点．

一个完全解析函数可能存在几个 (甚至无穷多个) 不同的具有给定附标 a 的代数分支点和正则点．

参考文献

[1] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968 (中译本：А. И. 马库雪维奇，解析

函数论,高等教育出版社, 1957).
[2] Hurwitz, A. and Courant, R., Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen, 4, Springer, 1968.

Е. Д. Соломенцев 撰 侯纪欣 译 何育赞 校

代数闭包 [**algebraic closure**; **алгебраическое замыкание**], 域 k 的

域 k 的代数扩张(见**域的扩张**(extension of a field)), 使之成为一个**代数闭域**(algebraically closed field). 每个域都存在这样的扩张且在同构意义下是唯一的. 实数域的代数闭包是复数域(见**代数学基本定理**(algebra, fundamental theorem of)).

В. Н. Ремесленников 撰 冯绪宁 译

代数曲线 [**algebraic curve**; **алгебраическая кривая**]

一维**代数簇**(algebraic variety). 代数曲线是代数几何学中研究得最多的对象. 在下文中, 代数曲线是指代数闭域上的不可约代数曲线.

最简单也是最清楚的是平面仿射代数曲线. 它是仿射平面 A_k^2 内满足方程 $f(x, y)=0$ 的点集, 这里 $f(x, y)$ 是系数在代数闭域 k 里的多项式. k 上不可约代数曲线的有理函数域是形如 $k(x, y)$ 的单变量代数函数域, 这里 x 和 y 由方程 $f(x, y)=0$ 联系着, 其中 $f(x, y)$ 是 k 上的多项式. 这意味着每一条代数曲线都双有理同构于一条平面仿射曲线.

很久以来人们就知道, 即使是研究仿射曲线, 也只有在考虑无穷远点并且对奇点作细致研究后才能揭示其基本关系. 为了研究仿射曲线的所有的点, 将其嵌入射影空间 P^n 内, 然后在 **Zariski 拓扑**(Zariski topology)下取闭包. 这样就得到一条射影曲线 X, 原来的仿射曲线 Y 可从 X 去掉有限个点而得到. 若 Y 不可约, 则 X 和 Y 是双有理同构的. 完全代数曲线都是射影的. 如果 X 是光滑射影曲线, 那么域 $k(X)$ 的所有赋值环都由**局部环**(local ring) $\mathcal{O}_x (x\in X)$ 给出. 如果两条光滑射影曲线双有理等价, 那么它们是同构的. 正规代数曲线是光滑的. 特别地, 所有不可约代数曲线都双有理等价于一条光滑射影曲线. 由正规化过程得到的代数曲线的射影模型落在某个空间 P^n 内. 任何光滑射影曲线都与位于 P^3 内的曲线同构. 任一平面代数曲线都可用 **Cremona 变换**(Cremona transformation)转化为具有正常奇点的曲线.

光滑代数曲线上的**除子**(divisor)可表示为点的整系数线性组合:

$$D = \sum_{x\in X} n_x x, \quad n_x \in \mathbf{Z}.$$

其中对几乎所有的 x, $n_x=0$. 若所有的 $n_x \geqslant 0$, 则除子 D 称为正的(positive)或有效的(effective), 记为 $D\geqslant 0$. 除子 D 的次数(degree of the divisor)是数

$$\deg D = \sum_x n_x.$$

主除子构成 X 所有除子的群 $\operatorname{Div} X$ 的子群 $P(X)$. 商群 $\operatorname{Div}(X)/P(X)$ 称为除子类群(group of divisor classes), 记为 $\operatorname{Cl}(X)$. 群 $\operatorname{Cl}(X)$ 同构于 X 上一维向量丛(见**代数向量丛**(vector bundle, algebraic))的类群 $\operatorname{Pic}(X)$. 光滑射影曲线上主除子的次数等于 0, 因此同一类中所有除子次数相同. 特别地, 我们可以论及除子类的次数以及零次除子类的子群 $\operatorname{Cl}^0(X)$. 下述等式成立:

$$\operatorname{Cl}(X) / \operatorname{Cl}^0(X) = \mathbf{Z}.$$

对直线 P^1, $\operatorname{Cl}(P^1)=\mathbf{Z}$, $\operatorname{Cl}^0(P^1)=0$, 即所有零次除子都是主除子. 这个性质是有理光滑射影曲线的特征.

对完全代数曲线 X, 数 $\pi=\dim H^1(X, \mathcal{O}_X)$ 就是代数曲线 X 的算术亏格(arithmetic genus of the algebraic curve). 当 X 光滑时, π 等于 X 上所有正则微分形式的空间 $H^0(X, \Omega_X^1)$ 的维数; 这个维数就是 X 的亏格(genus). 由定义, 代数曲线的亏格等于它的非奇异模型的亏格. 对任一非负整数 g, 总存在亏格 g 的代数曲线. 有理曲线由等式 $g=0$ 刻画. 如果 X 是 m 次射影平面曲线, 则

$$\pi = \frac{(m-1)(m-2)}{2},$$

而它的亏格由下面公式给出:

$$g = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - d.$$

其中 d 是非负整数, 它是 X 的光滑性的度量. 如果 X 仅有寻常二重点, 那么 d 就是奇点个数.

特别地, 平面光滑射影曲线的亏格为

$$g = \frac{(m-1)(m-2)}{2}.$$

这意味着并非每一条光滑射影曲线都是平面的. 对于空间曲线 X, 有如下估计式:

$$g \leqslant \begin{cases} \dfrac{(n-2)^2}{4} & \text{对偶数 } n, \\ \dfrac{(n-1)(n-3)}{4} & \text{对奇数 } n, \end{cases} \tag{1}$$

这里 n 是 X 的次数. 对于每一个 n 的值, 存在具有最大亏格的 n 次曲线且位于二次曲面上(G. Halphen, 1870).

光滑射影曲线 X 的**典范类**(canonical class) K_X 的次数借助公式 $\deg K_X=2g-2$ 与曲线的亏格相联系. 如果光滑射影曲线 X 位于光滑代数曲面 F 上, 就有附加公式(adjunction formula) $K_X=X(X+K_F)$. 特别

地，$\deg K_X=(X)^2+(X\cdot K_F)$．对于 X 上任意除子 D，可考虑由零及使 $(f)+D\geqslant 0$ 的函数 f 所构成的域 $k(X)$ 的子集．这是 k 上有限维 $l(D)$ 的线性空间．由除子 D 确定的完全**线性系**（linear system）的维数是 $l(D)-1$，计算 $l(D)$ 是代数曲线论中的重要课题．与此有关的最强的结果是 **Riemann - Roch 定理**（Riemann - Roch theorem）．对光滑射影曲线，这个定理是等式

$$l(D)-l(K-D)=\deg(D)-g+1,$$

这里 g 是曲线 X 的亏格．如果 $l(K-D)>0$（或 $l(K-D)=0$），就称 D 是特殊的（special）（或非特殊的（non - special））．对于非特殊除子 D，Riemann - Roch 定理成为 $l(D)=\deg(D)-g+1$．次数大于 $2g-2$ 的每个除子都是非特殊的．

在光滑射影曲线 X 上与除子 D 线性等价的除子类可确定 X 的 **Jacobi 簇**（Jacobi variety）$J(X)$ 上的一个点．这个簇等同于 X 的 **Albanese 簇**（Albanese variety）和 **Picard 簇**（Picard variety）．与特殊除子类对应的点是 $J(X)$ 上 **Poincaré 除子**（Poincaré divisor）的奇点．如果用 G_n^r 表示 $J(X)$ 的与 $\deg D=n$，$l(D)=r$ 的除子类相对应的点的子集，则 G_n^r 成为 $J(X)$ 的子概形，而且

$$\dim G_n^r\geqslant r(n-r+1)-(r-1)g$$

（Riemann - Brill - Noether 定理（Riemann - Brill - Noether theorem））．这个定理有很多应用，下面介绍其中一个应用．$l(D)\geqslant 1$ 的除子 D 定义从曲线 X 到射影空间 $P^{l(D)-1}$ 内的一个有理映射 φ_D．映射 φ_D 依赖于 D 的类．若 $\deg(D)\geqslant 2g+1$，则 φ_D 定义 X 到 P^m 内的一个同构嵌入，且 $\varphi_D(X)$ 不包含在空间 $P^m(m\equiv l(D)-1)$ 的任何真子空间内．从曲线双有理分类的观点来看，对应于 X 的典范类的倍数 nK 的映射 φ 最为重要．当 $g>1$ 时，类 $3K$ 定义了光滑射影曲线到 P^{5g-6} 内的一个同构嵌入．两条曲线 X 和 Y 双有理等价当且仅当它们的象 $\varphi_{3K}(X)$ 和 $\varphi_{3K}(Y)$ 可通过 P^{5g-6} 的射影变换互相得到．对映射 φ_K 的研究可得到亏格 $g>1$ 的曲线的更精确的特征．对于这些曲线，$\varphi_K:X\to P^{g-1}$ 是同构嵌入当且仅当 X 不是**超椭圆曲线**（hyper - elliptic curve）．当 φ_K 为同构时，曲线 $\varphi_K(X)$ 称为典范的（canonical）；它被确定到相差 P^{g-1} 内的射影变换．代数曲线理论的一个重要任务就是在双有理同构下的分类．在这一领域里已经得到了不少重要结果，但直到目前（1977 年）这个问题还没有很完满的解决．

光滑射影曲线被分成四类：

1) 亏格 0 的曲线，双有理等价于 P^1；

2) 亏格 1 的曲线（椭圆曲线），双有理等价于 P^2 里的光滑三次曲线；

3) 超椭圆曲线；

4) 亏格 $g>1$ 的非超椭圆曲线，双有理等价于 P^{g-1} 里的典范曲线（基本型代数曲线（algebraic curves of basic type））．

曲线的亏格并不能完全刻画代数曲线的双有理等价类．仅有的例外是亏格零的曲线．当 k 是复数域 $\mathbf{C}$ 时，椭圆曲线的相互同构类可用商空间 H/G 的点来描述，这里 H 是上半平面，G 是由行列式等于 $+1$ 的整系数有理线性变换组成的模群．空间 H/G 具有与 $\mathbf{C}$ 同构的解析流形的结构（见**椭圆曲线**（elliptic curve））．亏格 $g>1$ 的双有理等价曲线类可用属于 $3g-3$ 维的某代数簇 $\mathscr{M}_g$ 的点来描述，$\mathscr{M}_g$ 称为亏格 g 曲线的参模簇，它是不可约的．有一个猜测说 $\mathscr{M}_g$ 是单有理的；不过仅对 $g<11$ 给出了证明（F. Severi）．

对于光滑射影曲线 X 的自同构群 $\mathrm{Aut}(X)$ 有以下结果：1）若 X 是 P_k^1，则 $\mathrm{Aut}(X)$ 是有理线性变换群 $\mathrm{PGL}(1,k)$．2）若 X 是椭圆曲线，则 $\mathrm{Aut}(X)$ 是一个代数群，其单位连通分支与 $X(k)$ 的点群重合．3）若 X 是亏格 $g>1$ 的曲线，则 $\mathrm{Aut}(X)$ 总是有限群．它的阶有上界 $84(g-1)$（[6]）．在后一种情形下，X 上的 **Weierstrass 点**（Weierstrass point）在研究群 $\mathrm{Aut}(X)$ 时起重要作用．

研究 $\mathrm{Aut}(X)$ 的另一方法是基于所有光滑射影曲线都是射影直线的有限（分歧）覆叠这一事实．

设 X 是定义在域 $\mathbf{C}$ 上的光滑射影曲线．曲线的点集 $X(\mathbf{C})$ 具有一维紧解析流形的自然结构，它也称为紧 **Riemann 曲面**（Riemann surface）．其逆亦真，即任何紧 Riemann 曲面都可从某个光滑射影曲线得到．通常使用同一个符号 X 表示光滑射影曲线及其相应的一维复流形．任何连通复流形 X 可表成一个商 $\widetilde{X}/G$，这里 $\widetilde{X}$ 是单连通复流形，G 是 $\widetilde{X}$ 的一个自同构群，它离散地且自由地作用在 $\widetilde{X}$ 上．值得注意的是在同构意义下仅有三个单连通一维连通解析流形．它们是射影直线 $\mathbf{CP}^1$（Riemann 球面），仿射直线 $\mathbf{C}$（有限平面）以及单位圆盘的内部 $D=\{z:|z|<1\}$（Лобачевский 平面）．依据属于万有覆叠空间三种类型的哪一种，可把所有的光滑射影曲线分成三类．

对于给定类型的光滑射影曲线的分类问题可以归结为对万有覆叠空间变换的离散群的研究，它们自由地作用且具有相对紧基本区域．在射影直线情形下，G 是单位元素群；在仿射直线的情形下，G 同构于加法群 $\mathbf{C}$ 的一个子群 Ω，Ω 是 $\mathbf{C}$ 内的一个二维格；在单位圆盘内部的情形下，G 是 Лобачевский 平面内的运动子群，它可用某个非 Euclid 有界多边形来定义．因而上述第一类包含唯一的曲线 P^1．第二类由复环面 $\mathbf{C}/\Omega$ 组成，它们都具有一维 Abel 簇（椭圆曲线）结构，环面上点的加法定义了相应曲线的群结构．所有光滑椭圆曲线都能如此得到．椭圆曲线 $X\simeq\mathbf{C}/\Omega$ 上的有理函数域 $C(X)$ 同

构于以 Ω 为周期群的双周期亚纯(椭圆)函数域.如果 $f(x, y)=0$ 是曲线 X 的仿射模型的方程,则存在利用它的椭圆函数的参数化 $x=\varphi(z)$, $y=\psi(z)$ (X 的单值化). 第三类由亏格 $g>1$ 的所有光滑射影曲线 X 组成. 在这种情形域 $C(X)$ 同构于 D 上关于群 G 不变的亚纯函数域.这样的函数称为自守的(automorphic).每一条亏格 $g>1$ 的代数曲线可用自守函数**单值化**(uniformization).椭圆曲线的分类问题也导致对商 D/G 的研究,但它与刚才所讨论的情形有本质上的区别. 首先, 群 G 在 D 内有不动点; 其次,流形 D/G 虽包含一个有限 Лобачевский 平面,却是非紧的. 对这种群的一般情形及其商的研究在现代算术研究中起着重要的作用.

如果代数曲线 X 定义在非闭域 k 上,那么一个很重要的问题就是 X 的有理点集 $X(k)$ 的存在性及其位置. 在有限域 k 上光滑射影曲线的情形下,已经证明了不等式 $|N-q-1|\leqslant 2g\sqrt{q}$, 这里 N 是 X 在 k 的有限扩域 L 上的有理点数, q 是 L 的元素个数, g 是 X 的亏格. 这个不等式等价于关于 X 的 ζ 函数零点的 Riemann 假设,即 ζ 函数的所有零点都在竖直线 $\sigma=1/2$ 上(见代数几何学中的 **ζ 函数** (zeta - function)).

现在设 X 是定义在有理数域 $\mathbf{Q}$ 上的一条代数曲线.对于亏格为 0 的曲线, $X(\mathbf{Q})$ 的点比较容易找到,对于椭圆曲线,其有理点成一个有限生成群(当 $X(\mathbf{Q})$ 非空时),而对亏格 $g\geqslant 2$ 的曲线,有 **Mordell 猜想** (Mordell conjecture)认为 $X(\mathbf{Q})$ 是有限的.

如果基域 k 是一条光滑射影曲线 B 的有理函数域 $k_0(B)$, 那么 k 上的光滑射影曲线 X 同构于态射 $f: V \to B$ 在 k_0 上的一般纤维 X_η, 这里 V 是一光滑射影代数曲面. 若假设态射的纤维不是只含亏格为 1 的曲线,则这个态射是唯一确定的. 有理点集 $X(k)$ 与 f 的截面集 $V(B)$ 成一一对应,并且对亏格 $g>2$ 的曲线, $X(k)$ 是有限集. 域 $k_0(B)$ 上的亏格 0 或 1 的曲线在代数曲面论中研究(见**椭圆曲面** (elliptic surface); **直纹面** (ruled surface)).

参考文献

[1] Шафаревич, И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972 (英译本: Shafarevich, I. R., Basic algebraic geometry, Springer, 1977).

[2] Walker, R. J., Algebraic curves, Springer, 1978.

[3] Mumford, D., Lectures on curves on an algebraic surface, Princeton Univ. Press, 1966.

[4] Chevalley, C., Introduction to the theory of algebraic functions of one variable, Amer. Math. Soc., 1951.

[5] Serre, J.-P., Groupes algébrique et corps des classes, Hermann, 1959.

[6] Чеботарев, Н. Г., Теория алгебраических функций, М.-Л., 1948.

[7] Springer, G., Introduction to Riemann surfaces, Addison-Wesley, 1957.

[8] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 12, М., 1974, 77-170

В. Е. Воскресенский 撰

【补注】 上述估计式(1)属于 G. Castelnuovo[A1]. 也可在 [A2], [A3], [A4] 中找到证明. 参考文献 [A2] 也包含了关于 Riemann - Noether - Brill 定理的新结果,例如对于参模意义下的一般曲线, 定理的等号成立;这一文献也给出了代数曲线论当前发展的综述.

若 g 是奇数且 $g\geqslant 25$ (J. E. Harris 和 D. Mumford) 或 g 是偶数且 $g\geqslant 40$ (Harris), 曲线的参模空间 $\mathscr{M}_g$ 是一般型的,从而不是单有理的([A5]).

Mordell 猜测,即数域上亏格至少是 2 的任何曲线只有有限多个有理点已被 G. Faltings 证明([A6]).

参考文献

[A1] Castelnuovo, G., Studies on the geometry of algebraic curves, *Atti. R. Acad. Sci. Torin*, **24** (1889), 196-223.

[A2] Arbello, E., Cornalba, M., Griffiths, P. A. and Harris, J. E., Geometry of algebraic curves, 1, Springer, 1985.

[A3] Griffiths, P. A. and Harris, J. E., Principles of algebraic geometry, Wiley, 1978.

[A4] Hartshorne, R., Algebraic geometry, Springer, 1977.

[A5] Mumford, D. and Harris, J., On the Kodaira dimension of the moduli space of curves, *Invent. Math.*, **67** (1982), 23-88.

[A6] Faltings, G., Endlichkeitssatze fur abelsche Varietaten uber Zahlkorpern, *Invent. Math.*, **73** (1983), 349-366.

【译注】 目前已证明到当 $g\geqslant 23$ 时 $\mathscr{M}_g$ 是一般型的,并且猜测 $\mathscr{M}_g$ 是单直纹的当且仅当 $g<23$. 这方面的综述文章可见[B1].

参考文献

[B1] Eisenbud, D. and Harris, J., Progress in the theory of complex algebraic curves, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **21** (1989), 205-232.

陈志杰 译

代数闭链 [algebraic cycle; алгебраический цикл],代数簇上的

由给定代数簇的所有闭不可约子簇作为自由生成元集合的**自由 Abel 群** (free Abelian group)的一个元素. 簇 X 上代数闭链的群记为 $C(X)$. $C(X)$ 中由余维数 p 的子簇生成的子群记为 $C^p(X)$. 群 $C(X)$ 可以表示成直和

$$C(X) = \bigoplus_p C^p(X).$$

子群 $C^1(X)$ 与 X 上 Weil **除子** (divisor)的群相同.

下文中 X 表示代数闭域 k 上 n 维非奇异射影代数簇. 若 k 是复数域 $\mathbf{C}$, 则每个代数闭链 $Z\in C^p(X)$ 定义了一个 $(2n-2p)$ 维同调类 $[Z]\in H_{2n-2p}(X, \mathbf{Z})$, 且根据 Poincaré 对偶性,确定一个上同调类 $\gamma(Z)\in H^{2p}(X, \mathbf{Z})$.

$[Z]$（或 $\gamma(Z)$）型的同调（或上同调）类称为代数同调（或上同调）类（algebraic homology (cohomology) classes）. 每个解析闭链都同调于一个代数闭链. 人们相信（Hodge 猜想（Hodge conjecture））X 上的一个整 $(2n-2p)$ 维闭链 Γ 同调于一个代数闭链，当且仅当所有 $(2p-q, q)$ $(q\neq p)$ 型闭微分形式在 Γ 上的积分等于 0. 这个猜想只是对 $p=1$（对 $n=2$（[6]），对所有 n（[7]）），对 $p=n-1$ 以及对簇的一些孤立类（[4]）得到证明.

如果 $W=\sum n_i W_i$ 是两个簇的积 $X\times T$ 上的一个代数闭链，则 X 上形如

$$\sum n_i W_i \bigcap (X\times\{t\})$$

的闭链的集合称为 X 上以基簇 T 参量化的代数闭链族（family of algebraic cycles）. 这种关系通常要求每个子簇 W_i 到 T 上的射影是平坦态射. 当 $W=W_1$ 由不可约子簇定义时，X 上相应的代数闭链族称为代数子簇族（family of algebraic subvarieties）. 特别地，对代数簇的任何平坦态射 $f: X\to Y$，它的纤维 X_y 构成一个以基簇 Y 参量化的 X 的代数子簇族. 这个概念的第二个特例是**线性系**（linear system）. 以连通基簇参量化的、射影簇 X 的代数子簇（或相应地，代数闭链）族的所有成员都有相同的 **Hilbert 多项式**（Hilbert polynomial）（相应地，**虚算术亏格**（arithmetic genus））.

簇 X 上的两个代数闭链 Z 和 Z' 称为代数等价的（algebraically equivalent）（记为 $Z\sim_{\mathrm{alg}}Z'$），如果它们属于由连通基簇作参量化的同一个族. 直观地，代数闭链的等价性意味着 Z 可以代数地形变到 Z'. 如果这个定义包含 T 是有理基簇的条件，那么代数闭链 Z 和 Z' 称为有理等价的（rationally equivalent）（记为 $Z\sim_{\mathrm{rat}}Z'$），若 $Z, Z'\in C^1(X)$ 时，有理等价性的概念就简化为除子的线性等价性的概念. 有理（或相应地，代数）等价于零的代数闭链的子群记为 $C_{\mathrm{rat}}(X)$（相应地，$C_{\mathrm{alg}}(X)$）. 这两个群都是它的分量的直和：

$$C^p_{\mathrm{rat}}(X) = C_{\mathrm{rat}}(X)\bigcap C^p(X),$$

$$C^p_{\mathrm{alg}}(X) = C_{\mathrm{alg}}(X)\bigcap C^p(X).$$

商群 $C^1(X)/C^1_{\mathrm{alg}}(X)$ 是有限生成的，称为簇 X 的 Neron - Severi 群（Neron - Severi group）. 当 $p>1$ 时，商群 $C^p(X)/C^p_{\mathrm{alg}}(X)$ 是否有限生成的问题，至今（1977）仍未解决. 商群 $C^1_{\mathrm{alg}}(X)/C^1_{\mathrm{rat}}(X)$ 具有 Abel 簇的结构（见 **Picard 概形**（Picard scheme））. 用闭链的相交运算可以在商群 $C(X)/C_{\mathrm{rat}}(X)$ 内定义一个乘法，把它变成一个交换环，称为簇 X 的周（炜良）环（Chow ring）（见**相交理论**（intersection theory））.

对任何 Weil 上同调论 $H^*(X)$，存在唯一确定的群同态

$$\gamma: C^p(X)\to H^{2p}(X).$$

如果 $\gamma(Z)=\gamma(Z')$，就称两个代数闭链 Z 和 Z' 是同调等价的（homologically equivalent）（记为 $Z\sim_{\mathrm{hom}}Z'$）. 同调等价于 0 的代数闭链的子群记为 $C_{\mathrm{hom}}(X)$. 存在嵌入 $C_{\mathrm{alg}}(X)\subset C_{\mathrm{hom}}(X)$. 商群 $C(X)/C_{\mathrm{hom}}(X)$ 是有限生成的，而且是环 $H^*(X)$ 的子环，记为 $A^*(X)$，称作代数 Weil 上同调类的环（ring of algebraic Weil cohomology classes）. 目前还不知道（1986）$A^*(X)$ 是否依赖于选取的 Weil 上同调论.

如果存在 $m\geq 1$ 使 $mZ\sim_{\mathrm{alg}}mZ'$，就称两个代数闭链 Z 和 Z' 是 τ 等价的（τ - equivalent）（记为 $Z\sim_{\tau}Z'$）. τ 等价于 0 的代数闭链的子群记为 $C_{\tau}(X)$. $C^p(X)$ 的两个代数闭链 Z 和 Z' 称为数值等价的（numerically equivalent）（记为 $Z\sim_{\mathrm{num}}Z'$），如果对任何 $W\in C^{n-p}(X)$，只要等式两边都有定义，就有 $WZ=WZ'$. 数值等价于 0 的代数闭链的子群记为 $C_{\mathrm{num}}(X)$. 有如下嵌入：

$$C_{\tau}(X)\subset C_{\mathrm{hom}}(X)\subset C_{\mathrm{num}}(X).$$

对于除子，群 $C_{\tau}(X)\bigcap C^1(X)$，$C_{\mathrm{hom}}(X)\bigcap C^1(X)$ 和 $C_{\mathrm{num}}(X)\bigcap C^1(X)$ 是相同的（[6]）. 不过根据 [5] 中的反例，对于 $k=\mathbf{C}$，

$$C_{\tau}(X)\neq C_{\mathrm{hom}}(X),$$

这里的 $C_{\mathrm{hom}}(X)$ 是作为有理系数的寻常上同调研究的. 对于任意特征的域 k 及 Weil 上同调的 l 进理论，可举出类似的反例. 关于群 $C_{\mathrm{hom}}(X)$ 与 $C_{\mathrm{num}}(X)$ 的相等问题已经解决（[9]）.

设 X 被嵌入一个射影空间，L_X 是超平面截面的上同调类. 代数上同调类

$$x\in A^p(X) = A^*(X)\bigcap H^{2p}(X)$$

称为本原的（primitive），如果 $xL_X^{n-p}=0$. 在这种情形下，如果 k 是复数域 $\mathbf{C}$，则双线性型

$$(a,b)\to(-1)^p L_X^{n-2p}ab$$

在 $A^p(X)$ 中本原类的子空间上是正定的. 对于任意 k，类似命题仅对 $n\leq 2$ 得到证明，它与代数簇 ζ 函数上的 Weil 猜想密切相关.

当簇 X 定义在非代数闭域 k 上时，域 k 的可分代数闭包的 Galois 群 $G(\bar{k}/h)$ 作用在 Weil 上同调 $H^*(\bar{X})$ 上，这里 $\bar{X}=X\otimes_{\bar{k}}\bar{k}$. $A^*(X)$ 的每个元素关于群 $G(\bar{k}/k)$ 的有限指数的某子群保持不变. 人们相信（代数闭链的 Tate 猜想（Tate conjecture on algebraic cycles））如果 k 在它的素子域上有限生成，则其逆命题也正确. 代数簇 ζ 函数上的许多猜想都以这个假设为基础（[2]）.

参考文献

[1] Baldassarri, M., Algebraic varieties, Springer, 1956.
[2] Tate, J., Algebraic cohomology classes, in Summer sch-

ool of algebraic geometry Woods Hole, 1964.

[3] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 12, М., 1974, 77－170.

[4] Kleiman, S. L., Algebraic cycles and the Weil conjecture, in Dix exposés sur la cohomologie des schémas, North - Holland, 1968, 359－386.

[5] Griffiths, P. A., On the periods of certain rational integrals Ⅱ, *Ann. of Math.* (2), **90** (1969), 3, 496－541.

[6] Lefschetz, S., L'analysis situs et la géometrie algébrique, Paris, 1924.

[7] Hodge, W. V. D., The theory and applications of harmonic integrals, Cambridge Univ. Press, 1952.

[8] Groupes de monodromie en geometrie algébrique, in M. Raynaud, D. S. Rim and A. Grothendieck (eds.), *Sem. Geom. Alg.*, Vol. 7, Springer, 1972－1973.

[9] Deligne, P., La conjecture de Weil Ⅰ, *Publ. Math. IHES*, **43** (1974), 273－308. И. В. Долгачев 撰

【补注】 1983 年 H. Clemens 证明了 $C^p(X)/C^p_{alg}(X)$ 不是有限生成的 ([A1]). 他也证明了 $C_{hom}(X)/C_*(X)$ 不是有限生成的,甚至与有理数域作张量积后仍然如此 ([A1]).

关于 Hodge 猜想的当前进展情况的综述见 [A2], 亦见 [A3].

代数闭链理论的许多新进展与代数 K 理论有关, 见 [A4].

参考文献

[A1] Clemens, H., Homological equivalence modulo algebraic equivalence is not finitely generated, *Publ. Math. IHES*, **58** (1983), 19－38.

[A2] Shiado, T., What is known about the Hodge conjecture, North - Holland - Kinokuniya, 1983.

[A3] Atiyah, M. F. and Hirzebruch, F., Analytic cycles on complex manifolds, *Topology*, 1 (1961), 25－45.

[A4] Bloch, S., Lectures on algebraic cycles, Ⅳ, Duke Univ., 1980. 陈志杰 译

代数维数 [algebraic dimension ; алгебраическая размерность], 拓扑空间的

已知空间上与维数概念有关的连续函数环的不同数值不变量之一.

П. С. Александров 撰 徐定宥等 译

代数方程 [algebraic equation ; алгебраическое уравнение]

形式为 $f_n=0$ 的方程,其中 f_n 是一个或多个变量的 n 次**多项式** (polynomial) ($n\geqslant 0$). 一个变量的代数方程是形式为

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0 \qquad (1)$$

的方程. 这里 n 是一个非负整数, $a_0,\cdots,a_n$ 是已知数, 称为方程的系数 (coefficient), 而 x 是待求的未知数 (unknown). 总是假设代数方程 (1) 的系数不全等于零. 如果 $a_0\neq 0$, 则 n 称为该方程的次数 (degree of the equation).

满足方程 (1) 的未知数 x 的值,即代替 x 后将使这个方程化为恒等式的那些值,称为方程 (1)的根(roots of the equation), 或多项式

$$f_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$$

的根(roots of the polynomial). 多项式的根与其系数之间存在一定的关系即 Viète 公式(见 **Viète 定理**(Viète theorem)). 所谓解方程就是求方程的处于所考虑的未知数的值域内的一切根.

对于应用来说,方程的系数和根为某一类数(例如有理数、实数或复数)的情况最重要,但是,也可考虑系数和根为任意域(field)的元素的情况.

如果已知数(或域的元素) c 是多项式 $f_n(x)$ 的一个根, 则根据 **Bezout 定理** (Bezout theorem), $f_n(x)$ 可被 $x-c$ 除尽. 这里的除法可按 Horner 格式来进行.

数(或域的元素) c 称为多项式 $f(x)$ 的 k 重根(root of multiplicity k) (这里 k 是非负整数), 如果 $f(x)$ 可被 $(x-c)^k$ 除尽, 而不可被 $(x-c)^{k+1}$ 除尽. 1 重根称为多项式的单根 (simple roots), 其他的根称为多重根 (multiple roots).

每个其系数取自域 P 的 n ($n>0$) 次多项式 $f(x)$, 在域 P 中最多具有 n 个根, 每个根计算的次数等于其重数 (因此, 不同的根不能多于 n 个).

在**代数闭域** (algebraically closed field) 中, 任何 n 次多项式恰好具有 n 个根 (按其重数来计算). 特别是, 这个命题对于复数域也成立.

系数取自域 P 的 n 次方程 (1) 称为在 P 上是不可约的 (irreducible), 如果多项式 (2) 在这个域上是不可约的, 也就是说, 不能表示为 P 上的另一些次数低于 n 的多项式之积. 否则, 多项式及其相应的方程都称为可约的 (reducible). 零次多项式和零本身认为既不是可约的, 也不是不可约的. 一个给定的多项式在域 P 上是可约的还是不可约的, 与所考虑的域 P 有关. 例如, x^2-2 在有理数域上是不可约的, 因为它没有有理根, 但是在实数域上则是可约的: $x^2-2=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$. 类似地, 多项式 x^2+1 在实数域上是不可约的, 但是在复数域上则是可约的. 只有一次多项式在复数域上是不可约的, 且任何多项式都能分解为线性因式之积. 只有一次多项式和没有实根的二次多项式在实数域上是不可约的 (因此, 任何多项式都能分解为一次多项式和不可约二次多项式之积). 在有理数域上存在任何次不可约多项式; 形如 x^n+2 的多项式就是一些例子. 一个多项式在有理数域上的不可约性, 常常可由下述 Eisenstein

准则(Eisenstein criterion)来判断：对于整系数的$n(n>0)$次多项式(2)，如果存在素数p，使得首项系数a_0不可被p整除，其余一切系数都可被p整除，常数项a_n不可被p^2整除，则这个多项式在有理数域上是不可约的.

设P是任意一个域．对于任何在域P上不可约的$n(n>1)$次多项式$f(x)$，都存在一个P的扩张，它至少包含$f(x)$的一个根(见**域的扩张**(extension of a field))；而且，存在多项式$f(x)$的分裂域(splitting field)，即域P的极小扩张，使得这个多项式在其中可以分解为线性因式之积．任何域都具有代数闭扩张.

根式可解性(solvability by radicals)．任何不超过四次的代数方程都可用根式求解．可化为一些特殊形式的二次和三次方程的问题的解法，古代巴比伦人已经知道(公元前2000年)(见**二次方程**(quadratic equation)；**三次方程**(cubic equation))．解二次方程的理论最早在Diophantus的《算术》(Arithemetica)一书中已有详细论述(公元前3世纪)．在16世纪，意大利数学家得到了系数为字母的三次和四次方程的根式解法(见**Cardano 公式**(Cardano formula)；**Ferrari 法**(Ferrari method))．在以后的300年间，许多人设法寻求五次和更高次字母系数方程的根式解法，但均未成功．最后，N. H. Abel于1826年证明这种解法是不存在的.

Abel 定理(Abel theorem)(现代形式的表述)：设(1)是系数为$a_0,\cdots,a_n$的$n(n>4)$次方程；K是任何一个域，P是$a_0,\cdots,a_n$的系数取自域K的有理函数域；这时，方程(1)(处于P的某一扩张中)的根不能由这个方程的系数通过有限次加、减、乘、除(它们在P中是有意义的)和开方(在P的扩张中是有意义的)运算来表示．换句话说，一般的$n(n>4)$次方程是不能用根式求解的([3]).

但是，Abel定理同下述事实并不矛盾：某些具有数字系数(或取自一个给定域的系数)的代数方程可用根式求解．某些特殊形式的n次方程(例如**二项方程**(two-term equation))可用根式求解．究竟在什么情况下代数方程可用根式求解．E. Galois大约在1830年对这个问题给出了全面的解答.

在**Galois 理论**(Galois theory)中，关于代数方程根式可解性的基本定理可以叙述如下．设$f(x)$是系数取自域K且在K上为不可约的多项式．这时，1)如果方程$f(x)=0$至少有一个根能由这个方程的系数通过根式来表示，而且根式的指数不能被域K的特征整除，则这个方程的Galois群在K上是可解的；2)反之，如果方程$f(x)=0$的Galois群在域K上是可解的，而域K的特征为零或大于这个群的合成因子的一切阶数，则这个方程的一切根都能由它的系数通过根式来表示，而且所遇到的根式$\sqrt[n]{a}$的一切指数都是素数，与这些根式对应的二项方程$x^n-a=0$在需要添加这些根式的域上是不可约的.

Galois 对于K是有理数域的情况证明了这个定理；在这种情况下，在上面定理的叙述中有关域K的特征的一切条件都成为不必要的了.

设P是系数取自任意域K的方程的系数的有理函数域，系数(为字母)取自域P的n次方程的Galois群是对称群S_n，当$n>4$时S_n是不可解的，所以Abel定理是Galois定理的一个结果．对于任何$n(n>4)$，存在具有有理系数(甚至整系数)的不能用根式求解的n次方程．例如，方程$x^5-p^2x-p=0$就是$n=5$时的一个这样的方程．在Galois理论中，一个代数方程是通过把它化成一串比较简单的方程来求解的，这些比较简单的方程称为原方程的**预解式**(resolvent).

方程的根式可解性同几何上的尺规作图问题，特别是同n等分圆的问题密切相关(见**分圆多项式**(cyclotomic polynomials)；**原根**(primitive root)).

含一个未知数的数字系数的代数方程．为了求系数取自实数域或复数域的高于二次的代数方程的根，通常采用近似计算方法(例如**抛物线法**(parabola methed))．这时，首先除去重根是方便的．数c是多项式$f(x)$的k重根，其充分必要条件为：当$x=c$时，多项式$f(x)$及其直到$k-1$阶导数都等于零，而$f^{k}(c)\neq 0$．如果用多项式$f(x)$与其导数的最大公因式来除$f(x)$，则所得多项式的根与$f(x)$的根相同，但其重数均为1．甚至可以构造这样一些多项式，使得多项式$f(x)$的重数相同的一切根都是这些多项式的单根．当且仅当一个多项式的**判别式**(discriminant)等于零时，这个多项式具有重根.

确定方程的根的个数和根的上、下界，是经常遇到的一些问题．可以取数

$$1+\frac{\max_{i>0}|a_i|}{|a_0|}$$

作为具有任意复系数的代数方程(1)的每个根(实根和复根)的模的上界．当系数为实数时，用**Newton 法**(Newton method)通常可以得到更精确的上界．确定正根的下界以及确定负根的上界和下界，可以归结为确定正根的上界.

确定实根个数的最简单的方法是利用**Discartes 定理**(Discartes theorem)．如果已经知道给定多项式的根都是实的(例如，对于实对称矩阵的特征多项式)，那么利用Discartes定理可以得到根的准确个数．考虑多项式$f(-x)$，利用同一定理可以求得$f(x)$的负根的个数．如果一个实系数多项式没有重根，那么利用**Sturm 定理**(Sturm theorem)可以求得这个多项式的处于给定区间中的实根的准确个数(特别是，一切实根的个数)．Descartes 定理是 **Budan - Fourier 定理**(Budan-

Fourier theorem)的特殊情况，利用后一定理可以得到实系数多项式处于某一固定区间中的实根个数的上估计．

有时希望求出特殊形式的根．例如，Hurwitz 准则是(复系数)方程的一切根都具有负实部的必要和充分条件(见**Routh - Hurwitz 准则**(Routh - Hurwitz criterion))．

存在计算有理系数多项式的一切有理根的一种方法．设 $f(x)$ 是一个有理系数多项式，$g(x)$ 是将 $f(x)$ 乘以它的一切系数的分母的公倍数而得到的整系数多项式，这时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 具有相同的根．整系数多项式 $g(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n\,(b_n\neq 0)$ 的有理根只能是 p/q 这种形式的不可约分数，其中 p 是数 b_n 的一个因子，q 是数 b_0 的一个因子(而且只能是其中这样一些分数：对于任何整数 m，数 $g(m)$ 都能被 $p-mq$ 整除)．如果 $b_0=1$，则 $g(x)$ 的一切有理根都是整数(为常数项的因数)，且能用尝试法求得．

代数方程组(systems of algebraic equations)．关于一次代数方程组，见**线性方程**(linear equation)．

由含有两个未知数 x 和 y 的两个任何次的代数方程构成的方程组，可以写成下列形式：

$$\left.\begin{aligned} f(x,y) &= a_0(x)y^n+a_1(x)y^{n-1}+\cdots+a_n(x)=0,\\ g(x,y) &= b_0(x)y^s+b_1(x)y^{s-1}+\cdots+b_s(x)=0,\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

其中 $a_i(x)$，$b_j(x)$ 是一个未知数 x 的多项式．如果为 x 选定某个数值，则得到两个含一个未知数 y 的具有常系数 a_i，b_j 的代数方程的方程组．这个方程组的**判别式**(resultant)是下列行列式：

$$R(f,g)=$$

$$=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_0 & \cdots & \cdots & a_n & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 & \cdots & a_n\\ b_0 & b_1 & \cdots & b_s & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & b_0 & \cdots & \cdots & b_s & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_0 & \cdots & b_s \end{vmatrix}.$$

下述命题成立：数 x_0 是判别式 $R(f,g)$ 的一个根，当且仅当多项式 $f(x_0,y)$ 和 $g(x_0,y)$ 具有公共根 y_0，或者两个首项系数 $a_0(x_0)$ 和 $b_0(x_0)$ 都等于零．

因此，为了解方程组(3)，必须求出判别式 $R(f,g)$ 的一切根，把其中每一个根代入方程组(3)，并求出这两个仅含一个未知数 y 的方程的公共根．还必须求出两个多项式 $a_0(x)$ 和 $b_0(x)$ 的公共根，把它们代入(3)，验证所得到的两个仅含一个未知数 y 的方程是否具有公共根．换句话说，解含两个未知数的两个方程的方程组的问题，可以归结为解仅含一个未知数的一个方程和求两个仅含一个未知数的方程的公共根．(两个或更多个仅含一个未知数的多项式的公共根，是这些多项式的最大公因式的根．)

含有任何个未知数的任何个代数方程的方程组，可按类似的方式来求解．但是，这个问题涉及复杂的计算．它同所谓**消元理论**(elimination theory)相联系．

参考文献

[1] Курош, А. Г., Курс высшей алгебры, 10 изд., М., 1971 (中译本：А. Г. 库洛什，高等代数教程，人民教育出版社，1962)．

[2] Сушкевич, А. К., Основы высшей алгебры, 4 изд., М.-Л., 1941．

[3] Waerden, B. L. van der, Algebra, 1-2, Springer, 1967-1971 (中译本：B. L. 范德瓦尔登，代数学，1，2，科学出版社，1976)．

[4] Манин, Ю. И., 见 Энциклопедия элементарной математики, кн. 4, М., 1963, 205-227．

[5] Доморяд, А. П., 见 Энциклопедия элементарной математики, кн. 2, М., 1951, 313-411．

И. В. Проскуряков 撰

【补注】 上述 Abel 定理(一般的 $n\,(n>4)$ 次方程不能用根式求解)亦称 Abel - Ruffini 定理(Abel - Ruffini theorem)．

参考文献

[A1] Jacobson, N., Lectures in abstract algebra, Field theory and Galois theory, 3, Freeman, 1975．

[A2] Jacobson, N., Basic algebra, 1-2, Freeman, 1974-1980．

张鸿林 译 蒋正新 校

代数函数 [algebraic function；алгебраическая функция]

自变量为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的满足方程

$$F(y,x_1,\ldots,x_n)=0 \qquad (1)$$

的函数 $y=f(x_1,\cdots,x_n)$，其中 F 是 $y,x_1,\cdots,x_n$ 的不可约多项式，其系数属于某个域 K，称为**常数域**(field of constants)．此时代数函数定义于该域上，而且称为**域 K 上的代数函数**．多项式 $F(y,x_1,\cdots,x_n)$ 常写成变量 y 的降幂形式，从而方程(1)可表为形式

$$P_k(x_1,\ldots,x_n)y^k+P_{k-1}(x_1,\ldots,x_n)y^{k-1}+\cdots+P_0(x_1,\ldots,x_n)=0,$$

其中 $P_k(x_1,\cdots,x_n),\cdots,P_0(x_1,\cdots,x_n)$ 均为 $x_1,\cdots,x_n$ 的多项式，且 $P_k(x_1,\cdots,x_n)\neq 0$．数 k 是 F 关于 y 的次数，称为代数函数的次数．若 $k=1$，那么代数函数可表为多项式的商

$$y = -\frac{P_0(x_1, \dots, x_n)}{P_1(x_1, \dots, x_n)},$$

此时称为 x_1, …, x_n 的有理函数．当 $k=2$, 3, 4 时，一个代数函数总可表示成 x_1, …, x_n 的有理函数的平方根和立方根；当 $k>4$ 时，一般不能这样表示．

历史上，曾经以三种不同的观点研究代数函数论．N. H. Abel，K. Weierstrass 以及 B. Riemann 用函数论的观点；R. Dedekind，H. Weber 以及 K. Hensel 则取算术－代数的观点；而最初由 A. Clebsch，M. Noether 和其他人采用的是代数－几何的观点(见**代数几何学**(algebraic geometry))．单变量代数函数论的第一个研究方向，与复数域上的代数函数的研究有关，后者被视为 Riemann 曲面和复流形上的亚纯函数；所用的最重要的方法，是解析函数论中的几何与拓扑的方法．算术－代数处理办法涉及到代数函数在任意域上的研究，所用的方法是纯代数的．赋值论以及域的扩张显得特别重要．在代数几何观点下，代数函数被视为代数簇上的有理函数，因此用代数几何的方法去研究它(见**有理函数** (rational function))，以上这三种观点，最初不仅表现在它们所采用的方法和表达方式的不同，而且它们所使用的术语也不相同．这些差别，如今已变得无关紧要了，因为函数论的研究中包含着代数方法的发展，而许多首先用函数论和拓扑方法得到的结果，如果利用这些方法的代数类似物，则往往可以成功地应用到更一般的域情形．

一元代数函数．在复数域 **C** 上的一个一元代数函数 $y=f(x)$ (或简记为 $y(x)$) 是一个 k 值的解析函数．若 $D(x)$ 是多项式

$$F(x,y) = P_k(x)y^k + \cdots + P_1(x)y + P_0(x) \qquad (2)$$
$$P_k(x) \neq 0,$$

的判别式(即使 $F(x, f(x))=0$ 的多项式的判别式)，后者可从方程组

$$F(x,y) = 0, \quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 0$$

消去 y 而得到方程

$$P_k(x)D(x) = 0,$$

于是上述方程的根 x_1, …, x_m 称为 $y=f(x)$ 的**临界值** (critical values)．它的余集 $G=\mathbf{C}\setminus\{x_1, \cdots, x_m\}$ 称为**非临界集** (non-critical set)．对每点 $x_0 \in G$，方程(2)有 k 个互不相同的根 y_0^1, y_0^2, …, y_0^k，且满足以下条件：

$$\frac{\partial F(x_0, y_0^j)}{\partial y} \neq 0, \quad j=1, \dots, k.$$

由隐函数存在定理，在点 x_0 的一个邻域内，有 k 个单值解析函数 $f_0^1(x)$, …, $f_0^k(x)$，它们满足条件

$$f_0^j(x_0) = y_0^j, \quad F(x, f_0^j(x)) = 0,$$

而且还可以用一个收敛级数来表示：

$$f_0^j(x) = y_0^j + \alpha_1^j(x-x_0) + \alpha_2^j(x-x_0)^2 + \cdots \qquad (3)$$

这样，对每个点 $x_0 \in G$，我们可以构造 k 个解析函数元，它们称为中心是点 x_0 的**函数元** (function elements)．对任意两点 x_1, $x_2 \in G$，中心分别是 x_1 和 x_2 的任意两元 $f_1^i(x)$ 和 $f_2^j(x)$，都可以通过沿 G 中某条曲线解析开拓而相互得到；特别地，具有相同中心的任意两个元也是通过这种方式联系着的．假如 x_0 是一个代数函数的临界点，那么有两种可能的情形：1) x_0 为判别式的根，即 $D(x_0)=0$，但 $P_k(x_0) \neq 0$；2) $P_k(x_0)=0$．

情形 1．设 K_0 为中心是 x_0 的小圆，它不含其他的临界点，又设 $f_1'(x)$, …, $f_k'(x)$ 为中心是 $x' \in K_0$, $x' \neq x_0$ 的正规元系，当 $x \to x_0$ 时，这些函数是有界的．此外，设 D 为中心是 x_0 且通过 x' 的圆周；它全部位于 K_0 内部．某个给定元，例如 $f_1'(x)$，沿 D (例如按顺时针方向)的解析开拓，得到了中心是 x' 的也属于该系的一个元 $f'(x)$．这个系含有 k 个元，经过最少的 $a_1 \leq k$ 次解析开拓，又产生了最初的元 $f_1(x)$．这样，我们得到了中心是 x' 的子系 $f_1'(x)$, …, $f_{a_1}'(x)$；它们之中的每个元都可以通过其他元沿着绕 x_0 的曲线解析开拓几圈以后得到；这样的一个子系称为一个**循环** (cycle)．每一个系 $f_1(x)$, …, $f_k(x)$ 都可以分解为 n 个互不相交的循环

$$\{f_1(x), \dots, f_{a_1}(x)\},$$
$$\{f_{a_1+1}(x), \dots, f_{a_1+a_2}(x)\}, \dots,$$
$$\{f_{a_1+\cdots+a_{s-1}+1}(x), \dots, f_{a_1+\cdots+a_s}(x)\},$$

$a_1 + \cdots + a_s = k$．若 $a_1 > 1$，则元素 $f_1'(x)$ 在 K_0 内不是 x 的单值函数，而在 $\tau=0$ 的一个邻域内，是参数 $\tau=(x-x_0)^{1/a_1}$ 的单值解析函数．在这个点的某邻域内，第一循环内的元 $f_1'(x)$, …, $f_{a_1}(x)$ 可以表达为收敛级数

$$f_1(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i^1 \tau^i = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i^1 (x-x_0)^{i/a_1}, \qquad (4)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_{a_1}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i^{a_1} \tau^i = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i^{a_1} (x-x_0)^{i/a_1};$$

其他循环中的元也有类似的展开式．元的这种以 $x-x_0$ 的分数幂形式展开的级数称为 Puiseux **级数** (Puiseux series)，其中 x_0 为临界点，变换 $\to$, , $r=e^{2\pi i/a}$，相当于绕 x_0 转一圈，把一个循环中的元的 Puiseux 级数，依循环次序互相转换，也就是说，在级数以及对应的元中，存在着一个循环置换，绕临界点转圈，对应于中心为该点的元之间的置换；这些置换由循环次序 a_1, a_2, …, a_s

组成，$\sum a_i = k$．用这种方式定义的置换构成代数函数的单值群（monodromy group）．如果至少有一个 $a_i > 1$，那么临界点 x_0 称为代数函数的一个代数分支点（algebraic branch point）；数 a_i（有时 $a_i - 1$）称为代数函数的分支指数（branch indices），或分支的阶（branch orders）．

情形 2．假如以 y 代 $P_k(x)y$，就回到情形 1；此时的展开式类似于(4)，但可能含有有限项带有负指标：

$$f(x) = \sum_{i=-p}^{\infty} \alpha_i \tau^i = \sum_{i=-p}^{\infty} \alpha_i (x - x_0)^{i/a}. \qquad (5)$$

若 $p > 0$，点 x_0 是代数函数的 p 阶极点（pole of order p）．代数函数通常是在 Riemann 球面 S 上考虑的，后者就是扩充无穷远点 $x = \infty$ 后的复数平面．变量 $\tau = 1/x$ 的引入将这种情形转化为前面的情形；在 $\tau = 0 (x = \infty)$ 的邻域内，有展开式

$$y(x) = \sum_{j=-r}^{\infty} \alpha_j \tau^{j/a} = \sum_{j=-r}^{\infty} \alpha_j x^{-j/a}. \qquad (6)$$

若 $r > 0$，则点 $x = \infty$ 称为 r 阶极点．

级数(3)，(4)，(5)及(6)中的参数，称为代数函数的局部单值化参数（local uniformizing parameter）．若 x_0 是代数函数的非临界点，则可取 $\tau = x - x_0$ 作为参数；另一方面，若 x_0 是临界点，则根 $(x - x_0)^{1/a}$（a 为正整数）可取作参数．以上所叙述的一个代数函数的所有元的全体，构成了 Weierstrass 意义下的完全代数函数（complete algebraic function）．除分支点和极以外，代数函数没有其他的奇点．逆命题也成立：一个在 Riemann 球面上除了有限个点 $x_1, \cdots, x_m$ 及 $x = \infty$ 之外是至多 s 值的解析函数，并且这些例外点都仅仅是极或代数分支点，那么它一定是 k 阶代数函数，其中 $k \leqslant s$．

一个完全代数函数的 **Riemann 曲面**（Riemann surface）必是紧的，并且还是 Riemann 球面的 k 叶覆盖，分支点可以是临界点以及点 $x = \infty$．具有紧 Riemann 曲面的函数类，仅限于代数函数．代数函数 Riemann 曲面的亏格是重要的；它称为代数函数的亏格（genus of the algebraic function），可以用 **Riemann - Hurwitz 公式**（Riemann - Hurwitz formula）计算．有理函数的亏格是 0，它的 Riemann 曲面是 Riemann 球面．满足三阶或四阶方程的椭圆函数的 Riemann 曲面为环面；这类函数的亏格是 1．

代数函数的通用覆盖 Riemann 曲面是一个单连通的二维流形，就是说，它有一个平凡的基本群，此外它还共形等价于 Riemann 球面，复平面，或者单位圆内部．在第一种情形，代数函数是有理函数；在第二种情形，则为椭圆函数；而在第三种情形，则为一般的函数．

代数函数的**单值化**（uniformization）问题与它的 Riemann 曲面密切相关．函数 $y = f(x)$ 可以单值化是指 y 与 x 均能表达为参数 t 的单值解析函数

$$y = y(t), \quad x = x(t),$$

后者恒满足方程 (2)．利用局部的单值化参数，单值化问题可以得到局部解；但是有兴趣的却是"整体范围"下的解．若 $k = 1$，即 $y(x)$ 为 x 的有理函数时，参数可取为 $x - x_0$；若 $k = 2$，则利用有理函数或三角级数可以达到单值化的目的．例如，若 $y(x)$ 满足方程

$$y^2 - x^2 = 1,$$

则可令

$$y = \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1}, \quad x = \frac{2t}{t^2 - 1}$$

或

$$y = \sec t, \quad x = \operatorname{tg} t.$$

若 $k = 3, 4$，而代数函数的亏格为 1 的情形，单值化可以通过椭圆函数来完成．最后，当 $k > 4$ 以及代数函数的亏格大于 1 时，利用自守函数（见**自守函数**（automorphic function））可以实现单值化．

多元代数函数．若 f 是变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的代数函数，那么一切有理函数 $R(y, x_1, \cdots, x_n)$ 组成一个域 K_f，它重合于 $(n+1)$ 维空间内由方程 $F(y, x_1, \cdots, x_n) = 0$ 定义的代数超曲面上有理函数的域．假若常数域 k 是复数域 $\mathbf{C}$，而 $n = 1$，那么 K_f 重合于代数函数的 Riemann 曲面上亚纯函数构成的域．域 K_f 是超越阶为 n 的常数域 k 的有限型扩张（见**域的扩张**（extension of a field））．特别地，这个域的任意 $n+1$ 个元素都联系着一个代数方程，使得它们每一个都定义了其余元素的一个代数函数．超越阶为 n 的域 k 的有限型的任意一个扩张 K，都称为 n 元的代数函数域（algebraic function field）（有时称为函数域（function field））．每一个这种域都含有域 k 的一个纯超越扩张 $k(x_1, \cdots, x_n)$（称为 n 元有理函数域（rational function field））．K 中每个元 y 都满足某个代数方程 $\Phi(y, x_1, \cdots, x_n) = 0$，因此可以看成是变量 $x_1, \cdots, x_n$ 的代数函数．n 元代数函数的每一个域 K 都同构于某个 n 维**代数簇**（algebraic variety）上有理函数的域，后者称为 K 的模型（model）．若常数域 k 是代数闭的且有特征零，则每一个代数函数域有一个非奇异的射影模型（见**奇点的化解**（resolution of singularities））．设 S 为常数域上非负的代数函数域 K 的一切非平凡赋值（见**赋值**（**valuation**））组成的集合，如果配备以自然拓扑，那么它称为域 K **的抽象 Riemann 曲面**（abstract Riemann surface，[1]）．在一元代数函数的情形，Riemann 曲面重合于非奇异射影模型组成的集合，后者在此情形下，除同构外是唯一确定的．域 K 模型上许多有关代数几何方面的概念和结果，可以通过域的赋值论语言来重述（[1]，[6]）．一个特别接近的类似结果对于一元代数函数也成

立，它实际上和代数曲线的理论相一致．

每一个一元代数函数域都是一个 Dedekind 环的分式域，因此代数数域中可除性理论的许多概念与结果都可以应用于函数域（[12]）．代数数论中许多问题与构造都给代数函数域中相应问题与构造以启发，并且反之亦然．例如，把 Puiseux 展开应用于代数数论，就能导出数论中 Hensel 的 p 进方法的亏格．最初属于代数数领域内的类域论，后来被应用到函数上去（[2]）．在代数数域与常数的有限域上的代数函数域之间，存在着非常紧密的类似．例如，对于后者可以定义 ζ 函数的概念，类似的 Riemann 猜想已对代数函数域得到证明（见代数几何中的 **ζ 函数**（zeta function））．

参考文献

[1] Zariski, O. and Samuel, P., Commutative algebra, 1, Springer, 1975.

[2] Serre, J.-P., Groupes algébrique et corps des classes, Hermann, 1959.

[3] Стоилов, С., Теория функций комплексного переменного, пер. с рум., т. 1–2, М., 1962.

[4] Чеботарёв, Н. Г., Теория алгебраических функций, М.-Л., 1948.

[5] Шафаревич, И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972（英译本：Shafarevich, I. R., Basic algebraic geometry, Springer, 1977）.

[6] Chevalley, C., Introduction to the theory of algebraic functions of one variable, Amer. Math. Soc., 1951.

[7] Appell, P. and Goursat, E., Théorie des fonctions algebriques, 1–2, Chelsea, reprint, 1976–1978.

[8] Dédekind, R. and Weber, H. F., Theorie des algebraischen Funktionen einer Veränderlichen, *J. Reine Angew. Math.*, **92** (1882), 181–290.

[9] Hensel, K. and Landsberg, G., Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln und ihre Anwendung auf algebraische Kurven und Abelsche Integrale, Teubner, 1902.

[10] Picard, E. and Simart, G., Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes, 1–2, Chelsea, reprint, 1971.

[11] Jung, H. W. E., Einführung in die Theorie der algebraischen Funktionen zweier Veränderlicher, Akademie-Verlag, 1951.

[12] Hasse, H., Number theory, Springer, 1980（译自德文）.

[13] Lang, S., Algebraic functions, New York, 1965.

А. Б. Жижченко 撰　王斯雷 译　郑维行 校

代数几何学 [algebraic geometry；алгебраическая геометрия]

研究与交换环有关的几何对象：**代数簇**（algebraic variety）及其各种推广（**概形**（scheme），**代数空间**（algebraic space）等）的数学分支．

代数几何学可被"纯朴地"定义为对代数方程解的研究．当每个"解的集合"等同于"坐标空间中的点集"时，就有了几何直观．如果坐标是实数，空间是二维或三维时，情形看得很清楚；但是几何学的语言也被用于更一般的情形．这种语言蕴含着纯代数观点很难提供的问题、构造以及思考．反过来，代数提供了灵活而又强有力的工具，它特别适合于把尝试性的论证转化为证明，并且把这个证明表述成最自然、最一般的形式．

在复数域上的代数几何学里，每个代数簇同时又是通常 Hausdorff 拓扑下的复解析空间，微分空间和拓扑空间．这一事实使得有可能引入大量的古典结构以导出代数簇的许多不变量，而要用纯粹代数的方法得到这些则极为困难，有时甚至不可能．代数几何学的一些概念和结果被广泛应用于数论（Diophantos 方程及三角和的计值）、微分拓扑（关于奇点及微分结构）、群论（代数群及 Lie 群式有限单群）、微分方程理论（K 理论及椭圆算子的指数）、复空间理论、范畴论（topoi，Abel 范畴）以及泛函分析（表示论）中．反之，这些学科的思想和方法也被应用于代数几何学．

代数几何学的起源可以追溯到 17 世纪时把坐标概念引入几何学．不过直至 19 世纪中叶它才成为一个独立的学科分支．把坐标应用到射影几何学，使得代数方法有可能与综合法相匹敌．尽管如此，代数几何学在这个分支上的成就仍然属于射影几何学的范围内，并且最终把对射影代数簇的传统研究遗留给代数几何学．现代代数几何学起源于**代数曲线**（algebraic curve）的理论．历史上，代数曲线理论发展的第一阶段是以椭圆曲线为例阐明这个理论的基本概念和思想．现在称为椭圆曲线论的一整套概念与结论是被作为数学分析（而不是几何学）的一部分——椭圆曲线上有理函数的积分理论而发展起来的．在开始的时候，这个积分被冠以"椭圆"的称呼，直到后来才把这个称呼扩大到函数与曲线（见**椭圆积分**（elliptic integral））．

在 17 世纪末，Jakobi 和 Johann Bernoulli 注意到椭圆积分的一个新的有趣性质．他们对表示某些曲线的弧长的积分作了研究，并且发现了一些把一条曲线变换成另一条具有相同弧长的曲线的方法，而相应的弧却不一定能互相重叠．从解析的观点看，这相当于把一个积分变换成另一个积分，有时就是把一个积分变换到它自身．在 18 世纪上半期 C. G. Fagnano 给出了这种变换的很多例子．

L. Euler 研究任意的四次多项式 $f(x)$，并且提出了满足方程

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}}=\frac{dy}{\sqrt{f(y)}} \tag{1}$$

的 x 和 y 间有什么关系的问题．他把（1）作为关于 x 和 y 的微分方程研究．所求的关系式是这个方程的常义积

分. (1)以及由 Fagnano 和 Bernoulli 发现的它的各种特殊情况的积分存在的理由是在椭圆曲线 $s^2=f(t)$ 上有一个群运算,且处处正则的微分形式 $s^{-1}dt$ 在群元素的平移作用下保持不变. 联系(1)式中 x 和 y 的 Euler 关系式可写成

$$(x, \sqrt{f(x)})\oplus(c, \sqrt{f(c)}) = (y, \sqrt{f(y)}),$$

这里的 $\oplus$ 表示椭圆曲线上点的加法.

因而这一结果既包含了**椭圆曲线** (elliptic curve) 上的群律也包含了这条曲线上不变微分形式的存在性.

在 Euler 的工作之后,主要是 A. Legendre 发展了椭圆积分理论. 他从 1786 年开始的研究收集在三卷文集"Traité des fonctions elliptiques et intégrales Euleriennes" (关于椭圆函数和 Euler 积分的文集) 中.

N. H. Abel 对椭圆函数论进行的研究在 1827-1829 年. 他的出发点是椭圆积分:

$$\theta = \int_0^{\lambda} \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1-e^2x^2)}},$$

其中 c 和 e 是复数. Abel 把这个积分看成上极限的函数并且引进了反函数 $\lambda(\theta)$ 及函数

$$\Delta(\theta) = \sqrt{(1-c^2\lambda^2)(1-e^2\lambda^2)}.$$

这两个函数在复数范围内有两个周期 2ω 和 $2\tilde{\omega}$:

$$\omega = 2\int_0^{1/c} \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1-e^2x^2)}},$$

$$\tilde{\omega} = 2\int_0^{1/e} \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1-e^2x^2)}}.$$

所以映射 $x=\lambda(\theta)$, $y=\Delta(\theta)$ 利用椭圆函数定义了椭圆曲线 $y^2=(1-c^2x^2)(1-e^2x^2)$ 的一个单值化.

比 Abel 稍晚些, C. G. J. Jacobi 独立地研究了椭圆积分的反函数; 证明了它有两个独立的周期,并得到了一些有关变换问题的结果. 通过把椭圆函数展开成级数的 Abel 公式变换成乘积的形式, Jacobi 得到了 **θ 函数** (theta function) 的概念并且发现了它们不仅在椭圆函数论,也在数论及力学中有很多应用.

在研究椭圆函数变换的同时, Abel 是首先对一维 **Abel 簇** (Abelian variety) 的同态群进行探索的人.

最后,在 C. F. Gauss 的遗作, 特别是他的日记发表后,可以清楚地看出,在 Abel 和 Jacobi 的工作之前很久, 他已经在一定程度上掌握了这些想法的一部分. 此外, 对任意代数曲线的研究仍然在解析的框架内进行: Abel 提出了将椭圆积分的基本性质推广到任意代数函数的积分的方法. 这些积分后来称为 **Abel 积分** (Abelian integral).

Abel 在 1826 年发表的著作变成了代数曲线一般理论的起点. 它包括代数曲线亏格和除子等价性的概念,并且用积分表达等价性准则. 这导出了代数曲线的 **Jacobi 簇** (Jacobi variety) 的理论.

B. Riemann 在 1851 年发表的论文中采用了一种全新的原理研究复变函数. 他假定这样的函数并不定义在复变量的平面上,而是定义在这个平面上的一个"多叶"曲面上.

Riemann 所引进的曲面 (见 **Riemann 曲面** (Riemann surface)) 接近现代一维解析流形 (analytic manifold) 的概念: 其上定义有解析函数的流形. Riemann 提出并且解决了他的概念与代数曲线概念间的关系问题;得到的结论现在称之为 Riemann 存在定理. 在研究了曲面分支点的可能位置后,他证明了当 $p>1$ 时,类的集合依赖于 $3p-3$ 个独立参数, 它们被称为模, 见 **模问题** (moduli problem).

Riemann 的工作是代数曲线的拓扑研究的起点; 这一研究把空间 $\Omega^1[X]$ 的维数 p 的拓扑意义解释为空间 $X(\mathbf{C})$ 的一维同调群的维数之半. 解析方法导出不等式 $l(D) \geqslant \deg(D)-p+1$. Riemann - Roch 等式由 Riemann 的学生 E. Roch 所证明 (见 **Riemann - Roch 定理** (Riemann - Roch theorem)). 最后,这一研究工作首次把域 $k(X)$ 作为与曲线 X 相联系的主要对象,并出现了双有理同构的概念. 任意代数函数的积分的反演问题则在很早前就由 Abel 提出. Riemann 对 Abel 函数的研究的另一部分是关于 θ 函数与一般的反演问题之间的关系,特别是(p 个变量的)级数

$$\theta(v)=\sum_m e^{F(m)+2(m,v)}, \qquad (2)$$

其中 $m=(m_1, \cdots, m_p)$ 遍取所有的 p 维整向量,

$$v=(v_1, \cdots, v_p), \ (m, v)=\sum m_i v_i,$$

$$F(m)=\sum \alpha_{jk} m_j m_k, \ \alpha_{jk}=\alpha_{kj}.$$

当二次型 F 的实部为负定时,级数对所有的 v 都收敛. 函数 θ 的主要性质是关系式

$$\theta(v+\pi ir)=\theta(r), \ \theta(v+\alpha_j)=e^{L_j(v)}\theta(v), \qquad (3)$$

这里 r 是一个整向量, α_j 是矩阵 $(\alpha_{j,k})$ 的列, $L_j(v)$ 是一个线性函数.

Riemann 证明了有可能选取割线 $a_1, \cdots, a_p, b_1, \cdots, b_p$ 将他所引进的曲面,变换为一个单连通曲面,并选取在这个曲面上处处有限的积分 $u_1, \cdots, u_p$,使得当 $j\neq k$ 时 u_j 关于 a_k 的积分为 0, 当 $j=k$ 时积分为 πi; u_j 关于 b_k 的积分构成一个对称矩阵 (α_{jk}), 这个矩阵满足保证级数 (2) 收敛的条件. 他考虑了对应于系数 α_{jk} 的函数 θ. n

个变量的任意 $2n$ 周期函数的周期，满足类似于确定 θ 函数的级数收敛的必要条件的关系式．周期间的这些关系式被 G. Frobenius 明显地给出．他证明了它们是满足函数方程(3)的非平凡函数存在性的充要条件（见 **θ 函数** (theta function)，**Abel 函数** (Abelian function)）．这些关系式是使得具有给定周期的、不能通过线性变换减少变量个数的亚纯函数存在性的充要条件．这个定理是 K. Weierstrass 提出并被 H. Poincaré 证明的．1921 年 S. Lefschetz 证明了当 Frobenius 条件满足时，θ 函数定义了簇 C^n/Ω 到射影空间内的一个嵌入（Ω 是对应于给定周期矩阵的格；见**复环面** (complex torus)）．

现在成为代数曲线论基础的概念和结论是在代数函数及其积分理论的影响下，在这一理论的框架内建立起来的．代数曲线的纯几何理论是作为一个独立分支而发展的．1834 年 J. Plucker 得到一个公式，把曲线的类与它的阶及二重点个数相联系．他还证明了三阶平面曲线有 9 个拐点．不过这些研究在当时仅占次要地位．

只是在 Riemann 的研究工作之后，代数曲线的几何学才与 Abel 积分以及 Abel 函数理论一起，成为数学的一个重要领域．这一变化主要归于 A. Clebsch 的工作．Riemann 以函数作为他工作的基础，而 Clebsch 以代数曲线作为基础．Clebsch 和 P. Gordan ([10]) 推导出线性无关的第一类积分的个数 p（即同类的曲线 X 的亏格）的公式，把 p 用曲线的阶以及奇点个数来表示．他们也证明了当 $p=0$ 时，曲线有有理参数化，当 $p=1$ 时它变成三阶平面曲线．

Riemann 的一个错误却对代数曲线理论的代数几何学方面的发展起了有益的作用．在证明他的存在性定理时，Riemann 认为一个变分问题——"Dirichlet 原理"——是显然可解的．但 Weierstrass 不久就证明这并非在所有的情形下都正确．从而在一段时间里 Riemann 的结论成了缺乏依据的．克服这一困难的途径之一是用代数方法证明这些定理；它们的表述本质上是代数的．由 Clebsch 所作的研究工作促使人们更进一步理解到 Abel 和 Riemann 所得结论的代数几何本质，而在此之前它们都被解析方法掩盖了．

Clebsch 学派的一个学生 M. Noether 继承并发展了 Clebsch 所开创的研究．在 M. Noether 和 A. Brill 共同发表的论文中清晰地阐明了 Noether 的思想．他们把射影平面里的代数曲线的几何学发展问题看成关于一一(即双有理)变换(见**双有理几何学** (birational geometry))保持不变的结果的总和．

在 19 世纪 50 年代发现了维数大于 1 的代数簇(主要是曲面)的许多特殊性质．例如，对三次曲面作了详细的研究；特别在 1849 年 G. Salmon 和 A. Cayley 证明了没有奇点的任何三次曲面包含 27 条不同直线．不过在很长时间里这些结果没有与任何一般原理相联系，与当时正在发展的代数曲线理论的基本思想也没有任何联系．

意大利学派，特别是 L. Cremona, C. Segre 和 E. Bertini，对代数几何学的发展有很大的影响．这个学派的主要代表是 G. Castelnuovo, F. Enriques 和 F. Severi．意大利学派的主要成就之一是**代数曲面** (algebraic surface) 的分类．Bertini 在 1877 年的工作被认为是这一方向上的首批成果；他给出了平面对合变换的分类，用现代术语讲就是精确到相差平面的双有理自同构群的共轭的条件下对这个群的所有二阶元素的分类．这个分类非常简单，而且特别地，很容易推断得平面关于一个二阶群的商是一个有理曲面．换句话说，如果曲面 X 是单有理的且态射 $f:P^2\to X$ 是二次的，那么 X 是有理的．Castelnuovo (1893) 对代数曲面的 **Lüroth 问题** (Lüroth problem) 的一般情形给出了解答(肯定地)．他也提出并解决了用数值不变量表示有理曲面特征的问题．曲面的分类由 Enriques 通过一系列研究完成，它一直延续到 20 世纪的第一个十年．

意大利学派的主要工具是曲面上的族的研究；这些族是线性的或代数的(后者也称为"连续的")．这就导出了线性等价与代数等价的概念．Castelnuovo 首先研究了这些概念间的联系．Severi 对这个问题的继续发展作出了重要贡献．尽管大量概念用解析形式定义，但随着时间的推移，其代数意义更明显了．不过至少从现代观点来看，仍然有不少概念与结果本质上是解析的．

19世纪 80 年代初，F. Klein 和 H. Poincaré 用自守函数对代数曲线的**单值化** (uniformization) 问题作了研究．他们的目的是想类似于用椭圆函数单值化一阶曲线那样，用现在的自守函数单值化所有曲线．Klein 的出发点是模函数理论．模函数域同构于有理函数域，但是可以考虑关于模群的各种子群保持不变的函数以得到更复杂的域．特别地，Klein 研究了由所有变换 $z\to(az+b)/(cz+d)$ 组成的群的自守函数，其中 a, b, c, d 是整数，$ad-bc=1$，且

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod 7.$$

他证明了这些函数单值化亏格三曲线 $x_0^3x_1+x_1^3x_2+x_2^3x_0=0$．可以把这个群的基本多边形作形变以得到新的群，从而单值化亏格三的曲线．类似的思想方法是 Klein 和 Poincaré 工作的基础，后者利用现在冠以他的名字的级数以构造自守函数．他们两人都正确地猜测到任意代数曲线可以用一个相应的群单值化，而且在证明这个结论的方向上取得了重大进展．完整的证明只在 1907 年才由 Poincaré 和 P. Koebe 分别独立地得

到．当时 Poincaré 对基本群和万有覆叠概念的研究在这个证明中起着重大的作用．

代数曲线的拓扑十分简单，而且 Riemann 已作了充分的研究．E．Picard 用态射 $f: X \to P^1$ 的纤维的研究为基础的方法，研究代数曲面的拓扑．他研究了点 $a \in P^1$ 变化时，纤维 $f^{-1}(a)$ 的拓扑的变化，特别是在什么条件下这个纤维包含奇点．例如，用这样的方法证明了 P^3内光滑曲面是单连通的（[11]）．Poincaré 也对代数曲面的拓扑有重要贡献．

1921 年 S．Lefschetz 开始应用新的学科——拓扑学——对复数域上的代数簇进行研究．他的首要目标是简化 Poincaré 和 Picard 的结论，并把这些结论推广到高维情形．不过他的研究更广并开创了代数几何学的新领域．Lefschetz 将代数几何学进一步应用于代数簇的代数闭链的理论．他证明了代数曲面上二维闭链同调于由代数曲线所代表的闭链的充要条件是正则二重积分 $\iint R(x, y, z)dxdy$ 在这个闭链上有零周期．Lefschetz 的研究打下了复流形的现代理论的基础．这种流形使用更有力的工具研究，如调和积分论（W．Hodge，G．de Rham）以及层的理论（H．Cartan，J．Leray）．运用这些技巧可以证明非奇异代数簇组成复流形的一种重要类型——**Kähler 流形**（Kähler manifold）．

层论以及与之相关的复流形上向量丛理论，使得代数曲面的许多古典不变量（如算术亏格，几何亏格，典范系）有了新的解释及重要的推广．这一理论的最重要的成果之一就是**陈（省身）类**（Chern class）理论的建立以及 F．Hirzebruch 对古典的 Riemann-Roch 定理的重要推广（[7]）．

20 世纪 20 年代中期，用集合论以及公理化的观点扩大了代数几何学的研究范围．代数几何学应用的范围扩大到了复流形及任意域上的代数簇．对“非古典”域上代数几何学的兴趣起源于同余论，它可看成有限域上的方程．Poincaré 在 1908 年国际数学家大会的讲演中曾断言代数曲线论的方法可以用于研究两个未知量的方程．20 世纪的前十年域论和环论的发展，打下了代数几何学系统构造的基础．

20 世纪 30 年代，H．Hasse 和他的学派试图证明关于有限域上代数曲线的 **Riemann 假设**（Riemann hypotheses），这发展了任意域上的代数曲线理论．Hasse 对椭圆曲线的情形证明了假设．在任意域上代数几何学结构的发展应归功于 B．L．van der Waerden 在 1931 年至 1939 年之间的研究．特别是他发展了光滑射影簇上的相交理论．

1940 年 A．Weil 成功地证明了有限域上任意代数曲线的 Riemann 假设．他找到了两个证明方法：一个方法以曲线 X 的对应理论（即曲面 $X \times X$ 上的除子）为基础，另一个方法以他对 Jacobi 簇的研究为基础．因此在这两种方法里都用到高维簇．与此相关联，Weil 的著作 [5] 包含了任意域上代数几何学的构造：除子理论、闭链理论和相交理论、首先通过粘合仿射的小片定义了“抽象”（不必拟射影）簇．20 世纪 50 年代初，O．Zariski，P．Samuel，C．Chevalley 和 J．P．Serre 把交换代数，特别是局部代数这个有力的方法引入了代数几何学．

以层的概念为基础的簇的定义是 Serre 给出的．他还以不久前刚建立的凝聚解析层（coherent analytic sheaf）理论作为模型建立了凝聚代数层（coherent algebraic sheaf）的理论．

20 世纪 50 年代末期，由于 A．Grothendieck 以概形概念为基础的工作，使代数几何学经历了更为彻底的改造．使用范畴论的语言，Grothendieck 成功地推广和阐明了代数几何学的许多重要的古典构造，它们的抽象定义迄今仅留下很少的几何成分．他也创立了代数几何学的很多重要的新分支（见**抽象代数几何学**（abstract algebraic geometry））．概形论的语言目前已成为现代代数几何学的一部分，它把代数几何学和交换代数有机地结合起来，并使代数簇算术问题的研究（见**代数簇的算术**（algebraic varieties, arithmetic of））取得重大进展．概形论的直接影响表现在当今代数几何学的最重要成就之一——（广中平祐）解决了特征零的域上代数簇的非奇异双有理模型的存在性问题，见**奇点的化解**（resolution of singularities）．

参考文献

[1] Шафаревич, И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972（英译本：Shafarevich, I. R., Basic algebraic geometry, Springer, 1977）.

[2] Hodge, W. V. D. and Pedoe, D., Methods of algebraic geometry, 1－3, Cambridge Univ. Press, 1947－1954.

[3] Baldassarri, M., Algebraic varieties, Springer, 1956.

[4] Dieudonné, J., The historical development of algebraic geometry, *Amer. Math. Monthly*, **79** (1972), 827－866.

[5] Weil, A., Foundations of algebraic geometry, Amer. Math. Soc., 1946.

[6] Grothendieck, A. and Dieudonné, J., Eléments de géométrie algébrique, *Publ. Math. IHES*, **4**, **8**, **11**, **17**, **20**, **24**, **28**, **32**.

[7] Hirzebruch, F., Topological mothods in algebraic geometry, Springer, 1978.

[8] Enriques, F., Le superficie algebraiche, Bologna, 1949.

[9] Zariski, O., Algebraic surfaces, Springer, 1971.

[10] Clebsch, A. and Gordan, P., Theorie der Abelschen Funktionen, Teubner, 1866

[11] Picard, E. and Simart, G., Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes, 1－2, Chelsea, reprint, 1971.

据 [1] 的“历史概述”缩写

【补注】 关于 Hirzebruch 推广古典 Riemann - Roch 定理的另一本好的参考文献是[A1].代数几何学的较新的历史概述见[A2].

参考文献

[A1] Fulton, W., Intersection theory, Springer, 1984.

[A2] Dieudonné, J., History of algebraic geometry, Wadsworth, Monterey, 1985.

[A3] Hartshorne, R., Algebraic geometry, Springer, 1977.

[A4] Griffiths, Ph. and Harris, J., Principles of algebraic geometry, Wiley, 1978.

陈志杰 译

代数群 [algebraic group; алгебраическая группа]

具有**代数簇**(algebraic variety)结构的群 G,其中乘法 $\mu: G\times G\to G$ 以及反演映射 $v: G\to G$ 都是代数簇的正则映射(态射(morphism)). 当一个代数群的基础代数簇以及态射 μ 和 v 都定义在 k 上时,这个代数群称为定义在域 k 上的. 这时,簇 G 的 k 有理点集是一个(抽象)群,记为 $G(k)$. 代数群称为连通的(connected),如果它的代数簇是连通的. 代数群的维数(dimension of an algebraic group)就是它的代数簇的维数. 以下只考虑连通代数群. 代数群 G 的子群 H 称为代数的(algebraic),如果它是代数簇 G 的闭子簇. 对这样的子群,其(左或右)陪集空间可利用万有性质而自然地赋予代数簇的结构(见代数群的**商空间**(quotient space)). 如果子群 H 也是正规的,则商群 G/H 关于这个结构是一个代数群,并称为代数商群(algebraic quotient group). 代数群的同态 $\varphi: G\to\widetilde{G}$ 称为代数的(algebraic),如果 φ 是这个代数簇的态射;如果 φ 定义在 k 上,则称为 k 同态(k-homomorphism).可类似地定义代数群的 k 同构(k-isomorphism).

代数群的例: 一般线性群 $GL(n, k)$(系数取自固定的代数闭域 k 的所有 n 阶可逆矩阵的群);三角矩阵的群;**椭圆曲线**(elliptic curve).

代数群有两种性质完全不同的主要类型: **Abel 簇**(Abelian variety)和**线性代数群**(linear algebraic group). 特殊群的类型完全由其簇的性质确定. 如果代数簇是完全的,这个代数群就称为 Abel 簇. 代数群称为线性的,如果它同构于一般线性群的代数子群. 代数群是线性的当且仅当它的代数簇是仿射的. 这两类代数群有平凡交: 如果一个代数群既是 Abel 簇又是线性群,则它是单位元群. 任意代数群的研究很大程度上归结为 Abel 簇和线性群的研究. 特别地,一个任意代数群包含唯一的正规线性代数子群 H, 使商群 G/H 是 Abel 簇([A1]). 既非线性代数群又非 Abel 簇的代数群的许多例子是由带奇点的代数曲线的广义 **Jacobi 簇**(Jacobi variety)理论给出的([3]). 代数群类的自然推广就是**群概形**(group scheme)的概念.

Б. Б. Венков、В. П. Платонов 撰

参考文献

[1] Borel, A., Linear algebraic groups, Benjamin, 1969.

[2] Mumford, D., Abelian, varieties, Oxford Univ. Press, 1974.

[3] Serre, J.-P., Groupes algébriques et corps des classes, Hermann, 1959.

[4] Chevalley, C., La théorie des groupes algébriques, in Proc. Internat. Congress Mathematicians Edinburgh, 1958, Cambridge Univ. Press, 1960, 53-68.

[5] Demazure, M. and Grothendieck, A., Schémas en groupes, in Sem. Geom. Alg. 1963-1964, Lect. Notes in Math., Vol. 151-153, Springer, 1970.

【补注】

参考文献

[A1] Chevalley, C., Une démonstration d'un théorème sur les groupes algébriques, *J. Math. Pures Appl.*, 39 (1960), 307-317.

陈志杰 译

变换的代数群 [algebraic group of transformations; алгебраическая группа преобразований]

一个代数群 G, 它正则地作用在某代数簇 V 上. 准确地说,它是三元组 (G, V, τ), 其中的 $\tau: G\times V\to V(\tau(g, x)=gx)$, 是代数簇的态射,且满足条件: $ex=x$, $g(hx)=(gh)x$, 对所有 $x\in V$ 及 $g, h\in G$ 成立(其中的 e 是 G 的单位元). 设 G V 和 τ 定义在域 k 上,则 (G, V, τ) 称为 k 变换的代数群(algebraic group of k-transformations). 例如, (G, G, τ) 是变换的代数群,其中 τ 是伴随作用或位移作用. 若 G 是 $GL(n)$ 的代数子群且 τ 是在仿射空间 $V=k^n$ 上的自然作用,则 (G, V, τ) 是变换的代数群. 对每个点 $x\in V$, 用 $G(x)=\{gx: g\in G\}$ 表示 x 的轨道,用 $G_x=\{g\in G: gx=x\}$ 表示 x 的稳定化子. 轨道 $G(x)$ 在 V 中不一定闭,但闭轨道总是存在的,例如最小维的轨道是闭的. 变换的代数群有时理解为有理地(但不一定正则地)作用在某个代数簇 V 上的群 G(这意味着 $\tau: G\times V\to V$ 是有理映射,且 τ 的以上性质对于寻常点成立). A. Weil ([3]) 证明,总存在双有理同构于 V 的一个簇 V^1, 使得由 G 在 V 上的有理作用所诱导的 G 在 V^1 上的作用是正则的. 描述轨道,稳定化子,不变有理函数域(见**不变量理论**(invariants, theory of)), 以及构造商簇等问题在变换的代数群理论中是基本的,且有许多应用.

参考文献

[1] Borel, A., Linear algebraic groups, Benjamin, 1969.

[2A] Dieudonné, J. A. and Carrell, J. B., Invariant theory, old and new, Acad. Press, 1971.

[2B] Mumford, D., Geometric invariant theory, Springer, 1965.

[2C] Mumford, D., Projective invariants of projective structures and applications, in Proc. Internat. Congress

Mathematicians Stockholm, 1962, Inst. Mittag-Leffler, 1963, 526–530.

[2D] Seshadri, C. S., Quotient spaces modulo reductive groupes and applications to moduli of vector bundles on algebraic curves, in Actès du Congrès Internat. Mathématiciens Nice, 1970, Vol. 1, Gauthier-Villars, 1971, 479–482.

[3] Weil, A., On algebraic groups and homogeneous spaces, *Amer. J. Math.*, 77 (1955), 2, 355–391.

В. П. Платонов 撰

【补注】 以上叙述的概念也称为代数变换空间(algebraic transformation space).

石生明 译 许以超 校

代数无关性 [algebraic independence; алгебраическая независимость]

域的扩张 (extension of a field) 理论中的一个概念. 令 K 为域 k 的某个扩域. 元素 $b_1, \cdots, b_n \in K$ 称为在 k 上代数无关的 (algebraically independent), 如果对系数在 k 中且不恒为 0 的每个多项式 $f(x_1, \cdots, x_n)$, 皆有 $f(b_1, \cdots, b_n) \neq 0$. 否则, 元素 $b_1, \cdots, b_n$ 称为代数相关的 (algebraically dependent). 一组无穷多个元素称为代数无关的, 如果它的每个有限子集都是代数无关的; 反之则称为代数相关的. 代数无关性的定义可以拓广到 K 是环而 k 是子环的情形([1]).

数的代数无关性. 复数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 称为代数无关的 (algebraically independent), 如果它们在代数数域上是代数无关的, 即对于系数是不全为 0 的代数数的任何多项式 $P(x_1, \cdots, x_n)$, 关系式 $P(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \neq 0$ 成立. 反之, 则称 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 为代数相关的 (algebraically dependent). 数的代数无关性概念是数的超越性 ($n=1$ 的情形) 概念的推广. 如果若干个数是代数无关的, 那么每个数都是超越数. 要证明一些给定的数是代数无关的, 通常很困难. 对于某些种类的解析函数的值, 可用超越数论中现有的解析方法解决这个问题. 例如, 可以证明: 当一组变数 z 皆为代数数且在有理数域上线性无关时, 相应的指数函数 e^z 的诸值是代数无关的. 对 Bessel 函数得到过类似的结果 (见 **Siegel 法** (Siegel method)). 对于满足系数属于有理函数域的线性微分方程的 E 函数, 它在代数点上所取值的代数无关性问题, 也得到了一些一般性的定理 ([2], [3]). 已经证明了数 α^β 与 α^{β^2} 的代数无关性, 其中 $\alpha (\neq 0, 1)$ 是一个代数数, 而 β 是一个三次无理数. 对于数的代数不可表示性 (这是与代数无关性密切相关的一个概念) 也证明了一系列定理. 如果考虑到诸数的**代数无关性的度量** (measure of algebraic independence), 就有可能给代数无关性这个定性的概念赋予定量的内涵. 上面所述的解析方法对于某些种类的数的代数无关性的度量得到了下估计. 对于 E 函数的值的代数无关性的度量的估计, 也已建立了一般性的定理 ([3]).

参考文献

[1] Lang, S., Algebra, Addison-Wesley, 1974.

[2] Фельдман, Н. И., Шидловский, А. Б., 《Успехи матем. наук》, 22 (1967), 3–81.

[3] Шидловский, А. Б., 《Труды Матем. ин-та АН СССР》, 132 (1973), 169–202.

А. Б. Шидловский 撰

【补注】 上面提到的关于 e^z 的值的代数无关性的定理称为 Lindemann-Weierstrass 定理 (Lindemann-Weierstrass theorem). Schanuel 猜想 (Schanuel conjecture) "对任何 Q 线性无关的 $x_1, \cdots, x_n \in \mathbf{C}$, 超越次数 (transcendence degree) $(x_1, \cdots, x_n, e^{x_1}, \cdots, e^{x_n}) \geqslant n$", 至今(1986)仍未获得证明. 最近, 利用 Гельфонд-Schneider 型方法和代数群簇上多项式的零点估计, 对 Weierstrass $\wp$ 函数的值证明了一个与 Lindemann-Weierstrass 定理类似的结果 ([A1], [A2]). 代数无关性中另一方法是 Mahler 法, 它用于满足函数方程的函数值 ([A3]).

参考文献

[A1] Wüstholz, G., Ueber das abelsche Analogon des Lindemannsche Satzes I, *Inv. Math.*, 72 (1983), 363–388.

[A2] Philippon, P., Variétés abéliennes et indépendence algébrique II, *Inv. Math.*, 72 (1983), 389–405.

[A3] Loxton, J. and Poorten, A. J. van der, Transcendence and algebraic independence by a method of Mahler, in A. Baker and D. Masser (eds.): Transcendence theory, Acad. Press, 1977, Chapt. 15.

张明尧 译 潘承彪 校

代数无关度 [algebraic independence, measure of; алгебраической независимости мера]

数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 的代数无关度是函数

$$\Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_m; n, H) = \min |P(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)|,$$

其中极小值遍历所有次数不大于 n、高度不超过 H 的非零有理整系数多项式. 详见**超越度** (transcendeney, measure of).

А. Б. Шидловский 撰 冯绪宁 译

代数无理数 [algebraic irrationality; алгебраическая иррациональность]

无理的**代数数** (algebraic number), 代数无理数是有理系数的二次以上(含二次)的不可约多项式的根.

А. И. Галочкин 撰 张鸿林 译

代数 K 理论 [algebraic K-theory; алгебраическая K-

теория]

代数学的一个分支，主要研究所谓 K 函子(K-functor)(K_0, K_1, 等等)，它是一般线性代数的一部分．它研究投射模的结构理论以及它们的自同构群．说得更简单一点，它是由向量空间的基的存在性与唯一性(在同构的意义下)所得结果的推广，也是其他关于域上线性群的群论事实的推广．在将域推移到任意的环R时，这些定理往往是不成立的．Grothendieck 群 $K_0(R)$与 Whitehead 群 $K_1(R)$在某种意义下，是这种差异的一个量度．线性代数的结构理论的类似推广出现在拓扑学中．一个向量空间可以看成一个**向量丛**(vector bundle)的一个特殊情况．这些对象可以借助于向量丛的同伦理论与拓扑 **K 理论**(K-theory)来研究．与此相关，注意下列事实是很重要的，投射模可以被看成为向量丛的截段之模．这就说明了选择投射模的类作为这个理论的对象的原因．代数 K 理论大量地应用了环论，同调代数，范畴论与线性群的理论．

代数 K 理论有两个不同的历史起源，都是在几何学的领域内．第一个是与某些拓扑学上的困难问题相关的．起点是引进 **Whitehead 挠率** (Whitehead torsion)的概念，它与有限复形的同伦等价相联系，并且是 Whitehead 群的一个元素，这个群是群 $K_1(R)$的某个商群，这里的 $R=\mathbf{Z}\Pi$ 是基本群 Π 的整群环．其次一步考虑一些拓扑空间 X，它们都是由一个有限复形与它们的广义 **Euler 示性数** (Euler characteristic)$\chi(A)$所控制的，后者是群 $K_0(\mathbf{Z}\pi)$的一个元素．计算 Whitehead 群与 L 群(严格地说，这是一个关于群环的代数问题)，事实上是代数 K 理论的首要目标之一．K_2 以及其他高阶的函子都有同样类型的拓扑应用(例如，将一个闭流形的一个伪合痕变形成一个合痕的问题，其障碍就在群 $K_2(\mathbf{Z}\pi)$的某个商群内)．Whitehead 群的代数研究始于 20 世纪 40 年代．有关的领域是任意环上的线性群的结构的研究、特别是，研究除环上的行列式的理论([10])．

代数 K 理论的第二个起源是 Riemann-Roch 定理的代数证明([7])以及 A. Grothendieck 1957 年所作的推广．这些问题归结成引进 K 函子 $K(X)$，它是一个平滑代数簇上的凝聚层上的一个泛加性函子的值的群．进一步说，过去很熟悉的表示环，二次型类的 **Witt 环** (Witt ring)，等等，都具备这样的构造．于是 K 函子就转入了拓扑学，并在其中找到了大量的应用，并且由于它的作用，许多过去未解决的问题也能加以研究了．

而且，现在已经很清楚，这些构造在理解老的解析问题(椭圆算子的指数问题)，拓扑问题(非常的同调理论)，以及群表示论上显示了新的远景．可是，对环的代数 K 理论的发展(从建立起有限生成的投射模与向量丛之间的对应(类比)开始)却受到了阻碍，因为在代数中，缺少一个恰当的类似于拓扑学中的同纬映象那样的概念．

20 世纪 50 年代与 60 年代开始了有限群上投射模的系统研究．同时，代数 K 理论所依赖的重要理论之一——"稳定性"的思想也发展起来了．粗略地说，这个思想的实质是，当过渡到所研究的对象(例如线性群或投射模)的维数的极限时，一般关系式就更清楚地显示出来了．代数 K 理论与代数数论以及代数函数论中的**互反律**(reciprocity laws)之间的联系已被注意到，与**同余子群**(congruence subgroup)相联系的一些问题已被研究，而且，在代数中，一个与 **Bott 周期定理** (Bott periodicity theorem)相类似的结果——多项式扩张的理论——已被得到．

对于一个有单位元的环 R，其 Grothendieck 群(Grothendieck group)$K_0(R)$是一个 Abel 群，它是由有限生成的投射 R 模的同构类所生成的，其定义关系为：

$$[P_1]+[P_2]=[P_1\oplus P_2],$$

这里的$[P]$是与模 P 同构的模所组成的类．设 $\mathrm{GL}(n, R)$是 R 上的一般线性群，而

$$A\to\left\|\begin{matrix}A & 0\\ 0 & 1\end{matrix}\right\|$$

为 $\mathrm{GL}(n,R)$到 $\mathrm{GL}(n+1,R)$的嵌入，设 $\mathrm{GL}(R)$是诸群 $\mathrm{GL}(n,R)$ 的正向极限，并让 $E(R)$为 $\mathrm{GL}(R)$中由初等矩阵 e_{ij}^{λ} 所生成的子群，这里的 e_{ij}^{λ} 是一个矩阵，其(i,j)位置的元素为 $\lambda\in R$，而其余位置的元素都与单位矩阵相同．于是 $E(R)$与 $\mathrm{GL}(R)$的换位子重合．商群 $GL(R)/E(R)$ 记为 $K_1(R)$，为熟知的 Whitehead 群(Whitehead group)．最后，Steinberg 群(Steinberg group) $\mathrm{St}(n,R)$当 $n\geqslant 3$ 时定义为由生成元素 x_{ij}^{λ}, $\lambda\in R$, $1\leqslant i,j\leqslant n$, $i\neq j$，以及下列关系式所构成的群

$$x_{ij}^{\lambda}x_{ij}^{\mu}=x_{ij}^{\lambda+\mu};$$

$$[x_{ij}^{\lambda},x_{jl}^{\mu}]=x_{il}^{\lambda\mu},\text{若 } i\neq l;$$

$$[x_{ij}^{\lambda},x_{kl}^{\mu}]=1,\text{若 } j\neq k,\ i\neq l.$$

取其正向极限，我们得到群 $\mathrm{St}(R)$以及一个自然同态

$$\varphi:\mathrm{St}(R)\to E(R),$$

其中

$$\varphi(x_{ij}^{\lambda})=e_{ij}^{\lambda}.$$

核 $\mathrm{Ker}\ \varphi$ 将表以 $K_2(R)$ (Milnor 群(Milnor group))，它与 $\mathrm{St}(R)$的中心相重合、这样，K_0, K_1 与 K_2 都是由环的范畴到 Abel 群的范畴的函子．每一个函子 K_0 与 K_1 都可刻画为从有限生成的投射模到 Abel 群的函子，它满足某些条件，并对这些条件具有泛性质，这样一个"泛"特性使得对于"充分好"的范畴，可能定义一些与

K_0, K_1 相类似的函子．特别地，对于 Noether R 模的范畴，可以定义十分近似于 $K_i(R)$ 的函子 $G_i(R)$．

群 $K_i(R)$ 的例子．设 R 为一个除环，并设 R^* 为其乘法群．于是 $K_0(R)=\mathbf{Z}$ 为整数的群，$K_1(R)=R^*/[R^*,R^*]$；而 $K_2(R)$ 是阶为 2 的循环群．如果 R 是有限域，则 $K_2(R)=0$．

在代数 K 理论中，一个重要的结果是对 **Descartes 正方形** (Cartesian square) 的正合 Mayer - Vietoris 序列 (exact Mayer - Vietoris sequence)．下列的图代表一个环同态的 Descartes 正方形，其中 f_1 是一个满同态：

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{h_2} & R_2 \\ h_1\downarrow & & \downarrow f_2, \\ R_1 & \xrightarrow[f_1]{} & R' \end{array}$$

于是有一个正合列

$$K_1(R)\to K_1(R_1)\oplus K_1(R_2)\to K_1(R')\to$$
$$\to K_0(R)\to K_0(R_1)\oplus K_0(R_2)\to K_0(R').$$

如果 f_2 也是满同态，那么这个序列还可以补充下列各项

$$K_2(R)\to K_2(R_1)\oplus K_2(R_2)\to K_2(R')\to K_1(R)\to\cdots.$$

如果 I 是 R 的一个双边理想，那么，Mayer - Vietoris 序列就使得定义相对函子 $K_i(R,I)$ 成为可能 ([8])，并给出下列正合序列

$$K_2(R,I)\to K_2(R)\to K_2(R/I)\to K_1(R,I)\to K_1(R)\to$$
$$\to K_1(R/I)\to K_0(R,I)\to K_0(R)\to K_0(R/I).$$

将环 R 过渡到它对于一个中心的，乘法封闭的系统所作的局部化环时，其 K 函子的性状已经相当全面地研究了．特别地，如果 R 满足某些条件，那么，对于函子 $G_0(R)$ 我们有下列的正合列：

$$\bigcup_{s\in S}G_0(R/(s))\to G_0(R)\to G_0(S^{-1}R)\to 0.$$

如果 R 是交换的，若用模的张量积作为乘法运算，则 $K_0(R)$ 变成一个有单位元的环．从 $K_0(R)$ 到环 $H(R)$ 上有一个可裂的满同态，这里的 $H(R)$ 是在 R 的谱上 (见**环的谱** (spectrum of a ring)) 的整值连续函数 (给定环 $\mathbf{Z}$ 的离散拓扑) 所组成的环．这个满同态的核将表以 $\widetilde{K}_0(R)$．已知 $\widetilde{K}_0(R)$ 是 $K_0(R)$ 的诣零根，如果 R 是 Noether 环，并且如果其最大的谱的维数是 α，则 $\widetilde{K}_0(R)^{\alpha+1}=0$．如果这个维数最多是 1，则 $\widetilde{K}_0(R)$ 将与 **Picard 群** (Picard group) $\mathrm{Pic}(R)$ 同构．

若 R 是算术环，对于函子 $K_i(R)$ 与 $G_i(R)$ 还有些有限性定理．事实上，若 A 是整数环，或者是一个有限域上的多项式环，而 $\dot{R}$ 是一个 R 序、并且同时 R 又是环 A 的分式域上一个半单纯有限维代数中的一个 R 格，那么，群 $K_i(R)$ 与 $G_i(R)$ 都是有限生成的 $(i=0,1)$．

代数 K 理论的发展也是由研究同余子群的问题所促进的：在一个算术群中，是否所有具有有限指数的子群都包含某个同余子群？此问题与计算群 $K_1(R,I)$ 的问题密切相关，这里 I 是 R 的理想．

关于投射模的稳定结构的结果，我们可以提到下列的定理：如果 R 是交换的 Noether 环，其最大的谱有维数 d，而 A 是一个模有限的 R 代数，那么，对任何有限生成的投射 A 模 P，若对 R 的任何极大理想 $\mathfrak{m}$ 都有

$$P_{\mathfrak{m}}\cong A_{\mathfrak{m}}^{d+1}\oplus Q,$$

则它必同构于 $A\oplus N$ (这里 $M_{\mathfrak{m}}$ 是模 M 在 $\mathfrak{m}$ 的局部化)．在投射模的结构中的另一条重要的定理是消去定理：设 R, A 与模 P 如上．设 Q 是一个有限生成的投射 A 模、并设 M 与 N 为任意的 A 模．于是从 $Q\oplus P\oplus M\cong Q\oplus N$ 即得

$$P\oplus M\cong N.$$

一个环 R 的**稳定秩** (stable rank) 是与投射模的稳定结构的问题密切联系的．因此，如果 R 是一个交换环，其稳定秩小于 d，则

$$K_1(R)\cong \mathrm{GL}(d,R)/E(d,R).$$

与群的导出表示论相联系，群环的函子 K_i 已被研究过．这些研究的结果之一是：如果 G 是一个 n 阶的有限群，C 是 G 中循环子群的集合，则在 $K_i(RG)$ 中，子群

$$\sum_{c\in C}\mathrm{Im}(K_i(Rc)\to K_i(RG))$$

的指数可被 n 除尽，这里的 $i=0,1,2$．

关于多项式环扩张，已知若 R 是一个正则环，则

$$K_0(R[t])\cong K_0(R[t,t^{-1}])\cong K_0(R),$$
$$K_1(R[t])\cong K_1(R).$$

再者，对任何环 R，序列

$$0\to K_1(R)\to K_1(R[t])\oplus K_1(R[t^{-1}])\to$$
$$\to K_1(R[t,t^{-1}])\to K_0(R)\to 0$$

是正合的．

计算函子 $K_2(R)$ 的一个结果是松本定理 (Matsumoto theorem)：如果 R 是一个域，则 $K_2(R)$ 是由生成元 $l(a)$ 给出的 (它们与 R 中非零的元素 a 一一对应)，且当 $a\neq 1$ 时，有关系式 $l(a)l(1-a)=1$．

在 20 世纪 70 年代，对于 $i\geqslant 2$，出现了函子 K_i 的很多提法．在 [9] 中指出，如果 $n\leqslant 2$，这些理论是重合的，并给出典型的函子 K_n．在许多情况下，计算高阶 K 群的有效方法已被找到．在这个年代中，单式 K 理论 ([9]，卷 3) 的发展也已开始，这个理论对于在其上定

义了二次与双线性型的模研究了类似的问题.

参考文献

[1] Atiyah, M. F., K-theory: lectures, Benjamin, 1967.

[2] Bass, H., Lectures on topics in algebraic K-theory, Tata Inst. Fundam. Res., 1966.

[3] Bass, H., Algebraic K-theory, Benjamin, 1968.

[4] Swan, R. G., Algebraic K-theory, Springer, 1968.

[5] Swan, R. G. and Evans, E. G., K-theory of finite groups and orders, Springer, 1970.

[6] Thomas, C. B. and Moss, R. M. F. (eds.), Algebraic K-theory and its geometric applications, Springer, 1969.

[7] Манин, Ю. И., 《Успехи матем. наук》, 24 (1969), 5, 3-86.

[8] Milnor, J., Introduction to algebraic K-theory, Princeton Univ. Press, 1971.

[9] Bass, H. (ed.), Algebraic K-theory (Battelle Inst. Conf.), 1-3, Springer, 1973.

[10] Artin, E., Geometric algebra, Interscience, 1957.

A. B. Михалев, A. И. Немытов 撰

【补注】 代数 K 理论的思想与结果在泛函分析的某些部分已经变得很重要了,集中在 C^* 代数(C^*-algebra),特别在 KK 理论或 Kasparov K-理论)的形式中,例如见[A2].

在代数几何中,它与周群(见**周环**(Chow ring)),有很重要的联系.

参考文献

[A1] Magurn, B. (ed.), Reviews in K-theory 1940-1984, *Amer. Math. Soc.*, 1985.

[A2] Curtz, J., K-theory and C^*-algebras, in A. Bak (ed.), Algebraic K-theory, number theory and analysis, Springer, 1984. pp. 55-79.

周伯埙 译

代数格 [**algebraic lattice; алгебраическая решетка**], 紧生成格 (compactly-generated lattice)

一个格,它的每个元素都是某个紧元集(见**紧格元**(compact lattice element))的并(即最小上界).一个格,当且仅当它既是完全的,又是代数的时,才同构于由某个**泛代数**(universal algebra)的所有子代数所成的格.这些条件又是使格同构于某个泛代数的同余格的必要充分条件(Grätzer-Schmidt 定理(Grätzer-Schmidt theorem)).在两种情况中,都假定泛代数运算的元数是有限的.

参考文献

[1] Birkhoff, G., Lattice theory, Amer. Math. Soc., 1967.

[2] Grätzer, G., Lattice theory, Birkhäuser, 1978.

T. C. Фофанова 撰

【补注】 代数格是连续格(continuous lattice)的一种重要特例,后者见[A1]. Grätzer-Schmidt 定理的原始文献是 [A2].

参考文献

[A1] Gierz, G., Hofmann, K. H., Keimel, K., Lawson, J. D., Mislove, M. V. and Scott, D. S., A compendium of continuous lattices, Springer, 1981.

[A2] Grätzer, G. and Schmidt, E. T., Characterizations of congruence lattices of abstract algebras, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 24 (1963), 34-59.

戴执中 译

代数对数奇点 [**algebraic logarithmic singular point; алгебраически-логарифмическая особая точка**]

解析函数 $f(z)$ 的一种孤立奇点 z_0,在该点的邻域内 $f(z)$ 可表示为形如

$$(z-z_0)^s[\ln(z-z_0)]^k g(z)$$

的有限项之和,其中 s 是复数,k 是非负整数,函数 $g(z)$ 在点 z_0 正则解析且 $g(z_0)\neq 0$.

参考文献

[1] Bieberbach, L., Analytische Fortsetzung, Springer, 1955.

E. Д. Соломенцев 撰 杨维奇 译

代数数 [**algebraic number; алгебраическое число**]

一个复数(有时是实数),它是以不全为零的有理数为系数的多项式

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \qquad (1)$$

的根. 若 α 是代数数,则在以 α 为根的所有有理系数的多项式中,存在唯一的首项系数为 1 的次数最低的多项式 $\varphi(x)$, 它必定是不可约的 (irreducible),称为代数数 α 的**不可约多项式**(irreducible polynomial)或**极小多项式**(minimal polynomial). 极小多项式 $\varphi(x)$ 的次数 n 称为代数数 α 的次数. 任意次数 n 的不可约多项式的存在说明 n 次代数数是一定存在的. 全体有理数,且只有这些数是一次代数数. 数 i 是二次代数数,因为它是多项式 x^2+1 的根. 当 n 为任意正整数时, $2^{1/n}$ 是 n 次代数数,它是不可约多项式 x^n-2 的根.

不可约多项式的根 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 称为 α 的**共轭数**(conjugate numbers). 它们也都是 n 次代数数. 所有与 α 共轭的数是互不相同的. 除了次数之外,代数数的另一重要特征是高度,类似于有理分数的分母. 代数数 α 的高度是以 α 为根的整系数不可约**本原多项式**(primitive polynomial)的系数的最大绝对值. 两个代数数的和、差、积及商(除数不为零)仍是代数数,这说明所有的代数数构成一个**域**(field). 以代数数为系数的多项式的根是代数数.

若代数数的极小多项式的系数都是有理整数,则称为**代数整数** (algebraic integer). 例如, i 和 $1+\sqrt{2}$ 都是代数整数,因为它们分别是多项式 x^2+1 和 x^2-2x-1

的根.

代数整数概念是有理整数概念的推广(有理整数 m 是代数整数,因为它是多项式 $x-m$ 的根). 代数整数具备有理整数的许多性质,例如,代数整数也构成一个环. 但另一方面,代数整数在 $\mathbf{R}$ 中处处稠密,而有理整数却是离散的. 1872 年 G. Cantor 证明全体代数数是可数的,从而证明了**超越数** (transcendental number)的存在.

任意首项系数为 1 的整系数多项式(不一定是不可约的)的根都是代数整数. 进而,首项系数为 1 的以代数整数为系数的多项式的根是代数整数. 特别地,代数整数的 k 次根是代数整数. 对任何代数数 α, 总存在正整数 r, 使 $r\alpha$ 是代数整数(与有理数类似). 这种 r 中的最小者就是以 α 为根的不可约本原整系数多项式的首项系数的绝对值. 代数整数的共轭数也是代数整数.

称代数整数 β 能被代数整数 $\alpha(\alpha\neq0)$ 整除,如果存在代数整数 γ 使 $\beta=\gamma\alpha$. 有理整数的很多整除性质对于代数整数也成立.

一个代数整数 ε 如果是 1 的因子,即 $1/\varepsilon$ 是代数整数,则称为代数单位(algebraic unit) (或简称为单位(unit)). 单位是任何代数数的因子,单位的逆是单位,与单位共轭的数是单位,单位的所有因子都是单位,有限个单位之积仍是单位. 一个代数整数是单位,当且仅当它的所有共轭数之积为 ±1. k 次单位根是单位,它们的绝对值都等于 1. 存在无限多个绝对值不是 1 的单位. 例如, $2-\sqrt{3}$ 和 $2+\sqrt{3}$ 是单位,它们是多项式 x^2-4x+1 的根. 另外,单位的方幂可以任意大或任意小,但仍都是单位. 有理数域只含 $+1$ 和 -1 这两个单位.

两个代数整数若只相差一个单位因子,则称为相伴的 (associated). 代数整数环与有理整数环还有一个重要的区别. 前者不能引进不可约整数(类似于素数)的概念,这从代数整数的方根仍是代数整数这一事实可以看出. 在由所有代数数组成的域的某些子域,即所谓代数数域 (algebraic number fields)中,可引进不可约数的概念(相伴的数视为同一). 但是,一个代数整数的不可约因子分解并不总是唯一的.

代数数不能被有理数和代数数任意逼近 (Liouville 定理). 正是这一事实导致在 1844 年证明了超越数的存在. 用有理数逼近代数数是数论中一个很困难的问题,为解决这一问题的探索产生了很重要的一些结果,包括 Thue 定理,Thue - Siegel 定理和 Thue - Siegel - Roth 定理,但它的最后解决仍无一线希望. 另一个很困难的问题是将代数数展开成连分数. 二次实代数数(二次无理数)可以用无限循环连分数表示,至今(20 世纪 70 年代)关于三次以上实代数数的普通连分数展开尚一无所知.

一个复数称为域 $P\subset\mathbf{C}$ 上的代数数,若它是系数在 P 中的方程(1)的根. 类似地定义在 P 上的代数数的极小多项式、在 P 上的次数及在 P 上的共轭数. 系数为 P 上的代数数的多项式的根是 P 上的代数数.

域 P 上任意次数 n 的代数数不一定存在. 例如,在复数域上仅有一次的代数数,即域自身内的数. 一个给定的代数数相对不同的域可以有不同的次数,例如,数 i 是二次代数数,但是相对复数域就是一次的. 域 P 上所有代数数形成一个数域.

C. F. Gauss 第一个系统地研究了代数数和代数数域(形如 $a+bi$ 的 Gauss 数 (Gaussian number),其中 a, b 为有理整数). Gauss 建立了 Gauss 数的算术,作为四次剩余理论的基础. C. G. J. Jacobi 和 F. G. Eisenstein 在研究三次剩余理论中,创立了形如 $a+b\rho$ 的数的算术理论,其中 $\rho=(-1+\sqrt{-3})/2$ 是三次单位根, a, b 为有理数. E. Kummer 想证明 **Fermat 定理** (Fermat theorem)的尝试导致他对**分圆域** (cyclotomic field)进行了深入研究,并提出了理想的概念,创建了代数数理论的基础. P. Dirichlet, L. Kronecker 及 D. Hilbert 等人进一步发展了代数数理论. 苏联数学家——Е. И. Золотарев (理想论), Г. Ф. Вороной (三次无理数,三次域的单位), А. А. Марков (三次域), Ю. В. Сохоцкий (理想论)等人也做出了重要贡献.

代数数的概念和代数数域的有关概念是数论和代数学中非常重要的思想. 代数数作为有理数的推广,在实数域和复数域中形成了具有特殊代数性质的代数数子域. 代数数理论的发展极大地影响了一般环论和域论的创立和发展.

代数数在数论和代数的各分支及数学的其他分支中, 例如在型的理论, Diophantine 方程, Diophantine 逼近论,超越数论,数的几何,代数几何及 Galois 理论中,已有大量应用.

参考文献

[1] Чеботарев, Н. Г., Основы теории Галуа, ч. 1–2, М.-Л., 1934–1937.

[2] Hecke, E., Lectures on the theory of algebraic numbers, Springer, 1981 (译自德文).

[3] Landau, E., Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale, Chelsea, reprint, 1949.

[4] Landau, E., Vorlesungen über Zahlentheorie. 3, Hirzel, 1927

[5] Lang, S., Algebraic number theory, Addison - Wesley, 1970.

А. Б. Шидловский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Weiss, E. Algebraic number theory, McGraw-Hill, 1963.

[A2] Weil, A., Basic number theory, Springer, 1967.

裴定一 译 赵春来 校

代数数论 [**algebraic number theory; алгебраическая теория чисел**]

数论的一个分支,它的基本目的是研究代数数域 K 中代数整数的性质,其中 K 是有理数域 $\mathbf{Q}$ 的有限次扩张(见**代数数**(algebraic number)). 以 $K/\mathbf{Q}$ 表示 K 是 $\mathbf{Q}$ 上的 n 次扩张(见**域的扩张**(Extension of a field)). 域 $K/\mathbf{Q}$ 中的代数整数集 O_K 可以从整基底($\omega_1, \cdots, \omega_n$)得到. 即, 每个代数整数(即 O_K 中的元素)可写为形式 $x_1\omega_1 + \cdots + x_n\omega_n$, 其中 x_i 取遍有理整数(即 $\mathbf{Z}$), 并且, 对 K 中的每个代数整数, 这种表达式是唯一的.

然而,有理整数的性质在代数整数中往往不存在明显的类似. 首先, 关于 O_K 中的可逆元, 即**单位**(unit)的性质就有所不同. 在有理数域中只有 +1 和 −1 是单位,而一般的代数数域可以包含有无穷多个单位. 例如,考虑实二次域 $\mathbf{Q}(\sqrt{D})$, 其中 $D>1$ 是无非平方因子的有理整数. 若再假定 $D\equiv 1 \pmod 4$, 则 $(1, \sqrt{D})$ 是域的整基底. **Pell 方程**(Pell equation) $x^2-Dy^2=1$ 有无穷多组解 $(x, y)\in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$. 任何一组解都给出 $\mathbf{Q}(\sqrt{D})$ 中的一个单位 $x+y\sqrt{D}$. 事实上

$$(x+y\sqrt{D})(x-y\sqrt{D}) = 1,$$

且

$$\frac{1}{x+y\sqrt{D}} = x-y\sqrt{D}$$

也是 $\mathbf{Q}(\sqrt{D})$ 中的代数整数. $\mathbf{Q}(\sqrt{D})$ 中的单位构成一个无限乘法群(Pell 单位群(group of Pell units)). 这样就产生了一个问题: 这个群的结构是什么样的?

代数整数与有理整数不明显类似的第二条性质是有理整数的唯一分解定理. 有理整数 n 可唯一分解为素因子乘积:

$$n = p_1^{a_1}\cdots p_k^{a_k}.$$

对代数整数而言,这样的唯一分解不一定存在. 考虑域 $\mathbf{Q}(\sqrt{-5})$. 数 6 在其中有两种本质上不同的分解: $6=2\cdot 3=(1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})$. 对高次扩张,情况将变得更为复杂. 问题是: 唯一分解定理变成什么样? 在代数数域中它究竟有没有意义?

不明显类似的第三条性质是有关素数的. 通常的素数在一个代数数域中不一定仍是素数. 例如在 Gauss 数域 $\mathbf{Q}(\sqrt{-1})$ 中, 素数 5 可分解为 $5=(2+\sqrt{-1})\cdot(2-\sqrt{-1})$, 但素数 7 在该域中仍为素数. 问题产生了: 在高次代数数域中, 是否存在一条阐述素数性质的一般规律? 换句话说, 是否可以找到一条法则, 使得下述问题有确定的答案: 给定一个素数, 它是否在域 $K/\mathbf{Q}$ 中仍为素数, 或者在其中是可分解的! 如果可分解, 又有多少因子?

最后一个即第四个问题是关于代数数域的一般结构的. 域 $\mathbf{Q}$ 是特征 0 的无真子域的最小域. 任何其他的代数数域都是有子域的, 例如, $\mathbf{Q}$ 是任何代数数域的子域. 问题是: 有多少个子域包含在任何给定的扩张 $K/\mathbf{Q}$ 中? 有限个还是无穷多个? 它们的结构又如何?

这就是代数数论中的四个主要问题, 这些问题的回答构成了代数数论的内容. 很自然地, 人们从第四个问题着手, 因为它的答案有助于解决其他三个问题. 这个问题是由 E. Galois 在 19 世纪 20 年代解决的(见 **Galois 理论** (Galois theory)). $\mathbf{Q}$ 上的 n 次扩张 $K/\mathbf{Q}$ 的子域数目是有限的, 这是从 K 的正规闭包(见**正规扩张**(normal extension))中的所有子域与它的 Galois 群的子群的一一对应关系得到的(基本 Galois 对应(fundamental Galois correspondance)). 这个 Galois 群是阶(元素数目)至多为 $n!$ 的一个有限群.

域的单位群的结构是由 P. Dirichlet 阐明的. 它的基本思想可用上述 Pell 单位群为例进行说明. 一个单位的任何正或负的幂次仍是单位. 存在一个基本单位 $\eta=x_0+y_0\sqrt{D}$, 所有其他单位皆是它的正或负的整数次幂. 因此 Pell 单位由 $\langle -1\rangle$ 与一个无限循环群的乘积构成. 这个事实是一般代数数域的 Dirichlet 单位定理(Dirichlet unit theorem for algebraic number fields)的特殊情形. 设域 $K/\mathbf{Q}$ 的次数为 $n=r_1+2r_2$, 其中 r_1 是 $K\to R$ 的实嵌入个数, r_2 是 $K\to\mathbf{C}$ 的复嵌入的共轭对数, 则 K 的单位群 U 是一个有限循环群 C 和 $r=r_1+r_2-1$ 个无限循环群的乘积:

$$U = C\times\langle\eta_1\rangle\times\cdots\times\langle\eta_r\rangle.$$

这里 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_r$ 是无关的基本单位, C 是包含在 K 中的单位根群. 域中任何单位的范数, 即它与它的共轭的乘积, 等于 ±1.

关于代数数域中代数整数分解的不唯一性问题是由 E. Kummer 解决的, 他的工作始于一种特殊情形, 他试图去解决 Fermat 大定理, 即对任何素数 $p>2$, 方程 $x^p+y^p=z^p$ 不可能有非零整数解. Kummer 用 p 次单位根将方程左边展开, 于是, 问题化为代数数域 $\mathbf{Q}(\zeta)$ 上的一个问题, 其中 ζ 是 p 次本原单位根. 如果 $\mathbf{Q}(\zeta)$ 中有唯一分解定理, 则只需证明并非左方的所有素因子的指数都是 p 的倍数就足够了. 这是 Kummer 最初的想法. 但 Dirichlet 向他指出, 唯一分解定理不一定成立. 为了克服这一困难, Kummer 引入了理想数(ideal numbers), 这就改变了以后的代数数论的全

部结构．理想数的概念源于下述事实：如果域 k 中不包含那种使每个 k 中代数整数都能分解成它们乘积的素数集合，则存在 k 的有限次扩域 K/k，使得其中存在一个数集，对 k 起着素数的作用．这样的数被 Kummer 称为理想(因为它们不在原来的域 k 中)．通过引入理想数，k 中的唯一分解定理就成立了．域中的两个数，如果只相差一个单位(称为相伴数 (associated numbers))，则它们具有同样的理想因子．(注意，理想数的定义依赖于原来的域 k；对另一个域 k'，必须先构作扩张 K'/k' (可能在 k' 上有不同的次数)，使 k' 的所有理想数都包含在其中．)

Kummer 还引进了域 k 的理想类数(ideal class number) 的概念．两个理想数称为是属于同一类的，如果它们的商属于 k．这样得到的类的个数称为 k 的理想类数．他得到了下面的重要结果：k 的类数 h 是有限的，且类在乘法下成为一个 Abel 群．这样，任何理想数都可被认为是原域 k 中某个元素的 h 次根．类数可精确地用域的其他常数 (调整子，判别式及域的次数) 表达出来．

后来，理想数的概念被与之等价的理想 (ideal) 的概念所代替，理想能够用域 k 本身来描述．在 20 世纪 50 年代，理想概念已被推广为更广泛的除子 (divisor) 的概念．于是，Kummer 理论现在可用除子的语言来叙述．但是，对于代数数域，除子概念与理想概念是重合的，这种域只是在后来才被考虑．理想的概念与非相伴数相关，这有助于理解 Kummer 理论与 Dirichlet 的单位理论之间的深刻联系．Kummer 虽然没有成功地解决 Fermat 问题，但他的思想远远超出了这个问题本身，现在，理想已成为很多数学分支中的基本概念．

因为素理想数的定义与域有关，或用现代的术语，它们是域中的素理想，所以关于通常素数在代数数域中分解的第三个问题可以用以下的一般形式来叙述：假定给出一个域 k 及它的代数整数环中的一个理想 $\mathfrak{p}$．问题是：在域 $K=k(\theta)$ 中 $\mathfrak{p}$ 仍是素理想呢，还是可分解为 K 的代数整数环中素理想的乘积？如果是后者，则又是按照什么规则分解的？这个问题导致了类域论，这是现代代数数论的中心部分之一．这个问题的第一个解是 Kummer 给出的．他证明了，如果 θ 是一个不可约多项式 $f(x)$ 的根，且 $1, \theta, \cdots, \theta^{q-1}$ 是 O_K 对 O_k 的整基底，则 $\mathfrak{p}$ 在 $k(\theta)$ 中的分解方式与 $f(x)$ 在 $(\mathrm{mod}\ \mathfrak{p})$ 剩余类中分解的方式相同．换言之，$\mathfrak{p}$ 在 $k(\theta)$ 中的分解由以下同余式决定：

$$f(x) \equiv f_1^{a_1}(x) \cdots f_m^{a_m}(x) \pmod{\mathfrak{p}}.$$

对应的分解被称为 Kummer 公式 (Kummer formula) 或 Kummer 分解 (Kummer decomposition)：

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_1^{a_1} \cdots \mathfrak{P}_m^{a_m}, \qquad (1)$$

这里 $\mathfrak{P}_i$ 是 $K=k(\theta)$ 中的素理想．

这个等式在原则上解决了代数数论的第二个问题．但在必须对每个素理想分别去检验它的意义上来说，这是一个局部等式．将所有素理想集合分类，使得在任何类中的分解规则相同，进而对这些类给出一个简单的描述．这个问题对于扩域 K/k 具有可交换 Galois 群 $\mathrm{Gal}(K/k)$ 的情况已用类域论解决了．

等式(1)引出了类的初步概念．设 n 是扩张 K/k 的次数，f_i 是理想 $\mathfrak{P}_i$ 的相对次数．计算(1)式两边的相对范数 $N_{K/k}$，得到

$$n = a_1 f_1 + \cdots + a_m f_m, \qquad (2)$$

其中 a_i 及 f_i 都是自然数．对固定的 n，方程(2)只有有限多个解．于是 k 中所有的素理想集合可以分成有限个类．可以选取对应于(2)的一个解 (a_i, f_i) 的 Kummer 分解的那些素理想归为同一类．使某些 $a_i \geqslant 2$ 的素理想个数是有限的，它们都是 K/k 的判别式 $\mathfrak{D}$ 的因子．因为无限类更为有趣，故忽略那些 $a_i \geqslant 2$ 的类．

为了简化表达式，下面考虑的 K/k 都设为正规的．在这种域中条件

$$f_1 = \cdots = f_m$$

成立．因此除不尽 $\mathfrak{D}$ 的所有素理想 $\mathfrak{p}$ 的集合共分为 $d(n)$ 个类，其中的 $d(n)$ 为 n 的因子个数．当 $m=n$ 时，该类具有特殊意义．这时

$$f_1 = \cdots = f_m = 1.$$

类中的素理想 $\mathfrak{p}$ 在 K/k 有个数最多的素因子：

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n. \qquad (3)$$

称这样的 $\mathfrak{p}$ 是全分裂的 (split completely 或 totally split)，称它们的类为 k 相对于 K/k 的主类 (principal class)，这是类域论研究的主要对象．为了定义(3)所对应的主类，必须先证明：在 k 中，满足(1)的素理想确实存在且有无限多个．这样，类域论的基本问题就是用域 k 本身去定义主类，使得主类的无限性能随之得到．这个问题对于 Abel 扩张 K/k 已完全解决了．

为了更好地理解类域论的思想，有必要引进理想类群的一般概念．前面给出的 Kummer 的定义所对应的现代概念是绝对理想类群．现在使用的理想类群的一般概念是由 H. Weber 和高木贞治(T. Takagi)引进的([5])．

Weber 引入了类群的导子(conductor of a class group)的概念．设 $\mathfrak{m}$ 是 k 的一个整理想，$L_{\mathfrak{m}}$ 是 k 中满足 $\alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}}$ 的主理想 (α) 组成的子群，$A_{\mathfrak{m}}$ 是 k 的与 $\mathfrak{m}$ 互素的所有理想组成的子群．可以把满足 $L_{\mathfrak{m}} \subseteq H_{\mathfrak{m}} \subseteq A_{\mathfrak{m}}$ 的子群 $H_{\mathfrak{m}}$ 当作主理想群．一个(推广的)类群 $A_{\mathfrak{m}}/H_{\mathfrak{m}}$ 就这样构造出来了．当 $\mathfrak{m}=1$ 且 $H_1=L_1$ 时，就得到了 Kummer 的定义．在一般情形时，$H_{\mathfrak{m}}$ 由

(mod $\mathfrak{m}$)的级数构成，这些级数的剩余类构成整个(mod $\mathfrak{m}$)乘法群的子群．这一推广类群的阶 $h_{\mathfrak{m}}$ 满足 $1\leqslant h_{\mathfrak{m}}\leqslant h\,\varphi(\mathfrak{m})$，其中 h 是绝对理想类群的阶，φ 是 Euler φ 函数，对两个不同的导子 $\mathfrak{m}_1$ 和 $\mathfrak{m}_2$，如果 $H_{\mathfrak{m}_1}$ 和 $H_{\mathfrak{m}_2}$ 实际上是由相同的(mod f)的级数构成，其中 $f=(\mathfrak{m}_1,\mathfrak{m}_2)$，那么称这两个类群等价．若认可无须区分等价的类群，则可得到 **Weber 意义下的类群**(class group according to Weber)的概念，其导子为所有等价导子的最大公因子 f．**Weber 意义下的类域** (Class field according to Weber)是域 K/k，其中当且仅当素理想属于主类 H_f 时是完全分解的．由 Dirichlet 关于级数中的素理想的定理(该定理对每个域 k 都成立)可推出存在着无穷多个素理想．Weber 已对某些特殊情况证明了类域的 Galois 群 Gal (K/k) 与 k 的类群 A_f/H_f 同构．

关于类域论的一个至今仍在用的新观点是由 Hilbert 最先提出的．他认为在域 k 的所有相对 Abel 扩张和 k 的所有类域之间一定有一个一一对应．这个对应可陈述如下：如果对某个导子 f 构造了 Weber 类群，则只存在一个正规扩张 K/k，在其中只有 Weber 主类中的素理想是完全分解的．进而，K/k 的 Galois 群同构于以 f 为导子的 Weber 类群，而且 K/k 的判别式 $\mathfrak{D}$ 具有与导子 f 相同的素理想．反之也对：如果给出一个具有 Galois 群 Gal (K/k) 的 Abel 扩张，则存在一种方法(后来高木贞治给出了确切公式)，按照此法可唯一构造一个主类 H_f，使得类群 A_f/H_f 同构于 Gal (K/k)，且仅有 H_f 的素理想在 K 中完全分解，而且 K/k 的判别式 $\mathfrak{D}$ 与导子 f 有相同的素理想因子．这个"对偶性"是 Hilbert 在 1900 年以假设的方式提出的(他本人只证明了一些特殊情形)．其一般形式由高木贞治给出了证明．

类域论的下一个重要进展与 E. Artin 相关．他揭示了 Galois 群与理想类群之间的典范同构的特殊作用．他证明，这个同构由 Abel 扩张 K/k 的 **Frobenius 自同构**(Frobenius automorphism) $\sigma_{\mathfrak{p}}$ 给出，其定义为

$$a^{N_{\mathfrak{p}}}\equiv\sigma_{\mathfrak{p}}a\ (\mathrm{mod}\,\mathfrak{p}),$$

其中的 $N_{\mathfrak{p}}$ 是理想 $\mathfrak{p}$ 的绝对范数，a 取遍 K 的一切数，$\mathfrak{p}$ 是 k 中的素理想．这个同构现在记为

$$\left(\frac{K/k}{\mathfrak{p}}\right),$$

它(在一个适当群中)仅仅依赖于 $\mathfrak{p}$ 所属的理想类，且是乘性的：

$$\left(\frac{K/k}{\mathfrak{p}_1}\right)\left(\frac{K/k}{\mathfrak{p}_2}\right)=\left(\frac{K/k}{\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2}\right),$$

上式右边的符号理解为 $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$ 所属的类的自同构．在这种想法下，Artin 引进了符号

$$\left(\frac{K/k}{\mathfrak{a}}\right),$$

定义在 k 中全体与导子 f 互素的理想 $\mathfrak{a}$ 所构成的整个群 A_f 上，称为 **Artin 符号** (Artin symbol)，它实现了类群 A_f/H_f 和 Galois 群 Gal(K/k) 之间的一个同构．它的确切形式表示为 Artin **互反律** (Artin reciprocity law)：

$$\left(\frac{K/k}{\mathfrak{a}}\right)=1$$

当且仅当 $\mathfrak{a}\in H_f$ (互反是群 Gal(K/k) 和 A_f/H_f 之间的一个对应)．由此可得到**互反律** (reciprocity laws)的经典形式，即用 Kummer 的幂互反记号来表述(必须考虑域 $K=k(a^{1/n})$)．反过来，这个形式也蕴含着 Hilbert 符号的互反律．在所有这三个形式中，互反律都被看作群的同构，而且 Artin 记号，Kummer 记号及 Hilbert 记号都被看作是实现这个同构的群元素．但是，三者中的每一个也都有等于某个 n 次单位根的数值．于是，可以将互反律用公式表示如下：给定 $(\alpha/\beta)_n$ 的一个值，要求找到与其互反的符号 $(\beta/\alpha)_n$ 的一个值．即用明显的形式将定义为

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1}$$

的函数(α,β)表出．这种形式的互反律最早出现在 C. F. Gauss 关于二次域的工作(见 **Gauss 互反律**(Gauss reciprocity law))以及 Kummer 关于素数阶分圆域的工作中．有关类域论的这种形式的研究后来由 C. G. J. Jacobi，F. G. M. Eisenstein，Hilbert，H. Hasse 以及其他一些人继续，但都仅仅得到部分结果．1948 年，И. Р. Шафаревич 在一般形式下解决了这个问题．他的思想的基点是在符号

$$\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{p}}\right)$$

的数论定义与 Riemann 曲面上的 Abel 微分 $\alpha\cdot d\beta$ 的解析定义之间建立一种联系．他给出了

$$\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{p}}\right)$$

的一个构造，恰与 Abel 微分 α，$d\beta$ 在 $\mathfrak{p}$ 进域中留数的定义相对应．为此，他引入了 E 函数，又称 Шафаревич **函数** (Shafarevich functions)，用这种术语得到了一般情形下互反律的确切形式．

20 世纪 20 年代后期，Hasse 引入了对于 k 上一个素理想作类域论的思想，同时改进和证明了许多关于局部域 k_p 的 Abel 扩张 K_p 的定理．起初这个思想并未引起

足够的重视(结果是作为局部理论的推论得到的). 直到30年代末, C. Chevalley 证明了局部观点在建立类域论中起了非常重要的作用. 他引进了伊代尔群的概念,并从局部观点形成了一般类域论. 接着,类域论中局部-整体原则逐渐建立. 后来,这理论日趋扩展及完善(见[5]),作为其结果, Abel 类域论以完美的形式建立起来. 至于对于具有非交换 Galois 群的正规扩张建立非 Abel 类域论的问题,现在仍未解决.

上面主要是定性地说明代数数论的概貌. 关于定量的估计与方法,代数数论与解析数论有密切的关系. 在很大程度上,它也是建立在代数数域中的 ζ 函数和 L 函数的性质的基础上的.

参考文献

[1] Боревич, З. И., Шафаревич, И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972 (英译本: Borevich, Z. I. and Shafarevich, I. R., Number Theory, Acad. Press, 1966).

[2] Постников, М. М., Теория Галуа, М., 1963.

[3] Weyl, H., Algebraic theory of numbers, Princeton Univ. Press, 1959.

[4] Lang, S., Algebraic number theory, Addison-Wesley, 1970.

[5] Cassels, J. W. S. and Frohlich, A. (eds.), Algebraic number theory, Acad. Press, 1967.

[6] Шафаревич, И. Р., 《Матем. сб.》, 26 (1950), 1, 113-146.

[7] Hilbert's problems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 8 (1902), 437-479 (译自德文).

[8] Artin, E. and Tate, J., Class field theory, Benjamin, 1967.

[9] Weil, A., Basic number theory, Springer, 1974.

[10] Lang, S., Algebraic numbers, Addison-Wesley, 1964.

[11] Bourbaki, N., Commutative algebra, Addison-Wesley, 1966 (译自法文).

А. И. Виноградов 撰

【补注】 n 次代数数域(algebraic number field)是有理数域 $\mathbf{Q}$ 的 n 次扩张. 元素 $\alpha\in K$ 是一个代数整数(algebraic integer)是指它在 $\mathbf{Z}$ 上整,即 α 是 $\mathbf{Z}[X]$ 上首项为1的多项式的根. 代数整数构成一个秩为 n 的 Abel 子群,称为 K 上的整数环 O_K,又称为 K 的主序模(principal order module). O_K 的基是整基(integral basis),也称最小基(minimal basis).

关于Kummer 解 Fermart 问题的努力见[A3]. Kummer 理想数与理想之间的联系(等价)来自这样一个事实:对 O_K 中的素理想,存在一个域扩张 L/K,使得在其中这些素理想成为主理想.

理想 $\mathfrak{P}_i$ 的剩余次数 f_i 是指剩余类域 $O_K/\mathfrak{p}$ 的扩张 $O_L/\mathfrak{P}_i$ 的次数,这里 $\mathfrak{p}=\mathfrak{P}_i\cap O_K$.

关于更多的细节、定义、最新结果及以上很多内容的更确切的叙述可见本百科全书中各个更为专门的条目. 特别是:**代数数**(algebraic number),**单位**(unit),**域的扩张**(extension of a field),**代数数域的调整子**(regulator of an algebraic number field),**判别式**(discriminant),**Frobenius 自同构**(Frobenius automorphism)(还有 Artin 记号(Artin symbol)),关于理想分解的 **Kummer 定理**(Kummer theorem),尤其是**类域论**(class field theory).

理想类群 $A_{\mathfrak{m}}/H_{\mathfrak{m}}$ 常常被称为 mod $\mathfrak{m}$ 的束类群(ray class groups),相应的域称为束类域(ray class fields). 对应于束类群 A_1/L_1 的域是 Hilbert 类域(Hilbert class field). 上述定义都忽略了 Archimedes 素元的问题. 特别地,当考虑 $L_{\mathfrak{m}}$ 中的主理想(α)时,必须要求 α 是全正的(totally positive),即 α 的一切实共轭都大于0.

上面关于类域论的讨论(直到提到伊代尔之前)都是沿用老的理想论形式的术语,如 Hasse 的(数论)报告([A1]). 若要搞清更多细节和精确陈述,这是一本方便的参考书. 关于讨论理想论系统与作为现代类域论基础的伊代尔之间的关系的问题. [A2] 是一本值得推荐的参考书.

参考文献

[A1] Hasse, H., Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraische Zahlkörper, I. II. Physika Verlag, 1965.

[A2] Neukirch, J., Class field theory, Springer, 1986, Chapt. 4, Sect. 8.

[A3] Pollard, H., The theory of algebraic numbers, Math. Assoc. Amer., 1950.

[A4] Weiss, E., Algebraic number theory, McGraw-Hill, 1963.

冯绪宁 译 裴定一 校

代数运算 [**algebraic operation**; **алгебраическая операция**], n 元运算(n-ary operation), 集合 A 上的

集合 A 的 n 次 Descartes 幂集到集合 A 内的一个映射

$$\omega: A^n \to A$$

数 n 称为该代数运算的元数(arity). 历史上,首先考虑的是二元(binary) ($n=2$) 运算和一元(unary) ($n=1$) 运算的概念. 零元 ($n=0$) 运算是集合 A 的固定元素;它们也称为特异(distinguished)元,或常数(constant). 20 世纪出现了无限运算(infinitary operation)的概念,即一个映射 $\omega: A^\alpha \to A$,其中 α 是任一无限基数. 一个集合,若在其上定义了若干个代数运算,则称为一个泛代数(universal algebra).

Т. М. Баранович 撰

【补注】 事实上,无限运算的研究始于20世纪50年代晚期([A1]). 在英语中零元运算也称为 noughtary operation ([A2]).

参考文献

[A1] Słominski, J., The theory of abstract algebras with infinitary operations, Rozprawy Mat., 18 (1959).

[A2] Cohn, P. M, Universal algebra, Reidel, 1981, 13–14.

卢景波 译

最佳逼近代数多项式 [algebraic polynomial of best approximation ; алгебраический многочлен наилучшего приближения]

与某个给定函数具有最小偏差的多项式. 更确切地, 令 $f(x)$ 为 $L_p[a,b]$ $(p\geqslant 1)$ 中的可测函数, H_n 为次数不高于 n 的代数多项式集合. 称量

$$E_n(f)_p = \inf_{P_n(x)\in H_n} \| f(x)-P_n(x) \|_{L_p[a,b]} \qquad (*)$$

为**最佳逼近** (best approximation), 而称 (*) 中使下确界达到的多项式为 $L_p[a,b]$ 中的最佳逼近代数多项式 (algebraic polynomial of best approximation). П. Л. Чебышев 于 1852 年首次研究了一致度量下 $(p=\infty)$ 与给定的连续函数具有最小偏差的多项式并在 1856 年作了进一步研究, 见[1]. 最佳逼近代数多项式的存在性是由 E. Borel 在[2]中确证的. Чебышев 证明, $P_n^0(x)$ 是一致度量下最佳逼近代数多项式, 当且仅当差式 $f(x)-P_n^0(x)$ 中出现 **Чебышев 交错**(Chebyshev alternation); 此时 $P_n^0(x)$ 是唯一的. 当 $p>1$ 时, 最佳逼近代数多项式的唯一性可由空间 L_p 的严格凸性得出. $p=1$ 时却不然, 但 D. Jackson 在[3]中指出: 对于连续函数来说最佳逼近代数多项式是唯一的. **Jackson 定理** (Jackson theorem) 描述了 $E_n(f)_p$ 收敛于零的速度.

类似于 (*), 可定义多个, 譬如说, m 个变量的函数的最佳逼近代数多项式. 如果变量个数 $m\geqslant 2$, 则一致度量下的最佳逼近代数多项式一般来说是不唯一的.

参考文献

[1] Чебышев, П. Л., Полное собрание сочинений, т. 2, M., 1947, 478; 152–236.

[2] Borel, E., Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynômes, Gauthier-Villars, 1905.

[3] Jackson, D., A general class of problems in approximation *Amer. J. Math.*, **46** (1924), 215–234.

[4] Гаркави, А. Л., в кн., Итоги науки. Математический анализ, 1967, М., 1969.

Ю. Н. Субботин 撰

【补注】 也可以将最佳逼近代数多项式简称为最佳代数逼近 (best algebraic approximation), 不要把它混同于最小偏差 $E_n(f)_p$ 的最佳逼近.

参考文献

[A1] Achiezer, N. I., Theory of approximation, Ungar, 1956 (译自俄文).

[A2] Cheney, E. W., Introduction to approximation theory, Chelsea, reprint, 1982.

[A3] Meinardus, G., Approximation von Funktionen und ihre numerische Behandlung, Springer, 1964.

王仁宏, 檀结庆 译 杨应辰 校

代数空间 [algebraic space ; алгебраическое пространство]

概形 (scheme) 和**代数簇** (algebraic variety) 概念的一种推广. 这种推广是代数几何学中某些构造的结果: 如 Hibert 概形, Picard 概形, 参模簇, 收缩, 它们常不能在概形范畴内施行, 从而需要加以扩充. 而代数空间的范畴关于这些构造是封闭的, 这使得代数空间成为代数几何学的一个自然对象.

任何概形 S 可以在概形范畴的**艾达尔拓扑** (étale topology) 中定义层 $\widetilde{S}$, 反之, 它又可唯一地确定概形 S. 一个代数空间 (algebraic space) 是在概形的艾达尔拓扑里的集合的层 F, 它满足局部可表示性条件 (在艾达尔拓扑中): 存在概形 U 及层态射 $\widetilde{U}\to F$, 使得对任何概形 V 及态射 $\widetilde{V}\to F$, 纤维积 $\widetilde{U}\times_F\widetilde{V}$ 可由概形 Z 表示, 并且诱导概形态射 $Z\to V$ 是满的艾达尔态射. 概形 U 称为层 F 的艾达尔覆叠, F 是层 $\widetilde{U}$ 关于艾达尔等价关系 $\widetilde{U}\times_F\widetilde{U}$ 的商层. 后一命题显示代数空间的几何意义是关于艾达尔等价关系的商概形. 代数空间的态射定义为层的态射; 概形的范畴变成等同于代数空间范畴的完全子范畴.

概形论中的许多概念可用于代数空间: 点, 局部环, 艾达尔拓扑, Zariski 拓扑, 函数域, 结构层及凝聚层. 概形论中的许多结论, 如 Serre 仿射准则 (见**仿射概形** (affine scheme)) 以及正常态射的有限性和存在性定理也能应用于代数空间.

较精细的结果有 Picard 函子和 Hilbert 函子在代数空间范畴里的可表示性. 如果在代数空间上给出一个平坦等价关系, 则关于这个关系的分解可导致一个代数空间 (这种情况可能发生, 例如, 当一个有限群自由地作用在空间上时). 最后, 代数空间可以收缩一个具有丰富余法层的子空间.

所有代数空间一定包含一个 Zariski 拓扑下的开稠密子空间, 它是一个概形. 一维和非奇异二维代数空间都是概形, 但对三维或奇异二维代数空间却不成立; 在域上代数空间范畴里的群是一个概形. 复数域上 n 维完全代数空间具有紧解析空间的自然结构, 而且有 n 个代数无关的亚纯函数.

参考文献

[1] Artin, M., Algebraic spaces, Yale Univ., 1969.

[2] Knutson, D., Algebraic spaces, Springer, 1971.

В. И. Данилов 撰

【补注】 代数空间的概念是 M. Artin 引进的, B. Moishezon ([A1]) 也在稍微不同但等价的形式下研究了它. 词条末尾提到的 (关于子空间的) 定理归功于他.

参考文献

[A1] Moishezon, B., Algebraic varieties and compact complex spaces, in Proc. internat. congress mathematicians Nice, 1970, Gauthiers-Villars, 1971, 643－648.

陈志杰 译

代数曲面[algebraic surface; алгебраическая поверхность]

二维**代数簇** (algebraic variety). **代数曲线**(algebraic curve)和代数曲面是两类研究得最透彻的代数簇. 由于问题的丰富性及解决问题的思想方法的多样性,使得代数曲面理论成为代数几何学中最有趣的领域之一.

与代数曲线不同,两个双有理同构的代数曲面不必双正则同构. 在代数几何学发展的古典阶段(1868－1920),代数曲面被理解为双有理等价曲面类,它们的表示被看成到三维复射影空间 CP^3 内的嵌入,它由单一的代数方程 $f(x_0, x_1, x_2, x_3)=0$ 所定义. A. Clebsch 和 M. Noether(在 1870 年)通过定义代数曲面的首要不变量:几何亏格与典范类,奠定了代数曲面论的基础. 代数曲面论的继续发展应归功于意大利学派的代数几何学家: C. Segre, L. Cremona, E. Bertini, G. Castelnuovo, F. Enriques, F. Severi 等人. E. Picard, H. Poincaré 和 S. Lefschetz 将拓扑和超越方法引进代数曲面论. 在这些研究中所得到的许多一般事实已被证明对任意维数的代数簇和概形仍然正确,但其他结果至今尚不能推广到高维的情形. 后者包括用数值不变量对代数曲面分类,代数曲面的有理性与直纹性法则以及极小模型论. 20 世纪 50 至 60 年代,这些结果的大部分运用现代上同调方法被批评性地重新审查和重新证明 ([1], [5], [8]).

代数曲面的一般性质. 除非特别指出,代数曲面总是指代数闭域 k 上的射影代数曲面.

a) 奇点的化解 (resolution of singularities). 非奇异模型存在性的第一个严格证明是在 20 世纪 30 年代由 R. Walker 和 O. Zariski 给出的. 以前由意大利学者给出的几何证明有漏洞 ([9]). 对于正特征基域情形的代数曲面非奇异模型存在性的证明于 1956 年给出 (见**奇点的化解** (resolution of singularities)).

任何一个非奇异代数曲面可被双有理地投射到 CP^3 的一个只有寻常奇点的曲面上,寻常奇点是指具有有限多个寻常尖点以及三重点的寻常二重曲线,其中三重点是曲面的三切面奇点. 这种曲面是代数曲面理论古典发展阶段的主要研究对象. 借助于代数曲面奇点解消定理,概形理论的整体方法可应用于代数曲面奇点的局部研究. 这个课题的基础工作是 D. Mumford(1961) 完成的,他得到了二维奇点的重要不变量,并且证明了正规代数曲面的拓扑空间是拓扑流形,当且仅当曲面是非奇异的.

b) 代数曲面的数值不变量 (numerical invariants of algebraic surfaces). 代数曲面的几何亏格 $p_g(V)$ 的概念是代数曲线的亏格概念在代数曲面论中的推广. 这里 $p_g(V)$ 是 V 上线性无关的正则二维微分形式的最大数(见**几何亏格** (geometric genus)). 代数曲面 V 的典范系 $|K_V|$ 里的除子的虚算术亏格称为线性亏格 (linear genus),记为 $p^{(1)}$. 对于非奇异代数曲面有以下等式成立:

$$p^{(1)} = (K_V^2)+1 = \deg(c_1^2)+1,$$

这里 $c_1=-K_V$ 是曲面 V 的切丛的第一**陈(省身)类** (Chern class). 多重典范系 $|K_i|=|iK_V|$ 称为代数曲面 V 的多重典范系(pluri-canonical systems). 数 $\dim|K_i|+1$ 表示第 i (多重)亏格 (i-th pluri-genus), 并记为 P_i; 它等于 V 上处处正则的 i 重二维微分形式的空间的维数.

根据 Cayley-Noether 假定公式(Cayley-Noether postulation formula), 设 N_m 是通过一条 d 次空间曲线的、具有足够高次数 m 的线性无关型的个数,而且这条曲线的亏格是 p, 具有 t 个三重点及 τ 个二重点,那么 N_m 由下列公式给出:

$$N_m = \binom{m+3}{3}-dm+2t+\tau+p-1.$$

由公式

$$p_a(V) = \binom{n-1}{3}-d(n-1)+2t+\tau+p-1$$

定义的算术亏格 $p_a(V)$ 的概念 (其中 d 是二重曲线 V 的次数, τ 是二重点的个数, p 是亏格, t 是三重点的个数; 对非奇异曲面, $t=\tau=d=0$, $p=1$)是 1875 年对具有寻常奇点的代数曲面引进的. $p_a(V)$ 的另一等价定义将在以后给出 (见**算术亏格** (arithmetic genus)).

差 $p_g(V)-p_a(V)$ 总是非负的; 称之为代数曲面 V 的非正则性 (irregularity of the algebraic surface), 记为 $q(V)$. 如果 $q(V)=0$, 代数曲面称为正则的(regular), 若 $q(V)>0$, 称为非正则的(irregular). 第一个不正则曲面的例子可回溯到 19 世纪末 (A. Cayley, Castelnuovo). 不正则性可用线性系 $|C+K_V|$ 切割曲线 C 的线性系的最大不充分性来描述 (Enriques, 1896, 见 [9]). 对非奇异代数曲面, p_a 和 q 的上同调定义由下式给出:

$$p_a(V) = -\dim_k H_1(V, \mathcal{O}_V)+\dim_k H^2(V, \mathcal{O}_V) = \chi(V, \mathcal{O}_V)-1,$$

$$q(V) = \dim_k H^1(V, \mathcal{O}_V).$$

非奇异代数曲面 V 的算术亏格 $p_a(V)$ 可用下式由 V 的切丛的陈类来表示:

$$1+p_a(V) = \frac{\deg(c_1^2)+\deg(c_2)}{12},$$

称为 Noether 公式 (Noether formula). 数 $I=\deg(c_2)-4$ 称为 Zeuten - Segre 不变量 (Zeuten - Segre invariant).

c) 代数曲面的 Riemann - Roch 定理 (Riemann-Roch theorem for algebraic surfaces). 代数曲线的 Riemann - Roch 定理推广到代数曲面应归于 Castelnuovo(1897). 对于非奇异代数曲面 V 以及除子的完全线性系 $|D|$, 其中 D 的虚次数 $n=(D^2)$, 虚亏格 $\pi=\{(D^2)+(DK_V)\}/2+1$, Riemann -Roch 定理断言有不等式

$$\dim|D| \geqslant n-\pi+p_a(V)+1-i.$$

数 $i=\dim|K_V-D|$ 称为除子 D 的特性指数 (speciality index of the divisor). 这个定理 (见 **Riemann - Roch 定理** (Riemann - Roch theorem)) 的上同调证明使我们能得到不等式成为等式的充要条件. 这个条件就是上同调群 $H^1(V, \mathcal{O}_V(D))$ 成为零. 已经证明, 对任何除子 D 以及所有充分大的数 n, 有 $H^i(V, \mathcal{O}_V(D+nH))=0$, 这里 $i>0$, H 是曲面 V 的超平面截口 (J. P. Serre, 1955). 如果基域的特征是零, 那么对任何丰富除子 D, 不等式都成为等式. 这个结论是关于伴随系正则性的古典 Picard -Severi 定理的推广 ([9]).

d) 代数曲面上的曲线系 (system of curves on an algebraic surfaces). 意大利几何学家使用的主要方法是代数曲面上曲线的线性系和代数系的理论. 除子的代数等价及线性等价的概念与这个理论密切相关. 这些概念仅在正则代数曲面上重合(Castelnuovo, 1896). 在不正则性 q 的代数曲面 V 上任何一条足够一般的曲线可被包含在一个极大代数族内, 这个族纤维化为同维的线性系, 纤维化的基域是一个 q 维簇 (Enriques, 1904). 这个簇是 Abel 簇, 称为代数曲面 V 的 Picard 簇 (见 **Picard 概形** (Picard scheme)). Enriques 结论 (称为"不正则曲面理论的基本定理"或"特征列的完全性定理")的证明以及后来 Severi 的证明都有漏洞. 这个定理的第一个严格的超越证明是 Poincaré 在1910 年给出的, 代数证明则在 50 年后得到 (A. Grothendieck, 见 [5]). 当基域有正特征时, 这个定理在一般情形下不成立 (J. Igusa, 1955). 已经证明在一般情形 q 不小于 Picard 簇的维数.

在一个代数曲面上代数等价与线性等价的不一致蕴含着其上处处正则的一维微分的存在性. 当 $k=\mathbf{C}$ 时这种微分的空间的维数与不正则性相等 (Castelnuovo, Severi, 1905). 这个事实是等式 $\dim H^p(V,\Omega^q)=\dim H^q(V,\Omega^p)$ 的特例, 上述等式对任意紧 **Kähler 流形** (Kähler manifold) V 成立. 当 $\operatorname{char} k>0$ 时, 这个结论不成立.

除子的代数等价类所构成的群是有限生成的 (见 **Neron - Severi 群** (Neron - Severi group)). 它的秩记为 ρ, 并称为代数曲面 V 的 Picard 数 (Picard number). 这个群的挠子群的阶记为 σ, 称为 V 的 Severi 除子 (Severi divisor) ([9]).

Severi 也为代数曲面上零维闭链的理论打下了基础; 这个理论有许多尚未解决的有趣问题.

e) 代数曲面的拓扑性质. 复数域上非奇异射影代数曲面是一个紧四维有向实流形; 特别地, 满足 **Poincaré 对偶性** (Poincaré duality) 的整同调群 $H_i(V, \mathbf{Z})$ 和整上同调群 $H^i(V, \mathbf{Z})$ 对这种代数曲面有定义. 代数曲面 V 上每个除子确定一个二维闭链, 代数等价于 0 的除子对应于同调于 0 的闭链. 除子的相交指数等于闭链的拓扑相交指数. 下述等式成立: σ 等于群 $H_2(V, \mathbf{Z})$ 的挠群的阶, $b_1(V)=2q(V)$. 这里 $b_1(V)$ 是曲面 V 的第一 Betti 数 ([4], [9]).

为了探索代数曲面的拓扑, 发展了一种方法, 它以对曲面上曲线的线性束及对在束内变化的曲线的拓扑的研究为基础. 用这个方法证明了 $\mathbf{C}P^3$ 中的非奇异超平面是单连通的 ([6]). 这个方法后来被用于研究高维流形的拓扑.

对概形的艾达尔上同调的研究, 有可能把代数曲面拓扑学里的许多经典论断加以重新叙述和证明, 以得到对定义在任意特征的域上的曲面的类似的代数论断. 特别地, 代数曲面的 l **进上同调** (l-adic cohomology) 群 $H_l^i(V)$, **基本群** (fundamental group) 和**同伦型** (homotopy type) 都已被定义 ([9]).

E. Picard([6]) 创立了代数曲面上的积分理论. 他的结果以后被推广到高维流形 (W. V. D. Hodge, 1940). 特别地, 这些结果导致不等式 $b_2(V)\geqslant\rho+2p_g(V)$. 此外还证明了在 $H_2(V, \mathbf{Z})$ 上由相交指数定义的二次型的正平方数等于 $2p_g(V)+1$. 这些结果对有限特征的域不正确. 代数曲面超越理论的发展应归于 P. A. Griffiths.

f) 代数曲面的射影浸入 (projective immersions of an algebraic surface). 在代数簇的抽象概念中, 出现了不能浸入射影空间的 (抽象) 代数曲面的存在性问题. 已经证明非奇异完全代数曲面总是射影的 ([8]). 存在完全奇异非射影代数曲面. 关于代数曲面的射影性有各种数值法则 (见**丰富层** (ample sheaf)). 任何非奇异二维代数空间都是代数曲面.

代数曲面的极小模型 (minimal models of algebraic surface). 非奇异代数曲面 V 称为**极小模型** (minimal model), 如果每个到非奇异代数曲面 V' 上的双有理态射 $V\to V'$ 都是同构. 在每个双有理等价类中都存在极小模型. 除了直纹面的类以外, 这个极小模型在同构意义下唯一 ([1], [2], [8]). 代数曲面成为极小模型的充要条件是它不包含第一类例外曲线, 即可由某个双有理态射收缩为非奇异点的不可约曲线. M. Noether 于1895 年首先研究了这样的曲线. 它们用下述条件

刻画: C 必是非奇异有理曲线且 $(C^2)=-1$([1]、[2]).直纹面的极小模型已有完全分类.

代数曲面的分类. 按照 Enriques([2])的分类法,在特征 0 的域上每个非奇异代数曲面在双有理等价下属于下列类型之一: a) **直纹曲面**(ruled surface); b) 二维 **Abel簇**(Abelian variety); c) $K3$ **曲面**($K3$ - surface); d) **椭圆曲面**(elliptic surface); e) **一般型代数曲面**(general - type algebraic surface). 这个分类非常类似于代数曲线的分类. 有理曲线对应于直纹曲面, b)-d)型的曲面对应于椭圆曲线,一般型曲面则对应于亏格 $g>1$ 的曲线. 代数曲面的极小模型的类型由它的数值不变量的值确定. 直纹曲面用条件 $p_{12}=0$ 刻画; b) 型代数曲面用条件 $p_{12}=1$, $p_g=1$, $p_a=-1$ 刻画; c) 型代数曲面由条件 $K_V=0$, $q=0$ 刻画; d) 型代数曲面由条件 $(K_V^2)=0$ 及 $p_{12}>1$ 或者 $p_{12}=1$ 及 $p_g=0$ 刻画. 一般型代数曲面用条件 $(K_V^2)>0$ 及 $p_{12}>1$ 来刻画.

直纹曲面的类包含**有理曲面**(rational surface),它们用条件 $p_2=p_a=0$ 刻画(这使得二维的 **Lüroth 问题**(Lüroth problem)有可能得出肯定的回答).

代数曲面分类理论的许多不同结果涉及具有给定数值不变量的代数曲面的构造问题. 代数曲面经常可用具有特别选定的分支曲线的射影平面的二重覆叠(见**二重平面**(double plane))表示它们而直接构造出来. 一般型曲面的不变量 $p^{(1)}$ 和 p_a 的取值范围尚不清楚(1977). 某些与分类问题有关的结果已被推广到任意特征的域. 小平邦彦把 Enriques 的分类结果推广到包括复解析曲面(见**解析曲面(代数几何学中的)**(analytic surface (in algebraic geometry))).

代数曲面的参模问题(moduli problem for algebraic surface). 这是代数曲面在同构意义下的分类问题. 对于一类代数曲面,为了确定具有给定不变量 p_a, p_g 和 $p^{(1)}$ 的代数曲面所需的参数(参模)的个数,第一个公式是 1888 年 Noether 给出的. 具有给定不变量 p_a, p_g 和 $p^{(1)}$ 的非直纹面依赖于 M 个参模,这里

$$M = 10p_a - p_g - 2p^{(1)} + 12 + \theta, \qquad (*)$$

这里的 θ 是被考察的代数曲面的一个双有理不变量([2],[9]).

现代的形变理论对这个经典结果给出以下解释. 对于这类代数曲面的极化曲面 (V,α), 参模数 M 等于与局部的(或在代数情形,形式的)参模概形 S_α 相切的 Zariski 空间的维数. 此外, 如果

$$0 \to \mathcal{O}_V \to E_\alpha \to T_V \to 0$$

是曲面 V 的切层 T_V 用结构层 $\mathcal{O}_V$ 所作的典范扩张,它由极化 α 的基本类所定义,则

$$M = \dim \operatorname{Im}(H^1(V, E_\alpha) \to H^1(V, T_V)).$$

公式(*)是这个正合序列及 Riemann - Roch 定理的推论. 数 θ 就是和式

$$\dim_k H^2(V, E_\alpha) + \dim_k H^2(V, T_V).$$

又有不等式

$$\dim_k H^2(V, E_\alpha) \geqslant 2p_g - p_a - 1$$

成立([9]). 即使 char$(k)=0$, 局部参模概形 S_α 也可能奇异. 这说明"实际上"的参模数, 即 $M'=\dim S_\alpha$ 可能小于 M. 若差 $\omega=M-M'$ 称为形变的**障碍数**(number of obstructions); 已知估计式 $\omega \leqslant \dim H^2(V, E_\alpha)$. 代数曲面的整体参模簇的存在性只是对某些情形得以证明. 作为**解析空间**(analytic space)或**代数空间**(algebraic space), 一般型曲面或 $K3$ 曲面的参模簇存在.

代数曲面的自同构(automorphism of algebraic surfaces). 完全代数曲面 V 的自同构群 Aut(V) 是某个群概形的 k 点群, 其连通分支 Aut$^0(V)$ 是代数群. 如果 V 不是直纹面且 dim Aut$^0(V)>0$, 那么 $p_a=-1$. 当 $p_g\neq 1$ 或 $p_g=1$ 且 $p_2>1$ 时, V 是椭圆曲面且 Aut$^0(V)$ 是一维 Abel 簇. 在其他情形 V 和 Aut$^0(V)$ 是 Abel 曲面([2]). 对于一般型曲面, Aut(V) 是射影群的一个有限子群. 对于复数域上的 $K3$ 曲面以及直纹面, 群 Aut(V) 已经深入研究过. 当 V 不是直纹面时, Aut(V) 与 V 的双有理变换群重合. 直纹面的双有理变换群没有代数结构, 且研究得不够透彻(见 **Cremona 群**(Cremona group)). 现在对仿射代数曲面的自同构群(见**代数簇的自同构**(algebraic variety, automorphism of an))的研究十分活跃.

非代数闭域上的代数曲面. 代数曲面论中的数论问题与 Diophantus 问题有关(见 **Diophantus 几何学**(Diophantine geometry)). 由 Enriques, Comessatti 和 Segre 开始的非闭域上有理曲面的分类已经完成. 对这种曲面的某些类的双有理自同构群已在研究.

代数曲面论的结果被用于研究函数域上的代数曲线(见 **Mordell 猜想**(Mordell conjecture)). 把代数曲面论的某些结果(极小模型, 相交理论)推广到正则二维概形的更宽的类([7]), 使人们可用几何语言研究数域上的代数曲线.

参考文献

[1] Алгебраические поверхности, М., 1965 (Тр. Матем. ин - та АН СССР, т. 75).

[2] Enriques, F., Le superficie algebraiche, Bologna, 1949.

[3] Jung, H. W. E., Algebraische Flächen, Hannover, 1925.

[4] Lefschetz, S., L'analysis situs et la géomètrie algébrique, Paris, 1924.

[5] Mumford, D., Lectures on curves on an algebraic surface, Princeton Univ. Press, 1966.

[6] Picard, E., Simart, G., Théorie des fonctions algébri-

ques de deux variables indépendantes, 1–2, Chelsea, reprint, 1971.

[7] Shafarevich, I. R., Lectures on minimal models and birational transformations of two-dimensional schemes, Tata Inst. Fundam. Res., 1966.

[8] Zariski, O., Introduction to the problem of minimal models in the theory of algebraic surfaces, Math. Soc. Japan, 1958.

[9] Zariski, O., Algebraic surfaces, Springer, 1971.

[10] Zariski, O., An introduction to the theory of algebraic surfaces, Springer, 1969. И. В. Долгачев 撰

【补注】 最重要的成就之一是宫冈 - 丘(成桐) - Богомолов不等式(Miyaoka - Yao - Bogomolov inequality) $c_1^2 \leqslant 3c_2$ 的证明，这里 c_i 表示代数曲面的第 i 个陈类([A1])．新的参考文献是[A2].

参考文献

[A1] Miyaoka, Y., On the Chern numbers of surfaces of general type, *Invent. Math.*, **42** (1977), 225–237.

[A2] Barth, W., Peters, C., Ven, A. van de, Compact complex surfaces, Springer, 1984.

[A3] Beauville, A., Surfaces algébrique complexes, *Astérisque*, **54** (1958).

[A4] Griffiths, P. A., Harris, J. E., Principles of algebraic geometry, 1–2, Wiley, 1978 陈志杰 译

代数系统 [**algebraic system**; **алгебраическая система**]

在其上定义了若干个运算和若干个关系的一个集合．代数系统是数学的基本概念之一，其一般理论形成于20世纪50年代初期，目前已有很深入的研究，它是介于代数和数理逻辑之间的学科．

基本概念 一个代数系统(algebraic system) $\mathbf{A}=\langle A, O, R\rangle$ 是由一个非空集合 A，一个由若干个定义在 A 上的**代数运算**(algebraic operation) $o_i: A^{n_i}\to A(i\in I)$ 组成的集合 O，以及若干个定义在 A 上的**关系**(relation) $r_j\subseteq A^{m_j}$ 组成的集合 R 构成的．假设所考虑的集合 A 的 Descartes 幂集的指数 n_i, m_j 是非负整数，并且分别称为相应的运算和关系的元数(arity)．集合 A 称为代数系统 $\mathbf{A}$ 的承载集(carrier)或基础集(underlying set)，它的元素同时也称为这个代数系统的元素．A 的基数 $|A|$ 称为代数系统 $\mathbf{A}$ 的势(cardinality)或阶(order)．元素 $(a_1,\cdots,a_{n_i})\in A^{n_i}$ 在映射 $o_i: A^{n_i}\to A$ 下的象称为运算 o_i 在点 $(a_1,\cdots,a_{n_i})$ 处的值(value)．类似地，如果 $(a_1,\cdots,a_{m_j})\in r_j$，那么就说 A 的元素 $a_1,\cdots,a_{m_j}$ 在关系 r_j 中，并且记作 $r_j(a_1,\cdots,a_{m_j})$．与可以在 A 上定义的其他运算和关系不同，运算 $o_i(i\in I)$ 和关系 $r_j(j\in J)$ 称为基本的(basic)或原始的(primitive)．

族对 $\langle\{n_i: i\in I\};\{m_j: j\in J\}\rangle$ 称为代数系统 $\mathbf{A}$ 的型(type of the algebraic system)．两个代数系统 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{A}'$ 称为同型(same type)的，如果 $I=I'$, $J=J'$ 并且 $n_i=n_i'$, $m_j=m_j'$ $(i\in I, j\in J)$．两个同型代数系统 $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}'$ 的分别在 I 和 J 中具有相同下标的基本运算 o_i, o_i' 和基本关系 r_j, r_j' 称为相似的(similar)．

如果集合 A 是一个有限集，则代数系统 $\mathbf{A}$ 称为有限的；如果集合 $I\cup J$ 是一个有限集，则代数系统 $\mathbf{A}$ 称为有限型(finite type)的．有限型的代数系统 $\mathbf{A}$ 记作 $\mathbf{A}=\langle A; o_1,\cdots,o_s, r_1,\cdots,r_t\rangle$．

如果一个代数系统 $\mathbf{A}=\langle A, O, R\rangle$ 的基本关系的集合 R 是空集，则称为一个**泛代数**(universal algebra)或代数(algebra)；如果基本运算的集合 O 是空集，则称为一个**模型**(model)或关系系统(relational system)．经典的代数系统有群、环、线性空间、线性代数、全序集、全序群、格等等．

代数系统 $\mathbf{A}=\langle A, O, R\rangle$ 的基础集 A 的一个非空子集 B 称为闭的(closed)，如果对 B 的任何元素 $b_1,\cdots,b_{n_i}$，每个基本运算 $o_i\in O$ 的值 $o_i(b_1,\cdots,b_{n_i})$ 也属于 B．当把 O 的运算和 R 的关系看作一个闭子集 B 上的运算和关系时，就得到一个代数系统 $\mathbf{B}=\langle B, O', R'\rangle$，$\mathbf{B}$ 和给定的代数系统 $\mathbf{A}$ 是同型的，并且称为代数系统 $\mathbf{A}$ 的一个子系统(subsystem)．代数的子系统称为子代数(subalgebra)，而模型的子系统称为子模型(submodel)．子代数概念紧密地依赖于所考虑代数的基本运算集合．于是，一个广群 $\mathbf{G}$ 是一个型为 $\langle 2\rangle$ 的代数，即带有一个基本运算 $G\times G\to G$ 的代数．一个具有标定单位元 e 的广群 $\mathbf{H}$ 是一个型为 $\langle 2, 0\rangle$ 的代数，其标定单位元 e 关于基本运算 $o: H\times H\to H$，对每个 $h\in H$，具有性质：$o(e,h)=o(h,e)=h$．由于这个原因，一个具有标定单位元 e 的广群 $\mathbf{H}$ 的任何子广群都包含 e，然而广群 $\langle H, o\rangle$ 的子广群不一定包含 e．与代数不同，一个模型的任何非空子集可以看作一个子模型．

一个代数系统 $\mathbf{A}$ 同构(isomorphic)于与其同型的一个代数系统 $\mathbf{A}'$，如果存在集合 A 到集合 A' 上的一个一一映射 φ，使得对 A 的所有元素 $a_1, a_2,\cdots$ 和所有 $i\in I$, $j\in J$，有

$$\varphi(o_i(a_1,\cdots,a_{n_i}))=o_i'(\varphi(a_1),\cdots,\varphi(a_{n_i})),\quad(1)$$

$$r_j(a_1,\cdots,a_{m_j})\Leftrightarrow r_j'(\varphi(a_1),\cdots,\varphi(a_{m_j})).\quad(2)$$

具有上述性质的映射 φ 称为同构(isomorphism)．

以后，一个代数系统的类总是被理解为一个抽象的类，即一个同型代数系统的类，而且当这个类包含一个代数系统 $\mathbf{A}$ 时，也包含所有同构于 $\mathbf{A}$ 的代数系统．当考虑代数系统的一个类 $\mathfrak{K}$ 时，这个类中的所有代数系统通常有一个如下的确定的书写方式．设 $\mathfrak{K}$ 的型为 $\langle\{n_i, i\in I\};\{m_j; j\in J\}\rangle$．对每个 $i\in I$，指定一个符号 F_i，称为函数符号(functional symbol)，而

对每个 $j\in J$，指定一个符号 P_j，称为谓词(predicate)．如果一个代数系 A 属于 $\mathfrak{K}$，并且 $o_i: A^{n_i}\to A$ 是其中的一个基本运算，那么把 A 的元素 $o_i(a_1,\cdots,a_{n_i})$ 记作 $F_i(a_1,\cdots,a_{n_i})$．类似地，如果 $r_j\subseteq A^{m_j}$ 是 A 中的一个基本关系，并且元素 $(a_1,\cdots,a_{m_j})\in r_j$，就记作 $P_j(a_1,\cdots,a_{m_j})=T$(真)或简单地记作 $P_j(a_1,\cdots,a_{m_j})$．另一方面，如果 $(a_1,\cdots,a_{m_j})\notin r_j$，就记作 $P_j(a_1,\cdots,a_{m_j})=F$(假)或 $\neg P_j(a_1,\cdots,a_{m_j})$．设 $\Omega_f=\{F_i: i\in I\}$，$\Omega_P=\{P_j: j\in J\}$，并且设 v 是由并集 $\Omega_f\cup\Omega_P$ 到自然数集 $\{0, 1, 2, \cdots\}$ 内的由公式 $v(F_i)=n_i\ (i\in I)$，$v(P_j)=m_j\ (j\in J)$ 定义的一个映射．对象 $\Omega=\langle\Omega_f,\Omega_P,v\rangle$ 称为类 $\mathfrak{K}$ 的表征(signature)．一个有限表征可记为 $\langle F_1^{(n_1)},\cdots,F_s^{(n_s)};P_1^{(m_1)},\cdots,P_t^{(m_t)}\rangle$，或更简单地记为 $\langle F_1,\cdots,F_s;P_1,\cdots,P_t\rangle$．一个表征为 Ω 的代数系统 $\mathbf{A}$ 称为一个 Ω 系统(Ω-system)，并且记作 $\mathbf{A}=\langle A,\Omega\rangle$．

如果系统 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{A}'$ 的表征皆为 Ω，则 A 与 A' 的同构条件(1)和(2)可以简化．于是，如果 $F_i(i\in I)$ 和 $P_j(j\in J)$ 是表征 Ω 的符号，则等式(1)和(2)的表现形式为：

$$\varphi(F_i(a_1,\cdots,a_{n_i}))=F_i(\varphi(a_1),\cdots,\varphi(a_{n_i})),\qquad(3)$$

$$P_j(a_1,\cdots,a_{m_j})\Leftrightarrow P_j(\varphi(a_1),\cdots,\varphi(a_{m_j})).\qquad(4)$$

Ω 系统 $\mathbf{A}$ 到 Ω 系统 $\mathbf{A}'$ 内的一个同态(homomorphism)是一个映射 $\varphi: A\to A'$，对 A 的所有的元素 $a_1,a_2,\cdots$ 和所有的 $F_i\in\Omega_f$ 和 $P_j\in\Omega_P$，满足条件(3)和条件

$$P_j(a_1,\cdots,a_{m_j})\Rightarrow P_j(\varphi(a_1),\cdots,\varphi(a_{m_j})).\qquad(5)$$

一个同态 $\varphi:\mathbf{A}\to\mathbf{A}'$ 称为强的(strong)，如果对 Ω_P 的任何谓词符号 P_j 和 A' 的任何元素 $b_1,b_2,\cdots,b_{m_j}$，只要 $P_j(b_1,\cdots,b_{m_j})=T$，在 A 中就存在元素 $b_1,\cdots,b_{m_j}$ 的原象 $a_1,\cdots,a_{m_j}$，使得 $P_j(a_1,\cdots,a_{m_j})=T$．对代数来说，同态和强同态概念是一致的．对模型来说，有的同态不是强同态，并且也有不是同构的一一同态．在同态映射 $\varphi:\mathbf{A}\to\mathbf{A}'$ 之下，$\mathbf{A}$ 的子系统的象是 $\mathbf{A}'$ 的子系统；并且 $\mathbf{A}'$ 的子系统的非空完全原象是 $\mathbf{A}$ 的子系统．

一个等价关系 $\theta\subseteq A\times A$ 称为 Ω 系统 $\mathbf{A}$ 的一个合同(congruence)关系，如果对 A 的所有元素 $a_1,b_1,\cdots,a_{n_i},b_{n_i}$ 和所有的 $F_i\in\Omega_f$，有

$$\theta(a_1,b_1),\ldots,\theta(a_{n_i},b_{n_i})\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\theta(F_i(a_1,\ldots,a_{n_i}),F_i(b_1,\ldots,b_{n_i})).$$

对于代数系统 $\mathbf{A}$ 的每个同态映射 φ，如果规定二元关系 $\theta(a,b)$ 成立，当且仅当 $\varphi(a)=\varphi(b)$，则 $\theta(a,b)$ 是 A 的一个合同关系，称为同态 φ 的核合同(kernel congruence)关系．对 Ω 系统 $\mathbf{A}$ 的任何合同关系 θ 和每个元素 $a\in A$，集合 $a/\theta=\{x\in A:\theta(x,a)\}$ 称为代数系统 $\mathbf{A}$ 关于合同关系 θ 的一个陪集(coset)．对每个 $F_i\in\Omega_f$，假设

$$F_i(a_1/\theta,\ldots,a_{n_i}/\theta)=F_i(a_1,\ldots,a_{n_i})/\theta$$

并且对每一个 $P_j\in\Omega_P$，假设

$$P_j(b_1/\theta,\ldots,b_{m_j}/\theta)=T,$$

当且仅当在 A 中存在元素 $c_1,\cdots,c_{m_j}$，使得 $\theta(b_1,c_1),\cdots,\theta(b_{m_j},c_{m_j})$ 及 $P_j(c_1,\cdots,c_{m_j})$ 成立，这样就得到一个与给定代数系统 $\mathbf{A}$ 同型的代数系统 $\mathbf{A}/\theta$；$\mathbf{A}/\theta$ 称为代数系统 $\mathbf{A}$ 关于合同关系 θ 的商系统(quotient system)．对于代数系统 $\mathbf{A}$ 的每个合同关系 θ，典范映射 $\varphi(a)=a/\theta\ (a\in A)$ 是 $\mathbf{A}$ 到商(代数)系统 $\mathbf{A}/\theta$ 上的一个同态，并且给定的合同关系 θ 是 φ 的核合同关系．如果 φ 是代数系统 $\mathbf{A}$ 到代数系统 $\mathbf{A}'$ 内的一个同态，并且 θ 是 φ 的核合同关系，那么映射 $\psi(a/\theta)=\varphi(a)$ 是商(代数)系统 $\mathbf{A}/\theta$ 到代数系统 $\mathbf{A}'$ 内的一个同态．如果同态 φ 是一个强同态，那么 ψ 是一个同构．

Ω 系统 $\mathbf{A}_\alpha=\langle A_\alpha,\Omega\rangle\ (\alpha\in\Lambda\neq\phi)$ 的 Descartes 积(Cartesian product)是如下定义的 Ω 系统 $\mathbf{D}=\langle D,\Omega\rangle$，其中 D 是基础集 $A_\alpha(\alpha\in\Lambda)$ 的 Descartes 积，并且 D 上的基本运算和基本关系由下列条件给出：$F_i(d_1,\cdots,d_{n_i})\ (d_1,\cdots,d_{n_i}\in D,\ F_i\in\Omega_f)$ 是 D 的一个坐标为 $d(\alpha)=F_i(d_1(\alpha),\cdots,d_{n_i}(\alpha))\ (\alpha\in\Lambda)$ 的元素 d，$P_j(d_1,\cdots,d_{m_j})=T$，当且仅当对所有 $\alpha\in\Lambda$ 有 $P_j(d_1(\alpha),\cdots,d_{m_j}(\alpha))=T$．

一阶语言(language of the first order)．代数系统的理论的基本形式语言是如下构成的一阶语言 L．设代数系统的表征为 $\Omega=\langle\Omega_f,\Omega_P,v\rangle$，$\Omega_f=\{F_i: i\in I\}$，$\Omega_P=\{P_j: j\in J\}$，那么它的语言 L 的字母表由下列符号构成：对象变量(abject variable) $x_1,x_2,\cdots$，函数符号 $F_i(i\in I)$，谓词符号 $P_j(j\in J)$，逻辑联接符号

$$\&,\ \vee,\ \to,\ \neg,\ =,$$

量词：

$\forall x_k$——"对每个元素 x_k"；

$\exists x_k$——"存在一个元素 x_k"；

以及辅助符号：括号和逗点．Ω 系统的一阶性质是由根据特定的规则构成的字母或字的有限序列，即所谓项(term)和(合式)公式(formula)来表示的．项归纳地定义为：每一个形如 x_k 或 F_i 的字当 $v(F_i)=0$ 时都是项；如果 $f_1,\cdots,f_n$ 都是项，并且 $n=v(F_i)$，那么 $F_i(f_1,\cdots,f_n)$ 也是一个项．

假定 $\mathbf{A}$ 是一个 Ω 系统，并且 f 是表征为 Ω 的包含对象变量 $x_1,\cdots,x_k$ 的一个项，如果用 A 中的一些元素 $a_1,\cdots,a_k$ 分别代替 $x_1,\cdots,x_k$，并且根据构成项 f 所对应的 Ω_f 中的运算符号在 $\mathbf{A}$ 中完成这些运算，那么就得到 A 的一个元素 $f(a_1,\cdots,a_k)$，称为项 $f(x_1,\cdots,x_k)$ 在 $x_1=a_1,\cdots,x_k=a_k$ 处的值(value)．如果 φ 是 Ω 系统

A 到 Ω 系统 A′ 内的一个同态，那么

$$\varphi(f(a_1, \cdots, a_k))=f(\varphi(a_1), \cdots, \varphi(a_k)).$$

表征为 Ω 的公式概念，以及在公式中自由 (free) 和约束 (bound) 对象变量概念也可归纳地定义为：

1) 设 P 是 Ω 的任何谓词符号或等号 =，m 分别为 $\nu(P)$ 或 2，如果 $f_1, \cdots, f_m$ 是表征为 Ω 的任意项，那么字 $P(f_1, \cdots, f_m)$ 是一个公式，并且它的所有对象变量是自由的.

2) 如果 $\mathfrak{F}$ 是一个公式，那么 $\neg\mathfrak{F}$ 也是一个公式. 一个对象变量在公式 $\neg\mathfrak{F}$ 中是自由的 (约束的)，当且仅当它在 $\mathfrak{F}$ 中自由的 (约束的).

3) 如果 $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ 是两个公式，并且这两个公式中公有的对象变量在两个公式中是自由的，那么字

$$\mathfrak{F}_1 \& \mathfrak{F}_2, \quad \mathfrak{F}_1 \vee \mathfrak{F}_2, \quad \mathfrak{F}_1 \rightarrow \mathfrak{F}_2$$

也是公式.

至少在两个公式 $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ 之一个中自由 (约束) 的对象变量，在公式 (6) 中也同样称为自由 (约束) 的.

4) 如果一个对象变量 x_k 在公式 $\mathfrak{F}$ 中自由出现，那么字 $(\forall x_k)\mathfrak{F}$ 和 $(\exists x_k)\mathfrak{F}$ 仍然是公式，但是变量 x_k 在 $(\forall x_k)\mathfrak{F}$ 和 $(\exists x_k)\mathfrak{F}$ 中是约束的，而所有在公式 $\mathfrak{F}$ 中自由或约束出现的其他对象变量，在公式 $(\forall x_k)\mathfrak{F}$, $(\exists x_k)\mathfrak{F}$ 中同样是自由或约束的.

设给定一个 Ω 系统 A 和表征为 Ω 的一个公式 $\mathfrak{F}$. 如果使 $\mathfrak{F}$ 中的所有自由对象变量 $x_1, \cdots, x_k$ 分别取 A 中的某些值 $a_1, \cdots, a_k$，并且把构成 $\mathfrak{F}$ 的函数符号和谓词符号分别解释为 A 中的基本运算和基本关系，那么就得到一个确定的真命题或假命题. 因此根据上面对公式 $\mathfrak{F}$ 的指派，就确定了 $\mathfrak{F}$ 在 $x_1=a_1, \cdots, x_k=a_k$ 处的值是 T 或是 F，用 $\mathfrak{F}(a_1, \cdots, a_k)$ 表示这个值. 如果 φ 是 Ω 系统 A 到 Ω 系统 A′ 内的一个同构映射，那么对所有的 $a_1, \cdots, a_k \in A$，有

$$\mathfrak{F}(a_1, \ldots, a_k) = \mathfrak{F}(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_k)).$$

如果公式 $\mathfrak{F}$ 不包含自由对象变量，那么就称为闭的 (closed). 对表征为 Ω 的任何闭公式 $\mathfrak{F}$ 和任何 Ω 系统 A，可以讨论 $\mathfrak{F}$ 在 A 中真或假的问题. 给定的表征为 Ω 的闭公式集 S 称为可实现的 (realizable) 或相容的 (consistent)，如果存在一个 Ω 系统使得 S 的每个公式在其中为真.

紧性定理 (compactness theorem) 或 Gödel-Мальцев 定理 (Gödel-Mal'tsev theorem) 是：如果给定的表征为 Ω 的闭公式的无限集合 S 的每一个有限子集都可实现，那么整个集合 S 同样可实现.

可公理化类 (axiomatizable classes). 设 S 为表征为 Ω 的闭公式的某一集合. KS 表示由使得 S 的一切公式在其中为真的所有 Ω 系统构成的类. 在给定类 $\mathfrak{K}$ 的每个 Ω 系统中都为真的一切表征为 Ω 的闭公式的集合 Th $\mathfrak{K}$，称为 $\mathfrak{K}$ 的初等理论. 特别地，如果 (A) 是所有同构于给定的 Ω 系统 A 的 Ω 系统构成的类，那么 Th(A) 称为 Ω 系统 A 的初等理论，并且简记为 Th A. 一个 Ω 系统的类 $\mathfrak{K}$ 称为可公理化的 (axiomatizable)，如果 $\mathfrak{K} = K\,\mathrm{Th}\,\mathfrak{K}$. 一个 Ω 系统类 $\mathfrak{K}$ 是可公理化的，当且仅当存在一个表征为 Ω 的闭公式集合 S，使得 $\mathfrak{K}=KS$.

与考虑一般可公理化概念一道，也可考虑用特殊一阶公式可公理化的概念. 在代数中，给定表征的最重要的特殊公式是：

恒等式 (identities)——形如

$$(\forall x_1) \cdots (\forall x_s) P(f_1, \ldots, f_m)$$

的公式，其中 P 为 Ω 中的某一谓词符号或等号 =，而 $f_1, \cdots, f_m$ 为表征为 Ω 并且对象变量在 $x_1, \cdots, x_s$ 中的项.

拟等式 (quasi-identities)——形如

$$(\forall x_1) \cdots (\forall x_s)[P(f_1, \ldots, f_k) \& \cdots$$
$$\ldots \& Q(g_1, \ldots, g_m) \rightarrow R(h_1, \ldots, h_n)]$$

的公式，其中 $P, \cdots, Q, R$ 是 Ω_p 中的某些谓词符号或等号，而 $f_1, \cdots, f_k, g_1, \cdots, g_m, h_1, \cdots, h_n$ 是表征为 Ω 并且对象变量为 $x_1, \cdots, x_s$ 的项.

全称 (合式) 公式 (universal formulas)——形如 $(\forall x_1) \cdots (\forall x_s)\mathfrak{F}$ 的 (合式) 公式，其中 $\mathfrak{F}$ 是表征为 Ω 的不含量词的公式.

如果给定表征为 Ω 的一个恒等式 (拟等式或全称 (合式) 公式) 集合 S，那么类 KS 称为 Ω 系统的一个簇 (拟簇或全称类).

Birkhoff 定理 (Birkhoff theorem)：Ω 系统的一个非空类 $\mathfrak{K}$ 是一个簇，当且仅当它关于子系统、Descartes 积和同态象是封闭的.

如果 A=⟨A, Ω⟩ 是某一 Ω 系统，把 Ω_f 中的每个函数符号 F_i 换为 n_i+1 (比 F_i 的元数多一) 元的谓词符号 F_i^*，并且对 A 的元素 $a_1, \cdots, a_{n_i}, a$，规定

$$F_i^*(a_1, \ldots, a_{n_i}, a) \Leftrightarrow F_i(a_1, \ldots, a_{n_i}) = a,$$

那么就得到一个模型 $\mathbf{A}^* = \langle A, \Omega^* \rangle$，其中 $\Omega^*=\Omega_p \cup \{F_i^*: F_i \in \Omega_f\}$. 模型 $\mathbf{A}^*$ 的子模型称为 Ω 系统 A 的子模型. 对任何非空有限子集 $A_\alpha \subseteq A$, $\Omega_\beta^* \subseteq \Omega^*$，模型 $A_{\alpha\beta} = \langle A_\alpha, \Omega_\beta^* \rangle$ 称为 Ω 系统 A 的有限子模型 $A_\alpha = \langle A_\alpha, \Omega^* \rangle$ 的一个有限删除 (finite depletion). Ω 系统 A 称为局部可嵌入 (locally imbeddable) Ω 系统类 $\mathfrak{K}$ 的，如果对 Ω 系统 A 的每一个有限子模型 $\mathbf{A}_\alpha$ 的每个有限删除 $\mathbf{A}_{\alpha\beta}$，在 Ω 系统类 $\mathfrak{K}$ 中存在一个 Ω 系统 B (依赖于有限删除 $\mathbf{A}_{\alpha\beta}$ 的选择)，使得模型 $\mathbf{A}_{\alpha\beta} = \langle A_\alpha, \Omega_\beta^* \rangle$ 同构于模型

$\mathbf{B}_{\alpha\beta}=\langle B_\alpha, \Omega_\beta^*\rangle$（对某个适当选择的子集 $B_\alpha\subseteq B$）.

Ω系统类 $\mathfrak{K}$ 的一个子类 $\mathfrak{L}$ 称为在 $\mathfrak{K}$ 中全称的（universal）（或全称可公理化的（universal axiomatizable）），如果存在一个表征为Ω的全称（合式）公式的集合 S，使得 $\mathfrak{L}=KS\cap\mathfrak{K}$.

Tarski-Łos 定理（Tarski-Łos theorem）：Ω系统类 $\mathfrak{K}$ 的一个子类 $\mathfrak{L}$ 在 $\mathfrak{K}$ 中是全称的，当且仅当 $\mathfrak{L}$ 包含 $\mathfrak{K}$ 中的所有可局部嵌入 $\mathfrak{L}$ 的系统.

滤过积（filtered products）. 设 $\mathbf{D}=\prod \mathbf{A}_\alpha$ 是 Ω 系统 $\mathbf{A}_\alpha(\alpha\in\Lambda, \Lambda\neq\emptyset)$ 的 Descartes 积，并且设 Φ 是 Λ 上某一个**滤子**（filter）. 关系

$$d\equiv_\Phi h \Leftrightarrow \{\alpha\in\Lambda: d(\alpha)=h(\alpha)\}\in\Phi \quad (d, h\in D)$$

是 Ω 系统 **D** 的基础集 D 上的一个等价关系. 对每个元素 $d\in D$，设 d/Φ 是由这个等价关系决定的陪集，并且设 $D/\Phi=\{d/\Phi: d\in D\}$. 规定

$$F_i(d_1/\Phi, \ldots, d_{n_i}/\Phi)=d\Phi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{\alpha: F_i(d_1(\alpha), \ldots, d_{n_i}(\alpha))=d(\alpha)\}\in\Phi \quad (F_i\in\Omega_f),$$

$$P_j(d_1/\Phi, \ldots, d_{m_j}/\Phi) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{\alpha: P_j(d_1(\alpha), \ldots, d_{m_j}(\alpha))\}\in\Phi \quad (P_j\in\Omega_p),$$

就得到一个 Ω 系统 $\mathbf{D}/\Phi=\langle D/\Phi, \Omega\rangle$，称为 Ω 系统 $\mathbf{A}_\alpha(\alpha\in\Lambda)$ 关于滤子 Φ 的滤过积. Ω系统 $\mathbf{A}_\alpha(\alpha\in\Lambda)$ 称为这个积的因子. 如果 Φ 是 Λ 上的一个**超滤子**（ultrafilter），那么滤过积 $\mathbf{D}/\Phi$ 称为 Ω 系统 $\mathbf{A}_\alpha(\alpha\in\Lambda)$ 的超积（ultraproduct）.

超积定理（ultraproduct theorem）：如果 $\mathbf{D}/\Phi$ 是 Ω 系统 $\mathbf{A}_\alpha(\alpha\in\Lambda)$ 的超积，并且 $\mathfrak{F}(x_1, \cdots, x_k)$ 是任意一个表征为Ω 的公式，其中 $x_1, \cdots, x_k$ 是自由对象变量，那么对任何元素 $d_1, \cdots, d_k\in D$，有

$$\mathfrak{F}(d_1/\Phi, \ldots, d_k/\Phi)=T \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{\alpha: \mathfrak{F}(d_1(\alpha), \ldots, d_k(\alpha))=T\}\in\Phi$$

特别地，一个表征为Ω的闭公式 $\mathfrak{F}$ 在 Ω 系统 $\mathbf{A}_\alpha(\alpha\in\Lambda)$ 的超积 $\mathbf{D}/\Phi$ 中为真，当且仅当公式 $\mathfrak{F}$ 在其中为真的因子的足标所构成的集合属于超滤子Φ. 因此，任何可公理化的 Ω 系统类关于超积是封闭的.

Ω系统类 L 是全称可公理化的，当且仅当它关于子系统和超积是封闭的.

一个 Ω系统 $\mathbf{E}=\langle\{e\}, \Omega\rangle$ 称为单位系统（unit system），如果它的基础集仅由一个元素（例如元素 e）构成，并且对所有 $P_j\in\Omega_p$, $P_j(e, \cdots, e)=T$ 成立.

Мальцев 定理（Mal'tsev theorem）：一个 Ω 系统类 $\mathfrak{K}$ 是一个拟簇，当且仅当它包含一个单位Ω系统，并且关于子系统和滤积（关于任意滤子）是封闭的.

完全性（completeness）和**范畴性**（categoricity）. 一个 Ω系统的非空类 $\mathfrak{K}$ 称为范畴的（categorical），如果 $\mathfrak{K}$ 中的所有 Ω系统彼此同构. 从同构的观点来看，任何范畴可公理化的 Ω系统类仅由一个有限Ω系统构成.

一个Ω系统类 $\mathfrak{K}$ 称为关于基数 $\mathfrak{m}$ 范畴的（简称 $\mathfrak{m}$ 范畴的），如果它包含一个基数为 $\mathfrak{m}$ 的 Ω 系统，而且 $\mathfrak{K}$ 中的所有基数为 $\mathfrak{m}$ 的 Ω系统彼此同构. 例如，特征相同的代数闭域构成的代数系统类是关于任何不可数无限基数范畴的. 一个 Ω 系统的非空类 $\mathfrak{K}$ 称为完全的（complete），如果对 $\mathfrak{K}$ 中的任何 Ω 系统 **A**, **B** 来说，都有 Th **A** = Th **B**.

Vaught 定理（Vaught theorem）. 如果 Ω 系统的一个可公理化的类 $\mathfrak{K}$ 是关于某一基数 $\mathfrak{m}\geqslant|\Omega_f\cup\Omega_p|$ 范畴的，并且 $\mathfrak{K}$ 中的所有 Ω 系统都是无限的，那么 $\mathfrak{K}$ 是一个完全类.

特别地，特征相同的所有代数闭域构成的类是完全的.

也可参见**代数系统的自同构**（algebraic system, automorphism of an；**代数系统拟簇**（algebraic systems, quasi-variety of）；**代数系统类**（algebraic systems, class of）；**代数系统簇**（algebraic systems, variety of）.

参考文献

[1] Мальцев, А. И., Алгебраические системы, М., 1970（英译本：Mal'tsev, A. I, Algebraic systems, Springer, 1973）.

[2] Cohn, P. M., Universal algebra, Reidel, 1981.

[3] Grätzer, G., Universal algebra, Springer, 1979.

[4] Bell, J. L. and Slomson, A. B., Models and ultraproducts: an introduction, North-Holland, 1971.

[5] Chang, C. C. and Keisler, H. J, Model theory, North-Holland, 1973.

Д. М. Смирнов 撰

【补注】 这里所用的某些术语（指俄语术语）与英语国家的术语有所不同. 如代数系统在英语中通常称为（一阶）结构（(first-order) structure）（如果给定表征或相似型（similarity type Ω），在英语中就把 Ω 系统称为型 Ω 的结构）；如果 Ω不含本原关系，那么结构就称为代数（algebra）. 模型这个术语在英语中用以表示满足一个给定的一阶句子（sentence）（闭公式）集的结构；俄语中的用法并非常规用法. 一个结构的基础集有时也称为全域（universe）.

虽然本文说代数系统理论的大部分产生于 20 世纪 50 年代是恰当的（主要是通过 L. A. Henkin（L. A. Khenkin），А. И. Мальцев, A. Robinson 和 A. Tarski 的工作），但是 1935 年的两个重要的早期结果是应该提到的. 它们是刻画代数簇的 Birkhoff 定理（[A1]）和 Tarski 关于在一阶结构中公式有效性的定义（[A2]）.

参考文献

[A1] Birkhoff, G., On the structure of abstract algebras, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **31** (1935), 433-454.

[A2] Tarski, A., Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen, *Studia Philos.*, **1** (1935), 261-405.

户景波 译

代数系统的自同构 [**algebraic system, automorphism of an; алгебраической системы автоморфизм**]

一个代数系统到自身上的一个同构．Ω系统 $\mathbf{A}=\langle A, \Omega\rangle$ 的一个自同构(automorphism)是集合 A 到自身上的一个具有如下性质的一一映射 φ：

$$\varphi(F(x_1, \cdots, x_n))=F(\varphi(x_1), \cdots, \varphi(x_n)), \quad (1)$$

$$P(x_1, \cdots, x_m) \Leftrightarrow P(\varphi(x_1), \cdots, \varphi(x_m)) \quad (2)$$

对 A 的所有元素 $x_1, x_2, \cdots$ 和Ω的所有 F、P 成立．换句话说，Ω系统 $\mathbf{A}$ 的一个自同构是系统 $\mathbf{A}$ 到自身上的一个同构映射．设 G 是系统 $\mathbf{A}$ 的所有自同构所构成的集合．如果 $\varphi\in G$，那么逆映射 φ^{-1} 也具有性质(1)和(2)，因此 $\varphi^{-1}\in G$．系统 $\mathbf{A}$ 的两个自同构 φ, ψ 的积 $\alpha=\varphi\psi$ (由 $\alpha(x)=\psi(\varphi(x))$ 定义)也是系统 $\mathbf{A}$ 的一个自同构．由于映射的乘法适合结合律，所以 $\langle G, \cdot, ^{-1}\rangle$ 是一个群，称此群为系统 $\mathbf{A}$ 的全体自同构群(group of all automorphisms)；用 $\mathrm{Aut}(\mathbf{A})$ 表示这个群．群 $\mathrm{Aut}(\mathbf{A})$ 的子群简称为系统 A 的自同构群(automorphism group)．

设 φ 是系统 $\mathbf{A}$ 的一个自同构，并且设 θ 是这个系统的一个合同关系．规定

$$(x, y)\in\theta_\varphi \Leftrightarrow (\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y))\in\theta, \ x, y\in \mathbf{A}.$$

那么 θ_φ 仍是系统 $\mathbf{A}$ 的一个合同关系．称自同构 φ 是一个IC自同构(IC-automorphism)，如果对于系统 $\mathbf{A}$ 的每个合同关系来说都具有 $\theta_\varphi=\theta$．系统 $\mathbf{A}$ 的所有IC自同构构成的集合 $\mathrm{IC}(\mathbf{A})$ 是群 $\mathrm{Aut}(\mathbf{A})$ 的一个正规子群，并且商群 $\mathrm{Aut}(\mathbf{A})/\mathrm{IC}(\mathbf{A})$ 同构于系统 $\mathbf{A}$ 的所有合同关系构成的格的自同构群([1])．特别地，由群的一个固定元素 a 决定的内自同构 $x\to a^{-1}xa$ 是此群的一个IC自同构．然而素数阶循环群的例子表明，并非群的所有IC自同构都是内自同构．

设 $\mathfrak{K}$ 是Ω系统的一个非平凡簇，或包含任意(非零)秩的自由系统的Ω系统的任意别的类．类 $\mathfrak{K}$ 的系统 $\mathbf{A}$ 的一个自同构 φ 称为一个I自同构(I-automorphism)，如果存在一个表征为Ω的未知数为 $x_1, \cdots, x_n$ 的项 $f_\varphi(x_1, \cdots, x_n)$，且具有性质：1) 在系统 $\mathbf{A}$ 内存在元素 $a_2, \cdots, a_n$ 使得对每一个元素 $x\in A$，等式

$$\varphi(x)=f_\varphi(x, a_2, \cdots, a_n)$$

成立；并且2) 对类 $\mathfrak{K}$ 的任意系统 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{B}$ 的任意元素 $x_2, \cdots, x_n$，映射

$$x\to f_\varphi(x, x_2, \cdots, x_n) \ (x\in B)$$

是 $\mathbf{B}$ 的一个自同构．类 $\mathfrak{K}$ 的每一系统 $\mathbf{A}$ 的所有I自同构构成的集合 $\mathrm{I}(\mathbf{A})$ 是群 $\mathrm{Aut}(\mathbf{A})$ 的一个正规子群．在由所有群构成的类 $\mathfrak{K}$ 中，I自同构概念与群的内自同构概念是一致的([2])．关于更一般的Ω系统的公式自同构(formula automorphism)概念，见[3]．

设 $\mathbf{A}$ 是一个代数系统，把 $\mathbf{A}$ 中的每一个基本运算 F 换为谓词

$$R(x_1, \ldots, x_n, y) \Leftrightarrow F(x_1, \ldots, x_n)=y$$
$$(x_1, \ldots, x_n, y\in A),$$

就得到一个表示系统 $\mathbf{A}$ 的模型(model) $\mathbf{A}^*$．等式 $\mathrm{Aut}(\mathbf{A}^*)=\mathrm{Aut}(\mathbf{A})$ 成立．如果系统 $\mathbf{A}=\langle A, \Omega\rangle$ 和 $\mathbf{A}'=\langle A, \Omega'\rangle$ 有公共的支集 A，并且 $\Omega\subset\Omega'$，那么 $\mathrm{Aut}(\mathbf{A})\supseteq\mathrm{Aut}(\mathbf{A}')$．如果具有有限生成元集合的Ω系统 $\mathbf{A}$ 是有限可逼近的，那么群 $\mathrm{Aut}(\mathbf{A})$ 也是有限可逼近的(见[1])．设 $\mathfrak{K}$ 是Ω系统的一个类，并且设 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{K})$ 是由所有同构于群 $\mathrm{Aut}(\mathbf{A})$ $(\mathbf{A}\in\mathfrak{K})$ 的群构成的类，并且设 $\mathrm{SAut}(\mathfrak{K})$ 是由 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{K})$ 中的群的子群构成的类．类 $\mathrm{SAut}(\mathfrak{K})$ 由可同构嵌入到群 $\mathrm{Aut}(\mathbf{A})$ $(\mathbf{A}\in\mathfrak{K})$ 中的群构成的类．

下面两个问题来自代数系统自同构群的研究中．

1) 给定一个Ω系统的类 $\mathfrak{K}$，我们能对 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{K})$ 和 $\mathrm{SAut}(\mathfrak{K})$ 说些什么呢？

2) 设给定一个(抽象的)群类 K．是否存在一个具有给定表征Ω的Ω系统类 $\mathfrak{K}$ 使得 $K=\mathrm{Aut}(\mathfrak{K})$，甚至 $K=\mathrm{SAut}(\mathfrak{K})$ 呢？已经证明，对任意的可公理化的模型类 $\mathfrak{K}$ 群类 $\mathrm{SAut}(\mathfrak{K})$ 是全称可公理化的([1])．也已经证明([1]，[4])，如果 $\mathfrak{K}$ 是由无限模型构成的可公理化模型类 $\langle B, \leqslant\rangle$ 是一个全序集合，$\mathbf{G}$ 是模型 $\langle B, \leqslant\rangle$ 的自同构群，那么存在一个模型 $\mathbf{A}\in\mathfrak{K}$ 使得 $A\supseteq B$，并且对每一个元素 $g\in G$，存在系统 $\mathbf{A}$ 的自同构 φ 使得 $g(x)=\varphi(x)$ (对所有 $x\in B$)．1) 如果对任一由无限模型构成的可公理化模型类 $\mathfrak{K}$，都有群 $G\in\mathrm{SAut}(\mathfrak{K})$，那么就称群 G 是万有的；2) 如果群 $\mathbf{G}$ 同构于序群 $\mathbf{H}$ 的(见**全序群**(totally ordered group))某一个自同构群(这个自同构群中的元素保持 $\mathbf{H}$ 中给定的全序，即 $a\leqslant b\Rightarrow\varphi(a)\leqslant\varphi(b)$，对所有 $a, b\in H$，$\varphi\in G$)，那么就称 G 为序群 $\mathbf{H}$ 的一个序自同构群(group of ordered automorphisms)．

设 I 是全序集 $\langle M, \leqslant\rangle$ 的类，设 $\mathfrak{U}$ 是万有群的类，设RO是右序群类，并且设OA是自由Abel群的序自同构群的类，那么([4]，[5]，[6])：

$$\mathrm{SAut}(I) = \mathfrak{U} = \mathrm{RO} = \mathrm{OA}.$$

每一个群同构于某一Ω代数的所有自同构构成的群．如果 $\mathfrak{K}$ 是所有环的类，那么 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{K})$ 是所有群的类

([1]). 然而，如果 $\mathfrak{K}$ 是所有群的类，那么 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{K})\neq\mathfrak{K}$；例如，阶分别为 3，5 和 7 的循环群 C_3, C_5, C_7 不属于类 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{K})$. 也不存在拓扑群使得它的所有拓扑自同构同构于 C_5([7]).

参考文献

[1] Plotkin, B. I., Groups of automorphisms of algebraic systems, Wolters - Noordhoff, 1972.

[2] Csákány, B., Inner automorphisms of universal algebras, *Publ. Math. Debrecen*, **12**(1965), 331－333.

[3] Grant, J., Automorphisms definable by formulas, *Pacific J. Math.*, **44**(1973), 107－115

[4] Rabin, M. O., Universal groups of automorphisms of models, in Theory of models, North - Holland, 1965, 274－284.

[5] Cohn, P. M., Groups of order automorphisms of ordered sets, *Mathematika*, 4 (1957), 41－50.

[6] Смирнов, Д. М.,《Алгебра и логика》, 5(1966), 6, 41－59.

[7] Wille, R. J., The existence of a topological group with automorphism group C_7, *Quart. J. Math. Oxford* (2), **18**(1967), 53－57.

Д. М. Смирнов 撰　卢景波 译

代数系统类 [algebraic systems, class of; алгебраических систем класс]

同型代数系统的一个类. 一个给定型的所有代数系统可以想象为具有给定的表征 Ω，并且称它们为 Ω 系统. Ω 系统的一个类 $\mathfrak{K}$ 称为抽象的 (abstract)，如果它在包含一个系统 A 的同时，也包含所有同构于 A 的 Ω 系统.

设 $\mathfrak{K}$ 是 Ω 系统的一个抽象类. 称 Ω 系统 A 有一个 $\mathfrak{K}$ 子系统的局部集 (local set)，如果存在 A 的子系统 A_α 的一个包含有向集 $\{A_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ 使诸 A_α 覆盖 A (即 $\bigcup_\alpha A_\alpha=A$) 并且诸 A_α 属于 $\mathfrak{K}$. 一个类 $\mathfrak{K}$ 称为局部的 (local)，如果每一个 Ω 系统 A 具有一个属于类 $\mathfrak{K}$ 的 $\mathfrak{K}$ 子系统的局部集合. 刻画给定抽象类的局部性质的定理称为局部(定理) (见 **Мальцев 局部定理** (Mal'tsev local theorem)).

一个Ω系统A称为 $\mathfrak{K}$ 可逼近的($\mathfrak{K}$ - approximable) (或称为 $\mathfrak{K}$ 剩余的($\mathfrak{K}$ - residual))，如果对任一谓词 $P\in\{\Omega_p,=\}$ (即对任一基本谓词，以及对任一与 A 上相等关系等同的谓词) 和 A 中任意元 $a_1,\cdots,a_n$，只要 $P(a_1,\cdots,a_n)=F$，就存在系统 A 到类 $\mathfrak{K}$ 的某一个系统 B 内的一个同态 φ: A → B 使得 $P(\varphi(a_1),\cdots,\varphi(a_n))=F$. $\mathfrak{K}$ 可逼近系统的任一子统也是 $\mathfrak{K}$ 可逼近的. 如果 $\mathfrak{K}$ 是所有有限 Ω 系统的类，那么就称 $\mathfrak{K}$ 可逼近系统 $\mathfrak{A}$ 为有限可逼近的 (finitely approximable) (或称为剩余有限的 (residually finite)). 如果抽象类 $\mathfrak{K}$ 包含一个单元系统 $E=\langle\{e\},\Omega\rangle$，那么Ω系统 A 是 $\mathfrak{K}$ 可逼近的当且仅当它可以同构地嵌入类 $\mathfrak{K}$ 的系统的一个 Descartes 积中([3]). 类 $\mathfrak{K}$ 称为剩余的 (residual)，如果所有 $\mathfrak{K}$ 可逼近系统都属于类 $\mathfrak{K}$. 类 $\mathfrak{K}$ 称为同态闭的 (homomor phically closed)，如果只要它包含 Ω 系统 A，那么它就包含是 A 的同态象的所有 Ω 系统. 所有剩余同态闭类是局部的 ([5]).

一个 Ω 系统类 $\mathfrak{K}$ 称为 (有限) 可公理化的 ((finitely) axiomatizable)，如果存在一个表征为 Ω 的一阶闭公式的(有限)集合 S 使得 $\mathfrak{K}$ 恰由 S 中的所有公式在其中成立的 Ω 系统组成. 有限可公理化的类也称为初等类 (elementary class). 借助于广义连续统假设已经证明([5])：1) 一个代数系统类 $\mathfrak{K}$ 是可公理化的当且仅当它关于超积封闭并且它的补 (在所有 Ω 系统的类中) 关于超幂封闭；2) 一个代数系统类 $\mathfrak{K}$ 是初等类当且仅当它和它的补关于超积封闭. 可公理化的代数系统类的理论论述了这些类的结构性质和这些类的形式语言的语法性质之间的联系. 可公理化类在代数中起着特殊的重要作用，它包括簇 (见**代数系统簇** (algebraic systems, variety of)) 和拟簇 (见**代数系统拟簇** (algebraic systems, quasi - variety of)). 簇和拟簇是局部的并且是剩余的类.

除考虑用一阶闭公式可公理化的性质外，也可考虑用特殊二阶闭公式可公理化的性质. 把谓词变数 R_1, $R_2\cdots$ 加到给定表征 Ω 的函数符号和谓词符号 $F_i(i\in I)$, $P_j(j\in J)$ 中去. 设 $\mathfrak{F}$ 是一个不含量词的一阶公式，它由函数符号，谓词符号，谓词变数 $R_1,\cdots,R_s$ 和对象变数 $x_1,\cdots,x_t$ 构成；二阶公式 $Q\mathfrak{F}$ 隐义全称公式 (crypto - universal formula)，其中 Q 是量词 $(\forall R_i)$, $(\exists R_i)$ 或 $(\forall x_k)$ 的一个序列. 首先由若干个不含自由对象变数的隐义全称公式用逻辑连接符号 &，∨，→，¬ 组成一个公式，再把由隐义全称公式中的所有自由谓词变数形成的 ∀ 量词序列置于其前，这样得到的二阶公式称为表征为 Ω 的 Boole 全称公式 (Boolean - universal formulas). 一个 Ω 系统类 $\mathfrak{K}$ 称为拟全称的 (quasi-universal)，如果存在一个表征为 Ω 的 Boole 全称公式构成的集合 S 使得 $\mathfrak{K}$ 由且仅由 S 的所有公式在其中为真的所有 Ω 系统构成. 拟全称 Ω 系统类是局部的 (Мальцев 定理 (Mal'tsev theorem)). А. И. Мальцев 在 [4] 中给出了拟全称类的更详细的定义.

参考文献

[1] Мальцев, А. И.,《Уч. зап. Ивановск. гос. пед. ин-та》, 1 (1941), 1, 3－9.

[2] Мальцев, А. И.,《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **23** (1959), 3, 313－336.

[3] Мальцев, А. И., Алгебраические системы, М., 1970 (英译本：Mal'tsev, A. I., Algebraic systems, Springer, 1973).

[4] Мальцев, А. И., тр. четвертого. всес. матем. съезда. Ленинград, 1 (1961), Л., 1963.

[5] Cohn, P. M., Universal algebra, Reidel, 1981.
[6] Cleave, J. P., Local properties of systems, *J. London Math. Soc.*, **44** (1969), 121–130. Д. М. Смирнов 撰

【补注】(在广义连续统假设下)可公理化类和初等类的特征的刻画应归功于 H. J. Keisler([A1]).

论文[1], [2] 和[4] 的译文也可分别在 [A2] 的第 2, 11 和 26 章中找到.

术语"归纳类"(inductive class)有时用来代替"局部类".

参考文献

[A1] Keisler, H. J., Ultraproducts and elementary classes, *Indag. Math.*, **23** (1961), 477–495.
[A2] Mal'tsev, A. I. [A. I. Mal'tsev], The metamathematics of algebraic systems. Collected papers: 1936–1967, North-Holland, 1971. 卢景波 译

代数系统拟簇 [algebraic systems, quasi-variety of; алгебраических систем квазимногообразие]

由一阶逻辑语言中称为拟等式(quasi-identities)或称为条件等式(conditional identities)的特殊公式公理化的代数系统类(Ω系统类). 拟等式是形如

$$(\forall x_1)\cdots(\forall x_s)$$
$$[P_1(f_1^{(1)},\ldots,f_{m_1}^{(1)})\&\cdots\&P_k(f_1^{(k)},\ldots,f_{m_k}^{(k)})\rightarrow$$
$$\rightarrow P_0(f_1^{(0)},\ldots,f_{m_0}^{(0)})]$$

的公式, 其中 $P_0,\cdots,P_k\in\Omega_p\cup\{=\}$, 并且 $f_1^{(0)},\cdots,f_{m_k}^{(k)}$ 是表征为Ω, 对象变数在 $x_1,\cdots,x_s$ 中的项. 由 Мальцев 定理([1]), 表征为Ω的一个代数系统拟簇 $\mathfrak{K}$ 可以定义为包含单元Ω系统 E, 并且对子系统和滤积封闭的一个抽象Ω系统类([1], [2]). 一个可公理化的Ω系统类是一个拟簇当且仅当它包含单元Ω系统 E 并且对子系统和 Descartes 积封闭. 如果 $\mathfrak{K}$ 是表征为Ω的一个拟簇, $\mathfrak{K}$ 的系统的一个子类 $\mathfrak{K}_1$ 可以同构嵌入某一表征为 $\Omega'(\supseteq\Omega)$ 的适当拟簇中, 那么 $\mathfrak{K}_1$ 本身是一个拟簇. 因此可嵌入到群类的半群类是一个拟簇; 可嵌入到结合除环类的无零因子结合环类也是一个拟簇.

表征为Ω的一个拟簇 $\mathfrak{K}$ 称为有限可定义的(finitely definable)(或者说具有有限基的拟簇), 如果存在Ω拟等式的一个有限集 S 使得 $\mathfrak{K}$ 恰由 S 中的所有公式在其中成立的Ω系统构成. 例如, 满足消去律的所有半群构成的拟簇由两个拟等式

$$zx=zy\rightarrow x=y,\quad xz=yz\rightarrow x=y,$$

定义, 因此是有限可定义的. 另一方面, 可以嵌入到群内的半群拟簇没有由拟等式构成的有限基([1], [2]).

设 $\mathfrak{K}$ 是任意一个Ω系统类(不必是抽象类); 包含 $\mathfrak{K}$ 的最小拟簇称为类 $\mathfrak{K}$ 的蕴涵闭包(implication closure); 它由同构于类 $\mathfrak{K}\cup\{E\}$ 的Ω系统的滤积的子系统构成, 其中 E 是单元Ω系统. 如果 $\mathfrak{K}$ 是Ω系统类 $\mathfrak{A}$ 的蕴涵闭包, 那么 $\mathfrak{A}$ 称为拟簇 $\mathfrak{K}$ 的生成类(generating class of the quasi-variety). 拟簇 $\mathfrak{K}$ 由一个系统生成当且仅当对于 $\mathfrak{K}$ 的任意两个系统 **A**, **B** 来说, 在 $\mathfrak{K}$ 中存在一个系统 **C** 使得 **A** 与 **B** 分别同构于 **C** 的子系统([1]). 任何一个包含非单元系统的拟簇 $\mathfrak{K}$ 包含具有任意秩的自由系统, 并且这些自由系统也是类 $\mathfrak{K}$ 的方程闭包的自由系统. 包含在表征为Ω的某一给定拟簇 $\mathfrak{K}$ 内的所有Ω系统拟簇关于集合论的包含关系构成一个完全格. 表征为Ω的所有拟簇构成的格的原子称为Ω的极小拟簇(minimal quasi-varieties). 一个极小拟簇 $\mathfrak{M}$ 由它的任一非单元系统生成. 每一个包含非单元系统的拟簇至少包含一个极小拟簇, 如果 $\mathfrak{K}$ 是具有有限表征Ω的Ω系统的拟簇, 那么它的所有子拟簇关于 Мальцев $\mathfrak{K}$ 积构成一个广群([3]).

参考文献

[1] Мальцев, А. И., Алгебраические системы, М., 1970 (英译本: Mal'tsev, A. I., Algebraic systems, Springer, 1973).
[2] Cohn, P. M., Universal algebra, Reidel, 1981.
[3] Мальцев, А. И., 《Сиб. матем. ж.》, **8** (1967), 2, 346–365. Д. М. Смирнов 撰

【补注】在西文的文献中, 拟等式通常称为 Horn 语句(Horn sentences)(见[A1]). 拟簇的范畴性论述见[A3]; 关于它们的类似于有限性的性质见[A2]. Мальцев 的论文也可在 [A4] 的第 32 章中找到.

参考文献

[A1] Horn, A., On sentences which are true of direct unions of algebras, *J. Symbolic Logic*, **16** (1951), 14–21.
[A2] Isbell, J. R, General functional semantics, 1, *Amer. J. Math.*, **94** (1972), 535–596.
[A3] Keane, O., Abstract Horn theories, in F. W. Lawvere, C. Maurer and C. Wraith (eds.), Model theory and topoi, Lect. Notes in Math., Vol. 45, Springer, 1975, pp. 15–50.
[A4] Mal'cev, A. I. [A. I. Mal'tsev], The metamathematics of algebraic systems. Collected papers, 1936–1967, North-Holland, 1971. 卢景波 译

代数系统簇 [algebraic systems, variety of; алгебраических систем многообразие]

固定表征为Ω的、可用等式公理化的代数系统的一个类(见**代数系统类**(algebraic systems, class of)). 等式即形如

$$(\forall x_1)\cdots(\forall x_s)P(f_1,\ldots,f_n)$$

的公式, 其中 P 是Ω的谓词符号或等号, $f_1,\cdots,f_n$ 是表征为Ω且对象变数在 $x_1,\cdots,x_s$ 中的项. 代数系统的簇也称为本原类(equational class 或 primitive class).

表征为Ω的簇也可定义为(Birkhoff 定理(Birkhoff theorem))关于子系统，同态象和 Descartes 积封闭的 Ω 系统的一个非空类.

包含一个给定(不必是抽象类)Ω系统类 $\mathfrak{K}$ 的表征为Ω的所有簇的交,称为类 $\mathfrak{K}$ 的方程闭包(equational closure),或称为由类 $\mathfrak{K}$ 生成的簇,并且用var $\mathfrak{K}$表示它. 特别地,如果类 $\mathfrak{K}$ 仅由一个Ω系统 **A** 构成,那么它的方程闭包用var **A** 表示. 如果系统 **A** 是有限的,那么 var **A** 中所有有限生成的系统也是有限的([1], [2]).

设 $\mathscr{L}$ 是 Ω 系统的一个类,我们用 $S\mathscr{L}$ 表示由 $\mathscr{L}$ 的系统的子统构成的类,用$H\mathscr{L}$ 表示 $\mathscr{L}$ 的系统的同态象所构成的类,并且用 $\Pi\mathscr{L}$表示同构于 $\mathscr{L}$ 的系统的 Descartes 积的系统所构成的类. 对 Ω 系统的任一非空类 $\mathfrak{K}$, 下列关系([1], [2])成立:

$$\operatorname{var}\mathfrak{K} = HS\Pi\mathfrak{K}.$$

一个簇称为平凡的,如果等式 $x=y$ 在它的每一个系统中成立.任一非平凡簇 $\mathfrak{M}$ 包含有任意秩 m 的自由系统 $F_m(\mathfrak{M})$, 并且 $\mathfrak{M}=\operatorname{var} F_{\aleph_0}(\mathfrak{M})$ ([1], [2]).

设 S 是表征为Ω的某些等式构成的集合,并且设 KS 是由 S 的所有等式在其中成立的所有 Ω 系统所构成的类. 如果对表征为Ω的一个簇 $\mathfrak{M}$, 等式 $\mathfrak{M}=KS$ 成立,那么就称 S 是簇 $\mathfrak{M}$ 的一个基(basis).如果簇 $\mathfrak{M}$ 有一个有限基 S, 那么就称 M 为有限可基的(finitely baseable).对任一系统 **A**, 簇 var **A** 的一个基也称为系统 **A** 的等式基(basis of identities).如果 $\mathfrak{M}$ 是一个有有限表征的,有限可基的代数的簇,并且 $\mathfrak{M}$ 的所有代数具有分配合同关系格, 那么 $\mathfrak{M}$ 的每一有限代数 **A** 有一个有限等式基([10]). 特别地,任一有限格 $\langle A, \vee, \wedge\rangle$ 有有限等式基. 任意一个有限群有有限等式基([3]).另外,存在一个没有有限等式基的六个元素的半群和三个元素的广群([6]).

包含在表征为Ω的某一固定簇 $\mathfrak{M}$ 内的所有 Ω 系统簇关于包含关系构成一个有零(zero)和 1(unit)的完全格 $L(\mathfrak{M})$; 称此格为 $\mathfrak{M}$ 的子簇格(lattice of subvarieties). 这个格的零是基为 $x=y$, $P(x_1,\cdots,x_n)$ $(P\in\Omega)$ 的簇,而这个格的 1 是簇 $\mathfrak{M}$. 如果簇 $\mathfrak{M}$ 是非平凡的,那么格 $L(\mathfrak{M})$反同构于系统 $F_{\aleph_0}(\mathfrak{M})$的所有全特征合同 (fully-characteristic congruence)关系构成的格,其中 $F_{\aleph_0}(\mathfrak{M})$ 是秩为可数并且在 $\mathfrak{M}$ 中自由的代数系统([1]).除表征 Ω 有限并且仅由谓词符号构成外,表征为Ω的所有簇构成的格 L_Ω为无限的. 无限格 L_Ω 的基数的确切值已找到([1]). 所有格簇的格是分配格并且基数为连续统势([7], [8]). 所有群簇的格是模格,但不是分配格([3], [4]).所有交换半群的簇的格不是模格([9]).

表征为 Ω 的所有簇的格L_Ω的原子已证明是表征为 Ω 的极小簇(minimal varieties). 每一个含有非单元系统的簇至少包含一个极小簇.如果 Ω 系统 **A** 是有限的, 并且它的型也有限,那么簇 var**A** 仅包含有限个极小子簇([1]).

设 $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ 是固定 Ω 系统簇 $\mathfrak{M}$ 的子簇. Мальцев 积(Mal'tsev product) $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}}\circ\mathfrak{B}$ 是由 $\mathfrak{M}$ 中所有具有如下性质的系统 **A** 构成的类: **A** 有一个合同关系 θ 使得 $(\mathbf{A}/\theta)\in\mathfrak{B}$,所有陪集 a/θ $(a\in\mathbf{A})$是 $\mathfrak{M}$ 的一个系统并且属于 $\mathfrak{A}$. 如果 $\mathfrak{M}$ 是所有群构成的簇, $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 是它的子簇,那么积 $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}}\circ\mathfrak{B}$ 与 Neumann 积相同([3]).半群簇的积不一定是一个簇. 一个 Ω 系统簇 $\mathfrak{M}$ 称为极化的(polarized),如果存在表征为 Ω 的一个项 $e(x)$使得在 $\mathfrak{M}$ 的每一个系统中,等式 $e(x)=e(y)$, $F(e(x),\cdots,e(x))=e(x)$ $(F\in\Omega)$ 成立. 如果 $\mathfrak{M}$ 是一个极化代数簇,并且 $\mathfrak{M}$ 中的所有代数的合同关系是可换的,那么 $\mathfrak{M}$ 的任意子簇 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 的 Мальцев 积 $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}}\circ\mathfrak{B}$ 是 $\mathfrak{M}$ 的子簇. 特别值得一提的是群, 环等的任一簇 $\mathfrak{M}$ 的子簇的广群 $G_l(\mathfrak{M})$. 如果 $\mathfrak{M}$ 是所有群的簇,或是特征为 0 的固定域 P上的所有 Lie 代数的簇,那么 $G_l(\mathfrak{M})$ 是一个自由半群([1]).

参考文献

[1] Мальцев, А. И., Алгебраические системы, М., 1970. (英译本: Mal'tsev, A. I., Algebraic systems, Springer, 1973).
[2] Cohn, P. M., Universal algebra, Reidel, 1981.
[3] Neumann, H., Varieties of groups, Springer, 1967.
[4] Birkhoff, G., Lattice theory, Colloq. Publ., 25, Amer. Math. Soc. 1973.
[5] Perkins, P., Bases of equational theories of semigroups, *J. of Algebra*, **11** (1968), 2, 298–314.
[6] Мурский, В. Л., 《Докл. АН СССР》, **163** (1965), 4, 815–818.
[7] Jónsson, B., Algebras whose congruence lattices are distributive, *Math. Scand*, **21** (1967), 110–121.
[8] Baker, K. A., Equational classes of modular lattice, *Pacific J. Math.*, **28** (1969), 9–15.
[9] Schwabauer, R., A note on commutative semi-groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **20** (1969), 503–504.
[10] Baker, K. A., Primitive satisfaction and equational problems for lattices and other algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **190** (1974), 125–150.

Д. М. Смирнов 撰

【补注】 代数系统簇的范畴特性是由 F. W. Lawvere 提出的([A1]);这方面的详细情况见[A2].

参考文献

[A1] Lawvere, F. W., Functional semantics of algebraic theories, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **50** (1963), 869–873.
[A2] Manes, E. G., Algebraic theories, Springer, 1976.

卢景波 译

代数拓扑学 [**algebraic topology**; **алгебраическая топология**]

数学的一个分支,它研究几何图形(或在广泛的意义上,所有可以谈及连续性的对象)及其相互间映射在连续形变(同伦)下保持不变的性质.代数拓扑学的目标,本质上就是完全列举出这些性质.代数拓扑学这一名称,源于代数概念和代数方法在解决本领域问题时所起的决定性作用.其性质在代数拓扑学中被研究的最重要的几类对象,包括复形(多面体,见**复形**(complex)),可以是单纯的,胞腔的等等;**流形**(manifold),可以是开的,闭的,带边的,亦可划分为光滑的(可微的),解析,复解析,分段线性或拓扑的;纤维丛(**纤维化**(fibration))及其截面.代数拓扑学中考虑的映射的主要类型有任意连续的,分段线性的及光滑的;它最重要的子类型是:同胚,特别地有连续的,分段线性的或光滑的(微分同胚);一个对象在另一对象中的嵌入以及浸入(局部嵌入)(见**同胚**(homeomorphism);**微分同胚**(diffeomorphism)).

代数拓扑学中一个很重要的概念是**形变**(deformation).形变的主要类型包括:同伦,即连续映射的一个任意连续(光滑,分段线性)形变;同痕(连续,光滑,分段线性的),即同胚、嵌入或浸入的一个形变,在形变过程中任一时刻的映射亦为同胚、嵌入或浸入.

代数拓扑学的主要的内在问题包括流形的同胚(连续,光滑、分段线性)分类问题,嵌入(或浸入)关于同痕(或正则同伦)的分类问题,以及一般的连续映射的同伦分类问题.在解决这些问题的过程中,将复形或流形按所谓同伦等价或**同伦型**(homotopy type)加以分类的问题,起着重要的中间作用.

下述比较特殊的问题,曾经在代数拓扑学的发展中起过重要作用.

1) 通常并不是考虑一般形式的嵌入问题,而是考虑在Euclid空间中的嵌入.一种很重要的特殊情形是三维空间中的**纽结理论**(knot theory)(以及链环论),这是代数拓扑学的起源之一;**辫论**(braid theory)是与其相关的一种情形.

2) 由Euclid空间中各种不同集合的配置所决定的同调不变量,及把一个集合与其余集的同调联系起来的对偶定律(见代数拓扑学中的**对偶性**(duality)),在代数拓扑学的历史上起过重要的作用.

3) 关于流形到自身的映射的不动点的代数数的计算,有许多基本结果.关于光滑紧变换群,包括有限阶循环群的不动点,也发现了许多基本事实.

4) 为解决所谓**配边**(cobordism)问题而发展起来的方法,在代数拓扑学的发展过程中具有技术上的重要性:配边问题是指是否存在一个以给定的闭流形为边界的带边流形(配边)?这一类问题最初出现在球面**同伦群**(homotopy group)的计算中.一些重要的配边问题是用**示性类**(characteristic class)的语言解决的.

5) 现在,不仅有关流形的,特别是到Euclid空间中的光滑映射的奇点的同调不变量,而且有关向量场、标架场和张量场的奇点的同调不变量,已有了大量的事实.特别地,这个问题的解决导出了示性类.一种特别重要的情形是流形上光滑函数或道路空间上各种泛函(极值曲线)的平稳点;它们与**同调论**(homology theory)之间的联系,对于澄清流形的几何结构,和得到极值曲线数的下界,都是重要的.

6) 对一类重要的特殊空间——Lie群的代数-拓扑性质的研究,是与其代数结构和表示,以及**Lie群**(Lie group)上的变分学密切相关的.关于Lie群拓扑结构所得到的结果,形成了代数拓扑学无数方法和事实的基础,而它们适用于任意流形.齐性流形的代数拓扑学与Lie群的方法密切相关.

7) 与从**基本群**(fundamental group)出发的各种代数结构有关的特殊不变量,在代数拓扑学中起着主要作用.这一类型的最简单的不变量,曾经在纽结论和三维流形理论中出现,其代数理论的发展后来取得了实质性的进展,并逐渐形成了一个独立的学科——稳定代数或**代数K理论**(algebraic K-theory).

8) 通过对大量最简单和最常见的流形(例如Lie群,齐性空间,线素流形及离散运动群的流形)的几何结构的分析,连同Riemann几何的基本原理,导致了纤维丛概念,它由一个空间(全空间或纤维空间),一个底空间,一个由全空间到底空间的投射,一个纤维(同胚于此投射的任一"纤维")及纤维变换的结构群所组成.代数拓扑学在这方面的一个中心问题,就是纤维丛及其截面的同伦分类问题.**主纤维丛**(principal fibre bundle)和**向量丛**(vector bundle)尤为重要.

代数拓扑学中解决所有主要问题的一个通用方法是构造对实际例子可进行有效计算的、取值于某种离散集合的代数不变量;不变量的值,在所研究的相应的映射类的形变过程中不应改变、大量本性不变量,其间丰富的代数联系以及计算上的难度,决定了现代代数拓扑学的特点.

计算最简单最常见流形的代数-拓扑不变量,并不总是容易的事情.计算Lie群和许多齐性空间的同调不变量,就使人们作过很大努力,并使用过复杂的方法.同伦群的计算就更加困难.计算Lie群的许多最重要的同伦群,就出乎意料地使用了测地线的变分理论;有了Lie群的这些同伦群,就有可能对某些向量丛进行分类.

在所研究的某种类型拓扑空间的范畴中大多数代数-拓扑不变量是所谓的**函子**(functor).粗略地讲,这意味着当空间互相用映射连接时,不变量的值也要有相应的自然变换.例如,任意空间的基本群或同调(上同调)

群(环)可由连续映射诱导的同态联系起来;示性类((上)同调群里特定的元素)可以在相应于流形的态射的同态下互相转化;对同调(上同调)群中某元素施行上同调运算的结果,在空间的一个连续映射后,转化为该运算作用在此元素的象上的结果,等等.

作为几乎所有代数-拓扑不变量研究和应用基础的一个主要性质是:不变量的有效构造通常与一个辅助的几何结构有关.例如复形的所有主要的同胚不变量的构造,要涉及剖分成单形或胞腔,而这样一种构造的结果必定是关于所有连续同胚,甚至是关于同伦等价不变的;这种例子有基本群,**Euler 示性数** (Euler characteristic),**同调群** (homology group) (Betti 群),**上同调环** (cohomology ring)和**上同调运算** (cohomology operation).同样地,光滑流形所有基本同胚不变量的构造,或者涉及流形原先假定的三角剖分,即归结为复形,或者能使用分析工具.例如用微分形式(斜对称张量)和它上面的微分运算方式构造上同调环,或用向量场、标架场或张量场的奇点来构造示性类.此外,在某些情形也有必要使用 Riemann 几何的工具,例如,用 Riemann 曲率的语言定义流形或纤维丛的示性类就是一个重要的工具,尽管结果是关于所有连续同胚不变的.这样说来,拓扑学历史上基本的、可有效计算的不变量的出现,都包括证明这些量的不变性这一困难问题.这是代数拓扑学所研究的另一种类型的问题.有理示性类(或这些类在闭链上的积分)已被证明是拓扑不变而不是同伦不变的.整数示性类的总和被证明不是关于连续或者分段线性同胚不变的.

反之,如果构造一个不变量使其(根据定义)关于连续同胚(或更广泛的一类变换——同伦等价)是不变的,那么计算这一不变量通常是困难的.这种类型的最重要的不变量,是从球面到所研究空间内的同伦映射类的同伦群.在计算哪怕是最简单的同伦群的例子时,都有很大的困难.因而,尽管在代数拓扑学的发展过程中,曾为计算球面自身的同伦群而提出过大量的方法(见**同伦群** (homotopy group)),但至今仍未完全了解.

同调论和纤维丛理论的结合产生了谱序列,而它和上同调运算及其推广,是同伦映射类的分类方法的基础.在代数拓扑学这种复杂计算方法的基础上建立起来的代数学科称为**同调代数** (homological algebra).

对复形和光滑流形用三角剖分或微分形式方法的同调论的所有基本的、原始的构造,都是代数或解析的可有效计算的组合.然而,在代数拓扑学的发展过程中,人们注意到,同调论完全可以用下面的少数形式上的性质(公理)来定义,它的计算方法建立在下面的基础上:

1) 同调群的同伦不变性.

2) 在空间的连续映射之下,同调群互相可同态映人,并且映射的乘积对应着这些同态的积(函子性).

3) 在复形、子复形与商复形的上同调之间假定有某种形式的相互关系(正合性公理).

4) 所谓切除公理.

5) 规范化:只有一个点的同调群要求是已知的,且在非零维数时必须为零.

人们很快注意到,几何本质完全不同的一些对象也具有除规范化以外的上述全部性质.这种对象称为广义或非正常同调论.它们被用来改善代数拓扑学的计算方法.最重要的例子是 **K 理论** (K-theory),它建立在以所研究空间为底空间的向量丛上,而不是建立在为构造正常同调群所使用的闭链或微分形式上.另一个重要的例子是配边(协边)理论,这时用闭流形到所研究空间中的映射来代替任意闭链;用有某类边界的流形的映射,来代替任意边界的情形.

代数拓扑学的方法,结合用于流形及其同胚群结构的少数几何事实,使得关于各种各样同胚(光滑,分段线性,连续)的流形分类问题,最后得到解决,还使得嵌入和浸入分类中基本问题得到解决(从现代观点看或许不完全).奇怪的是,与三维和四维流形有关的问题却是个例外,其中的基本问题(至 1977 年)仍未解决.

由于多数基本的内在问题现在都已解决,所以,代数拓扑学的现代工作,是致力于在其他领域应用这些思想方法.

参考文献

[1] Atiyah, M. F., K-theory: lectures, Benjamin, 1967.

[2] Seifert, H. and Threlfall, W., Lehrbuch der Topologie, Chelsea, reprint, 1980 (中译本: H. 沙爱福, W. 施雷发,拓扑学,高等教育出版社,1959).

[3] Milnor, J., Morsetheory, Princeton Univ. Press, 1963 (中译本: J. 米尔诺, 莫尔斯理论,科学出版社,1988).

[4] Milnor, J., Lectures on the h-cobordism theorem, Princeton Univ. Press, 1965.

[5] Milnor, J., Singular points of complex hypersurfaces, Princeton Univ. Press, 1968.

[6] Milnor, J. and Stasheff, J., Characteristic classes, in Ann. of Math. Studies, Princeton Univ. Press, 1974.

[7] Switzer, R. M., Algebraic topology-homotopy and homology, Springer, 1975.

[8] Hu, S.-T., Homotopy theory, Academic Press, 1959.

[9] Steenrod, N. E., The topology of fibre bundles, Princeton Univ. Press, 1951.

[10] Nomizu, K., Lie groups and differential geometry, Math. Soc. Japan, 1956.

[11] Leray, J., Le calcule différentiel et intégrale sur une variété analytique complexe. (Problème de Cauchy Ⅲ), *Bull. Soc. Math. France*, 87(1959), 81-180.

[12] Chern, S. S., Complex manifolds without potential theory, Springer, 1979.
[13] Springer, G., Introduction to Riemann surfaces, Addison - Wesley, 1957.
[14] Александров, П. С., Комбинаторная топология, М. - Л., 1947 (Aleksandrov, P. S., Combinatorial topology, Graylock, Rochester, 1956).
[15] Понтрягин, Л. С., Основы комбинторной топологии, 2 изд., М., 1976 (中译本: Л. С. 邦德列雅金, 组合拓扑学基础, 科学出版社, 1954).
[16] Понтрягин, Л. С., Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий, 2 изд., М., 1976.
[17] Spanier, E. H., Algebraic topology, McGraw - Hill, 1966 (中译本: E. H. 斯潘尼尔, 代数拓扑学, 上海科学技术出版社, 1987).
[18] Фукс, Д. Б., Фоменко, А. Т., Гутенмахер, В. Л., Гомотопическая топология, М., 1969.
[19] Новиков, С. П., 《Успехи матем. наук》, 21 (1966), 5.
[20] Хирцебрух, Ф., Топологические методы в алгебраической геометрии, пер. с англ., М., 1973.
[21] Novikov, S. P., Topology, in R. V. Gamkrelidze (ed.): Modern mathematics, fundamental directions, Vol. 1, to appear (Original, Moscow, 1986) (译自俄文).
[22] Hirzebruch, F., Topological methods in algebraic geometry, Springer, 1978 (译自德文).
[23] Dubrovin, B. A., Fomenko, A. T. and Novikov, S. P., Methods and applications, in Modern Geometry, Vol. 1-2, Springer, 1978 (译自俄文).
[24] Dubrovin, B. A., Fomenko, A. T. and Novikov, S. P., Methods of homology theory, in Modern geometry, Vol. 3, Springer, To appear (译自俄文).

С. П. Новиков 撰

【补注】 (上)同调论的公理 1)—5)是通常所说的 Eilenberg - Steenrod 公理 (见 **Steenrod - Eilenberg 公理** (Steenrod - Eilenberg axioms), [A3]). 一些好的补充文献是 [A1], [A2], [A4]—[A6].

参考文献

[A1] Adams, J. F., Stable homotopy and generalized homology, Univ. of Chicago Press, 1974.
[A2] Bott R. and Tu, L. W., Differential forms in algebraic topology, Springer, 1982.
[A3] Eilenberg, S. and Steenrod, N., Foundations of algebraic topology, Princeton Univ. Press, 1952.
[A4] Karoubi, M., *K*-theory, an introduction, Springer, 1978.
[A5] Vaisman, J., Cohomology and differential forms, M. Dekker, 1973.
[A6] Whitehead, G. W., Elements of homotopy theory, Springer, 1978.

张 平 译 沈信耀 校

代数环面 [algebraic torus ; алгебраический тор]

一类**代数群** (algebraic group), 它在基域的某个扩张上同构于有限个乘法群 G_m 的直积. 代数环面 T 到 G_m 中的所有代数同态的群 $\hat{T}$ 是 T 的特征标群 (character group); $\hat{T}$ 是自由 Abel 群, 它的秩等于 T 的维数. 若代数环面定义在域 k 上, 则 $\hat{T}$ 有 G 模结构, 这里的 G 是 k 的可分闭包的 Galois 群. 函子 $T \to \hat{T}$ 确定了 k 上代数环面范畴与有限秩的 **Z** 自由 G 模范畴之间的对偶. k 上的代数环面如果同构于基域 k 上的群 G_m 的直积, 则称为在 k 上分裂 (split); k 上任何代数环面在 k 的某个有限可分扩张上分裂. 代数环面在代数群理论中的作用非常相似于环面在 Lie 群理论中的作用. 定义在代数数域和其他域 (如有限域) 上的代数环面的研究在代数群的算术问题和分类问题中占据重要地位. 参见**线性代数群** (linear algebraic group); **玉河数** (Tamagawa number).

参考文献

[1] Borel, A., Linear algebraic groups, Benjamin, 1969.
[2] Ono, T., Arithmetic of algebraic tori, *Ann. of Math.* (2), **74** (1961), 1, 101–139.
[3] Ono, T., On the Tamagawa number of algebraic tori, *Ann. of Math.* (2), **78** (1963), 1, 47–73.

B. E. Воскресенский 撰 石生明 译 许以超 校

代数簇的算术 [algebraic varieties, arithmetic of ; алгебраических многообразий арифметика], 算术代数几何学 (arithmetical algebraic geometry)

代数几何学的一个分支, 研究定义在称之为算术型的域上代数簇的性质. 所谓算术型的域即代数数或代数函数的有限域、局部域及整体域. 在有限域的情形下, 它主要研究代数簇在这个域或它的有限扩域上的有理点个数. 在研究中用到的这个簇的 ζ **函数** (zeta function) 对于代数几何学方法的发展有巨大的影响. 对 (有理) 点个数的下界的估计 ([1], [4]) 也很重要.

如果 X 是带有剩余域 k 的局部域 K 上的代数簇 (或概形), 那么对在 K 内取值的有理点集 $X(K)$ 的研究把两个不同的问题联系了起来: 求同余解 (或簇在有限域上的点) 以及求 Diophantus 方程的整解或有理解 (见 **Hasse 原理** (Hasse principle)). 当簇 X 由系数取自域 K 的整元素环 A 的一组方程所定义时, 只要把方程的系数关于 A 的极大理想取模, 用同一组方程即可定义这个簇的约化. 这样就得到剩余域 k 上的"簇" X_0 以及一个典范映射, 或称为约化:

$$\mathrm{Red}: X(K) \to X_0(k).$$

约化的这种描述很难用经典代数几何学的术语作解释. 这正是引进**概形** (scheme) 概念的理由之一, 这种语言可以严格描述这个过程. 主要问题是确定映射 Red 的象, 即找出对应于簇的有理 K 点的点 $x \in X_0(k)$. **Hensel**

引理(Hensel lemma)断言当 x 是非奇异点时, x 就是这样的点. 关于这个问题的更一般结果见[4].

与代数簇的局部算术有关的另一类问题是对这些域上的型的研究. 设 F 是局部域上 n 个变量的 d 次型; Artin 猜想是若 $n>d^2$, 则方程 $F=0$ 有非平凡解. 已经知道对于函数域的情形这个猜想是正确的. 对于 p 进域已经证明对每个 d, 存在素数的有限集 $A(d)$, 使得当 $p\notin A(d)$ 时 Artin 猜想对 d 次型成立. 1966 年已经证明集 $A(4)$ 非空, 这说明 Artin 猜想是错的([4]). 现在(1977)还不知道对于奇次型这个猜想是否成立.

整体域上代数簇的算术是代数几何学最广泛、最分散的领域. 它包含 Diophantus 几何学、类域论, 簇的 ζ 函数论以及 Abel 函数(或簇)的复乘法. 所有这些理论都是关于数域以及函数域平行地发展的. 这样的可能性首先是在 20 世纪 30 年代随着类域论的发展而显示出来的; 它的基础是在于这些域间的粗略的相似性 这在概形论的构造中最清晰地显现出来了.

参考文献

[1] Боревич, З. И., Шафаревич, И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972(英译本: Borevich, Z. I., Shafarevich, I. R., Number theory, Acad. Press, 1966).

[2] Weil, A., Number theory and algebraic geometry, in Proc. Internat. Math. Congress Cambridge, 1950, Vol. 2, 1950, 90-100.

[3] Grothendieck, A., Dieudonné, J., Eléments de géometrie algébrique, *Publ. Math. IHES*, **4**, **8**, **11**, **17**, **20**, **24**, **28**, **32**.

[4] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия., 1970, М., 1971, 111-152.

[5] Swinnerton-Dyer, H. P. F., Applications of algebraic geometry to number theory, in Proc. 1969 summer inst. number theory, Proc. of Symp. Pure Math., Vol. 20, Amer. Math. Soc., 1971.

А. Н. Паршин 撰 陈志杰 译

代数簇 [algebraic variety; алгебраическое многообразие]

代数几何的主要研究对象之一. 代数簇的现代定义是域 k 上有限型的约化概形 (scheme), 这个定义是长期演化的结果. 代数簇的古典定义限于实数或复数域上的**仿射代数集** (affine algebraic set) 和**射影代数集** (projective algebraic set). 从 20 世纪 20 年代末开始, 由于 B. L. van der Waerden, E. Noether 以及其他人的工作, 代数簇的概念受到本质上的代数化, 从而有可能考虑任意域上的代数簇. A. Weil([6]) 把利用粘合构造微分流形的思想应用到代数簇. 用这种方法得到了抽象代数簇 (abstract algebraic variety), 它被定义为域 k 上的一簇仿射代数集 (V_α), 在每个 V_α 中可选取开子集 $W_{\alpha\beta}\subset V_\alpha$ 使它与相应的开子集 $W_{\beta\alpha}\subset V_\beta$ 同构. 经典代数几何的所有基本概念都能够用到这样的簇. 后来永田雅宜和広中平祐造出了不能同构于射影空间的代数子集的抽象代数簇的例子([2], [3]). 他们使用**完全代数簇** (complete algebraic variety) 作为与射影代数集相类似的概念.

J.-P. Serre([5]) 已经指出, 微分流形和解析空间作为环式拓扑空间的统一定义也能类推到代数几何. 于是代数簇被定义为一个**赋环空间** (ringed space), 它局部地同构于域 k 上的仿射代数集, 这个代数集带有 Zariski 拓扑以及正则函数芽的层. 代数簇上环式空间的附加结构有利于简化抽象代数簇的各种构造, 并能应用有关层论的同调代数方法进行研究.

在 1958 年爱丁堡国际数学家大会上 A. Grothendieck 已经设想了通过与概形理论相联系进一步推广代数簇概念的可能性. 在概形论的基础建立后([4]), 代数簇被赋予新的意义: 域 k 上的有限型约化概形. 这样的仿射(或射影)概形称为仿射(或射影)簇(见**概形** (scheme); **约化概形** (reduced scheme)). 事实表明把代表簇包含在更广阔的概形的框架内, 对于代数几何中许多问题(例如**奇点的化解** (resolution of singularities), **参模问题** (moduli problem) 等)的研究都是有益的.

代数簇概念的另一个推广与**代数空间** (algebraic space) 的概念有关.

复数域上的任何代数簇都具有**复解析空间** (analytic space) 的结构, 因此能运用拓扑及超越方法进行研究(见 **Kähler 流形** (Kähler manifold)).

数论中的许多问题(同余理论、Diophantus 方程、模形式等)涉及到有限域及代数数域上代数簇的研究(见**代数簇的算术** (algebraic varieties, arithmetic of); **Diophantus 几何** (Diophantine geometry); 代数几何中的 **ζ 函数** (zeta-function)).

参考文献

[1] Baldassarri, M., Algebraic varieties, Springer, 1956.

[2] Шафаревич, И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972 (英译本: Shafarevich, I. R., Basic algebraic geometry, Springer, 1977).

[3] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия., М., 1972, 47-112 (英译本: Dolgachev, I. V., Abstract algebraic geometry, *J. Soviet Math.*, **2** (1974), 3, 264-303).

[4] Grothendieck, A., Dieudonné, J., Eléments de géometrie algébrique, *Publ. Math. IHES*, **4** (1960).

[5] Serre, J.-P., Faiseaux algébriques cohérentes, *Ann. of Math.* (2), **61** (1955), 2, 197-278.

[6] Weil, A., Foundations of algebraic geometry, Amer. Math. Soc., 1946.

И. В. Долгачев 撰 陈志杰 译

代数簇的自同构 [algebraic variety, automorphism of an; алгебраического многообразия автоморфизм]

代数簇(或概形)到自身的可逆态射．代数簇 X 的所有自同构的群，通常记为 Aut X，是 X 的一个重要不变量．研究代数簇的自同构群在与 X 函子关联的对象上的作用情况，是研究代数簇本身的一个工具，这些对象有 **Picard 群** (Picard group)，**周(炜良)环** (Chow ring)，**K-函子** (K-functor)及上同调群．代数簇的自同构群对于代数簇的**型**(form)的概念是很重要的．对于复数域上的完全代数簇，自同构群等同于双全纯自同构的群．

对于许多简单的代数簇，群 Aut X 的结构是已知的．例如当 X 是域 k 上 n 维射影空间 P^n 时，它的任一自同构都是线性射影变换，而且 Aut P^n 等同于射影线性群 $PLG(n+1, k)$．椭圆曲线，以及一般地，任何 Abel 簇 A 的自同构群是群 G 通过群 $A(k)$ 的扩张，这里 G 是保持 Abel 簇结构的自同构的群，$A(k)$ 是 Abel 簇 A 的点作平移的群，即有正合群列

$$1 \to A(k) \to \mathrm{Aut}A \to G \to 1.$$

若 X 是亏格 $g>1$ 的光滑完全代数曲线，则群 Aut X 是有限的；已经知道它的阶作为 g 的函数的估计(见**代数曲线**(algebraic curve))．关于代数曲面的自同构，见**代数曲面**(algebraic surface)．

当代数簇具有丰富的典范或反典范可逆层时，对某 N 自同构群是群 $PLG(N, k)$ 的一个代数子群．维数 $n\geqslant 2$，次数 $d\geqslant 3$ 的光滑超曲面的自同构群是有限的([1])．

在上述例子中，Aut X 具有自然的代数群结构，可能有无限多个连通分支；这在一般的情形仍然正确([2])．

现代研究代数簇自同构群是考虑自同构的族．以 T 作为参量概形的簇 X 的自同构族(family of automorphisms)是积 $X\times T$ 的自同构集，它们与到第二个因子上的射影可交换；具有参量概形 T 的自同构族的集合记为 $\mathrm{Aut}_T(X\times T)$．这就得到一个反变函子 $T\mapsto \mathrm{Aut}_T(X\times T)$．若 X 是完全簇，则这个函子是局部可表示的(见**可表示函子**(representable functor))，其代数群概形至多具有可数个连通分支([3])．在射影簇的情形下，A. Grothendieck 给出了一个证明，这个定理已被推广到正常平坦态射概形的情形．即使 X 是光滑射影曲面，表示这个函子的概形也不必是约化的；不过当基域的特征等于 0 或者 X 是光滑曲线或光滑超曲面时，这个概形的单位元连通分支是一个簇．

对于不完全簇，自同构函子并不总是在概形的范畴内可表示的．对于仿射簇，自同构函子在概形的归纳极限的范畴内是可表示的．

除了仿射直线的简单情形外，对于仿射空间，只有仿射平面的自同构群是已知的．这是两个子群的具有融和交的自由积，这两个子群就是线性仿射变换的子群及三角自同构的子群，即形如

$$x' = ax+b,$$
$$y' = cy+f(x)$$

的变换，其中 $a, b, c\in k$，$a\neq 0$，$c\neq 0$，$f(x)$ 是 x 的任意多项式([4]，[5])．关于自同构群可迁地作用的仿射代数曲面，见[6]．

参考文献

[1] Matsumura, H., Monsky, P., On the automorphisms of hypersurfaces, *J. Math. Kyoto Univ.*, 3 (1964), 347-361.

[2] Matsusaka, T., Polarized varieties, fields of moduli and generalized Kummer varieties of polarized Abelian varieties, *Amer. J. Math.*, 80 (1958), 45-82.

[3] Matsumura, H., Oort, F., Representability of group functors and automorphisms of algebraic schemes, *Invent. Math.*, 4 (1967), 1-25.

[4] Engel, W., Ganze Cremona-Transformationen von Primzahlgrad in der Ebene, *Math. Ann.*, 136 (1958), 319-325.

[5] Shafarevich, I. R., On some infinite-dimensional groups, *Rend. di Mat. e Appl.*, 25 (1966), 208-212.

[6] Гизатуллин, М. Х., 《Изв. АН СССР Сер. матем.》, 35(1971), 5, 1047-1071.

[7] Roth, L., Algebraic threefolds, Springer, 1955.

В. И. Данилов, В. А. Исковских 撰　陈志杰 译

代数闭域 [**algebraically closed field**; **алгебраически замкнутое поле**]

域 k，其上的任何非零次多项式在 k 中至少有一个根．事实上，由此可推出一个代数闭域 k 上的任何 n 次多项式在 k 中恰有 n 个根，也即多项式环 $k[x]$ 中任一不可约多项式都是一次的．域 k 是代数闭的，当且仅当它没有真的代数扩张(见**域的扩张**(extension of a field))．任何域 k 都有唯一的(仅差一同构)代数闭的代数扩张；称之为 k 的代数闭包(algebraie closure)，通常用 $\bar{k}$ 表示．包含 k 的任何代数闭域都包含一个与 $\bar{k}$ 同构的子域．

复数域是实数域的代数闭包．这就是**代数学基本定理**(algebra, fundamental theorem of)．

参考文献

[1] Zariski, O and Samuel, P., Commutative algebra, 1, Springer, 1975

[2] Lang, S., Algebra, Addison-Wesley, 1974.

О. А. Иванова 撰　裴定一 译

Algol 语言 [**Algol**; **Алгол**]

用于**自动程序设计**(automatic programming)和算法公布的若干种算法语言的通称，它是"ALGOrithmic Language"(见**算法语言**(algorithmic language).)的缩写．

Algol语言的最初文本是于1958年由国际科学小组拟定的．1960年巴黎国际会议通过了综合当时已有的数种程序设计语言实用特性的Algol-60语言．Algol-60及其后代，如Pascal语言(Pascal)，得到广泛使用、现在，Algol语言一般指的是Algol-60语言．它特别适合于数值分析的算法描述．这种语言是独立于机器的语言，不提供执行输入或输出操作的标准方法。可以为个别计算机开发标准Algol语言的专用特定版本，每个版本都是一种特定机器的编译程序能接受的语言．一般来说，从标准语言转换成它的特定版本是自然的，不需要很多人力．Algol语言的基本符号是十进制数，英文字母的大写体和小写体，标点符号，算术和逻辑运算符号，其他专用符号和一些英文单词(例如，"begin"，"end"，"real"，"integer"，"array")．这些语言基本符号按照一定的规则构成进一步的实体，如数、标识符(名称)、简单变量、下标变量、函数标志符、表达式、语句和注解等．语句有几种类型：赋值语句、转向语句、条件语句(它根据包含在其中的逻辑表达式结果来启动其中一个内部语句)以及for语句(循环)．一组语句可以合并成一个复合语句或包括说明的分程序．Algol语言的算法表示法可以包括过程定义(definitions of procedures)．过程定义包括一个首部和一个体．过程体可以是用通常的Algol语言表示法所描述的一个语句，而多数往往是分程序．为了使Algol语言更加灵活，可以使用其他语言(如机器语言)来表示过程．一个过程可以借助于过程语句来调用，这个过程语句是由过程标识符和相应于在该过程的标题中的形式参数的实在参数表组成的．一个表达式可以包括函数标志符，它能调用计算一个值的过程．这种过程调用可以是递归的，即在执行该过程中可再次调用相同过程．在具体实现上标准Algol语言的潜力往往受到限制．作为Algol-60语言的后继者，**Algol-68语言**(Algol-68)是在结构上完全不同的一种语言，它包括许多新概念和能力，是为功能更强的机器设计的．

参考文献

[1A] Naur, P., et al., Revised report on the algorithmic language Algol-60, *Num. Math.*, **4**(1963), 420-453.

[1B] Naur, P., et al., Revised report on the algorithmic language Algol-60, *Comm. ACM*, 6(1963), 1-17.

[1C] Naur, P., et al., Revised report on the algorithmic language Algol-60, *The Computer Journal*, 5 (1963), 349-367.

[2] Лавров, С. С., Универсальный язык программирования (АЛГОЛ-60), 2 изд., М., 1967.

[3A] Wungaarden, A. van, et al., Report on the algorithmic language Algol-68, *Num. Math.*, **14** (1969), 79-218.

[3B] Wungaarden, A. van, et al., Revised report on the algorithmic language Algol-68, *Acta Inform.*, **5** (1975), 1-236.

В. В. Мартынюк 撰 钱宝峰 译 仲萃豪 校

Algol-68 语言 [**Algol-68**; **Алгол-68**]

一种通用的**算法语言**(algorithmic language)，它是1964－1968年由12个国家的科学家组成的科学团体在国际信息处理联合会Algol工作小组中，为了交换算法、在各种计算机上有效地实现算法以及用作研究算法的工具而研制出来的．Algol-68在风格上类似于Algol-60，而与Algol-60的实质性差别在于它拥有更多的结构，而且也更为通用．除了Algol-60所原有的"实数"、"整数"和"Boole量"之外，Algol-68的基本数据类型还有"字符"(用于字母和数字信息)，"格式"(用于描述外部数据的格式)，名字和例行程序(过程)．因此，当在Algol-68中执行一个程序时，可以对一个名字或一个步骤进行"计算"．当然，这样的计算是要对名字或步骤所选取的值进行限制，例如选取一个给定有限数量的"例行程序文本"的过程值．这些基本类型可以递归地构造出新的、复合的类型；这些类型可以是同一类型数据的顺序下标序列(多值(multiple values))，也可以是任意类型的有序的表(结构值(structured values))．

除了定义步骤的常规手段之外，Algol-68还有定义类似$x+y$这样的中缀算符(infix operator)．优先定义(priority definition)使我们可以在引入的中缀算符中建立优先关系．Algol-68的一个典型是标识定义(identity definition)，这是用来定义变量、给出初值、在过程中传送实际参数和建立同义词的通用结构．

在Algol-68中，一个表达式可以包含一个赋值语句或任何产生值的语句序列．与计算名字和过程的可能性相结合，为条件表达式引入括弧，这些使得Algol-68具有可用下面例子来说明的结构：

1) Algol-68:

$$\textbf{if } x>0 \textbf{ then } u \textbf{ else } z \textbf{ fi}$$

$$:= a+(m<n\,|\sin|\cos)(t := x\uparrow 2),$$

2) Algol-60:

$$t := x\uparrow 2;$$

$$r := a+\textbf{if } m<n \textbf{ then } \sin(t) \textbf{ else } \cos(t);$$

$$\textbf{if } x>0 \textbf{ then } u:=r \textbf{ else } z:=r.$$

一个Algol-68的程序由闭循环、顺序、条件和并行子句组成．前三种子句综合了Algol-60的概念，如分程序，复合语句以及条件表达式和语句．而并行子句则表示一组非有序的组成的短语，特别是用来表示在一个程序的执行过程中的并行分支．

Algol-68的语义描述是以对算法语言的基本概念的深刻分析为特征的，这就使利用少数独立的基本概念

去描述程度执行有了可能．对象可以是外部的(相对于程序的结构)和内部的(相对于包括过程和名字的数据)．外部(E)对象和内部(I)对象的关系作为公理被引入，例如“E_1包含E_2”、“E_1与E_2相同”、“E中有I”、“把I_1称作I_2”、“I_1是I_2的一部分”等等．而程序的执行借助于引入的关系来描述程序分析的功能．

Algol-68典型的句法特点是，它以二级语法形式给出．在这种语法中，Algol-68的生成规则自身就是在某个元语言中可容许的文本，这种元语言由它自己的生成语法所规定．举例来说，Algol-68的语法规则可以有下述形式：

chain of NOTIONs separated by SEPARATORs.
NOTION;
NOTION, SEPARATOR.
chain of NOTIONs separated by SEPARATORs.
reference to MODE assignation:
reference to MODE destination,
becomes symbol, MODE source

大写的单词称为“元概念”，是元语言的语法单位，它所产生的规则可具有以下形式：

NOTION: identifier; operator.
SEPARATOR: comma; semi-colon
MODE: integral; Boolean; reference to MODE.

元语言的某些概念，如MODE可以有无穷个产生式．把元概念的某些终结式系统地替换在句法规则中元语言的元概念得到Algol-68固有的产生式规则．在Algol-60元语言符号式中，结果规则可以有下述形式：<chain of identifiers separated by commas> ::= <identifier>|<identifier>, <chain of identifiers separated by sommas>

<reference to integer assignation> ::= <reference to integer destination>: = <integer source>.

采用二级语法首先可以减少同类产生式规则的数目，其次可对概念的属性信息给出句法表达式，且确保上下文关系，否则它就要作为上下文条件（静态语义）来表述．

参考文献

[1A] Wungaarden, A. van, et al., Report on the algorithmic language Algol 68, *Num. Math.*, **14** (1969), 79－218.

[1B] Wungaarden, A. van, et al., Revised report on the algorithmic language Algol 68, *Acta Inform.*, **5** (1975), 1－236.

[2] Lindsey, C. H and Meulen, S. G. van der, Informal introduction to Algol 68, North-Holland, 1977.

А. П. Ершов 撰　戚余录 译

算法 [algorithm；алгоритм 或 алгорифм]

定义计算过程的一组详细的指令(从而这个过程也称为算法(algorithmic)过程)，它开始于(给定的算法的一定数量的可能输入中的)一个任意输入(input)，且其目的在于得到一个完全由输入和指令决定的结果(result)(或输出(output))．例如，小学里教的竖式加法、减法、乘法和除法的规则都是算法；在这些算法中可能的结果是十进位表示的非负整数，而可能的输入是这种数的有序对．一般不假定必须得到结果：把一算法用于某可能输入的过程(即开始于此输入的算法过程)也可能终止而得不到结果(在此情况下人们有一无结果停止(no-result stop))或可能永不终止．若此过程终止(不终止)，则称对所说的算法该输入是适当的(suitable)(不适当的)．

这个领域中的一个重要结果是所谓停机问题(halting problem)的可判定性．可以构造一个算法α，使得不存在算法以判定对α的任意可能输入是否对α也是适当的．特别地，可以找到这样一个算法α，它的可能输入集是自然数集．

算法概念是现代数学，特别是计算领域里的中心概念之一．下面给出一例子．找一给定类型的方程的数值解法，等同于构造一个把任意一个这种型的方程和一正有理数ε转换为一个与方程的根之差小于ε的数(或数集)的算法．但是，在算法的上下文中所用的词“计算过程”不能理解为只是指数值计算：甚至在初等代数的计算里也使用了字母．标准算法演算还包括某些不是数的符号(括号，等号，算术算子符号)．因此在考虑算法时，包括任意符号及由符号组成的对象是适宜的．这种对象的最简单的例子是组成一个**字**(word)的符号的线性序列．也可能考虑非线性对象——代数矩阵，某形式语言的推演树和一般图．直观地说，关于算法的输入和结果的最低要求是它们必须是**可构造对象**(constructive object)．所以算法的概念非常一般．人们可能谈及由一种语言到另一种语言的翻译算法，空间交通指挥器(按一定的规则处理关于飞行器航行的信息)的算法，及其他由算法描写的控制过程的例子．由此可知算法概念是**控制论**(cybernetics)和计算机科学的主要概念之一．

算法的例子．设可能的输入及可能的输出是**字母表**(alphabet)$\{a, b\}$上一切可能的字．由一个字X到一个字Y的转换在如下两情况下是“可允许的”(其中P是一个任意字)：1) X形式为aP，Y形式为Pb；2) X形式为baP而Y形式为$Paba$．诸指令陈述如下：“指定某字为输入，执行可允许的转换直到得到一个形式为aaP的字；然后停止且令字P是结果”．由这些指令组成的算法，记为$\mathfrak{A}$．取字*babaa*为输入．经过一次转换得到*baaaba*；经过第二次转换得到*aabaaba*．这时算法停止，结果为*baaba*．考虑另一输入*baaba*，可逐次得到*abaaba*，*baabab*，*abababa*，*bababab*，*babababa*，⋯．可以证明，这个过程永不终止(即产生的字总不会以*aa*

为首）．现取 *abaab* 为输入．可得 *baabb*，*abbaba*，*bbabab*； 不可能再有可允许的转换，同时终止条件不满足．得到一个无结果停止．所以对 𝔄 而言输入 *babaa* 是适当的，而输入 *baaba* 及 *abaab* 则否．

算法的意义．科学里处处会遇到算法．对一个问题的"一般解"需要算法．人们把数相加的能力就是一个例子．不在于迟早能找到任何两个数之和的事实，而在于有一个对任何两个给定书写形式下的数得到唯一和的方法，就象熟知的竖式加法那样的加法算法，"一般地"解一个问题可以陈述为解一个**算法问题**(algorithmic problem)．一个算法问题是由各单独的问题实例组成的，且要对所有问题实例给出单一的算法，若无这样的算法，就说这个算法问题是**不可解的**(unsolvable)．例如，给定类型的方程的数值解问题及**自动翻译**(automatic translation)问题都是算法问题．它们的问题实例分别是找给定类型的个别方程的数值解和个别短语的翻译．其他例子有代数中的代数等式的验证；数理逻辑中的确认命题从给定公理集出发的可推导性的算法问题．(在数理逻辑中算法概念也是非常重要的，因为它被作为一个演算(calculus)的关键概念的基础，它是"证明"的直观概念的更一般、更精确的形式．)给定算法问题(如在某逻辑的一数学的语言中证明句子的真性和可证性问题)的不可解性的证明是非常重要的，因为它在理论上证明该问题的特定问题实例只能用针对每个特定问题实例的特定方法来解决．

长期以来，算法概念在科学上的重要性已被认识，人们早就在寻求解决数学问题的构造性方法．这种努力通常得利于适当的符号记法的新使用．这个过程对科学认识有重要贡献，特别是当明确了某些数学问题(化圆成方等)是固有地不可解以后，尤其如此．当认识到一些问题不能用直接演算解决以后，在19世纪产生了集合的理论性概念．就在这个概念(不包括它们的现代意义下的可构造方法问题)经过一段时间的飞速发展以后，在20世纪中叶回到了构造性问题，但这是在已被具体化的算法概念所充实的不同层次上进行的．这个概念形成了数学中构造性倾向的基础．

算法的英文名称"algorithm"来自"algoritmi"一词，后者是9世纪阿拉伯数学家 Al - Khwarizmi 的名字的拉丁文翻译．在中世纪的欧洲，算法是"十进位值制及用它演算的技巧"，因为正是通过 Al - Khwarizmi 的论文(在12世纪)的拉丁文翻译，位值记数制才传入欧洲．

算法过程的结构(structure of an algorithmic process)．算法过程是一个用离散的"步"对可构造对象的相继转换过程，每一步由从一个可构造对象到另一个可构造对象的替换组成．所以当算法 𝔄 用于字 *baaba* 后逐次得到字 *baaba*，*abaaba*，*baabab*，等．若把竖式减法的算法用于数对〈307, 49〉，则可逐步得到如下的可构造对象．

$$\begin{array}{r}307\\-49\\\hline\end{array}\quad\begin{array}{r}3\dot{0}7\\-49\\\hline 8\end{array}\quad\begin{array}{r}\dot{3}\dot{0}7\\-49\\\hline 58\end{array}\quad\begin{array}{r}\dot{3}\dot{0}7\\-49\\\hline 258\end{array}.$$

可以看出，在相继的可构造对象序列中每个后继可构造对象(在一给定算法的框架里)由紧接在它前面的可构造对象完全决定．在更严格的途径里还假定由任何可构造对象到紧接着它的可构造对象的转换要充分"初等"，这种初等的意义是二相邻对象间的一步转换是局部的(即不转换整个可构造对象，只转换算法限制的部分；另外，转换本身不由前面整个对象决定而只由它的受限制的部分决定)．

因此，不仅有一个可能输入集及一个可能输出集，而且还有一个表示算法过程里工作媒介的**中间结果**(intermediate result)集．对 𝔄 而言，这三个集合相同，而对竖式减法而言则不相同，可能输入是数对，可能输出是数(皆为十进位)，而可能的中间结果是形式为

$$\begin{array}{r}p\\-q\\\hline r\end{array}$$

的"三层"记录，其中 q 是十进位数，r 是相仿的数或空字，而 p 是十进位数且某些位的上端有圆点．作为一个规则，可以区分刻画算法的几个(不独立)的参变量：1) 可能的输入集；2) 可能的输出集；3) 可能的中间结果集；4) 起始规则；5) 直接转换规则；6) 终止规则；7) 检索结果规则．

算法概念的严格陈述．一般形式下的算法概念是一个基本的数学概念，它不能用更简单的概念来定义．严格地讲，算法概念的形式化实际上有点限制．在每种形式化方式下给出某个算法类的精确定义，而其中每个参变量可以变化．不同的形式化方式的区别在于这些类的选择不同．因为参变量明确地定义某个算法，所以参变量域的选择决定某个算法类．但是仅当可以保证对任意"直观"算法在所考虑的选择方式下定义的算法类中有一个等价算法时，这种选择方式才可被断言是直观算法概念的 确陈述．这种要求对每个形式化陈述都是一个基本假定，这个假定在目前的知识状况下是无法数学地证明的．

最早的这类形式化是由 E. L. Post ([5]) 和 A. M. Turing ([3], [4])给出的，他们的构造法在很多方面为建造现代计算机的思想作了理论储备．(实际上，最早的这类形式化是 A. Church 和 S. C. Kleen 给出的 λ 可定义函数 (1933－1935)．) 还有由 A. A. Марков ([10], [11])(见**正规算法**(normal algorithm))和 A. H. Колмогоров ([12], [13])给出的严格陈述，后者建立在

一定类型的构造拓扑复形之上,它可以更精确地表示转换的"局部"性质.所有这些陈述中的基本假定是要和实际算法完全相符合的.支持这个假定的另一个证据是可以证明所有(能行可计算性的)形式化陈述都是等价的.

作为一个例子,考虑由Turing给出的形式化.在最初的形式中这是一个抽象计算机的描述,它包括1)由划分为相邻的小格组成的无穷带,每个小格中可以放置机器的带字母表中的某个符号,2)一个"有穷控制器",它在每个时刻总处在(给定的状态的有穷字母表内的)某个状态.有穷控制器可沿带移动,每次移动一个格,且可改变它控制的小格内的符号.监督有穷控制器动作的程序构成在这种机器上处理计算的算法("Turing算法").**Turing机**(Turing machine)一条中给出了更确切更细致的描述.这里给出Turing式构造的更现代化的说明.要定义一个Turing算法须指定:a)两两不相交的字母表B, D, C,在D中有特定字母λ,在C中有特定字母α和ω;以及b)形式为$\langle p\xi, \eta Tq\rangle$的对集,其中$p, q\in C$, $\xi, \eta\in B\cup D$, T是三个符号$-$, 0, $+$之一;在这(称之为程序的)集合中任二对不含有相同的第一坐标.可能的输入及可能的输出是B上字,而可能的中间结果是$B\cup D\cup C$上的字,但最多含一个C上字母.开始规则是把初始字P变为字$\lambda\alpha P\lambda$.终止规则是当一中间结果含ω时则它是最后的中间结果.检索输出的规则是:在最后中间结果中ω之后第一个不属于B的字母前的字母串为输出.把A变为A'的转变规则如下.字母λ写在A之左及A之右;在这样组成的字里形为$\varepsilon p\xi$的部分,其中$p\in C$, $\varepsilon\xi\in B\cup D$按下面规则换为$Q$:在程序中找第一项为$p\xi$的对;设此对第二项为$\eta Tq$,若$T$是$-$,则$Q=q\varepsilon\eta$;若$T=0$;则$Q=\varepsilon q\eta$;若$T$是$+$,则$Q=\varepsilon\eta q$.由这改变产生的字是$A'$.参考文献见**算法论**(algorithms, theory of)的[3], [4], [5], [10], [11], [12], [13].

B. A. Успенский 撰

【补注】上述基本假定通常称为Church-Turing论题(Church-Turing thesis)或Turing假设(Turing hypothesis).这个论题是说,按照人的直观的能行过程可以能行计算的都可以根据形式定义的算法概念由一个Turing机来计算.由此可以自然地把直观非形式概念和形式的精确定义看成是同一概念.Church-Turing论题不能形式地证明.

许多种形式定义被证明为是彼此等价的,且没有能力更强的形式定义.除了上面讲的形式定义外西方世界里最标准的定义如下:Church用λ项定义的数和可计算函数的形式化,Kleene的一般递归模式和由J. C. Shepherdson和H. E. Sturgis提出的寄存器机器模型,后来它又被S. A. Cook和R. A. Reckhow推广为更实际的计算机模型.Марков和Колмогоров的定义较少为人知道,为了使原书文献介绍得完全些,下面还提到Turing和Post的文章.

参考文献

[A1A] Turing, A. M., On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem, *Proc. London Math. Soc. Ser.*, 2, **42** (1936), 230–265.

[A1B] Turing, A. M., Corrections to 'On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem', *Proc, London Math. Soc. Ser.* 2, **43** (1937), 544–546.

[A2] Church, A., An unsolvable problem of elementary number theory, *Amer. J. Math.*, **58**(1936), 345–363.

[A3] Kleene, S. C., General recursive functions of natural numbers, *Math. Ann.*, **112** (1936), 727–742.

[A4] Post, E. L., Formal reduction of the general combinatorial decision problem, *Amer. J. Math.*, **65** (1943), 197–268.

[A5] Shepherdson, J. C. and Sturgis, H. E., Computability of recursive functions, *J. Assoc. Comp. Mach.*, **10** (1963), 217–255.

[A6] Cook, S. A. and Reckhow, R. A., Time-bounded random access machines, *J. Computer and System Sciences*, 7 (1973), 354–375.

杨东屏 译

算法的描述复杂性[**algorithm, complexity of description of an; алгоритма сложность описания**],程序长度的复杂性(program-size complexity)

一个度量,它表示算法的描述的长度.一个算法描述复杂性在不同的具体定义下含义不同.目前(1987)这概念尚无一般有效定义,下面回顾最通常出现的一些情况.

一个**正规算法**(normal algorithm)的描述复杂性(complexity of description)通常理解为它的编码的长度,即当把它的一切代入公式排成一行(在两个公式之间插入一特定分离符号)时的长度.一个**Turing机**(Turing machine)的描述复杂性通常指的是它的内部状态和外部符号的个数.一个Turing机也可以用机器的指令的个数刻画.在递归模式给出的**递归函数**(recursive function)情形中,这些模式中字母的个数通常作为复杂性的度量.

算法的描述复杂性的公理定义(axiomatic definition)也已提出(见[2]).下面讨论这定义对Turing机的应用.令(M_i) $(i=0, 1, \cdots)$是按如下事实对Turing机的编号,机器本身(即它的程序)可由它的编码能行地重新构成,且机器的编码可由机器(即由它的程序)能行地得到.一个一般递归函数s是机器复杂性的度量(measure of the complexity of the machine)($s(i)$是机器M_i的复杂性(complexity of the machine)),

当且仅当：1)对任意 y 只存在有穷多个机器具有复杂性 y；2)有一个能行过程，对任意 y 可以决定一切复杂性为 y 的机器.

令 s 是 Turing 机复杂性的任意度量. 若 U 是 Turing 机的任意的能行(即算法)可枚举无穷子类，则存在一机器 T 属于 U 且存在一机器 T'(它可以也可以不是属于 U 的)使得 T' 及 T 计算同一函数，且 T' 的复杂性比 T 的小许多. 由此特别地可以知道，存在原始递归函数，它的复杂性最低的原始递归形式(即通过原始递归模式的定义)比它在一般递归形式(即通过一般递归模式的定义)的最低复杂性要高得多. 令正规算法和 Turing 机的复杂性分别表示编码长度及内部状态个数. 这时可以用：1)一个 m 个字母的字母表上复杂性 $\sim 2^N/\log_2 m$ 的正规算法，和 2)一个 m 个字母的外部字母表复杂性 $\sim 2^N/N(m-1)$ 的 Turing 机，来实现任意 N 变元逻辑代数函数(见 **Boole 函数**(Boolean function))(见[3]).

解决算法不可解问题的有限限制(称为有界算法问题)的算法复杂性的研究开始于 20 世纪 60 年代. A. A. Марков 考虑如下问题：对任意 N 变元逻辑代数函数，要构造字母表 $\Phi=\{0,1,a,b,c\}$ 上的正规算法的编码，它实现此函数且在一切这类算法中有最低的复杂性. 已经证明，解决这问题的正规算法的复杂性的级为 2^N(见[1]，[4]). 另一个曾被研究的问题是解决头 n 个自然数对一递归可枚举集归属问题的算法复杂性(递归可枚举集 (recursively enumerable sets))的 n 节复杂性(complexity of n - segments). 可以证明，在正规算法情况下这种复杂性的级不超过 $\log_2 n$，且此估计在一般情况下不能减少. 也存在用简单对角线方法定义的集合，它的 n 节复杂性级为 n. 也可证明如果算法的执行时间是一般递归有界的，那么递归可枚举集的 n 节复杂性可以指数地增长，且指数可达值 n.

算法的描述复杂性可用在构造某有穷对象的算法的最小复杂性问题的陈述中. 这最小复杂性通常简单地称为(对此特定陈述的算法的描述复杂性的)有穷对象的复杂性(complexity of the finite object).

有穷对象复杂性的定义首先由 A. H. Колмогоров 提出(见**算法信息论**(algorithmic information theory)). 已发现 Колмогоров 复杂性 $K(x)$ 和用 m 个字母的字母表的正规算法编码长度表示的同一对象的复杂性 $M_m(x)$ 及用 m 个字母外部字母表的 Turing 机的外部状态个数表示的复杂性 $T_m(x)$ 之间有如下渐近关系：

$$M_m(x) \sim \frac{K(x)}{\log_2 m}, \quad T_m(x) \sim \frac{K(x)}{(m-1)\log_2 K(x)}.$$

参考文献

[1] Марков, А. А.,《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **31** (1967), 1, 168 – 208.

[2] Blum, M., A machine independent theory of the complexity of recursive functions, *J. ACM*, **14** (1967), 322 – 336.

[3] Кузьмин, В. А., сб《Проблемы кибернетики》, 1965, 13, 75 – 96.

[4] Петри, Н. В.,《Докл. АН СССР》, **185** (1969), 1, 37 – 39.

[5] Звонкин, А. К., Левин, Л. А.,《Успехи матем. наук》, **25** (1970), 6, 85 – 127.

Я. М. Барздин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hartmanis, J. and Hopcroft, J. E., An overview of the theory of computational complexity, *J. ACM*, **18** (1971), 444 – 475.

杨东屏 译

算法的计算复杂性[algorithm, computational complexity of an; алгоритма сложность вычислений]

一个函数，它给出一个算法用于输入的执行过程的困难程度(包括时间和存储量)的数字估计. 算法的计算复杂性的更确切定义是费用函数(cost function)(计步函数(step - counting function))的概念——定义为算法可应用对象和自然数之间的一个可判定关系，它的定义范围和算法的可应用范围相重合.

通常考虑算法执行过程的时间和空间指标，对一个 **Turing 机** (Turing machine) M，时间费用函数(time cost function)(工作持续时间) $T_M(P)$ 是 M 由 P 的初始格局到终结格局的转换所需的工作周期时间 t. 存储费用函数(memory cost function)(或空间函数(space function)) $S_M(P)$ 定义为机器读头在带上注视的单元数目. 相仿地可定义**正规算法** (normal algorithm)，迭代阵列，多头多带 Turing 机等等的时间和存储费用.

这些费用函数的共同性质是存在一能行步骤可对任意算法 α(即特别地对 Turing 机或更确切地对它的程序)，任意输入 x 及任意非负整数 t，确立把 α 应用于 x 过程是否将终止且具有复杂性 t. 这点引出了计算复杂性的抽象理论(见[1]). 一个能行步骤 r 称为计算度量(computational measure)，如果：1)当用于形为〈算法，输入，自然数〉的三元组时总是给出值 0 或 1；2)它有性质：对任意算法 α 及输入 x，等式 $r(\alpha, x, t)=1$ 对不多于一个自然数 t 为真，这个 t 存在，当且仅当把 α 应用到 x 的过程最终停止. 关于度量 r 对 α 的费用函数 R_α 被引进，当且仅当 $r(\alpha, x, t)=1$ 且 $R_\alpha(x)=t$.

这最后等式等价于语句"α 对 x (在度量 r 下)计算复杂性为 t".

给定某计算度量，人们可以考虑给定函数 f 的计算复杂性，例如，找一个计算 f 的算法 α，它"比其他算法都好". 但是正如下面的加速定理所指出的那样，这样的表述并不总是恰当的. 真正问题可能是费用函

数 R_α 增长速度的描述，这里 α 计算 f. 例如找 f 的计算复杂性的上下界，即两个函数 $G(x)$ 和 $g(x)$，使得存在函数 f 的一计算 α 满足 $R_\alpha(x)\leqslant G(x)$，且对计算 f 的任意算法 β，函数 R_β 在一定意义下优于 g.

计算复杂性理论的另一个重要分支是复杂性类(complexity classes)——存在复杂性不超过定义此类的界集的某个界的计算的函数集合．这分支也包括不同类型的算法(自动机)的相对计算复杂性问题：到另外算法系统和另外复杂性度量的转换通常等价于对先前算法系统考虑一个新的度量．

下面给出一些独立于现存的复杂性(及算法概念的精确表述)度量的选择的基本结果，例如，只要存在通常Turing机和所考虑的这类型算法的能行相互模拟．(为简单起见，假定讲的是计算非负整数到非负整数的函数的Turing机的计算时间.) 令 T 和 h 是算法有效域上的可计算整数值函数(见**可计算函数** (computable function))，且令 f 是在同一域上定义的函数并可设它只取两个值——譬如说，0和1.

首先存在计算复杂性可达人们所期望的任意程度的函数．确切地说，对任意函数 T 存在一个可计算函数 f，使得对任意计算 f 的算法 α，不等式

$$R_\alpha(x) > T(x)$$

只对有穷多个情况为假．

其次存在函数，它们的任何计算原则上可以像人们所期望的那样改进．确切地说，加速定理 (speed-up theorem)成立：对任意函数 h(例如 $h(t)=2^t$)可以找到一个可计算函数 f，使得对任意计算 f 的算法 α，总可以找到一个也可计算 f 的算法 β(不假定能行的步骤)，使得对(除一有穷集外的)一切 x，有

$$h(R_\beta(x)) < R_\alpha(x).$$

当 $h(t)=2^t$ 时，则对几乎一切 x，有

$$R_\beta(x) < \log_2 R_\alpha(x).$$

对于(Turing 机的)时间和空间计算度量，加速定理的结果对如下形式的大多数计算是有效的．若 f 是复杂性为 $R(n)$ 可计算的，则 f 也是复杂性为 $R(n)/2$ 可计算的(所谓 f 是复杂性为 $R(n)$ 可计算的，是指对某计算 f 的 α，$R_\alpha(P)\leqslant R(n)$ 对在所考虑的字母表上长度为 n 的一切字 P 都成立)．因此，具体函数的时间和空间计算复杂性通常是估计量的级．下面讲些具体结果．

判定(长度为 n 的)字的等价的时间对Turing机和正规算法而言，级都为 n^2；任何在Turing机上在渐近地小于 $n\log_2 n$ 时间内可判定的字的性质，也可在时间 n 内判定；Turing机在时间 $T(n)$ ($T(n)\geqslant n^2$ 的级)内的计算可用一Turing机在空间 $\sqrt{T(n)}$ 内模拟．另外在多带Turing机上两个 n 位数的乘法可在时间 $n^{1+\epsilon}$ 内完成，而不能在时间级 n 内完成，但迭代阵列可以实时(real time)进行，即乘积的第 i 位数的产生可在因子的第 $(i+1)$ 位数输入前完成．当一种类型的算法过程被其他过程仿造时，通常计算复杂性要改变．所以迭代阵列的维数减少，计算的时间就要变长．多头Turing机和多带Turing机可以相互实时地模拟．许多类型的算法类型可在Turing机上模拟，使得计算时间多项式地增长(通常是二次地增长)，而空间复杂性微不足道地增长(通常是加一个常数因子)．

复杂性方法在研究**一般递归函数** (general recursive function)类相关于它们的逻辑和代数特征的特定分层时有用．例如，原始递归函数与其空间被某原始递归函数所界限的Turing机可计算的函数相重合．任意复杂函数的存在性是用对角线方法建立的．对这种计算复杂性下界的自然模拟在与数理语言学有关的领域，和某些判定理论的有效性问题中被用到．但是对许多实践中有用的问题，要得到非平凡的下界却是非常困难的．特别对某些组合问题，其中一种变型可表述为在给定长度的一切字中要找出满足一个在多项式时间内可计算的谓词的字的问题，情况就是如此．人们还谈到用非确定性自动机和**概率自动机** (automaton, probability)执行的计算复杂性．在非确定性情况下，当计算装置遇到如何继续计算的选择时，可以同时选择两个路线，方式是把原计算装置"分离"为两独立的功能相同的复制品，分别继续这两个路线．它的计算复杂性理解为指最简单的成功计算路线的复杂性．在概率情况下，计算的实际过程除了决定于程序和输入外，还要决定于一随机数序列，而结果应该以很大的概率与被计算的函数的值相一致．在两种情况下，计算复杂性有时可被证明是小于同一问题的确定性计算的复杂性．

算法的优劣不只决定于它们的计算复杂性，还决定于**算法的描述复杂性** (algorithm, complexity of description of an)．在某些出版物里这两种复杂性组合在一起．

参考文献

[1] Hartmanis, J. and Hopcroft, S. E., An overview of the theory of computational complexity, *J. ACM*, **18** (1971), 444－475.

Н. В. Петри 撰

【补注】 由上文讲的情况到现在这领域已有极大发展．下面举出了两个关键参考文献 [A1], [A5].

Turing机到乘法为止的结果只对原始类型的Turing机(单个输入/工作带，无附加的工作带)成立．在西文目前标准的Turing机是有几条工作带的(脱机)模型．Turing机之所以有用，是因为得到问

题的计算复杂性下界比较简单．处理上界时通常给出基于RAM（随机存取机器）的实际算法，它更逼真地仿效了"von Neumann"计算机．这两类机器在互相模拟对方时使用的空间数差一个常数乘积因子，时间差多项式倍．后者刻画了串行计算的一切合理模型（第一机器类(first machine class)）(不变性论题(invariance thesis))．对决定这种多项式时间差别是机器模型理论的一个主题．例如，有单向输入（在输入带上不许回头）的多带Turing机可在平方时间内被一个单向输入和单个工作带的Turing机以显然方式模拟，且已证明少于平方时间是不够的([A2]，[A3])．人们可在时间级 $n\log n$ 用2个工作带模拟 k 个工作带．还不知这是否是最优的，但下界是非线性的．相反，多计数器机器可被单个工作带Turing机实时（用一步模拟一步）模拟([A4])．(计数器是一存储装置，它可以保存任意整数，进行加一、减一运算及清除为0.)不变性论题可作为对"易驾驭"问题类，即在多项式时间内可以确定性地解决的问题类（记为P）的鉴别标准．加上非确定性的特征给出了NP（非确定性多项式时间）类，它包括大量的日常生活中要解决的问题．解决NP问题的最好已知确定性算法需要指数时间．另一方面，还不知P=NP是否成立，即不知这些指数时间算法可否用确定性多项色时间算法代替．这问题被认为是计算理论中最重要的未解决问题．已经知道，NP问题的复杂性可被特定的NP问题例证．这些NP完全问题有性质：P=NP当且仅当该问题可确定性地在多项式时间内解决（属于P）．关于不同的空间复杂性之间的关系和时间空间之间的关系也提出类似问题．关于空间的基本复杂性类是PSPACE(NPSPACE)，它们由第一机器类中的确定性（非确定性）机器用多项式空间可解决的问题组成．已知(Savitch定理(Savitch theorem))，PSPACE=NPSPACE．显然PSPACE包含NP，但尚不知它是否是真包含．

对并行计算存在大量模型．许多这类模型(第二机器类(second machine class))有性质：在忽略多项式差别下并行模型用的时间等价于串行模型上用的空间(并行计算论题(parallel computation thesis))．每个NP中问题可在第二机器类的机器上确定性地在多项式时间内解决．其他类型好像更强，尽管完全不现实．并行模型的能力基于在多项式计算周期数（称为时间）中可能使指数多个硬件活动．一旦人们可在一给定时间段内的计算使活动起来的硬件的数量上加上现实的界（例如光速的界），那么并行计算论题就不再有效．对许多特定问题已证明，在时间级 $\log n^k$ 内用多项式多个硬件(NC复杂性类(NC complexity class))可以在并行装置上解决．

参考文献

[A1] Gary, M. R. and Johnson, D. S., Computers and intractability: A guide to the theory of NP-completeness, Freeman, 1978.

[A2] Maass, W., Combinatorial lower bound arguments for deterministic and nondeterministic Turing machines, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **292** (1985), 675–693.

[A3] Vitányi, P. M. B. and Li, M., Tape versus stack and queue: the lower bounds, information and computation (To appear).

[A4] Vitányi, P. M. B., An optimal simulation of counter machines, *SIAMJ. on Computing*, **14** (1985), 1–33.

[A5] Wagner, K. and Wechsung, G., Complexity theory, Reidel, 1986.

杨东屏 译

字母表上的算法 [algorithm in an alphabet; алгоритм в алфавите]

描述**字母表**(alphabet) A 上的抽象字的相继转换的潜在可实现过程的指令的确切的通常可理解的集合，在其中每个 A 上字可作为初始字([1])．

一字母表上的算法是**算法**(algorithm)一般概念的特例．一字母表上算法的输入及可能的输出是充分广泛类型的**可构造对象**(constructive object)——**字**(word)．在20世纪70年代发展了字母表上算法的不同表述．最有名的是Марков**正规算法**(normal algorithm)及用**Turing机**(Turing machine)定义的算法．当构造字母表上特定算法时，在开始的字母表上引进附加的字母是有用的，然后在扩充了的字母表上考虑算法．当在同一字母表上有两个算法时，自然可以引入关于此字母表的这些算法的等价性及完全等价性概念．

参考文献

[1] Марков, А. А., Теория алгорифмов, «Тр. матем. ин-та АН СССР», 42 (1954).

Н. М. Нагорный 撰

【补注】 在（基于字母表上的算法的）语言的算法描述和用N. Chomsky的形式文法的生成描述之间的联系构成了抽象自动机和形式语言理论的本质．主要的内容见J. E. Hopcroft及J. D. Ullman的著作([A1])．

参考文献

[A1] Hopcroft, J. E. and Ullman, J. D., Formal languages and their relation to automata, Addison-Wesley, 1969. Revised version: Introduction to automata, languages and computation, Addison-Wesley, 1979.

杨东屏 译

局部算法 [algorithm, local; алгоритм локальный]

规定一个结构集元素的性质并在每一步只利用该元素邻域的信息的算法．对于各种离散最优化问题的能行算法的存在性和非存在性问题用局部算法可以自然地表述．

给定集族 $\{\mathfrak{M}:\mathfrak{M}\in M\}$，且对满足 $\mathfrak{A}\in\mathfrak{M}$ 的每个对

($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{M}$)指定一个集合 $S(\mathfrak{A},\mathfrak{M})$，使得：1) $\mathfrak{A}\in S(\mathfrak{A},\mathfrak{M})$；2) $S(\mathfrak{A},\mathfrak{M})\subseteq\mathfrak{M}$；3)若 $\mathfrak{A}\in\mathfrak{M}_1$，$\mathfrak{A}\in\mathfrak{M}_2$ 且有 $S(\mathfrak{A},\mathfrak{M}_1)\subseteq\mathfrak{M}_2\subseteq\mathfrak{M}_1$ 则 $S(\mathfrak{A},\mathfrak{M}_1)=S(\mathfrak{A},\mathfrak{M}_2)$．这时，集合 $S(\mathfrak{A},\mathfrak{M})$ 称为 $\mathfrak{A}$ 在 $\mathfrak{M}$ 中的邻域 (neighbourhood)．邻域的一个例子是一个简范式中的合取邻域(见 **Boole 函数的极小化**(Boolean functions, minimization of))．

令 Γ 是一有限的无向图(graph)，$\Gamma=M_1\cup M_2$，其中 $M_1=\{a_1,\cdots,a_q\}$ 是 Γ 的顶点集，且令 $M_2=\{(a_{i_1},a_{i_2}),\cdots,(a_{r_p},a_{r_t})\}$ 是 Γ 的边集．图 Γ 的一边 $R=(a_i,a_j)$ 的邻域 $S_1(R,\Gamma)$ 由一切与边 R 关联的边的顶点和其顶点包括在邻域 $S_1(R,\Gamma)$ 中的一切边的顶点组成．设 $S_{n-1}(R,\Gamma)$ 已被定义，邻域 $S_n(R,\Gamma)$ 由一切与邻域 $S_{n-1}(R,\Gamma)$ 中顶点关联的边的顶点及其顶点在邻域 $S_n(R,\Gamma)$ 中边的顶点组成．同样，可引入图 Γ 的任意顶点 a_j 的邻域 $S_1(a_j,\Gamma),\cdots,S_n(a_j,\Gamma)$．

令 $P_1(\mathfrak{A},\mathfrak{M}),\cdots,P_l(\mathfrak{A},\mathfrak{M})$ 为定义在 $\mathfrak{A}\in\mathfrak{M}$ 的对($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{M}$)上的二目谓词系，它们可分为两个不相交的子集 $\langle P_1,\cdots,P_r\rangle$ 及 $\langle P_{r+1},\cdots,P_l\rangle$．第一个子集中元素称为主要谓词(main predicates)，第二个集中元素称为辅助谓词(auxiliary predicates)．向量 $\tilde{\alpha}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_l)$ 称为信息向量(information vector)，若 $\alpha_i\in\{0,1,\Delta\}(i=1,\cdots,l)$．向量 α 称为在 $\mathfrak{M}$ 中对 $\mathfrak{A}$ 容许的(permissible)，若对一切 $\alpha_i\neq\Delta$，等式 $\alpha_i=P_i(\mathfrak{A},\mathfrak{M})$ 被满足．对 $\mathfrak{M}$ 中的 $\mathfrak{A}$ 的一切容许信息向量的集合 $J(\mathfrak{A},\mathfrak{M})$，称为 $\mathfrak{A}$ 在 $\mathfrak{M}$ 中的信息集(information set)．

令 $\mathfrak{M}=(\mathfrak{A}_1,\cdots,\mathfrak{A}_q)$ 且 $(\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{il})\in J(\mathfrak{A}_i,\mathfrak{M})$，$(i=1,\cdots,q)$．集合 $\mathfrak{M}^*=\{\mathfrak{A}_1^{\alpha_{11}\cdots\alpha_{1l}},\cdots,\mathfrak{A}_q^{\alpha_{q1}\cdots\alpha_{ql}}\}$ 称为对 $\mathfrak{M}$ 容许的．对 $\mathfrak{M}$ 容许的一切集合 $\mathfrak{M}^*$ 的类 $J(\mathfrak{M})$ 称为在 $P_1,\cdots,P_l$ 谓词系上集合 $\mathfrak{M}$ 的信息类(information class)．显然，邻域 $S(\mathfrak{A},\mathfrak{M})$ 定义一邻域 $S(\mathfrak{A}^{\alpha_1\cdots\alpha_l},\mathfrak{M}^*)$．

引进一函数系 $\varphi_1,\cdots,\varphi_l$，使得

$$\varphi_i(\mathfrak{A}^{\alpha_1\cdots\alpha_l},S(\mathfrak{A}^{\alpha_1\cdots\alpha_l},\mathfrak{M}^*))=(\beta_1,\cdots,\beta_l),$$

函数 φ_i 将定义在一切满足 $\mathfrak{A}^{\alpha_1\cdots\alpha_l}\in\mathfrak{M}^*$ 的对 $(\mathfrak{A}^{\alpha_1\cdots\alpha_l},S(\mathfrak{A}^{\alpha_1\cdots\alpha_l},\mathfrak{M}^*))$ 上，其中 $\mathfrak{M}^*\in J(\mathfrak{M})$，且满足如下条件：1)若 $i\neq j$，则 $\alpha_i\neq\alpha_j$；2)在 $\mathfrak{M}^*$ 中把 $\mathfrak{A}^{\alpha_1\cdots\alpha_l}$ 换成 $\mathfrak{A}^{\beta_1\cdots\beta_l}$ 而得的集合 $\widetilde{\mathfrak{M}}^*$ 对 $\mathfrak{M}$ 是容许的，即 $\widetilde{\mathfrak{M}}^*\in J(\mathfrak{M})$．为简便起见，把对 $(\mathfrak{A}^{\alpha_1\cdots\alpha_l},S(\mathfrak{A}^{\alpha_1\cdots\alpha_l},\mathfrak{M}^*))$ 记为 $(\mathfrak{A},a_1,\cdots,a_l,S,\mathfrak{M}^*)$．

在上述某些集合中引进偏序：1)在集合 $M_1=\{0,1,\Delta\}$ 上取 $\Delta<0$，$\Delta<1$；2)在一切长度为 l 的信息向量集 M_2 上，若 $\alpha_i\leqslant\beta_i(i=1,\cdots,l)$，则取 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_l)\leqslant(\beta_1,\cdots,\beta_l)$；3)在有标号的元素集上，若 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_l)\leqslant(\beta_1,\cdots,\beta_l)$，则取 $\mathfrak{A}^{\alpha_1\cdots\alpha_l}\leqslant\mathfrak{A}^{\beta_1\cdots\beta_l}$；4)在集合 $M^*=\bigcup_{\mathfrak{M}\in M}J(\mathfrak{M})$ 上，若第一，$\mathfrak{M}_1^*$ 及 $\mathfrak{M}_2^*$ 属于同一信息类 $J(\mathfrak{M})$，第二，$(\alpha_1,\cdots,\alpha_l)\leqslant(\beta_1,\cdots,\beta_l)$ 来自 $\mathfrak{A}^{\alpha_1\cdots\alpha_l}\in\mathfrak{M}_1^*$ 和 $\mathfrak{A}^{\beta_1\cdots\beta_l}\in\mathfrak{M}_2^*$，则取 $\mathfrak{M}_1^*\leqslant\mathfrak{M}_2^*$；5)在形式为 $S(\mathfrak{A}^{\alpha_1\cdots\alpha_l},\mathfrak{M}^*)$ 的邻域集上，取 $S_1\leqslant S_2$，若 $S_1=S(\mathfrak{A}^{\alpha_1\cdots\alpha_l},\mathfrak{M}_1^*)$，$S_2=(\mathfrak{A}^{\beta_1\cdots\beta_l},\mathfrak{M}_2^*)$，当且仅当 $S(\mathfrak{A},\mathfrak{M}_1)=S(\mathfrak{A},\mathfrak{M}_2)$，且由条件 $\mathfrak{B}^{\gamma_1\cdots\gamma_l}\in S_1$ 和 $\mathfrak{B}^{\delta_1\cdots\delta_l}\in S_2$，可得出 $(\gamma_1,\cdots,\gamma_l)\leqslant(\delta_1,\cdots,\delta_l)$．

令 A 和 B 是集合 1)－5) 之一的元素．若 $A\geqslant B$ 且 $B\geqslant A$，则 A 和 B 称为等信息量的(equi-informative)，记为 $A\hat{\ }B$．函数 $\varphi(\mathfrak{A},\alpha_1,\cdots,\alpha_l,S,\mathfrak{M}^*)$ 称为单调的(monotone)，若当 $S_1\leqslant S_2$ 时，对于 $i=1,\cdots,l$，有

$$\varphi_i(\mathfrak{A},\alpha_1,\cdots,\alpha_l,S_1,\mathfrak{M}_1^*)\leqslant\varphi_i(\mathfrak{A},\beta_1,\cdots,\beta_l,S_2,\mathfrak{M}_2^*).$$

局部算法的确定还需要引进一个排序算法(ordering algorithm) A_π．令 M 是任意一个有信息向量的元素的集合，且令 $N=\{1,\cdots,l\}$．考虑满足 $\mathfrak{A}^{\alpha_1\cdots\alpha_l}\in M(j\in N,\alpha_j=\Delta)$ 的一切对 $(\mathfrak{A}^{\alpha_1\cdots\alpha_l},j)$ 的集合 $M\tilde{\times}N$．算法 A_π 对集合 $M\tilde{\times}N$ 排序．局部算法 A 完全由谓词系 $P_1,\cdots,P_l$，主要谓词 $P_1,\cdots,P_r$ 及辅助谓词 $P_{r+1},\cdots,P_l$ 的子分划，单调函数系 $\varphi_1,\cdots,\varphi_l$，$\varphi_i=\varphi_i(\mathfrak{A},\alpha_1,\cdots,\alpha_l,S,\mathfrak{M}^*)$，算法 A_π 决定．

令 $\mathfrak{M}^*=\bigcup_{i=1}^m\mathfrak{A}_i^{\alpha_{i1}\cdots\alpha_{il}}$，$\mathfrak{M}^*\in J(\mathfrak{M})$．局部算法的第一步可描述如下．算法 A_π 用于集合 $M\tilde{\times}N$，其中 $M=\mathfrak{M}^*$；对有序序列的第一个对 $(\mathfrak{A}^{\alpha_1\cdots\alpha_l},j)$，计算 $\varphi_j(\mathfrak{A},\alpha_1\cdots\alpha_l,S,\mathfrak{M}^*)=(\beta_1,\cdots,\beta_l)$，然后把元素 $\mathfrak{A}^{\alpha_1\cdots\alpha_l}$ 换成 $\mathfrak{A}^{\beta_1\cdots\beta_l}$；若 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_l)=(\beta_1,\cdots,\beta_l)$，则取第二个对，等等；若对一切元素 $(\mathfrak{B}^{\gamma_1\cdots\gamma_l},i)$，等式 $\varphi(\mathfrak{B},\gamma_1,\cdots,\gamma_l,S,\mathfrak{M}^*)=(\gamma_1,\cdots,\gamma_l)$ 为真，则检查过一切 $M\tilde{\times}N$ 中的对之后局部算法终止．否则在用新向量 $(\beta_1,\cdots,\beta_l)$ 替换 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_l)$ 之后，若不再有其信息向量的前 r 目中至少有一个符号 Δ 的元素，则算法 A 终止．若有这样的元素，则局部算法的第一步终止．设已执行过的局部算法 A 的步数为 n．第 $n+1$ 步的进行除把集合 $\mathfrak{M}^*$ 用 $\mathfrak{M}_n^*$ 替换外，同第一步一样．其中 $\mathfrak{M}_n^*$ 是 $\mathfrak{M}^*$ 经过局部算法 A 头 n 步转换的结果．由于 $\varphi_i(i=1,\cdots,l)$ 的单调性质，经过有穷步后局部算法 A 将终止．

局部算法的最初定理是最佳算法的唯一性定理(uniqueness theorem of a best algorithm)及最佳算法的存在性定理(theorem on the existence of a best algorithm)．第一个定理讲主要谓词的演算结果是独立于算法 A_π(其中集合 $\mathfrak{M}^*$ 的元素已取序)．第二定理断言在非常广的条件下最佳局部算法(local algorithm)的存在．所谓最佳局部算法是指它能利用一给定的邻域系计算具有取定辅助谓词的给定主要谓词，只要其他任何有相同邻域系及主要和辅助谓词的局部算法做得到．

寻找显式的最佳局部算法的问题已被最小覆盖的综合的算法解决．设给定数组 $\langle\mathfrak{A}_1,\cdots,\mathfrak{A}_q,\mu_1,\cdots,\mu_q,M\rangle$，其中 $\mathfrak{A}_i$ 是一个集合，μ_i 是 $\mathfrak{A}_i$ 的复杂性，$\mu_i>0(i=1,\cdots,q)$，$M\subseteq\bigcup_{i=1}^q\mathfrak{A}_i$．数组 $(\mathfrak{A}_{i_1},\cdots,\mathfrak{A}_{i_p})$ 的复杂性是 $\sum_{j=1}^p\mu_{i_j}$．问题是如何用具有最小复杂性的集合 $\mathfrak{A}_1,\cdots,\mathfrak{A}_q$ 构造一 M 的覆盖．对每个 $\mathfrak{A}_i$ 引进邻域系 $S_1,\cdots,S_n,\cdots$，类似于

合取式邻域系的引进．对取定的谓词：辅助谓词集为空集；主要谓词是谓词 $P_1(\mathfrak{A}, M)$ ($\mathfrak{A}$ 不包含在任何 $\mathfrak{M}$ 的最小覆盖之中) 和 $P_2(\mathfrak{A}, M)$ ($\mathfrak{A}$ 包含在一切 $\mathfrak{M}$ 的最小覆盖之中)，邻域系 S_K 构造了最佳的局部算法．对演算图的边的简单性质的最好局部算法也已构造出来．解决 Boole 函数极小化和离散线性规划问题的各种局部算法也已被提出．

在一类局部算法中最佳局部算法的可计算性是局部算法理论中的一个重要问题．如果给定关于 $\mathfrak{A}\in\mathfrak{M}$，$\mathfrak{M}\in M$ 的对 $(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})$ 的嵌入的邻域系 $S_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})\subseteq\cdots\subseteq S_n(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})\subseteq\cdots$，且若局部算法对于邻域系 $S(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})$ 施行，其中 $S_{k-1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})\subseteq S(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})\subseteq S_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})$，则称局部算法有指标(index) k．把局部算法定义中的 $P_1, \cdots, P_l$ 的个数看成局部算法的存储量 (quantity of memory) 是自然的．设给定谓词 $P(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})$ 的一集合 $\mathscr{P}$．考虑局部算法定义中出现的一切谓词分划属于 $\mathscr{P}$．令 $A(\mathfrak{M}^*)$ 是把局部算法 A 用于 $\mathfrak{M}^*$ 的结果，$\mathfrak{M}^*\in J(\mathfrak{M})$，$\mathfrak{M}\in M$．称谓词 $P_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})$ 不是 (k, l) 可计算的 ((kl) - computable)，若对任意有指标 k 及具有取自 $\mathscr{P}$ 的主要谓词 P_1 和辅助谓词 $P_2, \cdots, P_l$ 的存储量 l 的局部算法，存在集合 $\mathfrak{M}^*$，使得在 $A(\mathfrak{M}^*)$ 中谓词 P_1 对一切元素不是可计算的．

令 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 是一切变元 $x_1, \cdots, x_n$ 的 **Boole 函数** (Boolean function) 的集合且令 $P_1(\mathfrak{A}, f(x_1, \cdots, x_n))$ 是谓词("合取式 $\mathfrak{A}$ 至少包含在一个最小析取范式之中")．对谓词 $\mathscr{P}$ 加上自然的限制，可以发现若 $kl<\text{const}\cdot 2^n$，则谓词 $P_1(\mathfrak{A}, f(x_1, \cdots, x_n))$ 不是 (k, l) 可计算的．有趣的是，谓词 $P(\mathfrak{A}, f(x_1, \cdots, x_n))$ ("合取式 $\mathfrak{A}$ 至少包含在一个 f 的静端析取式中") (见 **Boole 函数的范式** (Boolean function, normal formas of)) 是 (2, 1) 可计算的，但不是 (1, 1) 可计算的．描述图的给定顶点间最短路径的边的通路的谓词的类似结果也已得到．

参考文献

[1] Журавлев, Ю. И., « Кибернетика », 1965, 1, 12－19; 1966, 2, 1－11.

[2] Хуторянская, И. В., « Кибернетика », 1971, 1, 29－33.

[3] Журавлев, Ю. И., сб. « Проблемы кибернетики », 1962, 8, 5－44.

亦可见 **Boole 函数的极小化** (Boolean function, minimization of) 的参考文献．

Ю. И. Журавлев 撰

【补注】 作为特殊领域(在此形式下)，这一主题在西方文献中似乎未研究过．它可能关系到心脏收缩阵列算法([A1]，第 8 章)．

参考文献

[A1] Mead, C. and Conwey, L., Introduction to VLSI systems, Addison - Wesley, 1980, 263－330.

杨东屏 译

算法的表示 [**algorithm, representation of an; алгоритма изображение**]，算法的编码 (coding of an algorithm)

某特定类的**可构造对象** (constructive object) (通常是一个自然数或一个字)，包含关于算法的完全信息，其编码要符合设计这类算法的规则．算法的编码方式要能够使由算法得到它的编码和由它的码得到算法的方法都尽可能地简单．

(不包含字母 α, β 和 γ 的) 字母表 A 上的**正规算法** (normal algorithm) $\mathfrak{A}$ 的编码 (coding) $\mathfrak{A}^l$ 定义为如下得来的字母表 $A\alpha\beta\gamma$ 上的字([1])．在 $\mathfrak{A}$ 的模式的每个代入公式中箭头换成字母 α，点(如果有的话)换成字母 β，在这样形成的字末尾加上字母 γ．这样得到的字按它们对应的代入公式在 $\mathfrak{A}$ 的模式中的次序排成相同的序列．实际上，$\mathfrak{A}^l$ 只是正规算法 $\mathfrak{A}$ 的不同形式的记法，即用字的形式书写 $\mathfrak{A}$ 的模式．由于和正规算法的定义的技术细节相关的理由，正规算法另一类型的编码更方便——所谓正规算法的记录 (record) ([1])，它是把 $\mathfrak{A}^l$ 的字翻译到某个二字母的字母表 (通常是 {0, 1}) 上的字的结果．类似地有 **Turing 机** (Turing machine) 程序的编码．**递归函数** (recursive - function) 编码的任务是由定义此函数的等式系的 Gödel 数来执行的 ([2])．

算法一般概念的任何形式的定义中，算法的码要如此定义，使得这码(实际上是它编码的算法本身)可包含在这种类型算法的输入集中．这就有可能证明所谓"通用算法定理"，这定理是处理其编码可以仿效任意此种类型算法的运算的算法的可实现性．

若一算法的编码是算法的可允许输入，则此算法称为可自应用的 (self - applicable)，若它可用于自己的编码；否则称为不可自应用的．借助于可用于这种情况的 Russell 悖论 (见**悖论** (antinomy)) 的变型可以证明由此产生的算法问题，即在这种类型的其他算法之中如何识别可自应用的算法，不能用这类算法来解决．这个结果是算法问题不可解性的许多定理的基础．

算法 (的编码) 的码的长度是算法复杂性 (要记住算法的程序所需的记忆单位量) 的自然度量 (见**算法的计算复杂性** (algorithm, computational complexity of an))；**算法的描述复杂性** (algorithm, complexity of description of an)．

参考文献

[1] Марков, А. А., Теория алгорифмов, М., 1954 (« Тр матем ин - та АН СССР », т. 42 (中译本：A. A. 马尔科夫，算法论，科学出版社，1959).

[2] Kleene, S. C., Introduction to metamathematics, North - Holland & Noordhoff, 1951 (中译本：S. C. 克林，元数学导论，科学出版社，上册 1984，下册 1985).

Н. М. Нагорный 撰 杨东屏 译

算法信息论 [**algorithmic information theory; алгоритмическая теория информации**]

数理逻辑的一个分支，它在**算法**(algorithm)和**可计算函数**(computable function)概念的基础上给出信息论的基本概念更精确的表述．算法信息论企图不依赖概率论给出这些概念的基础，从而使熵和信息量的概念可以应用于个体对象．此外，它也产生与特定个体对象的熵的研究有关的自身问题．

算法信息论的中心概念是个体对象的熵(entropy of an individual object)的概念，也称为对象的(Колмогоров)复杂性((Kolmogorov) complexity of the object)．这个概念的直观意思是重新构造给定对象所需的最小信息量．个体对象复杂性的概念和(基于此概念的)在个体对象 y 中与个体对象 x 有关的信息量的概念是 1962－1965 年由 A. H. Колмогоров 提出的，此后算法信息论开始发展．

只考虑二元字(0和1的符号串)可不失一般性．字 x 的复杂性(complexity of a word)可理解为借助某确定的解码过程重新构造 x 所需的全部信息的最短二元字 p 的长度 $l(p)$．这概念的全部精确定义如下．

令 $F(s)$ 是任意通用**部分递归函数**(partial recursive function)．这时，关于 F 的字 x 的复杂性就是

$$K_F(x)=\begin{cases}\min l(p), & \text{若 } F(p)=x,\\ \infty, & \text{若不存在 } p \text{ 使得 } F(p)=x.\end{cases}$$

满足 $F(p)=x$ 的字 p 称为码(code)或程序，F 由 p 可以重新构造字 x．下述定理成立：存在一部分递归函数 F_0(最优函数(optimal function))使得对任意部分递归函数 F，下列等式成立：

$$K_{F_0}(x)\leqslant K_F(x)+C_F,$$

其中 C_F 是独立于 x 的常数．这定理给出一不变的(忽略一加性常数的)复杂性定义：字 x 的复杂性 $K(x)$ 是关于某部分递归函数 F_0 的复杂性 $K_{F_0}(x)$，它一旦取定就永远不变．显然 $K(x)\leqslant l(x)+C$，其中 C 为与 x 无关的常数．

用 $K(x)$ 也可决定字对 (x,y) 的复杂性 $K(x,y)$ (complexity of a pair of words)；做法是把对 (x,y) 能行地编码为一个字 $c(x,y)$，复杂性 $K(x,y)$ 理解为 $K(c(x,y))$．

P. Martin-Löf 研究了无穷二元序列前节的复杂性行为．令 ω_n 表示序列 ω 的开始 n 个字母组成的前节．这时，几乎所有(按 Lebesgue 度量)无穷二元序列有下述性质：1) 对无穷多个自然数 n，不等式 $K(\omega_n)\geqslant n-c$ 成立，其中 c 为某常数；2) 对大于某个数 n_ε 的一切自然数 n，$K(\omega_n)\geqslant n-(1+\varepsilon)\log_2 n$，其中 ε 是一任意正数(Martin-Löf 定理(Martin-Löf theorem)．反之，对任意序列 ω 存在无穷多个 n，使得 $K(\omega_n)\leqslant n-\log_2 n$．

复杂性概念也用于算法问题的研究．此处有一更自然的概念称为字 x 的解的复杂性(complexity of the solution of the word)．这个概念的直观意思是对每个 $i\leqslant l(x)$，为找到字 x 的第 i 个字母(字 x 的长度不一定需要知道)所需要的最小信息量．更精确地说，对于部分递归函数 $G(s,t)$，字 $x=x_1\cdots x_{l(x)}$ 的解的复杂性是指

$$KR_G(x)=\begin{cases}\min\{l(p):\ \forall i\leqslant l(x),\ G(p,i)=x_i\},\\ \infty,\ \text{若不存在这样的 } p.\end{cases}$$

下述定理成立：存在一部分递归函数 G_0(最优函数)，使得任意其他部分递归函数 G 满足不等式 $KR_{G_0}(x)\leqslant KR_G(x)+C_G$，其中 C_G 是一独立于 x 的常数．字 x 解的复杂性 $KR(x)$ 是某最优部分递归函数 G_0 的复杂性 $KR_{G_0}(x)$，这个 G_0 一旦取定，则永远不变．显然，$KR(x)\leqslant K(x)+C$ 且 $K(x)\leqslant KR(x)+2l(x)+C$．对任意自然数集 M 可能用 $KR(x)$ 去决定集合 M 的 n 节的复杂性 $K(M,n)$: $K(M,n)=KR(\omega_n)$，其中 $\omega=x_1\cdots x_i\cdots$ 是集合 M 的特征序列(characteristic sequence of the set)(若 $i\in M$，则 $x_i=1$，而若 $i\notin M$，则 $x_i=0$)．

算法问题通常表示为对某递归可枚举集 M 的归属问题．若给定某个 n 且对 M 的归属问题只限于前 n 个自然数，那么可以得到一个有界算法问题(bounded algorithmic problem)．数量 $K(M,n)$ 可以直观地理解为表示解此有界问题所需的信息量．特别地，集合 M 是递归的当且仅当 $K(M,n)$ 以某常数为上界．

由 Martin-Löf 定理可知，存在满足 $K(M,n)\sim n$ 的集合．也可以发现甚至在由两个量词的算术谓词定义的集合中也有最大复杂性度的集合存在．但下述定理可用于递归可枚举集：1) 对任意递归可枚举集 M 和任意值 n，不等式 $K(M,n)\leqslant\log_2 n+C$ 成立，其中 C 不依赖于 n．2) 存在递归可枚举集 M，使得对任意 n 不等式 $K(M,n)\geqslant\log_2 n$ 成立．同时存在一个递归可枚举集 M，使得若任意一般递归函数的计算的时间 t 是有界的，估计量 $K^t(M,n)\geqslant n/c_t$ 成立，其中 c_t 不依赖于 n．

关于某些归约类型是通用的集合也可用这些说法定义(见**通用集**(universal set))：集合 M 是弱表通用的，当且仅当存在一个无界一般递归函数 $f(n)$，使得对一切 n 的值不等式 $K(M,n)\geqslant f(n)$ 成立．

在研究有界算法复杂性时也要用到其他复杂性度量，例如解决给定的有界问题的**正规算法**(normal algorithm)的编码的极小长度．但是已经发现，在上述的复杂性和表示为一算法的编码的极小长度(或 Turing 机内部状态的极小个数)的这些复杂性的类似物之间存在着渐近精确关系(见**算法的描述复杂性**(algorithm, complexity of description of an))．

在构造算法信息论中引进的另一个概念是，对已知的 y，按部分递归函数 $G(s,t)$ 的字 x 的条件复杂性 (conditanal complexity of a word)：

$$K_G(x\mid y)=\begin{cases}\min\{l(p):G(p,y)=x\},\\ \infty,\ \text{若不存在 } p \text{ 使得 } G(p,y)=x.\end{cases}$$

这个概念同样与最优函数 G_0 的存在性定理有关．对已知 y 字 x 的条件复杂性 $K(x\mid y)$ 定义为按某最优函数 G_0 的复杂性 $K_G(x\mid y)$，其中 G_0 一旦取定就不再改变．$K(x\mid y)$ 的直观意思是，为使字 x 有可能重建而在字 y 包含的信息中必须再加上的最小信息量．显然，$K(x\mid y)\leqslant K(x)+C$.

算法信息论中另一个中心概念是个体对象 y 关于个体对象 x 的信息量 (amount of information in an individual object) 的概念：

$$I(y:x)=K(x)-K(x\mid y).$$

量 $I(y:x)$ 称为 y 中关于 x 的算法信息量 (algorithmic amount of information)．量 $K(x)$ 和 $K(x\mid y)$ 有时称为 x 的算法熵 (algorithmic entropy) 和对给定 y，x 的算法条件熵 (algorithmic conditional entropy)．熵的分解公式 $H(X,Y)=H(X)+H(Y\mid X)$ 及信息的交换公式 $I(X:Y)=I(Y:X)$ 在算法的概念下成立，若不计阶为 $O(\log H(X,Y))$ 的项

$$|K(x,y)-[K(x)+K(y\mid x)]|\leqslant O(\log K(x,y)),$$
$$|I(x:y)-I(y:x)|\leqslant O(\log K(x,y)).$$

信息量的算法的定义和古典的定义之间（更确切说，在 Колмогоров 的字的复杂性和频率的 Shannon 分布的熵之间）存在一定的（由 Колмогоров 提出的）关系：给定数 r，设长度为 $i\cdot r$ 的字 x 是由 i 个长度为 r 的字组成，且设 x 中出现的长度为 r 的第 k 个字具有频率 $q_k\ (k=1,\cdots,2^r)$；那么有

$$\frac{K(x)}{i}\leqslant H+\alpha(i),$$

其中

$$H=-\sum_{k=1}^{2^r}q_k\log_2 q_k,$$

且当 $i\to\infty$ 时，$\alpha(i)\to 0$．一般情况下，在熵和复杂性之间没有密切关系可被建立．这是因为熵只适用于研究有频率规律的序列对象．因此，可以在研究的各种量之间建立对应于独立试验的随机序列 ω 的如下度量关系：

$$\lim_{i\to\infty}\frac{K(\omega_{ir})}{i}=H.$$

同样的考虑可用于任意遍布性平稳随机过程．

参考文献

[1] Колмогоров, А. Н., 《Пробиемы перрдачи информации》, **1** (1965), 1, 3 – 11.

[2] Колмогоров, А. Н., 《Пробиемы перрдачи информации》, **5** (1969), 3, 3 – 7.

[3] Звонкин, А. К., Левин Л. А., 《Успехи матем. наук》, **25** (1970), 6, 85 – 127.

[4] Барздинь, Я. М., 《Докл. АН СССР》, **182** (1968), 6, 1249 – 1252.

[5] Канович, М. И., 《Докл. АН СССР》, **194** (1970), 3, 500 – 503.

Я. М. Барздинь 撰

【补注】 Колмогоров 的复杂性理论或"算法信息论"起源于 R. J. Solomonoff，Колмогоров，L. Levin，Martin - Lof 和 G. J. Chaitin 的独立工作．最近 J. Hartmanis 还通过考虑从数据的描述重新构造原始数据的工作量（时间复杂性）而改进了这个理论．

参考文献

[A1] Hartmanis, J., Generalized Kolmogorov complexity and the structure of feasible computations, in Proc. 24 th IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, 1983, 439 – 445.

[A2] Solomonoff, R. J., A formal theory of inductive inference, Part Ⅰ and Part Ⅱ, *Information and Control*, **7** (1964), 1 – 22.

[A3] Martin - Löf, P., The definition of random sequences, *Information and Control*, **9** (1966), 602 – 619.

[A4] Chaitin, G. J., Randomness and mathematical proof, *Scientific American*, **May** (1975), 47 – 52.

[A5] Chaitin, G. J., Algorithmic information theory, *IBM J. Res. Dev.*, **21** (1977), 350 – 359.

杨东屏 译

算法语言 [**algorithmic language**；**алгоритмический язык**]，形式程序设计语言 (formal programming language)

一种**形式语言** (formal language)，它用于描述计算过程，或等效地用于写出计算机所执行的算法．面向问题的算法语言 (problem - oriented algorithmic languages) 和面向机器的算法语言 (machine - oriented algorithmic languages) 之间存在差异，面向问题算法语言是高级语言，它与任何特定机器无关；而面向机器算法语言是低级语言，它必须考虑某种机器的特点，如机器指令集、寻址方式等．"算法语言"这个词通常指面向问题语言，而不是指机器代码 (machine code)，机器代码是计算机能直接接受的语言．对算法语言构成的完整文本 (**程序** (program)) 来说，一个通用的算法唯一地定义其执行，这点正有别于非算法程序设计语言 (non - algorithmic programming languages)，对非算法编程语言来说，一个文本的执行过程是完全不确定的，或者这个文本只能作为综合一个算法的素材．

如同自然语言那样，算法语言是在基本符号的字母表上以语法元素的分层系统构造起来的．程序是用基本符号写出的．语法元素之间的关系是约定的，有点类

似于自然语言的单词、短语和句子，它们之间的连接用句法规则约定. 用基本符号串构成的最低级元素称为词位 (lexemes) 或词汇单位 (lexical units). 对于出现在程序里的词位，其所属类是确定的，至于词位的某些类(例如，标识符)也有其确定的辖域 (scope)——程序唯一的标识部分，给定词位的所有出现都属于该程序(或分程序). 这种词位的第一次出现被认为是定义性的 (defining); 词位在其作用域内的其他出现称为应用性的 (applied).

算法语言元素的更进一步层次是由概念 (notions) 或非终结符 (non - terminals) 构成的. 算法语言概念之间的关系是一种(直接)成分 (constituent) 的关系(即直接的组成部分的关系)，而给定概念的成分之间的关系是一种毗接 (concatenation) 关系 (即按文本的顺序连接的关系). 这种成分关系的传递闭包唯一地赋于每个概念某些程序文本的子字，称这个子字是这个概念的终结产生 (production). 有一个初始概念，它的产生是整个程序文本. 一棵树称为一个程序的产生或语法树 (syntax tree)，如果它的根是初始概念，树的终止顶端(叶)是词位和基本符号，树的内部顶端是概念，树枝是成分关系. 这样一棵树的构成过程称为程序的语法分析 (syntactic analysis 或 parsing).

概念和词位具有属性 (attributes)，即由算法语言的描述所确定的某些集合. 确定出现在程序中的元素的属性称为语义分析 (semantic analysis). 寻求词位属性从它的定义性出现分析开始，这种分析通常包括有关属性的显式信息. 属性的信息在相应的作用域内传递给词位的所有应用性出现(标识 (identification)). 某种概念的属性通过对产生树的归纳已经找到，它们被看作成分的属性函数. 语义分析的本质部分是在于检验属性上的兼容性，语义分析对于检验程序正确性是十分有用的.

句法分析的规则由算法语言的**生成文法** (grammar, generative) 所规定，或者由分析**自动机** (automaton)，更准确地说，由其不同的推广所规定. 它们把程序文本转换成产生树. 语义分析规则一般是非形式描述，但又力图使属性信息的定义形式化，并借助于二级语法 (见 **Algol - 68 语言** (Algol - 68)) 的机制考虑上下文.

算法语言的程序的执行算法一般以产生树的顶点和不同的执行过程 (也称转换程序 (transducers) 或语义过程 (semantic procedures)) 之间相对应的形式给出. 每个过程执行一定的运算，作为给定概念 (或词位) 的某些上下文和属性的函数，然后，确定下一个过程，过程操作可借助某种抽象机 (解释型 (interpretation) 语义) 直接给出计算过程，或用某种高级语言 (翻译型 (translational) 语义) 把给定概念的产生转换成程序段.

在特定算法语言中，基本符号的字母表一般由罗马字母表(有时用俄文字母表代替或补充)的字母、数字、边界符对(括号)、分隔符(标点符号)和某些运算符组成. 词位的主要类有表示数的数字 (numerals)、表示文本的文字 (literals) 以及由程序本身定义的表示程序各种对象的标识符 (identifiers). 主要对象是变量、标号 (labels) (程序各部分的名称) 和过程 (procedure) (表示功能). 某个标识符的含义和名字由算法语言的描述 (固定字) 定义.

算法语言概念中的基本结构——定义、表达式和操作符. 说明 (descriptions) 是由词位的定义性出现所赋予的属性信息源. 实质上，属性刻画了执行程序时被计算的值的类型，也刻画了它们的表示形式以及在存储器中存取的方式. 对于合成值，如数组 (向量、矩阵) 和结构值 (记录)，其基本分量的存取方式也是被规定的. 表达式 (expressions) 是值的源; 运算符 (operators) 是程序中有限操作 (运算) 的单元; 基本运算符 (basic operators) 有表达式对变量赋值 (assignment) 的操作符、控制转移 (control transfer) 运算符 (无条件或条件的)、过程调用 (procedure call) 运算符和循环 (loop) 运算符等.

循环和过程是算法语言的最有代表性的工具，为特长计算提供简短记号. 循环运算符规定程序的某些部分 (循环体 (loop body)) 的重复执行，重复次数受某给定条件确定. 过程定义为程序的某部分 (过程体 (procedure body)) 提供缩写的参数化记号. 由此，过程体的执行可解释为调用过程所触发的基本运算. 在这种运算过程中，把实际值赋于过程中所包含的参数.

算法语言的一个重要特性是构造程序文本的能力，使得编写、学习和检验都较容易. 构造的主要含义是对作用域结构(模块结构)以及过程和循环的限制，以及对使用控制转移操作符规定细则，以限制执行路径的分支数量.

算法语言的计算机程序设计需要采用程序设计处理程序 (programming processors) (编译程序 (compilers)、解释程序 (interpreters)) 形式的专用软件，这些软件是算法语言程序与机器的媒介. 完整的处理程序执行以下功能: 程序输入、词法分析 (词位的隔离和分类)、句法和语义分析、形式错误指示分析、中介形式 (抽象计算机内部语言程序的表示，以便于程序下一步的处理或执行) 的综合、优化 (中介形式的有次序的变换，以改进程序的某些特性，如存储器规模、速度和需求)、代码生成 (机器程序的构成) 以及程序的执行. 在翻译类型的处理程序中 (翻译程序 (translators)、编译程序、程序生成程序 (program generators))，程序的执行发生在机器程序的构成完结之后. 在解释类型的

处理程序中(增量翻译程序(incremental translators)、交互翻译程序(interactive translators)),程序的执行借助于中介形式,产生树,或者甚至初始文本的某种解释装置.

程序的一遍、二遍和多遍翻译模式(translation scheme)是有区别的.在一遍模式中,翻译程序的所有功能都在程序文本的单遍翻译过程中执行.产生树的隔离的顶点直接生成程序的机器命令,此时无优化,也无中介形式.在二遍翻译程序中,产生树一般在程序的初遍过程中建立,而与生成相结合的语义分析在二遍过程中起作用.涉及中介形式利用的多遍模式,在优化翻译程序或多种机器混合生成系统中使用;一些特别复杂的算法语言也要求句法和语义分析.

可以在计算机上使用的算法语言很多(1000种以上),但广泛使用的算法语言只有几种,其中包括**Algol语言**(Algol);**Algol-68语言**;**Cobol语言**(Cobol);**Lisp语言**(Lisp);**PL/I语言**(PL/I);**Simula语言**(Simula);**Fortran语言**(Fortran);苏联的**Алгамс语言**(Algams);**Альфа语言**(Al'fa)和**Refal语言**(Refal).

参考文献

[1] Ingerman, P., A syntax-oriented translator, Academic Press, 1966.
[2] Языки программирования, M., 1972(译自英文).
[3] Hopgood, F. R. A., Compilation techniques, American Elsevier, New York, 1969.
[4] Higman, B., A comparitive study of programming languages, American Elsevier, New York, 1968.

A. П. Ершов 撰

【补注】 在说英语的计算机科学团体中,"**程序设计语言**(progamming language)"与"算法语言(algorithmic language)"的概念之间一般没有明显区别,尽管在历史上算法语言主要指的是**Algol语言**(Algol)家族.程序设计语言理论的术语和概念并未标准化;上文主要根据**Algol-68语言**(Algol-68)定义中使用的某种惯用方法.

从1970年以来,广泛使用的一种语言是Pascal语言(Pascal),它与提供某些附加功能的Algol-60语言有密切关系.过程型(procedural)(或操作型)语言类基本上规定了被执行运算的顺序;还有函数型(functional)(或应用型)语言,这种语言的程序基本上是一组递归函数定义.演绎型(deductive)(或逻辑程序设计)语言的程序由一组谓词递归定义组成.现行的大多数算法语言是过程型语言.函数型语言的例子是Lisp语言,而Prolog语言是演绎型语言.

参考文献

[A1] Pratt, T. W., Programming languages: design and implementation, Prentice Hall, 1975.

钱宝峰译 仲萃豪校

算法问题[algorithmic problem; алгоритмическая проблема]

寻找一个(唯一的)方法(算法(algorithm))以解决同一类型的无穷多个单个问题系列的问题.历史上在各个数学分支中都曾提出并解决了算法问题.但是某些算法问题长期未能解决.其原因只是在20世纪30年代在数理逻辑中给出了算法的精确定义后才弄明白.并且发现了不可解的算法问题,即根本不存在所要求的算法.结果使数学家关于算法的观念有了彻底的变化,新的算法问题开始陈述为对给定类型的无穷多个问题系列的解的算法的存在性问题且当算法存在时找出此算法问题的解.

几个比较精确的算法定义在**算法论**(algorithms, theory of)中几乎同时出现且它们被证明本质上都是等价的.在每个这种定义中给出了特定算法的充分广泛的类,它们关于算法的组合的自然运算是封闭的.每个关于某算法问题不可解的命题是一个对所考虑的算法问题借助于给定的算法类是不可解的、在数学上有严格证明的定理.在这种形式下这些定理可以看成是特定的,即关于给定算法类的.但是,所有这些结果都可以用数学家所理解的直观算法概念来表示.这种"翻译"是建立在所谓的Church论题(Church thesis)(依给定算法的确切表述方法的不同也可称为Turing论题(Turing thesis)或正规化原理(normalization principle))之上的,这个论题断言,所考虑的这类算法是通用的,即任何直观算法可以计算的函数可以用这类算法中的某个来计算.这个论题是由数学的历史所肯定的科学事实.一切数学上已知的算法都符合这论题,而想在上述范围之外找到算法的所有企图都遭到了失败.最后,这论题也由于各种严格定义的算法类的等价性而被肯定.Church论题不能被证明,因为它所涉及的是在数学上模糊的直观算法概念,但这论题对于数学又是非常重要的,因为它使得有可能来谈论数学家理解的一般意义的算法问题的不可解性.

最早的不可解算法问题的例子是在算法论本身里被指出的.它们包括自然数的给定非递归集元素归属性的判定问题,通用Turing机的停机问题,**正规算法**(normal algorithm)可自应用的判定问题等等.

关于在算法论本身之外的算法问题,首先应该指出的是,1936年Church首先证明一阶谓词演算有效公式的判定问题的不可能性.在**模型论**(model theory)里许多算法问题是这类问题.模型论是20世纪30年代由A. I. Mal'tsev和A. Tarski创立的,它用谓词演算处理非空集和在它们上面定义的关系.模型论中许多算法问题的表述和一些基本结果也要归功于他们.给定的模型类K的初等理论(elementary theory)是在K中的一切模型中为真的所有一阶谓词演算的闭公式

集. 类K可以只含一个模型. 一个初等理论T是可解的(solvable)或不可解的(unsolvable), 取决于是否存在一算法以判定任意给定公式对理论T的归属问题. 模型论中研究算法问题的方法和已取得的结果的部分回顾见[3]. 在[3]中谈到的最有趣的问题是自由群初等理论的不可解性也是至今(1977)尚未解决的问题.

许多数学分支的可构造的解释也产生许多不同的算法问题. 下面给出数学的传统分支中考虑算法问题的主要结果.

一个自然提出而又长时间未解决的问题是: 不可解的算法问题是不是算法和数理逻辑理论的专有问题? 换言之, 在传统的数学分支中是否有远离数理逻辑的不可解算法问题? 这方面的第一个结果是在1949年和1947年被A. A. Марков和E. L. Post各自独立地解决的. 他们证明了早在1914年A. Thue提出的半群上字的等价(等同)问题是不可解的. 在这问题中考虑由有穷多个生成元(字母表)

$$a_1, \ldots, a_n \tag{1}$$

及定义关系

$$A_i = B_i, \quad i = 1, \ldots, k \tag{2}$$

定义的半群. 这里考虑的半群Π的一个初等变换(elementary transformation)是由字PA_iQ到字PB_iQ的转换, 或相反的转换, 其中P, Q是字母表(1)中的任意字. 字母表(1)中两个字X和Y称为在Π内是等价的若它们相重合或可由一个经过有穷多个初等变换得到另一个. 一切具有用字的联结自然地定义的乘法运算的等价类的集合恰是由生成元(1)和关系(2)定义的半群Π. 半群Π上的字的等价问题(problem of word equality (identity))(字问题(word problem))是寻求Π的任意字对X和Y在Π中是否等价的判定算法问题, 也就是判定Π的元素在由它们定义的关系下是否等同的问题. 对于Морков和Post构造的特殊半群, 不存在解决等价问题的算法(见[1]).

这方面最显著的结果是由П. С. Новиков得到的(见[4], [5]). 他证明了M. Dehn在1912年提出的、全世界许多代数学家研究过的群论的古典字问题(字的等价或等同问题)是不可解的. 对半群可以相仿地表述字问题, 区别是只考虑保证在给定半群中一切生成元(1)的逆元存在的那些关系(2)的系统. Новиков还证明了群论中非常重要的同构问题(isomorphism problem)(即如何找一算法以判定任何两个群是否同构的问题)是不可解的. 后来证明, 对任意给定群G不能找到任何算法可以断定任意群是否与G同构(见[6]).

A. A. Марков研究了半群不变性质的判定问题(problem of recognition of invariant properties of semi-groups), 不变性质是指同构的半群间所保持的性质([2]). 他证明, 若对一个不变半群性质α, 存在具有性质α的半群及另一个半群(它不能嵌入任何有此性质的半群), 则不存在一个算法可以判定任意给定半群是否具有性质α. 这意味着在半群类中几乎一切不变半群性质是算法不可判定的. 在群论中也得到这个基本定理的类似结果(见[7], [8], [9]). 特别地, 在此情况下结论如下. 令K_α是一切有不变性质α的群组成的类. 对每个如此的类有两个有关的算法问题: K_α中群的字问题, 及判定任意群是否属于K_α的问题. 业已发现, 对任何非空类K_α这两个算法问题至少有一个不可解. 半群情况也是如此.

另一研究的问题是指明在其中字问题不可解的单群和半群. 在这主题下的许多研究中可以提到由如下七个简单定义关系给出的半群的字问题不可解的证明(见[10]):

$$ac = ca,\ ad = da,\ bc = cb,\ bd = db,$$

$$eca = ce,\ edb = de,\ cca = ccae.$$

后来又给出一个有三个定义关系及不可解的字问题的半群(见[11]). 至今(1977)尚未找到一般情况下解决字问题的算法, 甚至对只有一个定义关系的半群也没找到. 只有对不可约的定义关系找到了这种算法(见[12]). 然而, 解决只有一个定义关系的群的字问题则要早得多(见[13]), 但对有两个如此关系的问题仍未解决. 定义具有不可解的字问题的群的定义关系的最小个数已知为12. 已证明交换半群的字的等价问题是可解的. 对交换群同构问题也已证明是可解的. 对有限群, 有限定义单群, 幂零群和二阶可解群字的等价问题都是可解的. 但是甚至对五阶可解群类可以指出一个由一个五阶对应等式及有穷多个定义关系给出的群有不可解的字的问题(见[15]).

研究具有定义字的交叠的有限度量(即具有定义关系的左侧的交叠)的群的字问题早在一般形式的字问题不可解已被证明之前就开始了. 这主题最强的结果在撰写本文时(1977)是关于由其定义字可以有小于它们长度的1/5的交叠的定义关系定义的群类的字问题的可解性的证明(见[14]). 若字之间的交叠可以达到它们长度的1/3, 则有不可解字问题的群的例子就变得十分简单. 在1/5到1/3的变程之间问题仍然未解决. 对半群的类似的研究也在进行. 已发现对半群定义字的交叠的最大度量小于1/2的字问题是可解决的. 但是已知的在不可解字问题的半群的例子中有定义字的交叠为1/2的.

最著名的拓扑算法问题是n维流形的同胚的古典判定问题. Марков构造了一个四维流形$\mathfrak{M}$, 对它可以是一个算法以判定任意四维流形是否与$\mathfrak{M}$同胚(见[17]). 已经知道, 对$n=2$, 这问题有肯定的解; 对

$n=3$，问题仍未解决．对四维和更高维流形的组合和同伦等价问题也是不同解的．也可指出，若 P 是一多面体，它的基本群的字等价问题不可解，那么对 P 不能构造出算法以判定 P 上通过一个公共点的任意两个路径的有界同伦(或自由同伦)．对编辫群的共轭问题有一肯定的解这问题等价于判定辫子等价性的拓扑问题．

数学里最著名的算法之一是 Hilbert 第十问题(Hilberts 10 - th problem)：要找一个算法可以判定整系数 Diophantos 方程组是否有整数解．在已知有不可解的算法问题的许多例子之后，曾假设这问题也是不可解的．另外，一群美国数学家成功地证明了：指数增长的二目 Diophantos 谓词的存在性可以导出 Hilbert 第十问题的不同解性(见[18]，[19])．但是他们未能造出这种谓词．他们只是证明了指数方程整数解的存在性的确认是不可解的问题．1970 年首次造出了指数增长的 Diophantos 谓词(见[20]，[21])；这是 Hilbert 第十问题不可解性的第一次证明．

在算法理论中证明了有各种不可解度(degrees of unsolvability)的不可解算法问题的存在性．数学中出现的算法问题的许多研究表明，在一般情况下，每一个这种问题都有最大的不可解度，而它们的特例(例如特定的半群或群的字等价问题)可以有任何事先给定的不可解度．

参考文献

[1] Мальцев, А. И., Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965 (英译本：Mal'tsev, A. I., Algorithms and recursive functions, Wolters - Nordhoff, 1970).

[2] Марков, А. А., 《Тр. Матем. ин - та АН СССР》, 42 (1954), 1－376.

[3] Ершов, Ю. Л. и др., 《Успехи матем. наук》, 20 (1965), 4, 37－108.

[4] Новиков, П. С., 《Докл. АН СССР》, 85 (1952), 4, 709－712.

[5] Новиков, П. С., 《Тр. Матем. ин - та АН СССР》, 44 (1955), 1－444.

[6] Адян, С. И., 《Тр. Моск. матем. об - ва》, 6 (1957), 231－298.

[7] Адян, С. И., 《Докл. АН СССР》, 117 (1957) 1, 9－12.

[8] Адян, С. И., 《Докл. АН СССР》, 123 (1958), 1, 13－16.

[9] Rabin, M. O., Recursive unsolvability of group theoretic problems, *Ann. of Math.* (2), 67 (1958), 1, 172－194.

[10] Цейтин, Г. С., 《Тр. Матем. ин - та АН СССР》, 52 (1958), 172－189.

[11] Матиясевич, Ю. В., 《Докл. АН СССР》, 173 (1967), 6, 1264－1266.

[12] Адян, С. И., 《Тр. Матем. ин - та АН СССР》, 85 (1966), 1－123.

[13] Магнус, В., 《Успехи матем. наук》, 8 (1941), 365－376.

[14] Lyndon, R. C., On Dehn's algorithm, *Math. Ann.*, 166 (1966), 3, 208－228.

[15] Ремесленников, В. Н., 《Алгебра и логика》, 12 (1973), 5, 577－602.

[16] Garsaid, F. A., The braid group and other groups, *Quart. J. Math. Oxford Sev.* (2), 20 (1969), 235－254.

[17] Марков, А. А., 《Докл. АН СССР》, 123 (1958), 6, 978－980.

[18] Davis, M. and Maschler, M., Reductions of Hilbert's tenth problem, *J. Symbolic Logic*, 23 (1958), 183－187.

[19] Robinson, J., Existential definability in arithmetic, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 72 (1952), 437－449.

[20] Матиясевич, Ю. В., 《Докл. АН СССР》, 191 (1970), 2, 279－282.

[21] Матиясевич, Ю. В., 《Изв. АН СССР Сер. матем.》, 35 (1971), 1, 3－30.

С. И. Адян 撰

【补注】Church 论题通常认为，用各种等价方式，例如通过 Turing 机 (Turing machine) 定义的递归函数 (recursive function) 概念是我们直观的能行可计算性 (effective computability) 概念的正确表述．现在 Church 论题已被广泛地接受．

停机问题(halting problem)问的是：是否存在能行的步骤以判定给定的 Turing 机 M 及输入 x 是否计算将令终止．N^k 的一子集是递归的若它的特征函数是递归的．设一切 Turing 机被枚举且令 M_x 是有下标 x 的机器．这时，定理：$\{(x,y): M_x$ 对输入 y 停止$\}$不是一递归集，便是停机问题不可解性的严格陈述．

肯定存在一个具有表述(即生成元及关系给出的)的群，它的字的问题不可解．这个结果通常称作 Boone - Новиков 定理(Boone - Novikov theorem)．

一群类 $\mathfrak{G}$ 是不变的(invariant)，若 $G\in\mathfrak{G}$ 且 H 和 G 同构蕴涵 $H\in\mathfrak{G}$．它是非平凡的，若它的里面外面都有有限表示群，且它是可传的，若 $\mathfrak{G}$ 的元素的子群也是 $\mathfrak{G}$ 的元素．Adyan - Rabin 定理(Adyan - Rabin theorem)是说，若 $\mathfrak{G}$ 是一不变、非平凡且可传的类，则不存在算法可以判定由有限问题给出的群是否属于此类．Adyan - Rabin 定理适用的性质包括，是循环的；是交换的；是自由的；是可解的；是有限的及是等于单位元群的．

最早提出和支持 Church 论题的文章有[A2]，[A3]，[A4]和[A5]共同给出算法不可解性的卓越的介绍．文献[A1]包含关于群的字问题的丰富有趣的材料和索引．

参考文献

[A1] Boone, W. W., Cannonito, F. B. and Lyndon, R. C., Word problems, North - Holland, 1973.

[A2] Church, A., An unsolvable problem of elementary number theory (abstract), *Bull. Amer. Math. Soc.*, **41** (1935), 332 – 333.

[A3] Church, A., An unsolvable problem of elementary number theory, *Amer. J. Math.*, **58** (1936), 345 – 363.

[A4] Davis, M., Unsolvable problems, in J. Barwise (ed.), Handbook of mathematical logic, North - Holland, 1977, 567 – 594.

[A5] Enderton, H. B., Elements of recursion theory, in J. Barwise (ed.), Handbook of mathematical logic, North - Holland, 1977, 527 – 566. 杨东屏 译

算法可归约性[algorithmic reducibility; алгоритмаческая сводимость]

算法论(algorithms, theory of)及其应用的基本概念之一．其背景是：很多**算法问题**(algorithmic problem)的可解性(和不可解性)往往不是直接证明的，而是把某个已经证明是不可解的算法问题归约到所给的问题，或者把后一问题归约到某个已经解决的问题．例如，多面体的路径同伦问题就是通过归约到它所对应的基本群的字的相等问题而证明其不可解的．

在下面，数论谓词和函数(即定义在自然数上的谓词和函数)的算法可归约性的最简单例子将表示为

$$P(x) \equiv Q(2x+1),$$

其中 P, Q 为谓词．解谓词 P 的问题(problem of solving the predicate)，即对不同的 x 值证明 P 真或假的问题，被归约到解 Q 的问题——或简言之，"P 归约到 Q"．也可以说 P 的真假集，即 $\{x|P(x)\}=M_P$，被归约到 $M_Q=\{x|Q(x)\}$．

令

$$f(x) = \sum_{u=1}^{x}\prod_{y=1}^{u} g(u,y),$$

其中 $f(x)$ 及 $g(u,y)$ 是数论函数．函数 f 的计算问题(problem of computation of the function)被归约到 g 的计算，或简言之，f 被归约到 g．

A. M. Turing 给出了算法可归约性的更确切形式：粗略地说，若某 **Turing 机**(Turing machine)把函数 g 的值的编码的序列转换为函数 f 的值的编码的序列，那么 f 被归约到 g．S. C. Kleene ([1])借助于递归方程组陈述了有关相对可计算性的概念．经过算术化以后，每个算法问题被归约为某个数论函数 f 的计算问题．若 f 被 Turing 归约到 g, $f\leqslant_T g$，且 g 归约到 f, $g\leqslant_T f$，那么称 f 和 g 有相同的不可解度(degree of unsolvability)，或 $f\equiv_T g$．关系 $\leqslant_T$ 是自反的和传递的．所以一切函数(和自然数集或它们的特征谓词)可被分为称之为 Turing 度(Turing degrees)或 T 度(T - degrees)的等价类([3])．在逻辑和数学中考虑的大多数算法问题可表示为在可构造对象的可枚举集中的归属问题．用此角度对可枚举集的研究是 E. L. Post 在 20 世纪 40 年代开始的([2])；除 Turing 归约外，他还引进了其他的特殊算法可归约性并且把可归约性(reducibility)的问题陈述如下：不同的可枚举不可解集能否互相(Turing)归约？随后证实可枚举集形成 T 度的一个无穷的很丰富的体系．这是由于发现了在算法理论中有广泛应用的优先法(priority method)而做到的．

其后在数学的其他分支中也同样发现了不可解度的应用．例如对一切可枚举集的 T 度 a 和 b，若 $a\leqslant_T b$，则存在一有限确定群其字的相等问题的度为 a，而其共轭问题的度为 b．在可枚举集的度(考虑不同算法可归约性度)和可枚举集初始段的复杂性增长率之间有密切关联．一个特殊的可归约性——多项式可归约性(polynomial reducibility)或 p 可归约性(p - reducibility)(有某种时间限制的可归约性)——在证明数学各个分支里组合最优化问题的通用特征时被用到([5])，这方面的更详细情况可见[1]．测度论方法([1])和**力迫法**(forcing method)([4])在度的研究中被依次应用．

参考文献

[1] Rogers, jr., H., Theory of recursive functions and effective computability, McGraw - Hill, 1967.

[2] Post, E. L., Recursively enumerable sets of positive integers and their decision problems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **50** (1944), 284 – 316.

[3] Kleene, S. C. and Post, E. L., The upper semi - lattice of degrees of recursive unsolvability, *Ann. of Math.* (2), **59** (1954), 3, 379 – 407.

[4] Selman, A. L., Applications of forcing to the degree-theory of the arithmetical hierarchy, *Proc. London Math. Soc.* (3), **25** (1972), 586 – 602.

[5] Karp, R. M., Reducibility among combinatorial problems, in R. E. Miller and J. W. Thatcher (eds.), Complexity of computer computations, Plenum Press, 1972, 85 – 103. A. A. Мучник 撰

【补注】

参考文献

[A1] Soare, R. I., Recursively enumerable sets and degrees, Springer, 1986.

[A2] Simpson, S. G., Degrees of unsolvability: a survey of results, in J. Barwise (ed.), Handbook of mathematical logic, North - Holland, 1977, 631 – 652. 杨东屏 译

算法集合论[algorithmic theory of sets; алгоритмическая теория множеств]

见递归集合论(recursive set thory).

算法的组合[algorithms, combinations of; алгоритмов сочетания]

几种由给定算法构造出新算法(algorithm)的方法的名称.

当应用到**正规算法**(normal algorithm)时，下述算法组合(合成)是最有名的：两个正规算法 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 的正规合成(normal composition)($\mathfrak{B}\circ\mathfrak{A}$)，两个正规算法 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 的正规并(normal union)($\mathfrak{A}\frown\mathfrak{B}$)，两个正规算法 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 被一正规算法 $\mathfrak{C}$ 控制的正规分支(normal branching)($\mathfrak{A}\curlyvee\mathfrak{B}|\mathfrak{C}$)，和正规算法 $\mathfrak{A}$ 被正规算法 $\mathfrak{C}$ 控制的正规重复(normal repetition)$\mathfrak{A}\circlearrowleft\mathfrak{C}$. 若 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{B}$ 和 $\mathfrak{C}$ 是某字母表 A 上的正规算法，则上述组合仍是 A 的某给定扩张上的正规算法且满足如下条件：1)对 A 中的任何字 P，$(\mathfrak{B}\circ\mathfrak{A})[P]\simeq\mathfrak{B}[\mathfrak{A}[P]]$ 为真(合成定理(composition theorem))；2)对 A 中的任何字 P，$(\mathfrak{A}\frown\mathfrak{B})[P]\simeq\mathfrak{A}[P]\mathfrak{B}[P]$ 为真(并集定理(union theorem))；3)对 A 中的任何字 P，

$$(\mathfrak{A}\curlyvee\mathfrak{B}|\mathfrak{C})\lfloor P\rfloor\simeq\begin{cases}\mathfrak{A}\lfloor P\rfloor & 若\ \mathfrak{C}\lfloor P\rfloor\eqcirc F,\\ \mathfrak{B}\lfloor P\rfloor & 若\ \mathfrak{C}\lfloor P\rfloor\not\eqcirc F,\end{cases}$$

另外，若 $(\mathfrak{A}\curlyvee\mathfrak{B}|\mathfrak{C})[P]$ 已被定义，则 $\mathfrak{C}[P]$ 也被定义(分支定理(branching theorem))；4)对 A 中的任何字 P 和 Q，**图解等式**(graphic equality)($\mathfrak{A}\circlearrowleft\mathfrak{C}$)$[P]\eqcirc Q$ 为真，当且仅当可以找出字母表 A 中的字序列 $P_0,\cdots,P_k(k\geqslant1)$，使得

$$P_0\eqcirc P,\quad P_k\eqcirc Q,$$
$$P_i\eqcirc\mathfrak{A}\lfloor P_{i-1}\rfloor\quad(i=1,\ldots,k),$$
$$\mathfrak{C}\lfloor P_k\rfloor\not\eqcirc F\quad(i=1,\ldots,k-1),$$
$$\mathfrak{C}\lfloor P_k\rfloor\eqcirc F$$

(重复定理(repetition theorem)．对 **Turing 机**(Turing machine)也可得到类似定理．在**递归函数**(recursive function)论中经常使用的函数的组合是代入算子，原始递归(recursion)算子及 μ 算子．

关于算法的组合定理揭示了算法的一般概念实现的形式化的重要特征，即它们在自然的算法组合方式下是封闭的．这个事实是支持关于算法的基本假设(**Church 论题**(Church thesis))的基本论据之一．关于算法组合的定理是算法一般理论的重要部分．一旦获得证明，就可以确定复杂和繁琐算法的可实现性，而不必实际写出它们的格式．

在算法的一般理论中有重要意义的问题是，在某个重要的类里利用一套预定的组合算子来产生任意的算法．

参考文献

[1] Марков, А. А., Теория алгорифмов, 《Тр. Матем. ин-та АН СССР》, 42 (1954), 94－145.

[2] Kleene, S. C.: Introduction to metamathematics, North-Holland, 1951 (中译本：S. C. 克林，元数学导论，科学出版社，上册 1984，下册 1985).

[3] Успенский, В. А., Лекции о вычислимых функциях, М., 1960.

[4] Мальцев, А. И., Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965 (英译本：Mal'tsev, A. I., Algorithms and recursive functions, Wolters Noodhoff, 1970).

Н. М. Нагорный 撰

【补注】 在西方，上述组合算子的标准用语按出现的顺序是序列合成(sequential composition)，非确定性选择(non-deterministic choice)，"若-则-否则"(if-then-else)和"当循环"(while loop)．上述类型的典型结果是结构程序设计能力的刻画：每个框图可以表示为由简单的赋值语句经过序列合成，"若-则-否则"和"当"等算子得到的一个框图[A1].

参考文献

[A1] Böhm, C. and Jacopini, G., Flow diagrams, Turing machines and languages with only two formation rules, *Comm. ACM*, 9 (1966), 366－371.

杨东屏 译

算法的等价性[**algorithms, equivalence of; алгоритмов эквивалентность**]

联系一定类型的算法的二元关系(binary relation)，这种二元关系表示以下事实：当送人同样类型的输入时两个由此种关系联系的算法产生同样的结果(也可能产生关于执行此计算的附带信息——所谓计算的历史(history of computation))．下面给出这种关系的几个典型例子．

a) 考虑所有可能的递归模式(recursive schemes)，即定义 n 元部分递归函数的等式系．定义函数 φ 和 ψ 的两个模式称为函数等价的(functionally equivalent)，若对任意自然数 $x_1,\cdots,x_n$，条件等式

$$\varphi(x_1,\ldots,x_n)\simeq\psi(x_1,\ldots,x_n)$$

为真(若两边同时有意义，且当有意义时给出相同的值，这时认为是真的)．S. C. Kleene (例如见[1])证明了，对于任意在递归模式上处处有定义的可计算算子 $\mathfrak{R}$ 都可以找到一模式 S 使得 $\mathfrak{R}(S)$ 和 S 是函数等价的(所谓不动点定理(fixed-point theorem))．特别地，它的推论有，在一定条件下，即当存在模式 S_1 和 S_2，使得 S_1 有此性质而 S_2 无此性质时，递归模式的关于函数等价性不变的任何性质的不可解性的 Успенский-Rice 定理．由此定理可得函数等价性的关系本身的不可解性．

b) 考虑一给定字母表 A 上的正规算法(normal algorithm)，两个这种算法 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 称为关于 A 是等价的(equivalent)，若对 A 上任意字下述条件满足：如果这两个算法中的一个把字 P 转换到同一字母表 A 上的字 Q，那么另一个算法也把 P 转换到 Q (见[2])．这两个算法称为关于 A 完全等价的(completely equivalent)，若对 A 上任意 P 条件等式

$$\mathfrak{A}(P) \simeq \mathfrak{B}(P)$$

为真．这两个关系都是不可解的．

c) 考虑算法的逻辑模式(Янов 模式(Yanov schemes)见[3])．这种模式的实现是在它由头到尾的执行中包含的算子序列．两个模式称为等价的(equivalent)，若它们的实现集相重．Янов 模式的等价关系被证明是可解的，而且对它已构造出等价变换的完全系(见[3]，[4])．

算法等价关系的详细研究对于只能用算法等价变换先进技术完成的一些当前迫切的任务(特别在程序设计模式理论中)具有很大的重要性．这些问题包括由一种语言到另一种语言的算法的翻译及其最优化(为了改进它们的"工作特征"的翻译)．这方面特别引起注意的是，能够找到使等价变换完全系在应用中方便的算法等价性可解关系(见[5])．[3] 中略述的概念在很大程度上决定算法等价性研究的一般方法．

参考文献

[1] Kleene, S. C., Introduction to metamathematics, North-Holland, 1951 (S. C. 克林，元数学导论，科学出版社，上册 1984. 下册 1985).

[2] Марков, А. А., Теория алгорифмов, М., 1954 (A. A. 马尔科夫，算法论，科学出版社，上册 1959，下册 1960).

[3] Янов, Ю. И., 《Проблемы кибернетики》, 1958, 1, 75－127.

[4] Ершов, А. П., 《Проблемы кибернетики》, 1968, 20, 181－200.

[5] Ершов, А. П., 《Проблемы кибернетики》, 1973, 27, 87－110.

Н. М. Нагорный 撰 杨东屏 译

算法论 [**algorithms, theory of**; **алгоритмов теория**]

研究算法(algorithm)的一般性质的数学分支．在数学史上算法的原始概念起过重要作用．但是在 20 世纪才叙述了算法概念本身，且在 20 世纪 20 年代才成为 L. E. J. Brouwer 和 H. Weyl 的**直觉主义**(intuitionism)学派独立的研究对象(最初只有非常模糊的定义形式)(见[17])．系统的研究开始于 1936 年 A. Church 发表的对**可计算函数**(computable function)概念的第一次表述(他提出变元为自然数、值也为自然数的处处有定义的可计算函数的概念和一般递归函数的概念是等同的)，他还给出了第一个不可计算函数的例子([2])．A. M. Turing ([3], [4])和 E. L. Post ([5])给出算法概念的最早的精确表述(用理想化的机器，见 **Turing 机**(Turing machine))．其后算法论的发展归功于 Kleene, Post ([6], [7], [8])，А. А. Марков ([9], [10], [11])等人的研究．特别是，Марков 引进**正规算法**(normal algorithm)的概念，进一步使算法的概念更精确(见[10])．А. Н. Колмогоров 建议对这个概念作最一般的研究(见[12], [13])．

因为算法只处理所谓**构造对象**(constructive object)，只有当非构造对象被编码或重新命名为构造对象时，算法论的概念和方法才能用于它们．对这种编码(主要是编码为自然数或用自然数命名)的一般性质的研究是构成算法论重要部分的**枚举**(enumeration)理论的主题(见[14])．

算法论的基本概念 算法的可应用域(domain of applicability of a algorithm)是它可应用的对象的集合．人们可以谈论一算法 $\mathfrak{A}$：1) "计算函数 $f(x)$"，若它的域和 f 的定义域相同，且 $\mathfrak{A}$ 把它的域中的任意 x 转换为 $f(x)$; 2) "关于集合 X 解集合 A"，若它可应用于 X 中的任何 x 且把 $X\cap A$ 中的一切元素 x 转换为字"是"，把 $X\setminus A$ 中的一切 x 转换为字"否"; 3) "计数(枚举)集合 B"，若它的域是自然数序列，而结果集是 B．一个函数称为可计算的(computable)，若存在一个算法对这个函数赋值．一个集合称为关于 X 可解的(solvable)，若存在一个算法关于 X 解这个集合．一个集合称为可枚举的(enumerable)，若这个集合是空集或有一算法枚举它．

算法概念的仔细分析揭示：1) 一个算法可应用的初始数据域及值域是可枚举集．因此 2) 对任意一对可枚举集，其中一个包含在另一个之中，可以找到一个算法，使大的集是输入域，小的集是输出域．下述基本定理成立．3) 一个函数 f 是可计算的，当且仅当它的图，即一切形如 $\langle x, f(x)\rangle$ 的对的集合是可枚举的．4) 可枚举集 X 的子集 A 是关于 X 可解的，当且仅当 A 和 $X\setminus A$ 是可枚举的．5) 若 A 和 B 是可枚举的，则 $A\cup B$ 和 $A\cap B$ 也是可枚举的．6) 在每个无穷可枚举集 X 内存在一个可枚举子集，其补不是可枚举的(由于 4)这可枚举子集关于 X 是不可解的)．7) 对每个无穷可枚举集 X 存在一个可计算函数，它定义在 X 的子集上但不能扩张为定义在整个 X 上的可计算函数．2) 和 6)合起来给出一个具有不可解的应用域的算法的例子(见**算法**(algorithm))．可解和可枚举集代表了其结构是由一定算法定义的最简单(也最重要)的集合例子．从可构造对象集的与某些算法的存在相联系的性质的观点对这些集合进行的系统研究，组成所谓集合的算法论．这个理论的一些概念、方法及结果在描述集合论(descriptive set theory)中可找到相似之处．

算法问题(algorithmic problem)．构造具有某种性质的算法的问题称为算法问题．所找的算法的性质通常是用算法的输人和结果之间应有的对应来描述．算法问题的某些重要例子是：计算给定函数的问题(即找一个算法来计算给定的函数)；解给定集合的问题(即找出关于另一集合解此集合的一个算法)，枚举给定集合的问题(即找出一个算法枚举给定的集合)．下

面"应用"一节里给的不同数学分支里所有算法问题的例子都是可给定集合的问题．算法问题不可解的意思是不存在对应的算法．建立这类问题的不可解性的定理属于算法论中最重要的定理．例如，若一个算法具有不可解域，则关于一切可能输入的集合解这个域的算法问题是不可解的．通过归约到此问题的不可解性，可以发现多数其他可解性问题是不可解的．特别地，这适用于下面"应用"一节所列出的全部问题．是否任何不可解问题的不可解性都可用此方法建立的问题形成了所谓**算法可归约性**(algorithimic reducibility)问题．

算法论的度量 算法论包括描述的(定性的)理论和度量的(定量的)理论．前者按照他们在初始数据和结果之间建立的对应关系的观点来研究算法；特别地，前节中讨论的一切算法问题属于定性理论．后者按照算法本身(见**算法的描述复杂性**(algorithm, complexity of description of an))和算法定义的计算，即可构造对象逐步转换过程(见**算法的计算复杂性**(algorithm, computational complexity of an))的复杂性观点研究算法．指出下面的事实是重要的：算法的计算复杂性和描述复杂性可用不同方式定义，可能在采用某种定义时 A 比 B 复杂而采用另一种定义时 B 比 A 复杂．为了能讨论算法的复杂性，首先必须指定可用以写出算法的精确语言，然后将算法的复杂性定义为这语言记法的复杂性．而记法的复杂性可以用不同的方式定义(例如，记法中某类型符号的个数，或者对不同类型符号计算的这种数的选择)．为了讨论计算复杂性，必须把计算的精确形式说成是相继替换的可构造对象的链，并指出这种链的复杂性的某个标准(链上的环的数目，即计算的"步数"，或这些环的"维数"等等)．无论如何计算复杂性依赖于计算开始时的输入；因此计算复杂性是一函数，它对每个算法域中的对象赋以对应链的复杂性．算法和计算复杂性赋值的方法的发展有非常重要的理论和实践重要性．但是与现已形成为完整的数学分支(见[11]，[15]，[16])的算法的描述理论不同，算法的度量理论还只处于产生的过程之中(见[17]，[18]，[19]，[20])．

算法论的应用．在数学的各分支中，凡遇到算法问题的，都存在算法理论的应用的问题．这种问题可出现在**数理逻辑**(mathematical logic)和**模型论**(model theory)中；对每个理论可提出问题．在关于它的一切语句中解出这个理论的一切真或可证的语句集(依这问题的可解性或不可解性，这理论可分为可解理论或不可解理论)．1936 年，Church 已证明解谓词演算一切真语句集的问题是不可解的(见[21]，[22])．其他重要结果得自 A. Tarski，A. И. Мальцев 等人(见[23])．代数中已遇到不可解算法问题(关于半群，特别是关于群的字(等同)问题)．具有不可解的字问题的半群的最早例子是在 1947 年由 Марков (见[9])和 Post (见[8])各自独立地提出的，而具有不可解的字问题的群的例子是 1952 年 П. С. Новиков 发现的(见[24]，[25])．1958 年 Марков (见[26])证明拓扑中的同胚问题对一类重要的情况是不可解的．在数论中 Ю. В. Матиясевич 在 1970 年证明了 Diophantos 方程的可解性问题是不可解的(见[27]，[28])．许多其他数学分支也有相似的例子．

算法论与数理逻辑密切相关，因为算法的概念形成了数理逻辑的中心概念之一——**演算**(calculus)的概念的基础，结果，形式系统的 **Gödel 不完全性定理**(Gödel incompleteness theorem)可由算法论的定理得到(见[29])．最后，算法论和数学基础关系密切，数学基础中关键问题之一是可构造性和非可构造性之间的关系．特别地，算法论对数学的可构造方向的发展提供了工具．1965 年 Калмогоров 提出(见[30])应用算法论作为信息论的基础(见**算法信息论**(algorithmic information theory))．算法论是计算数学许多问题的理论基础，且与在其中控制算法研究居重要地位的控制论关系密切．

参考文献

[1] Weyl, H., Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaften, Leibniz Verlag, München, 1950.

[2] Church, A., An unsolvable problem of elementary number theory, *Amer. J. Math.*, **58** (1936), 345 – 363.

[3] Turing, A. M., On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem, *Proc. London Math. Soc.* (2), **42** (1937), 230 – 265.

[4] Turing, A. M., On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem, a correction, *Proc. London Math. Soc.*, (2), **43** (1937), 544 – 546.

[5] Post, E. L., Finite combinatory processes - formulation 1, *J. Symbolic Logic*, **1** (1936), 3, 103 – 105.

[6] Post, E. L., Formal reductions of the general combinatorial decision problem, *Amer. J. Math.*, **65** (1943), 197 – 215.

[7] Post, E. L., Recursively enumerable sets of positive integers and their decision problems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **50** (1944), 284 – 316.

[8] Post, E. L., Recursive unsolvability of a problem of Thue, *J. Symbolic Logic*, **12** (1947), 1, 1 – 11.

[9] Марков, А. А., 《Докл. АН СССР》, **55** (1947), 7, 587 – 590.

[10] Марков, А. А., 《Тр. Матем. ин-та АН СССР》, **38** (1951), 176 – 189.

[11] Марков, А. А., Теория алгорифмов, М. - Л., 1954 (中译本：А. А. 马尔科夫，算法论，科学出版社，上册 1959，下册 1960)．

[12] Колмогоров, А. Н., 《Успехи матем. наук》, **8** (1953),

4, 175 – 176.

[13] Колмогоров, А. Н., Успенский В. А., «Успехи матем. наук», 13 (1954), 4, 3 – 28.

[14] Ершов, Ю. Л., Теория нумераций, ч 1 – 2, Новосибирск, 1969 – 1973.

[15] Мальцев, А. И., Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965 (英译本: Mal'tsev, A. I., Algorithms and recursive functions, Wolters - Noordhoff, 1970).

[16] Rogers, jr., H., Theory of recursive functions and effective computability, McGraw - Hill, 1967.

[17] Марков, А. А., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 31 (1967), 1, 161 – 208.

[18] Трахтенброт, Б. А., Сложность алгоритмов и вычислений, Новосибирск, 1967.

[19] Проблемы математической логики. Сложность алгоритмов и классы вычислимых функций, сб переводов, М., 1970.

[20] Сложность вычислений и алгоритмов, сб. переводов, М., 1974.

[21] Church, A., A note on the Entscheidungsproblem, *J. Symbolic Logic*, 1 (1936), 1, 40 – 41.

[22] Church, A., Correction to 'a note on the Entscheidungsproblem', *J. Symbolic Logic*, 1, (1936), 3, 101 – 102.

[23] Ершов, Ю. Л., Лавров, И. А. и др., «Успехи матем. наук», 20 (1965), 4, 37 – 108.

[24] Новиков, П. С., «Докл. АН СССР», 85 (1952), 4, 709 – 712.

[25] Новиков, П. С., Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества слов в теории групп, М., 1955.

[26] Марков, А. А., «Докл. АН СССР», 121 (1958), 2, 218 – 220.

[27] Матиясевич, «Докл. АН СССР», 191 (1970), 2, 279 – 282.

[28] Матиясевич, Ю. В., «Успехи матем. наук», 27 (1972), 5, 185 – 222.

[29] Успенский, В. А., «Успехи матем. наук», 29 (1974), 1, 3 – 47.

[30] Колмогоров, А. Н., «Проблемы передачи информации», 1 (1965), 1, 3 – 11.

В. А. Успенский 撰

【补注】 由于有了上述内容，算法复杂性理论已发展成熟并成为数学的一个成长良好的分支.

也可参看算法的计算复杂性的注解.

在 [27], [28] 之外也可以参看 [A1], [A2]. [A3] 中有关于计算复杂性的系统论述.

参考文献

[A1] Davis, M., Hilbert's tenth problem is unsolable, *Amer. Math. Monthly*, 80 (1973), 233 – 269.

[A2] Matijasevic, J. V.: A new proof of the theorem of exponential Diophantine representation of enumerable sets, *J. Soviet Math.*, 14 (1980), 1475 – 1486.

[A3] Wagner, K. and Wechsung, G., Computational complexity, Reidel, 1986.

杨东屏 译

单分数 [**aliquot ratio** 或 **aliquot fraction; аликвотная дробь**]

形式为 $1/n$ 的分数，其中 n 是自然数. 在求解一系列数学和物理问题时，重要的是能够把每个正有理数表示为有限个不同分母的单分数之和. 例如，$3/11 = 1/6 + 1/11 + 1/66$. 单分数在古埃及已被广泛应用，因而也称为埃及分数 (Egyptian fractions).

Б. М. Бредихин 撰　张鸿林 译

殆复结构 [**almost - complex structure; почти комплексная структура**]

流形 M 上切空间的线性变换张量场 I，它满足条件

$$I^2 = -\mathrm{id},$$

即切空间 $T_pM (p \in M)$ 的复结构 (complex structure) 的场. 一个殆复结构 I 确定了切丛的复化 T^CM 的一个直和分解 $T^CM = V_+ + V_-$，这里 V_+ 和 V_- 分别是由仿射量 (affinor) I (线性扩张到 T^CM 上) 对应于特征值 i 和 $-i$ 的特征向量所组成的两个互为复共轭的子丛. 反之，T^CM 表示成互为共轭的向量子丛 S 和 $\bar{S}$ 的直和的一个分解定义了 M 上的一个殆复结构，使得 $V_+ = S$.

若殆复结构 I 是由 M 上的一个复结构诱导的，即流形 M 上存在容许的坐标图册，使得场 I 具有常值坐标 I_k^j，则称 I 是可积的 (integrable). 殆复结构可积的充要条件为子丛 V_+ 是对合的，即它的截面的空间关于 (复) 向量场的换位运算是封闭的. 子丛 V_+ 为对合的条件等价于关于 I 的向量值 2 形式 $N(I, I)$ 为零，这里 $N(I, I)$ 由下式给出:

$$N(I, I)(X, Y) =$$

$$= [IX, IY] - I[X, IY] - I[I, XY] - [X, Y].$$

其中 X 和 Y 是向量场. 这个形式称为殆复结构的挠率张量 (torsion tensor) 或 Nijenhuis 张量 (Nijenhuis tensor). 挠率张量 $N(I, I)$ 可看作 M 的微分形式代数上的一阶微分，即可表为

$$N(I, I) = [I, [I, d]] + d,$$

其中 d 是外微分，I 看成零阶微分.

从 G 结构理论的观点来看，一个殆复结构是一个 $GL(m, \mathbf{C})$ 结构，其中 $m = (1/2)\dim M$；而挠率张量 $N(I, I)$ 是由这结构的第一结构函数定义的张量. 因为 $GL(m, \mathbf{C})$ 结构是椭圆型的，所以殆复结构的无穷小自同构的 Lie 代数满足二阶椭圆型微分方程组 ([1]). 特别地，紧流形上殆复结构的无穷小自同构的 Lie 代数是有限维的，并且具有殆复结构的紧流形上所

有自同构的群 G 是一个 Lie 群．对于非紧的流形，这些论述一般不正确．

若自同构群 G 可迁地作用在流形 M 上，则殆复结构 I 被它在一定点 $p\in M$ 的值 I_p 唯一确定．这表明 I 是切空间 T_pM 上关于迷向表示（见齐性空间的**不变对象**(invariant object)）的一个不变复结构．Lie 群论的方法使我们能构造一大类具有不变殆复结构（可积的与不可积的）的齐性空间，并且在不同假设下对不变殆复结构进行分类（[2]）．例如，设 G 是任一 Lie 群，H 是由 G 的偶数阶自同构的不动点组成的子群，那么商空间 G/H 就有一个不变殆复结构．一个例子是看作齐性空间 $G_2/SU(3)$ 的 6 维球面 S^6；在 S^6 上任何不变殆复结构都是不可积的．

流形上殆复结构的存在使流形的拓扑受到某些限制——它必须是偶维数的，可定向的，并且在紧情况下它的一切奇维数的 Stiefel - Whitney 类必为零．在球面中仅有 2 维和 6 维球面容许殆复结构．

参考文献

[1] Kobayashi, S., Transformation groups in differential geometry, Springer, 1972.

[2] Комраков, Б. П., Структуры на многообразиях и однородные пространства, Минск, 1978.

[3] Lichnerowicz, A., Global theory of connections and holonomy groups, Noordhoff, 1976（译自法文）.

[4] Wells, jr. R. O., Differential analysis on complex manifolds, Springer, 1980.

[5] Hörmander, L., An introduction to complex analysis in several variables, North - Holland, 1973.

Д. В. Алексеевский 撰

【补注】 殆复结构的可积性定理，即一个殆复结构为复结构的充要条件是它的 Nijenhuis 张量恒为零，这属于 A. Newlander 和 L. Nirenberg（[A1]）.

参考文献

[A1] Newlander, A. and Nirenberg, L., Complex analytic coordinates in almost complex manifolds, *Ann. of Math.* **65** (1957), 391 - 404.

沈一兵 译

几乎处处 [almost - everywhere；почти всюду]，对几乎所有的 x（关于测度 μ）

一种术语，表示某测度空间 X 上所有的点，可能除去一个测度为 0 的集 A：$\mu(A)=0$ 以外．

В. И. Битюцков 撰　王斯雷 译

殆周期 [almost - period；почти период]

殆周期函数（almost - periodic function）理论中的一个概念，是周期概念的推广．设 $f(x)\,(-\infty<x<\infty)$ 是一致殆周期函数，数 $\tau=\tau_f(\varepsilon)$ 称为 $f(x)$ 的 ε 殆周期（ε - almost - period），如果对一切 x，有

$$|f(x+\tau)-f(x)|<\varepsilon.$$

对于广义殆周期函数，殆周期的概念更为复杂．例如，在空间 S_l^p 中，ε 殆周期 τ 是用不等式

$$D_{S_l^p}[f(x+\tau),f(x)]<\varepsilon$$

定义的，其中 $D_{S_l^p}[f,\varphi]$ 是 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 之间依空间 S_l^p 的度量所确定的距离．

函数 $f(x)$ 的殆周期所成的集合称为相对稠密的（relatively dense），如果存在数 $L=L(\varepsilon,f)>0$，使得实轴上每个形式为 $(\alpha,\alpha+L)$ 的区间都至少含有该集合中的一个数．一致殆周期函数及 Степанов 殆周期函数的概念，都可以通过要求存在这些函数的 ε 殆周期组成的相对稠密集来定义．

参考文献

[1] Левитан, Б. М., Почти - периодические функции, М., 1953（中译本：Б. М. 列维坦，概周期函数，高等教育出版社，1956）.

Е. А. Бредихина 撰

【补注】 空间 S_l^p 及其度量 $D_{S_l^p}$ 的定义见**殆周期函数**（almost - periodic function）．Weyl，Besicovitch 及 Левитан 殆周期函数也可以通过 S_l^p ε 周期来刻画．这些刻画比较复杂．一个很好的补充参考文献是 [A1]，特别是其中的第 II 章．

参考文献

[A1] Besicovitch, A. S., Almost periodic functions, Cambridge Univ. Press, 1932.

朱学贤 译　潘文杰 校

殆周期解析函数 [almost - periodic analytic function；почти периодическая функция аналитическая]

解析函数 $f(s)$ $(s=\sigma+i\tau)$，它在带形区域 $-\infty\leqslant\alpha<\sigma<\beta\leqslant+\infty$ 中正则并能展成级数

$$\sum a_n e^{i\lambda_n s},$$

其中 a_n 是复数而 λ_n 是实数．实数 τ 称为 $f(s)$ 的一个 ε 殆周期（ε - almost - period），如果对于带形 (α,β) 中的所有的点，不等式

$$|f(s+i\tau)-f(s)|<\varepsilon$$

成立．殆周期解析函数是这样一个解析函数，它在带形 (α,β) 中正则并对每个 $\varepsilon>0$ 都存在由 ε 殆周期组成的相对稠密集．闭带形 $\alpha\leqslant\sigma\leqslant\beta$ 上的殆周期解析函数可类似地定义．带形 $[\alpha,\beta]$ 上的殆周期解析函数在带中每一条直线上都是实变量 τ 的一致殆周期函数，而且它在 $[\alpha,\beta]$ 内有界，即在任何内部的带形上有界．如果在带形 (α,β) 中正则的函数 $f(s)$ 在带中的至少一条直线 $\sigma=\sigma_0$ 上是一致殆周期的，则 $f(s)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 内的有界性意味着它在整个带形 $[\alpha,\beta]$ 上的殆周期性．从而证明，殆周期解析函数的理论是与实变量**殆周期函数**（almost - periodic function）理论相类似的理论．因此，后者的许多重要结果都能很容易地转移到殆周期解析函数上

去：唯一性定理，Parseval 等式、Dirichlet 级数的运算法则，逼近定理以及若干其他定理.

参考文献

[1] Bohr, H., Almost-periodic functions, Chelsea, reprint, 1947 (译自德文).

[2] Левитан, Б. М., Почти-периодические функции, М., 1953(中译本：Б. М. 列维坦，概周期函数，高等教育出版社，1956).

Е. А. Бредихина 撰

【补注】 在 almost 和 periodic 之间的连字符有时被省去.

参考文献

[A1] Corduneanu, C., Almost periodic functions, Interscience, 1961, Chapt. 3.

朱学贤 译 潘文杰 校

殆周期函数 [**almost-periodic function; почти периодическая функция**]

能表示为广义 Fourier 级数的函数. 分别根据闭包、殆周期及平移的概念，可以有几种方法来定义殆周期函数类. 但这些函数类中的每一类，都可以依某种度量，作为由所有有限的三角和组成的集合的闭包而得到.

设 G 是 $\mathbf{R}$ 上实值或复值函数的度量空间，而 $D_G[f(x),\varphi(x)]$ 是 G 中的两个函数 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 之间的距离. 在下文中，G 将是空间 U, S_l^p, W^p 及 B^p 中的某一个. 这里，U 是实轴上有界连续函数的集合，其度量定义为

$$D_U[f(x),\varphi(x)] = \sup_{-\infty<x<\infty} |f(x)-\varphi(x)|;$$

而 S_l^p, W^p 及 $B^p(p\geqslant 1)$ 都是在实轴的任意有限区间上 p 次方可积的可测函数的集合，它们的度量分别定义为

$$D_{S_l^p}[f(x),\varphi(x)] =$$

$$= \sup_{-\infty<\xi<\infty}\left[\frac{1}{l}\int_{\xi}^{\xi+l}|f(x)-\varphi(x)|^p\,dx\right]^{1/p},$$

$$D_{W^p}[f(x),\varphi(x)] = \lim_{l\to\infty} D_{S_l^p}[f(x),\varphi(x)],$$

及

$$D_{B^p}[f(x),\varphi(x)] = \left[\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(x)-\varphi(x)|^p\,dx\right]^{1/p}.$$

设 T 是形如

$$\sum_{k=1}^{N} a_k e^{i\lambda_k x}$$

的三角多项式的集合，其中 λ_k 是任意实数而 a_k 是复数，并且用符号 $H_G(T)$ 表示 T 在 G 中的闭包. 这时，函数类 $H_U(T)=U$-a.p. 表示一致殆周期函数类或 **Bohr 殆周期函数** (Bohr almost-periodic functions) 类，$H_{S_l^p}(T)=S_l^p$-a.p. 表示 **Степанов 殆周期函数** (Stepanov almost-periodic functions) 类；$H_{W^p}(T)=W^p$-a.p. 表示 **Weyl 殆周期函数** (Weyl almost-periodic functions) 类；$H_{B^p}(T)=B^p$-a.p. 表示 **Besicovitch 殆周期函数** (Besicovitch almost-periodic functions) 类. 这些殆周期函数类在加法下是不变的. 每一类在包含 $f(x)$ 的同时还包含了函数 $\overline{f}(x)$, $|f(x)|$ 及 $f(x)e^{i\lambda x}$, 其中的 λ 是实数. 因为度量 $D_{S_l^p}[f(x),\varphi(x)]$ 对 l 的所有值都是拓扑等价的，所以不妨假定 $l=1$. 令 S_1^p-a.p.$=S^p$-a.p., S^1-a.p.$=S$-a.p. 及 B^1-a.p.$=B$-a.p., 于是有

$$U-\text{a.p.} \subset S^p-\text{a.p.} \subset W^p-\text{a.p.} \subset B^p-\text{a.p.},\quad p\geqslant 1.$$

如果 $p_1<p_2$ 及 $p_1\geqslant 1$, 则有

$$S^{p_2}-\text{a.p.} \subset S^{p_1}-\text{a.p.},\quad W^{p_2}-\text{a.p.} \subset W^{p_1}-\text{a.p.},$$

$$B^{p_2}-\text{a.p.} \subset B^{p_1}-\text{a.p.}.$$

对任意 $f(x)\in B$-a.p., 平均值 (mean value)

$$M\{f(x)\} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx$$

存在. 函数 $a(\lambda,f)=M\{f(x)e^{-i\lambda x}\}$ 仅仅在 λ 值的一个可数集上不等于零，其中 λ 是实数；这一集合的任意一个枚举称为 $f(x)$ 的 Fourier 指数 (Fourier exponents) 序列 $\{\lambda_k\}$, $k=1,2,\cdots$.

数 $A_{\lambda_k}=a(\lambda_k,f)$ 称为 $f(x)$ 的 Fourier 系数 (Fourier coefficients). 对于前面定义的任意一个函数类中的函数 $f(x)$, 都相应有它的 Fourier 级数

$$f(x)\sim\sum_k A_{\lambda_k}e^{i\lambda_k x}.$$

对于 $f(x)\in B^2$-a.p., 有 Parseval 等式 (Parseval equality)

$$M\{|f(x)|^2\} = \sum_k |A_{\lambda_k}|^2.$$

Riesz-Fischer 定理 (Riesz-Fischer theorem) 也能推广到函数类 B^2-a.p.: 设 $\{\lambda_k\}$ $(k=1,2,\cdots)$ 是任意实数，并设 $\{A_k\}$ $(k=1,2,\cdots)$ 是复数且满足条件 $\sum_{k=1}^{\infty}|A_k|^2<\infty$, 这时存在一个 $f(x)\in B^2$-a.p., 使得三角级数 $\sum_k A_k e^{i\lambda_k x}$ 正好是它的 Fourier 级数.

这里也有唯一性定理 (uniqueness theorem): 如果两个函数 $f(x)\in H_G(T)$ 及 $\varphi(x)\in H_G(T)$ 有相同的 Fourier 级数，则

$$D_G[f(x),\varphi(x)] = 0.$$

特别地，对于一致殆周期函数，唯一性定理中的结论就是 $f(x)=\varphi(x)$ (对于 Степанов 殆周期函数，等式几乎处处成立). 对于 Weyl 或 Besicovitch 殆周期函数，与以 2π 为周期的函数的 Fourier-Lebesgue 级数相同意义下的唯一性定理不成立.

一致殆周期函数类和 Степанов 殆周期函数类，分

别是 $\mathbf{R}$ 上以 2π 为周期的连续函数类和以 2π 为周期且在区间 $[0, 2\pi]$ 上可积的函数类的非平凡的推广. 对于这些殆周期函数类,唯一性定理仍成立.

通过闭包这一概念来定义殆周期函数类的一个结果是逼近定理(approximation theorem): 对于 U(或 S^p, W^p) 中的任意一个殆周期函数 $f(x)$ 及任意 $\varepsilon>0$, 都可以在了中找到一个有限的三角多项式 $P(x)$, 满足不等式

$$D_U[f(x), p(x)] < \varepsilon$$

$$(D_{S^p}[f(x), P(x)] < \varepsilon,\ D_{W^p}[f(x), P(x)] < \varepsilon).$$

逼近定理也可以作为定义各类殆周期函数的出发点. 逼近多项式 $P(x)$ 可能含有一些"额外的"指数,即与 $f(x)$ 的 Fourier 指数不同的指数. 然而,对于逼近定理的某些应用来说,重要的是与 $f(x)$ 的 Fourier 指数不同的指数能够避免在 $P(x)$ 中出现.

由于殆周期函数能用广义 Fourier 级数来表示,因此这些级数的收敛性判别准则的问题就出现了,而且,广义 Fourier 级数的各种求和法(如Bochner- Fejér 求和法等)也就变得有意义了. 于是, 得到了下列判别准则: 如果 Fourier 指数线性无关,则广义 Fourier 级数绝对收敛; 在当 $k\to\infty$ 时 $|\lambda_k|\to\infty$的情形以及在当 $k\to\infty$ 时 $\lambda_k\to 0$ 的情形, Fourier 级数一致收敛.

在殆周期函数理论中,一致收敛性判别准则的重要性由下面的定理所强调: 如果三角级数 $\sum_k a_k e^{i\lambda_k x}$ 在整个实轴上一致收敛,则它是它的和函数 $S(x)\in U$-a.p. 的 Fourier 级数. 推论: 存在带有 Fourier 指数的任意的可数集的一致殆周期函数. 特别地, 一致殆周期函数的 Fourier 指数在有限的距离内可以有极限点或者甚至处处稠密.

以上几类殆周期函数的其他定义依赖**殆周期**(almost - period)的概念及其推广.

除了闭包或殆周期的概念外,平移的概念也能用于定义殆周期函数. 这样,函数 $f(x)$ 是一致殆周期的,当且仅当每个无穷函数序列 $f(x+h_1), f(x+h_2), \cdots$, 都含有一个一致收敛的子序列, 其中的平移数 $h_1, h_2, \cdots$ 是任意实数. 这一定义是考虑群上的殆周期函数的出发点.

如果考虑推广的平移概念,则殆周期函数理论中主要的结果仍然成立. 下列的其他推广是可能而且有用的: 取值于 n 维 Euclid 空间、Banach 空间或度量空间的殆周期函数,以及解析的或调和的殆周期函数.

参考文献

[1] Bohr, H., Almost - periodic functions, Chelsea, reprint, 1947 (译自德文).

[2] Besicovitch, A. S., Almost periodic functions, Cambridge Univ. Press, 1932.

[3] Левитан, Б. М., Почти - периодические функции, М., 1953 (中译本: Б. М. 列维坦, 概周期函数, 高等教育出版社, 1956).

[4] Купцов, Н. П., 《Успехи матем. наук》, 23 (1968), 4, 117－178.

[5] Rudin, W., Fourier analysis on groups, Benjamin, 1962.

[6] Левитан, Б. М., Операторы обобщенного сдвига и некоторые их применения, М., 1962.

[7] Красносельский, М. А., Бурд, В. Ш., Колесов, Ю. С., Нелинейные почти периодические колебания, М., 1970 (英译本: Krasnosel'skii, A. M., Burd V. Sh. and Kolesov, Yu. S., Non - linear almost - periodic oscillations, New York, 1973).

Е. А. Бредихина 撰

【补注】 殆周期函数理论是由 H. Bohr 开创的,他在研究 Dirichlet 级数时, 提出了一致殆周期函数的概念. 最初的定义是用 ε 殆周期的那个定义, 而且逼近定理是该理论中的一个主要成果. 关于现代的处理方法见[A4]中§5及[A10]第1, 6章. 有两种研究方法: 一种是以作为纯周期性的推广的某种构造特性为出发点, 而另一种是以三角多项式的逼近为出发点(还用于定义各类广义殆周期函数), 它们的等价性见[2] 第2章. 上面没有提及的一种有意思的推广是 Левитан 殆周期函数(Levitan almost - periodic functions) (见[A5], 其中称之为 N 殆周期函数(N - almost periodic functions)). 有关一致殆周期函数理论的一种新的研究方法在[A1]中给出, 它导致研究所谓殆自守函数([A9]), 是与前面提到的 Левитан 殆周期函数密切相关的一类函数([A7]).

(一致)殆周期函数除了在调和分析领域以外,在微分方程理论中也有重要的应用,例如见[7], [A8], [A5], [A2] 的第4章及[A10] 的第4, 5章. 在这方面,用**动力系统**(dynamical system)理论将更恰当些,尤其是研究各种类型的殆周期(almost - periodic)以及(或者)回复运动(recurrent motions),见[A2], [A3] 和[A6](注意文献中术语的不一致).

[A11] 可以用来替代[6], 它和[6]具有相同的风格.

参考文献

[A1] Bochner, S., A new approach to almost periodicity, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **48** (1962), 2039－2043.

[A2] Bronštein, I. U., Extensions of minimal transformation groups, Sijthoff & Noordhoff, 1979 (译自俄文).

[A3] Gottschalk, W. H. and Hedlund, G. A., Topological dynamics, Amer. Math. Soc., 1955.

[A4] Katznelson, Y., An introduction to harmonic analysis, Dover, reprint, 1968.

[A5] Levitan, B. M. and Zhikov, V. V., Almost periodic functions and differential equations, Cambridge Univ. Press, 1968 (译自俄文).

[A6] Немыцкий, В. В. и Степанов, В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, М., 1952 (中译本: B. B. 涅梅茨基, B. B. 斯捷巴诺夫, 微分方程

定性理论，科学出版社，1956－1959）.

[A7] Reich, A., Präkompakte Gruppen und Fastperiodicität, *Math. Z.*, **116**(1970), 216－234.

[A8] Sell, G. R., Topological dynamics and ordinary differential equations, v. Nostrand Reinhold, 1971.

[A9] Veech, W. A., Almost automorphic functions on groups, *Amer. J. Math.*, **87**(1965), 719－751.

[A10] Corduneanu, C., Almost periodic functions, Interscience, 1961.

[A11] Levitan, B. M., The application of generalized displacement operators to linear differential equations of the second order, *Amer. Math. Soc. Transl. Series*, **1**(1950), 408－541. (Uspekhi Mat. Nauk, **4** (1949), 1 (29), 3－112.)

朱学贤 译 潘文杰 校

群上的殆周期函数 [almost-periodic function on a group; почти периодическая функция на группе]

定义在 **R** 上的殆周期函数的推广．设 G 是一个(抽象)群．有界复值函数 $f(x)\,(x\in G)$ 称为右殆周期函数(right almost-periodic function)，如果族 $f(xa)$ 按照 G 上的一致收敛拓扑是(相对)紧的，其中 a 取遍整个群 G，即，如果每一个函数序列 $f(xa_1), f(xa_2), \cdots$，都包含有一个在 G 上一致收敛的子序列．G 上的左殆周期函数(left almost-periodic function)类似地定义．可证每一个右(左)殆周期函数 f 也是左(右)殆周期函数，而且当 a 和 b 独立地取遍 G 时，族 $f(axb)$ 是(相对)紧的．后一个性质经常被取作 G 上的殆周期函数的定义．G 上所有殆周期函数组成的集合按照模 $\|f\|=\sup_{x\in G}|f(x)|$ 是一个 Banach 空间．

群上的殆周期函数理论本质上依赖于中值定理(mean-value theorem)(见[5]，[8])．定义在殆周期函数空间上的线性泛函 $M_x\{f(x)\}$ 称为平均值(mean value)，如果有

1) $M_x\{1\}=1$；若 $f(x)\geqslant 0$，则 $M_x\{f(x)\}\geqslant 0$；若 $f(x)\geqslant 0, f\not\equiv 0$，则 $M_x\{f(x)\}>0$．

2) $M_x\{f(xa)\}=M_x\{f(ax)\}=M_x\{f(x^{-1})\}=M_x\{f(x)\}$ 对所有 $a\in G$ 成立．

定义在 G 上的酉矩阵函数 $g(x)=\{g_{ij}(x)\}_{i,j=1}^r$ 称为群 G 的酉表示(unitary representation)，如果有 $g(e)=I_r$ (e 是 G 的单位元素，I_r 是 r 阶单位矩阵)及 $g(xy)=g(x)g(y)$ 对所有 $x, y\in G$ 成立．数 r 称为表示 g 的维数(dimension of the representation g)．矩阵的项 $g_{ij}(x)$ 是 G 上的殆周期函数．在群上的殆周期函数理论中，它们所起的作用如同函数 $\exp(i\lambda(x))$ 在 **R** 上的殆周期函数理论中所起的作用．

两个表示 $g(x)$ 及 $g'(x)$ 称为等价的(equivalent)，如果存在一个常数矩阵 A 使得 $g'(x)=A^{-1}g(x)A$．表示 g 称为不可约的(irreducible)，如果矩阵族 $g(x)\,(x\in G)$ 不含有 $\mathbf{R}^r$ 中一个共同的非平凡的不变子空间．所有不可约的酉表示的集合可以划分成由互相等价的表示组成的等价类．假设从每一个等价类中取出一个表示，并把这样得到的集合记为 S．于是 G 上的殆周期函数的集合

$$H=\{\varphi_\lambda(x)\}=\{\varphi_\lambda:\ \varphi_\lambda=g_{ij}^\lambda,\ g\in S\}$$

关于平均值构成一个正交系(虽然，一般情况下是不可数的)．

定理 1 (Parseval 等式(Parseval equality))．若对殆周期函数 $f(x)$，假定

$$f\sim\sum\varphi_\lambda\frac{M_x\{f(x)\overline{\varphi}_\lambda(x)\}}{[M_x\{|\varphi_\lambda(x)|^2\}]^{1/2}},$$

则有等式

$$M_x\{|f(x)|^2\}=\sum\frac{|M_x\{f(x)\overline{\varphi}_\lambda(x)\}|^2}{M_x\{|\varphi_\lambda(x)|^2\}}.$$

因此，仅对可数多个 λ 值，$M_x\{f(x)\overline{\varphi}_\lambda(x)\}$ 不等于零．

如果存在某对 $i,j, 1\leqslant i,j\leqslant r$，使得 $M_x\{f(x)\overline{g}_{ij}(x)\}\neq 0$，就说表示 $g\in S$ 出现在殆周期函数 f 的 Fourier 级数中．

定理 2 (逼近定理(approximation theorem))．集合 H 在定义了模

$$\|f\|=\sup_{x\in G}|f(x)|$$

的殆周期函数的空间中是稠密的，而且每一个殆周期函数可以用出现在它的 Fourier 级数中的表示的矩阵项的有限线性组合任意好地逼近．

如果 G 是一个拓扑群，则殆周期函数的定义中还需加上要求它的连续性．在这种情形，出现在它的 Fourier 级数中的表示也是连续的．

如果 G 是一个 Abel 群，则连续的酉表示是一维的．它们称为 G 的特征标(characters)．G 的特征标记为 χ，此时 Parseval 等式的形式是

$$M_x\{|f(x)|^2\}=\sum_n|a_n|^2,\quad a_n=M_x\{f(x)\overline{\chi}_n(x)\}$$

在 $G=\mathbf{R}^n$ 的情形，连续的特征标是函数 $\chi(x)=\exp(i\lambda\cdot x)$，其中，$\lambda\in\mathbf{R}^n$，$\lambda\cdot x=\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n$．定理 1 和定理 2 隐含了单变量或多变量殆周期函数理论中的主要结果．

殆周期函数理论中的主要结果的证明以考虑群上的积分方程为基础(见[2])．足够多的紧 Lie 群的线性表示的存在性已经证明了([3])．在这种情形，不变积分(从而，平均值)可以直接建立起来．在抽象紧群上的不变积分已被构造([4])，它依赖于 Peter-Weyl 理论对于这种情形的推广．

群上的殆周期函数的理论可以从 Peter-Weyl 理

论依下面的方式推演出来(见[3]). 设 f 是群 G 上的殆周期函数,令

$$\rho(x,y) = \sup_{a,b\in G} | f(axb) - f(ayb) |,$$

则集合 $E=\{t\in G:\rho(t,e)=0\}$ 是 G 的正规子群, ρ 是商群 G/E 上的不变度量, 而且 f 在 G/E 上一致连续.

f 的殆周期性意味着 G/E 依度量 ρ 的完全化是一个紧群,而且定理 1 和定理 2 可以从 Peter - Weyl 理论推导出来.

参考文献

[1] Левитан, Б. М., Почти-периодические функции, М., 1953 (中译本: Б.М. 列维坦,概周期函数,高等教育出版社, 1956).

[2] Weyl, H., Integralgleichungen und fastperiodische Funktionen, *Math. Ann.*, **97**(1927), 338 - 356.

[3] Peter, F. and Weyl, H., Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossener kontinuierlichen Gruppe, *Math. Ann.*, **97**(1927), 737 - 755.

[4] Neumann, J. von, Zum Haarschen Mass in topologischen Gruppen, *Compositio Math.*, **1** (1934), 106 - 114.

[5] Neumann, J. von, Almost periodic functions in a group I, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **36**(1934), 445 - 492.

[6] Weil, A., *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **200**(1935), 38 - 40.

[7] Yosida, K., Functional analysis, Springer, 1980, Chapt. 8, Sect. 4; 5 (中译本: 吉田耕作, 泛函分析, 人民教育出版社, 1980).

[8] Maak, W., Fastperiodische Funktionen, Berlin, 1950.

В. В. Жиков, Б. М. Левитан 撰

【补注】 有时用"不变平均值"(invariant mean)一词代替"平均值"(见[A1]的§18).

若 G 是 Abel 群,则一致殆周期函数正好是能连续延拓到 G 的 **Bohr 紧化** (Bohr compactification)上的那些殆周期函数.

有关群上的殆周期函数理论的完整叙述可在[A2]以及[A3]的§41中找到. 基本的观点是,在(拓扑)群 G 上的(连续)殆周期函数的 **Banach 代数** (Banach algebra) 同构于所谓 G 的 **Bohr 紧化** G_c 上的所有连续函数的 Banach 代数. 由此可见,这一理论归结为紧群上的连续函数的理论(例如, 中值定理相应于 G_c 上的正规化 **Haar 测度**(Haar measure),而逼近定理只不过是熟知的紧群上的 Peter - Weyl 定理,等等). G 的 Bohr 紧化可以刻画成 G 在所有紧群的子范畴中的反射(reflection). 通过考虑在所有拓扑群(或者,甚至是所有半拓扑半群)组成的范畴的其他子范畴中的反射,可以定义群(或半群)上的其他殆周期函数类, 见[A4]. 弱殆周期函数在泛函分析的应用中(算子的半群)是有特殊意义的. 亦见[7]及[A5].

参考文献

[A1] Hewitt, E. and Ross, K. A., Abstract harmonic analysis, 1, Springer, 1979.

[A2] Weil, A., l'Intégration dans les groupes topologiques et ses applications, Hermann, 1940.

[A3] Loomis, L. H., An introduction to abstract harmonic analysis, v. Nostrand, 1953.

[A4] Berglund, J. F., Junghen, H. D. and Milnes, P., Compact right topological semigroups and generalizations of almost periodicity, Lect. Notes in Math., Vol. 663, Springer, 1978.

[A5] Burckel, R. B., Weakly almost periodic functions on semigroups, Gordon and Breach, 1970.

[A6] Corduneanu, C., Almost periodic functions, Interscience, 1961, Chapt. 7.

[A7] Glicksberg, I. and Leeuw, K. de, Almost periodic functions on semigroups, *Acta Math.*, **105** (1961), 99 - 140.

[A8] Amerio, L. and Prouse, G., Almost - periodic functions and functional equations, v. Nostrand, 1971.

[A9] Dixmier, J., C^* algebras, North - Holland, 1977 (译自法文).

朱学贤 译 潘文杰 校

殆素数 [**almost - prime number ; почти простое число**] 能表示为下列形式的自然数 n:

$$n = p_1 \cdots p_k,$$

其中 p_i 是素数, $k\geq 1$ 是常数. 素数是殆素数当 $k=1$ 时的特殊情况. 对于殆素数,存在一些定理,它们是有关素数在自然数序列中分布的定理的推广. 一些对于素数尚未解决的**加性问题**(additive problems),对于殆素数则已经解决.

Б. М. Бредихин 撰

【补注】 亦见**筛法** (sieve method).

下述实例是一个殆素数分布定理,它推广了关于素数的相应结果. 设 $\pi_k(x)$ 是不超过 x 的无平方因子的殆素数的个数,则(见 [A1], 22, 18节),有

$$\pi_k(x) \sim \frac{x(\log\log x)^{k-1}}{(k-2)!\log x}.$$

参考文献

[A1] Hardy, G. H. and Wright, E. M., An introduction to the theory of numbers, Clarendon Press, 1965.

张鸿林 译

几乎可简化的线性系统 [**almost - reducible linear system ; почти приводимая линейная система**],常微分方程的一个系统

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x\in \mathbf{R}^n, \qquad (*)$$

$$A(\cdot): \mathbf{R} \to \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n),$$

具有如下性质：存在一个常系数系统 $\dot{y}=By, y\in\mathbf{R}^n$，并且对每一个 $\varepsilon>0$，有**Ляпунов 变换**(Lyapunov transformation) $L_\varepsilon(t)$，使得经过变量替换 $x=L_\varepsilon(t)y$ 后，系统(*)可变为系统

$$\dot{y} = (B+C_\varepsilon(t))y,$$

其中

$$\sup_{t\in\mathbf{R}}\|C_\varepsilon(t)\|<\varepsilon.$$

每一个**可简化的线性系统**(reducible linear system)均为几乎可简化的.

参考文献

[1] Изобов, Н. А., Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 12, М., 1974, 71–146.

В. М. Миллионщиков 撰 周芝英 译

殆辛结构 [**almost - symplectic structure**；**почти симплектическая структура**]

流形上一个非蜕化的二次外微分形式．一个殆辛结构 Ω 仅在偶维数的流形 $M(\dim M=2m)$ 上才能存在，并且它定义了一个 $\mathrm{Sp}(m,\mathbf{R})$ 结构 $B_{\mathrm{Sp}(m,\mathbf{R})}$，即 M 上具有结构群 $\mathrm{Sp}(m,\mathbf{R})$ 的标架主纤维丛，它由一切这样的标架 $r=\{e_i, f_i: i=1,\cdots,m\}$ 组成，使得

$$\Omega(e_i,e_j)=\Omega(f_i,f_j)=0,\quad \Omega(e_i,f_j)=\delta_{ij}.$$

流形 M 上存在殆辛结构(或殆复结构)的充要条件是切丛的结构群能约化为酉群 $U(m)$．特别地，M 上一切奇维数的 Stiefel - Whitney 类为零是必要的(见[1])．

流形 M 上的一个殆复结构 J 和一个 Riemann 度量 g 由下式定义了一个殆辛结构 Ω

$$\Omega(X,Y)=g(JX,Y)-g(X,JY),$$

其中 X 和 Y 是向量．任何殆辛结构均可由此方式得到．若一个殆辛结构 Ω 在任一点的一个邻域内可用局部坐标 $x^i, y^i(i=1,\cdots,m)$ 表示成 $\Omega=\sum dx^i\wedge dy^i$，则称 Ω 是可积的(integrable)，或换言之，Ω 是一个辛结构(symplectic structure)．根据 Darboux 定理，其充要条件为 Ω 是闭的．可积殆辛结构的一个例子是在任意流形 M 的余切丛 T^*M 上的典范辛结构 $\Omega=\sum dp^i\wedge dq^i$ (这里 q^i 是 M 的局部坐标，p^i 是纤维的伴随坐标)．不可积殆辛结构的一个例子是半单 Lie 群 G 上的一个左不变 2 形式，它可由 G 的 Lie 代数 T_eG 上任一非蜕化二次外形式通过左移动延拓到 G 上而得到．如同 Riemann 度量，一个殆辛结构也定义了切空间与余切空间(同理，反变张量空间与共变张量空间)之间的一个同构；进而它还定义了一个称之为体积形式的典范 $2m$ 形式 $\eta=\Omega^m/m!$ 和微分形式空间 $\Lambda(M)$ 上的若干算子：Ω 的外乘算子 ε_Ω；Ω 的内乘算子 i_Ω；Hodge 星算子 $*:\Lambda^p(M)\to\Lambda^{2m-p}(M)$，$\omega\to i_\omega\eta$，其中内乘算子 i_ω 定义为具有与 p 形式 ω 对应的 p 向量的给定形式的缩并；余微分算子 $\delta=*d*$．与 Riemann 度量的情况相反，在紧流形 M 的 p 形式空间中，算子 $\Delta=d\delta+\delta d$ 关于整体数量积 $\langle\alpha,\beta\rangle=\int_M\alpha\Lambda^*\beta$ 是反对称的．对于任一 p 形式，我们有 Hodge - Lepage 分解：$\omega=\omega_0+\varepsilon_\Omega\omega_1+\varepsilon_\Omega^2\omega_2+\cdots$，其中 $\omega_i\in\Lambda^{p-2i}(M)$ 是唯一确定的有效形式(即它们被 i_Ω 化为零)([3])．

一个殆辛结构称为共形平坦的(conformally flat)，如果存在函数 $\lambda>0$，使得 $d(\lambda\Omega)=0$．这等价于 Ω 可表为如下形式：

$$\Omega = y^1\sum_{i=1}^m dx^i\wedge dy^i.$$

当 $m=2$ 时，殆辛结构 Ω 为共形平坦的充要条件是 1 形式 $\delta\Omega=i_\Omega d\Omega$ 为闭形式；而在 $m>2$ 时，等式 $d\Omega=(1/m-1)\,\delta\Omega\Lambda\Omega$ 成立(见[1])．

由等式 $\Omega(T_XY,Z)=d\Omega(X,Y,Z)$ (其中 X, Y 和 Z 是向量)定义的对应于 3 形式 $d\Omega$ 的 (1,2) 型张量 T 称为殆辛结构 Ω 的挠张量，与它相关的(蜕化)度量是 $g(X,Y)=\mathrm{tr}\,T_XT_Y$．一个殆辛结构确定了一类线性联络 ∇，使得 Ω 关于 ∇ 是平行的且 T 是 ∇ 的挠率张量．这样的两个联络只差一个形为 $\Omega^{ij}S_{jkl}$ 的张量场，其中 S_{jkl} 是任一对称张量场．上述联络与 $\mathrm{Sp}(m,\mathbf{R})$ 结构 $B=B_{\mathrm{Sp}(m,\mathbf{R})}$ 的一次延拓 $B^1\to B$ 的截面构成一一对应，这里 $B_{\mathrm{Sp}(m,\mathbf{R})}$ 是具有结构群 $S^3(\mathbf{R}^{2m})$ ($2m$ 个变量的三次齐次多项式的向量群)的主标架丛．$\mathrm{Sp}(m,\mathbf{R})$ 结构是一个无限型 G 结构，所以一个殆辛结构的自同构群可能是无限维的．特别地，一个辛结构的自同构群总是无限维的，并且对于任何 $k>0$ 是 k 可迁群．

参考文献

[1] Liberman, P., Sur les structures presque complexe et autres structures infinitésimales réguliéres, *Bull. Soc. Math. France*, 83 (1955), 195–224.

[2] Итоги науки и техники, Алгебра. Топология Геометрия, т. 11, М., 1974, 153–207.

[3] Льгагин, В. В., 《Успехи матем. наук》, 34 (1979), 1, 137–165.

[4] Kobayashi, S., Transformation groups in differential geometry, Springer, 1972.

[5] Hurt, N. E., Geometric quantization in action, Reidel, 1983.

[6] Arnol'd, V. I. and Givental, A. B., Itogi Nauki i Tekhn. *Sovrem. Probl. Mat.*, 4 (1967), 5–139.

Д. В. Алексеевский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Liberman, P. and Marle, C. - M. Symplectic geometry and analytical mechanics, Reidel, 1987.

沈一兵 译

字母表 [**alphabet**; **алфавит**]

(有限多个)字母(letter)组成的一个集合或一张表．通常，一个字母表包含用来构造某种符号系统(有时也称为语言)所要求的字母．对两个字母表 A 和 B，其并 $A\cup B$，交 $A\cap B$，差 $A\setminus B$ 以及包含关系 $A\subset B$ 都是按普通方式定义的．为了方便，也可以容许空字母表(empty alphabet)，即没有字母的字母表这一概念．

H. M. Нагорный 撰　沈复兴 译　王世强 校

交错群 [**alternating group**; **знакопеременная группа**]，n 次的

对称群(symmetric group) S_n 的由全体偶置换组成的子群 A_n．A_n 是 S_n 的正规子群，其指数是 2，而阶为 $n!/2$．将 A_n 中的置换看成变量 $x_1,\cdots,x_n$ 的脚标的置换，必使交错多项式 $\prod(x_i-x_j)$ 不变，因而称为"交错群"．对无限势 m，也能定义 A_m，它是对称群 S_m 的全体偶置换构成的子群．若 $n>3$，则群 A_n 是 $(n-2)$ 重传递的．对任何 n，无论是有限或无限，除去 $n=4$ 外它必为单群；这个事实在代数方程藉助于根式的可解性理论中起了重要作用．

参考文献

[1] Hall, M., The theory of groups, Macmillan, 1959 (中译本：赫尔，群论，科学出版社，1981).

H. H. Вильямс 撰

【补注】 A_5 是最小阶的非 Abel 单群．

石生明 译　许以超 校

交错纽结和连接 [**alternating knots and links**; **альтернирующие узлы и зацепления**]

具有交错图的纽结和连接(见**纽结图和连接图**(knot and link diagrams))，即具有一个到平面上的处于一般位置的投射，使得当相继穿过各分支时，跨过和潜过彼此相继交错出现．通过在二重点处改变上、下分支的办法，任何图都可变成交错图．

设 F 是一个 Seifert 曲面．与普通情形不同，对于交错纽结和连接，不等式 $d\leqslant 2h+\mu-1$ 变成等式，其中 d 是 Alexander 多项式的次数(见 **Alexander 不变量**(Alexander invariants))，h 是 Seifert 曲面的亏格，而 μ 是连接 k 的分支数．相应地，一个交错连接的亏格可由其任一交错图计算出来，Seifert 曲面是有最小亏格的曲面．这也证明了如果图是正规化的，即投影平面不包含与图交于一个二重点的简单闭围道，连接是平凡的(见**纽结理论**(knot theory))，当且仅当图不包含二重点．如果存在这样的围道，那么可以通过将图的交错部分旋转 180 度的办法减少二重点数，同时保持图的交错性质．这就给出了一种解决交错纽结和连接的平凡性问题的算法．此外，如果图是连通的，因为 $d\geqslant 1$，连接不会变成分离的，且分离连接的约化 Alexander 多项式为 0．Alexander 矩阵可作为某个图的关联矩阵算出来．这意味着(见[1]，[2]) $\Delta(t)$ 是一个交错多项式，即它的系数非零且符号交错出现．如果 $\Delta(0)=1$，交错纽结和连接称为 Neuwirth 纽结和连接(见 **Neuwirth 纽结**(Neuwirth knot))．交错纽结或连接的正规化图的二重点数不大于它的行列式．交错纽结和连接的群(见**纽结群和连接群**(knot and link groups))可以表示为秩为 $2q-1$ 的子群与两个秩为 q 的自由群的合并的自由积．若通过在交错图上构造的相应于 k 的 Seifert 曲面的正则邻域的边界来重分连接 k 的空间，则这种表示法可由 van Kampen 定理得到．具有非交错图的标准表(见**纽结表**(knot table))上的所有纽结都是非交错纽结．大多数平行纽结、环绕等都不交错．

参考文献

[1] Murasugi, K., On the Alexander polynomial of the alternating knot, *Osaka J. Math.*, **10** (1958), 181－189.

[2] Crowell, R. H., Genus of alternating link types, *Ann. of Math.* (2), **69** (1959), 258－275.

[3] Murasugi, K., On alternating konts, *Osaka J. Math.*, **12** (1960), 277－303.

A. B. Чернавский 撰

【补注】 纽结或连接的 Seifert 曲面(Seifert surface) $K^n\subset S^{n+2}$ 是一个连通的、双领的紧流形 $M^{n+1}\subset S^{n+2}$，使得 $\partial M^{n+1}=K^n$．子集 $X\subset Y$ 是(在 Y 中)双领的(bicollared)，如果存在一个嵌入 $b:X\times[-1,1]\to Y$，使得对于所有 $x\in X$，有 $b(x,0)=x$．映射 b 或它的象本身是双领的．

参考文献

[A1] Rolfsen, D., Knots and links, Publish or Perish, 1976.

徐森林 译

交错级数 [**alternating series**; **знакочередующийся ряд**]

各项符号正负相间的无穷级数：

$$u_1-u_2+\cdots+(-1)^{n-1}u_n+\cdots,\quad u_k>0.$$

如果一个交错级数的各项是单调减小的($u_{n+1}<u_n$)，并且趋向于零($\lim_{n\to\infty}u_n=0$)，则这个级数是收敛的(Leibnitz 定理(Leibnitz theorem))．收敛的交错级数的余部

$$r_n=(-1)^n u_{n+1}+\cdots$$

的符号与它的第一项相同，按绝对值来说，它小于这一项．收敛的交错级数的两个最简单的例子是

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots,$$

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}+\cdots.$$

前一个级数的和是 $\log 2$；后一个级数的和是 $\pi/4$．

B. И. Битюцков 撰　张鸿林 译

交错 [**alternation 或 alternance；альтернирование**]，斜对称 (skew symmetry)，反对称 (anti - symmetry)

张量代数的一种运算，它把给定的张量化为斜对称张量(在一组指标上)．交错总是在几个上标或几个下标上进行的．例如，分量为$\{a^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}, 1\leq i_\nu, j_\mu\leq n\}$的张量$A$是分量为$\{t^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}, 1\leq i_\nu, j_\mu\leq n\}$的张量$T$在上标上关于指标集$I=(i_1, \cdots, i_m)$的交错结果，如果

$$a^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} = \frac{1}{m!}\sum_{I\to\alpha}\sigma(I,\alpha)t^{\alpha_1\cdots\alpha_m i_{m+1}\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}. \qquad (*)$$

这个求和取遍I的所有$m!$个重排(置换)$\alpha=(\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$，而数$\sigma(I, \alpha)$为$+1$或$-1$，取决于对应的重排是偶或奇的．用类似的方式可定义在一组下标上的交错．

用方括号把某些指标括起来可以表示在此指标集上的交错，并把在括号内的不参与交错的指标用竖线隔开．譬如：

$$t_{[4|23|1]} = \frac{1}{2!}[t_{4231}-t_{1234}].$$

在指标集I_1与I_2 ($I_1\subset I_2$)上的逐次交错等同于在指标集I_2上的交错：

$$t_{[i_1\cdots[i_k\cdots i_l]\cdots i_q]} = t_{[i_1\cdots i_q]}.$$

如果n是张量所基于定义的向量空间的维数，则经过个数大于n的指标集上的交错总是得到零张量．张量关于它的对称指标集(见**对称化(张量的)** (symmetrization (of tensors)))的交错也得出零张量．在给定的指标集I的交错之下保持不变的张量，就称为在I上斜对称的(skew - symmetric)或交错的(alternating)．交换任意一对这样的指标将改变张量的分量的符号．

张量的交错运算与对称化运算可以用来把一个张量分解为一些更简单的张量．

两个张量相乘后再对所有指标取交错运算，所得结果称为交错积 (alternated product) (外积 (exterior product))．

交错亦用来求具有多指标项的形如(*)的符号交错的和．例如，元素关于乘法可交换的行列式可按公式

$$\begin{vmatrix} a^1_1 & \cdots & a^1_n \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a^n_1 & \cdots & a^n_n \end{vmatrix} = n!a^{[1}_1\cdots a^{n]}_n =$$
$$= n!a^1_{[1}\cdots a^n_{n]} = n!a^{[1}_{[1}\cdots a^{n]}_{n]}$$

来计算．

参考文献

[1] Широков, П. А., Тензорное исчисление, 2 изд., Казань, 1961.

[2] Беклемишев, Д. В., Курс аналитической геометрии и линейной алгебры, М., 1971.

[3] Schouten, J. A., Tensor analysis for physicists, Cambridge Univ. Press, 1951.

[4] Ефимов, Н. В., Розендорн, Э. Р., Линейная алгебра и многомерная геометрия, М., 1970.

Л. П. Купцов 撰 龚明鹏 译 王伯英 校

交错点 [**alternation, points of；альтернанса точки**]

一个点列

$$\{x_i\}_0^{n+1}\subset Q,\ a\leqslant x_0<x_1<\cdots<x_{n+1}\leqslant b,$$

使差$\alpha_i=f(x_i)-P_n(x_i)$取符号交错的非零值．这里$f(x)$是闭集$Q\subset[a, b]$上的连续函数，$P_n(x)$是次数不高于n的代数多项式．对表成(满足 **Haar 条件** (Haar condition)的) Чебышев 函数系 (见 Чебышев 系 (Chebyshev system)) $\{s_k(x)\}_0^n$的多项式，可类似地引进交错点的概念．如果这时所有α_i的绝对值等于

$$\max_{x\in Q}|f(x)-P_n(x)|,$$

则称点$\{x_i\}_0^{n+1}$为 Чебышев 交错点 (Chebyshev points of alternation)．交错点在函数逼近理论中起着重要的作用．例如，**de la Vallée-Poussin 定理** (de la Vallée-Poussin theorem) (交错定理) 和 Чебышев 准则 (见 **Чебышев 交错** (Chebyshev alternation)) 就是借助于交错点进行陈述的．在构造最佳逼近多项式时也要用到交错点．

Ю. Н. Субботин 撰

【补注】 Чебышев 交错点列也被称为交错点集 (alternating set) (见 [A1] 第一章)．

参考文献

[A1] Rivlin, T. J., An introduction to the approximation of functions, Dover, reprint, 1981.

[A2] Müller, M. W., Approximationstheorie, Akad, Verlagsgesellschaft, Wiesbaden, 1978.

[A3] Meinardus, G. W., Approximation von Funktionen und ihre numerische Behandlung, Springer, 1964.

[A4] Cheney, E. W., Introduction to approximation theory, Chelsea, reprint, 1982.

王仁宏，檀结庆 译 杨应辰 校

交替 [**alternative；альтернатива**]，对策论中的

对策过程中的一个位置，按照对策的法则，可能在某个移步中从一个给定的位置上转移到该位置．对应的移步或刻画移步的指标也称为交替．

И. Н. Врублевская 撰 史树中 译

交错环和交错代数 [**alternative rings and algebras；альтернативные кольца и алгебры**]

交错环 (alternative ring) 是指每两个元素都生成一个结合于环的环；交错代数 (alternative algebra) 是

(线性)代数并且是交错环. 根据 E. Artin 的一个定理，所有交错环的类由如下一组等式定义:

$$(xy)y=x(yy)\ (\text{右交错性});$$
$$(xx)y=x(xy)\ (\text{左交错性}).$$

于是，交错环形成一个簇. 在这种环里，**结合子** (associator)(结合性的亏量)

$$(x,y,z) = (xy)z - x(yz)$$

是其自变元的一个斜对称(交错)函数，这个事实表明使用术语"交错环"是合理的.

交错环的第一个例子是 **Cayley 数** (Cayley numbers)，它作成一个交错除环 (alternative skew-field) 或交错体，即有单位元的交错环且对于任意 b 和 $a\neq0$，方程 $ax=b$ 和 $ya=b$ 有唯一的解. 交错除环在射影平面的理论中起着实质性的作用，这是因为一个射影平面是一个 Moufang 平面 (Moufang plane) (即关于某一直线的平移平面)，当且仅当其三元环的任何坐标化是交错除环. 在一个有单位元的环 R 中，如果每个非零元素均可逆且对任意 $a,b\in R$ 均有等式 $a^{-1}(ab)=b$ (或者，$(ba)a^{-1}=b$)，则 R 是交错除环. 任何交错除环或者是结合的，或者是其中心上的 **Cayley-Dickson 代数** (Cayley-Dickson algebra).

每个单交错环也或者是结合环，或者是其中心上的 Cayley-Dickson 代数(在这种情形下，此代数未必是体). 结合环和本原交错环都被 Cayley-Dickson 代数所穷尽. 所有素交错环 R(如果 $3R\neq0$) 或是结合环，或是 Cayley-Dickson 环.

在相似的条件下，交错环的许多性质本质上不同于结合环. 例如，如果 R 是交错环，A 和 B 是其右理想，则其积 AB 未必是右理想，即使 A 是双边理想也如此. 但是，两个双边理想的积仍是双边理想. 交错环与结合环的差异也强烈地体现在这样的事实之中: 由于括号放的位置不同，元素的积或是零或非零，从而交错环有各种幂零性. 通常在交错环中使用如下几种幂零性: 可解性 (solvability) (环 R 称为具有指数 m 的可解环(solvable ring)如果存在自然数 m 使得 $R_m=0$，其中 $R_{i+1}=R_iR_i$, $R_1=R$)，右幂零性 (right nilpotency) (存在自然数 n 使得 $R^{(n)}=0$，其中 $R^{(i+1)}=R^{(i)}R^{(1)}$, $R^{(1)}=R$)，幂零性 (nilpotency)(存在自然数 k 使得 $R^k=0$，即 R 中任意 k 个元素之积为零，不管括号怎样放置). 存在指数为3 的可解交错环，但它们不是幂零的. 交错环中的右幂零性等价于幂零性(右幂零指数为 n 的交错环也是指数 $\leqslant(n+1)^2$ 的幂零环). 局部地看，在有限生成环中，各种幂零性是等价的. 可以建立起完全平行于结合环中的局部幂零性的充分性判别准则. 这是下述事实的一个推论: 设 R 是交错环，且可以选取一个生成元集 S，使得 S 中任意两个元生成一个诣零环，又设 R 的所有结合的同态象是局部幂零的，则 R 是局部幂零的. 因此，如果 R 是满足等式 $x^n=0$ 的交错环，则 R 是局部幂零的. 若 R 是一个满足不能由结合性推出的关系的交错代数，且每个元素都是诣零元的有限和，则 R 是局部幂零环. 至于整体幂零性，它不同于局部幂零性的情况，在这里交错环不同于结合环. 例如，满足 $x^3=0$ 的交错环不一定是幂零的(即使其加群是无挠的). 然而，满足等式 $x^n=0$ 且加群中没有 k 阶元 $(0<k\leqslant n)$ 的交错环是指数为 $n(n+1)/2$ 的可解环.

如果 R 是代数的交错代数且满足一个不能由结合性推出的关系(或 R 中元素的代数次数是一致有界的)，则 R 是局部有限维的.

在交错环中存在类似于 **Jacobson 根**(Jacobson radical) 的概念. 每个交错环都有极大拟正则理想 $J(R)$，它等于所有极大模右理想的交. 商环 $R/J(R)$ 是 J 半单的 (J-semi-simple)，即 $J(R/J(R))=0$；如果 I 是 R 的一个理想，则 $J(I)=J(R)\cap I$. 任何 J 半单环可以由本原交错环(即本原结合环和 Cayley-Dickson 代数)近似得到. 交错环中也存在与结合环的其他根(下诣零根，局部幂零根等)类似的概念，并与其具有相同的基本性质.

在一个 Artin 交错环(Artinian alternative ring) (即满足右理想降链条件(极小条件)的交错环)中，根 $J(R)$ 是幂零的，R 的乘法广群的任何诣零子广群也是幂零的. 环 R 是没有幂零理想的 Artin 交错环，当且仅当 R 可表成结合体上的有限多个全矩阵代数和 Cayley-Dickson 代数的直和; 不计直和项的排列，这种分解还是唯一的. 如果 R 是交错环，I 是它的一个理想且 R 对含于 I 的双边理想满足极小条件，则 I 是幂零的，当且仅当对环 R 的任意同态 $\varphi(\varphi: R\to I\varphi)$，在环 $I\varphi$ 中不含单理想，即本身是单环的理想.

在交错环 R 中有结合中心(associative centre) $N(R)$，交换中心 (commutative centre) $C(R)$ 和中心 (centre) $Z(R)$ 之分，它们分别定义为

$$N(R) = \{n\in R: (n,a,b)=0 \quad \text{对一切 } a,b\in R\},$$

$$C(R) = \{c\in R: [c,a]=ca-ac=0$$
$$\text{对一切 } a\in R\},$$

$$Z(R) = N(R)\cap C(R).$$

如果在 R 的加群中没有 3 阶元，则 $C(R)\subseteq N(R)$. 然而，在特征为 3 的域上存在交换的非结合的交错代数. 在素交错环 R 中总有 $C(R)\supseteq N(R)$. 在任何交错环 R 中总有$[N(R), R]\subseteq N(R)$. 设交错环 R 中没有非平凡理想，则: 1)或者 $3R=0$ 或者 $N(R)\neq0$; 2)或者 $3R\subseteq N(R)$

或者 $Z(R)\neq 0$; 3)若 A 是 R 的右理想，则 $N(A)=A\cap N(R)$ 且 $Z(A)=A\cap Z(R)$. 在任何域 F 上总可构造一个没有非平凡理想的交错环 K 使得 $N(K)=C(K)=0$，而作为 K 的理想的 K^2 却是结合交换环(associative-commutative ring)，即

$$N(K^2)=C(K^2)=K^2\neq 0.$$

在交错环中下述等式是熟知的:

$$[(xy)z]y=x[(yz)y],$$
$$[(xy)x]z=x[y(xz)],$$
$$(xy)(zx)=[x(yz)]x$$

(Moufang 恒等式(Moufang identities));

$$(xy,z,t)-y(x,z,t)-(y,z,t)x=$$
$$=([x,y],z,t)+(x,y,[z,t]),$$
$$([x,y]^4,z,t)=[x,y]([x,y]^2,z,t)=$$
$$=([x,y]^2,z,t)[x,y]=0.$$

具有三个生成元的交错环也满足等式:

$$([x,y][z,t]+[z,t][x,y],u,v)=0. \qquad (*)$$

在生成元多于3个的交错环中，(*)通常不成立. 而且在这些交错环中总有 $([x,y]^2,z,t)\neq 0$. 在没有局部幂零理想的交错环中等式(*)总成立，因此这样的交错环可由素结合环和 Cayley-Dickson 环近似得到.

任何自由交错环 R 有一个含于结合中心 $N(R)$ 的非零理想 $U(R)$. 具有不少于3个生成元的自由交错环不仅包含零因子，而且也不是素的，具有不少于4个生成元的自由交错环甚至包含平凡理想，由于这个原因，它不能由素环近似得到.

参考文献

[1] Дорофеев, Г. В., 《Успехи матем. наук》, 15 (1960), 3, 147-150.

[2] Жевлаков, К. А., 《Алгебра и логика》, 5 (1966), 3, 11-36.

[3] Жевлаков, К. А., 《Алгебра и логика》, 8 (1969), 4, 425-439.

[4] Ширшов, А. И., 《Матем. сб.》, 41 (1957), 381-394.

[5] Kleinfeld, E., Simple alternative rings, *Ann. of Math.* (2), 58 (1953), 3, 544-547.

[6] Kleinfeld, E., Alternative nil rings, *Ann. of Math.* (2), 66 (1957), 3, 395-399.

[7] Скорняков, Л. А., 《Rend. mat. e applic.》, 24 (1965), 3-4, 360-372.

[8] Slater, M., Ideals in semiprime alternative rings, *J. of Algebra*, 8 (1968), 60-76.

[9] Дорофеев, Г. В., 《Сиб. матем. ж.》, 4 (1963), 5, 1029-1048.

К. А. Жевлаков 撰

【补注】 环 R 中一个元素 Z 是右拟正则的，如果 $\{a-Za: a\in R\}=R$. 一个元素是拟正则的，如果它既是左又是右拟正则的. R 中的一个理想是拟正则的，如果其所有元均为拟正则元([A2]). "由…近似得到"意为"可表示成…的次直和". 例如，"J 半单交错代数 R 可由本原交错环近似得到"意指 R 同构于本原交错环的次直和.

参考文献

[A1] Jacobson, N., Structure and representation of Jordan algebras, Amer. Math. Soc., 1968.

[A2] Jacobson, N., Structure of rings, Amer. Math. Soc., 1964.

[A3] Schafer, R. D., An introduction to non-associative algebras, Acad. Press, 1966.

章璞 译

交错数 [alternion; альтернион]

一个超复数(hypercomplex number). 交错数可以看成复数，二重数(见**二重数和对偶数**(double and dual numbers))和四元数的推广. 阶为 n 且指标为 l 的交错数的代数 ${}^lA_n$ 是实数域上的 2^{n-1} 维代数，有单位元1和一个生成元集 $I_1,\cdots,I_{n-1}$，其乘法满足公式

$$I_iI_j=-I_jI_i,\quad I_i^2=-\varepsilon_i,$$

这里 $\varepsilon_i=\pm 1$，值 -1 和 $+1$ 分别地出现 l 次和 $n-l-1$ 次. 这个代数的一个基由单位元和形如

$$I_{j_1}\cdots I_{j_k}=I_{j_1\cdots j_k}$$

的元素形成，这里 $j_1<\cdots<j_k$. 在这个基之下，任何一个交错数 α 可以写成

$$\alpha=a+\sum_i a^iI_i+\sum_i\sum_j a^{ij}I_{ij}+\cdots+$$
$$+a^{1\cdots(n-1)}I_{1\cdots n-1},$$

这里 $a,a^i,\cdots,a^{1\cdots(n-1)}$ 是实数. 与交错数 α 共轭的(conjugate)交错数 $\bar\alpha$ 由公式

$$\bar\alpha=\sum_k(-1)^{k(k+1)/2}a^{i_1\cdots i_k}I_{i_1}\cdots I_{i_k}$$

来定义. 下列等式成立:

$$\overline{\alpha+\beta}=\bar\alpha+\bar\beta,\quad \bar{\bar\alpha}=\alpha,\quad \overline{\alpha\beta}=\bar\beta\bar\alpha.$$

积 $\bar\alpha\alpha$ 总是正实数; 等式 $|\alpha|=\sqrt{\bar\alpha\alpha}$ 称为交错数 α 的模(modulus of the alternion). 如果取 $|\beta-\alpha|$ 作为两个交错数 α 和 β 之间的距离，那么代数 ${}^0A_n$ 和 ${}^lA_n$ $(l>0)$ 分别同构于 Euclid 空间 $\mathbf{R}^{2^{n-1}}$ 和伪 Euclid 空间 ${}^l\mathbf{R}^{2^{n-1}}$. 代数 ${}^0A_1$ 同构于实数域; ${}^0A_2$ 同构于复数域; ${}^0A_3$ 同构于四元数体; 并且 ${}^1A_3$ 和 ${}^2A_3$ 同构于所谓的反四元数(anti-quaternions)代数. ${}^0A_n$ 的元素是所谓的Clifford数(Clifford numbers). 代数 ${}^4A_5$ 被 P. Dirac 在探讨电

子自旋时研究过.

交错数代数是 **Clifford 代数** (Clifford algebra) 的特殊情形.

参考文献

[1] Розенфельд, Б. А., Неевклидовы геометрии, М., 1955.

H. H. Вильямс 撰 彭联刚 译

共合 [amalgam; амальгама]

一个可以表示为给定代数系统类 $\mathfrak{K}$ 的代数系统族 $\{A_i : i\in I\}$ (见**代数系统** (algebraic system))的具有交集 U_{ij} 的集合论并集的集合 M,并且对所有 $i, j\in I$,交集

$$A_i \cap A_j = U_{ij} = U_{ji}$$

不是空集,而且 U_{ij} 是 A_i 和 A_j 的子系统. 如果在类 $\mathfrak{K}$ 中存在一个系统 B,使得所有 $A_i (i\in I)$ 是 B 的子系统,那么就说共和可以嵌入到系统 B 内.

两个群的共合,一般地,群 $\{A_i: i\in I\}$ 的共合(此时要求所有交 $U_{ij}(i\neq j)$ 与 U 相等)总可以嵌入到一个群中,例如嵌入到具有公共子群 U 的群 $A_i (i\in I)$ 的自由积中. 但是,也有不能嵌入到一个群中的群的共合. (群的共合可嵌入到一个群的条件可参见[1]; 半群的共合可嵌入到一个半群的条件见[2]). (也可参见**群的共合** (amalgam of groups).)

设 $\mathfrak{K}$ 是给定域 F 上的所有代数构成的类,或是域 F 上的交换代数构成的类,或是域 F 上的反交换代数构成的类,或是域 F 上 Lie 代数构成的类. $\mathfrak{K}$ 中的代数 $A_i (i\in I)$ 的具有相同交 $U_{ij}=U$ (对所有 $i\neq j$) 的共合,可嵌入到这些代数的具有公共子代数 U 的 $\mathfrak{K}$ 自由积中([3]). 在[4]中证明了具有相同交 $T_{ij}=T(i\neq j)$ 的结合除环 T_i 的共合 $\{T_i : i\in I\}$ 可以嵌入到一个结合除环中.

参考文献

[1] Курош, А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967, 462 (中译本: А. Г. Курош, 群论, 高等教育出版社, 上册 1987、下册 1984).

[2] Clifford, A. H. and Preston, G. B., The algebraic theory of semigroups, 2, Amer. Math. Soc., 1967.

[3] Ширшов, А. И., 《Сиб. матем. ж.》, 3 (1962), 2, 297-301.

[4] Cohn, P. M., The embedding of firs in skew field, *Proc. London Math. Soc*(3), 23 (1971), 193-213.

Л. А. Бокуть, Д. М. Смирнов 撰

【补注】 前面指出的参考文献[1] 中的内容应属于 H. Neumann 的原作 [A1], [A2].

与上面提到的定义相同,代数系统类的**共合化问题** (amalgamation problem) 一般理解为这个类的两个代数系统的共合到这个类的一个系统的嵌入问题. 前面已经提到群的共合问题是可以解决的. 但对子其他的类,它可能是一个有趣并且重要的问题. 例如,在[A3],[A4]中已证明,格的各种类的共合问题密切地关系到逻辑中的**插值问题** (interpolation problem).

参考文献

[A1] Neumann, H., Generalized free products with amalgamated subgroups, *Amer. J. Math.*, 70 (1948), 590-625.

[A2] Neumann, H., Generalized free products with amalgamated subgroups, *Amer. J. Math.*, 71 (1949), 491-540.

[A3] Maksimova, L. L., Craig's interpolation problem and amalgamable varieties, *Soviet Math. Dokl*, 18 (1977), 1550-1553.

[A4] Pitts, A. M., Amalgamation and interpolation in the category of Heyting algebras, *J. Pure Appl. Alg.*, 29 (1983), 155-165.

卢景波 译

群的共合 [amalgam of groups; амальгама групп]

由群 $G_\alpha (\alpha\in I)$ 构成的族,它满足条件: 对任意 $\alpha, \beta\in I$, 交 $G_\alpha\cap G_\beta$ 是 G_α 和 G_β 的子群. 一个给定群的子群的任意族是群的共合的一个例子. $A=\{G_\alpha : \alpha\in I\}$ 到群 G 内的一个**群的共合嵌入** (imbedding of an amalgam of groups) 是并集 $\bigcup_{\alpha\in I} G_\alpha$ 到 G 内的一个一一映射,并且当把此映射限制到每一个群 G_α 时就变为 G_α 到 G 内的一个同构嵌入. 如果群的一个共合中所有的交 $(G_\alpha\cap G_\beta)$ 彼此相同(并且等于子群 H),那么它可以嵌入到群 G_α 的具有共合子群 H 的自由积中. 另外,存在一个由四个 Abel 群构成的群的共合,它不能嵌入到一个群中. 一般说来,群的共合的主要问题是: 设 σ, τ 是群可能有的性质,问题是回答在什么条件下具有性质 σ 的群的共合可以嵌入到一个具有性质 τ 的群内. 已经证明两个有限群的所有共和可以嵌入到一个有限群内. 三个 Abel 群的共合可嵌入到一个 Abel 群内. 嵌入到一个群内的四个 Abel 群的共合包含在一个 Abel 群内. 存在五个 Abel 群的一个共合,它可以嵌入到一个群内,但此群不是 Abel 群. 群的共合的另一个问题是研究当 σ, τ 是可解性,幂零性,周期性,局部有限性等时,群的共合的可嵌入性问题等(在各种场合下).

Ю. И. Мерзляков, Н. С. Романовский 撰

【补注】 上面共合的定义中,把所有 G_α 看作某一个大集合 X 的子集. 在"一个公共子群 U 上",群 G_i 的共合积构造如下. 设 $\{G_i : i\in I\}$ 是以 I 为指标集的群的一个集合. 对每一 $i\in I$, 设 U_i 是 G_i 的一个子群,并且对每一 $i\in I$, 存在一个将 U_i 与 U 等同的同构映射 $\varphi_i : U_i \to U$. 考虑由所有字

$$a_1 \cdots a_t$$

构成的集合 $\widetilde{G}$,其中每一 a_i 在某一 G_j 中, 并且考虑下

列初等等价:

1) 如果 $a_i=1$,那么 $a_1\cdots a_{i-1}a_ia_{i+1}\cdots a_t$ 等价于 $a_1\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_t$;

2) 如果 a_i 和 a_{i+1} 属于同一个群 G_j,并且 $a_ia_{i+1}=a_i$,那么 $a_1\cdots a_{i-1}a_ia_{i+1}\cdots a_t$ 与 $a_1\cdots a_{i-1}a_ia_{i+2}\cdots a_t$ 等价;

3) 如果 $a_i=u_i\in U_j\subseteq G_j$ $b_i=u_k\in U_k\subseteq G_k$, 并且 $\varphi_k(u_k)=u=\varphi_i(u_i)\in U$, 那么 $a_1\cdots a_{i-1}a_ia_{i+1}\cdots a_t$ 与 $a_1\cdots a_{i-1}b_ia_{i+1}\cdots a_t$ 等价.

设～是由这些初等等价所生成的等价关系, 那么 $\widetilde{G}/\sim$ 是 G_i 的共合积, 更确切地说是 (G_i, U_i) 的共合积(即 G_i 的具有共合子群 (amalgamated subgroup) U 的自由积(free product)); 此群的运算由并列导出.

共合积是非平凡的. 这可由下面的典范形式定理(canonical form theorem)看出. 对每一 i, 选择 U 在 G_i 中的左陪集的代表组成的一个集合 R_i. 那么每一个字恰好等价于一个形如 $uz_1\cdots z_t$ 的字, 其中每一个 z_i 属于某一个 R_j, $u\in U$,并且 z_i 和 z_{i+1} 属于不同的 G_j $(i=1,\cdots,t-1)$. 如果 $U=\{e\}$,那么自然就得到诸 G_i 的自由积. 自由积的一个子群也是自由积(Курош 定理(Kurosh theorem)). 具有一个共合子群的积的子群不一定是此种类型的. 其理由是, 如果 U 是共合子群, 那么可以取 G_i 的一个与 U 有不同交的子群 H_i, 因此 H_i 将以各种不同方式共合. 这就导致了广义共合积以及前面定义的共合概念. 这些理论目前仍是不完善的.

参考文献

[A1] Hall, M. jr., The theory of groups, Macmillan, 1959 (中译本: M. 赫尔, 群论, 科学出版社,1981).

[A2] Neumann, H., Generalized free products with amalgamated subgroups Ⅰ, *Amer. J. Math.*, 70 (1948), 590-625.

[A3] Neumann, H., Generalized free product with amalgamated subgroups Ⅱ, *Amer. J. Math.*, 71 (1949), 491-540.

卢景波 译

亲和数 [amicable numbers; дружественные числа]

一对自然数,其中每一个数都等于另一个数的真因子(即小于其本身的因子)之和. 这个定义在 Euclid 的《几何原本》(Elements) 和 Plato 的著作中已经出现. 古希腊人仅仅知道唯一的一对亲和数——220 和 284, 它们的因子之和分别等于

$$1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110 = 284,$$

$$1+2+4+71+142 = 220.$$

L. Euler 发现了大约 60 对亲和数; 使用电子计算机已经得到几百对亲和数. 但是, 现在还不知道是否存在这样一对亲和数, 其中一个数是偶数, 另一个数是奇数.

А. И. Галочкин 撰

【补注】 某些非常大的亲和数见 [A1].

参考文献

[A1] Riele, H. J. J. te, New very large amicable pairs, in Proc. Number Theory Noordwijkerhout, 1983, Lect. Notes in Math., Vol. 1068, Springer, 1983, 210-215.

张鸿林 译

丰富层 [ample sheaf; обильный пучок]

丰富可逆层 (invertible sheaf) 概念的推广. 设 X 是域 k 上的 Noether 概形, $\mathscr{E}$ 是 X 上局部自由层(即, 某个代数向量丛 $E\to X$ 的截面层). 层 $\mathscr{E}$ 称为丰富的(ample), 如果对 X 上每个凝聚层 $\mathscr{F}$, 存在一个与 $\mathscr{F}$ 有关的整数 n_0, 使得对 $n\geqslant n_0$, 层 $\mathscr{F}\otimes S^n\mathscr{E}$ 由它的整体截面生成(这里 $S^n\mathscr{E}$ 表示 $\mathscr{E}$ 的第 n 个对称幂).

X 上的局部自由层 $\mathscr{E}$ 是丰富的当且仅当从 E 的射影化 $P(E)$ 上的可逆重复层 $\mathscr{L}(\mathscr{E})$ 是丰富的. 关于丰富性的另一个准则要求对 X 上每个凝聚层 $\mathscr{F}$, 必存在与 $\mathscr{F}$ 有关的整数 n_0, 使得对 $n\geqslant n_0$ 以及 $i>0$, 上同调群 $H^i(X, \mathscr{F}\otimes S^n\mathscr{E})=0$. 如果层 $\mathscr{E}$ 和 $\mathscr{F}$ 是丰富的, 则 $\mathscr{E}\otimes\mathscr{F}$ 也是丰富层 ([1]). 如果 X 是非奇异射影曲线, 则 X 上的层 $\mathscr{E}$ 为丰富的当且仅当 $\mathscr{E}$ 以及它的所有商层都有正次数 ([2]). 对任意的 N, P^N 上的切层都是丰富的 (见[1]). 其逆亦真: 具有丰富切层的非奇异 N 维代数簇同构于 P^N (见[1], [3]).

参考文献

[1] Hartshorne, R., Ample vector bundles, *Publ. Math. IHES*, **29** (1966), 319-350.

[2] Hartshorne, R., Ample vector bundles on curves, *Nagoya Math. J.*, **43** (1971), 73-89.

[3] Demazure, M., Charactérisations de l'espace projectif (conjectures de Hartshorne et de Frankel), in Sém. Bourbaki 1979/80, Lect. Notes in Math., Vol. 842, Springer, 1981, 11-19.

В. А. Исковских 撰

【补注】 正文最后一行所叙述的定理归功于森重文(见[A1]).

参考文献

[A1] Mori, S., Positive manifolds with ample tangent bundles, *Ann. of Math.*, **110** (1979), 593-606.

陈志杰 译

丰富向量丛 [ample vector bundle; обильное векторное расслоение]

一个代数的或解析的向量丛, 它具有正则 (或解析) 截面的丰富层 (见**丰富层** (ample sheaf); **正向量丛** (positive vector bundle)).

О. А. Иванова 撰 陈志杰 译

椭圆积分的振幅 [amplitude of an elliptic integral;

амплитуда эллиптического интеграла]

在 Legendre 标准形式的第一类椭圆积分(elliptic integral)

$$z = F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}$$

中看作 z 的函数的变量 φ. 椭圆积分的振幅的概念以及表示法 $\varphi = \mathrm{am}\, z$, 是 C. G. J. Jacobi 在 1829 年引入的. 椭圆积分的振幅是 z 的无穷多值的周期函数. 基本的 Jacobi 椭圆函数 $\sin \mathrm{am}\, z = \mathrm{sn}\, z$, $\cos \mathrm{am}\, z = \mathrm{cn}\, z$, $\Delta \mathrm{am}\, z = \mathrm{dn}\, z$ 都是单值的. 然而(例如, 对于制表来说), 把椭圆积分看作振幅 φ 和模数 k 的函数 $F(\varphi, k)$ 是方便的. 亦见 **Jacobi 椭圆函数**(Jacobi elliptic functions).

Е. Д. Соломенцев 撰 张鸿林 译

自反几何学[anallagmatic geometry; аналлагматическая геометрия]

在扩充平面(增添了一个无穷远点的 Euclid 平面)的**圆变换**(circle transformation)下研究图形不变性质的一种几何学.

А. Б. Иванов 撰

杨 路、张景中、侯晓荣 译

解析容量[analytic capacity; аналитическая емкость], 解析测度(analytic measure), Ahlfors 解析测度(Ahlfors analytic measure)

平面上的一个类似于对数**容量**(capacity)的集函数, 由 L. Ahlfors 引进的([1]), 用于描述有界解析函数的可去奇异点集的特征. 设 E 是平面上的有界闭集, $A(E)$ 是满足下列条件的函数的全体: 在 E 的外部, 解析且以常数 1 为界, 在无穷远为 0. 设 $\gamma(E; f) = \lim z \cdot f(z) (z \to \infty)$. 数值 $\gamma(E) = \sup\{|\gamma(E; f)| : f \in A(E)\}$ 称为集合 E 的解析容量. 一个任意集合的解析容量通常定义为它的所有有界闭子集的解析容量的上确界.

若 E 为有界闭集, 则使得在 E 的外部有界解析的每个函数都可延拓到 E 的充分必要条件是 E 的解析容量为零(Ahlfors 定理(Ahlfors theorem)).

还有一些与解析容量有关的概念, 它们适用于其他各种解析函数空间的度量(例如, 见[2]和[3]).

解析容量的概念应用于逼近论的某些问题已被证明是很适宜的, 其中许多基本问题的解可借助于解析容量来表述. 例如, 平面上的一个有界闭集 E 上的任何连续函数能够用有理函数一致逼近到任何指定的精确度的充要条件是, 对任意半径为 δ 的圆盘 σ_δ, 等式

$$\gamma(\sigma_\delta \setminus E) = \gamma(\sigma_\delta) = \delta$$

成立(见[4]).

参考文献

[1] Ahlfors, L. V., Bounded analytic functions, *Duke Math. J.*, 14 (1947), 1–11.

[2] Garabedian, P. R., The classes L_p and conformal mapping, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 69 (1950), 392–415.

[3] Синанян, С. О., 《Докл. АН Арм. ССР》, 35 (1962), 3, 107–112.

[4] Витушкин, А. Г., 《Успехи матем. наук》, 22 (1967), 6, 141–199.

А. Г. Витушкин 撰

【补注】 对一般领域, [A1] 是一本很好的参考书.

参考文献

[A1] Gamelin, T. W., Uniform algebras, Prentice-Hall, 1969.

吴炯圻、高琪仁 译 卫念祖 校

解析补[analytic complement; аналитическое дополнение]

表示与(数轴上的)$\mathscr{A}$ 集($\mathscr{A}$-set)互补的集合的一个术语, 现已不用.

П. С. Александров 撰 张锦文、赵希顺 译

解析延拓[analytic continuation; аналитическое продолжение], 亦称解析开拓, 函数的

在复流形 M 的某个子集 E 上定义的函数 f_0 到在包含 E 的某个区域 $D \subset M$ 上全纯的函数 f 的一个延拓, 使得 f 在 E 的限制 $f|E = f_0$ 与 f_0 重合. 解析延拓理论的出发点是(解析)元素((analytic) element)的概念. 元素是一对 (D, f), 其中 D 是 M 内一个区域, f 是 D 上的全纯函数. 称元素 (D_0, f_0) 和 (D_1, f_1) 通过集合 $D_0 \cap D_1$ 的一个连通分支 Δ 互为直接解析延拓(direct analytic continuations), 如果 $f_0|_\Delta = f_1|_\Delta$. 按照定义, 元素 (D_0, f_0) 解析延拓到一个边界点 $\zeta \in \partial D_0 \subset M$, 如果存在元素 (D_0, f_0) 通过 Δ 的一个直接解析延拓 (D_1, f_1), 使得 $\zeta \in \overline{\Delta} \cap D_1$. (D_0, f_0)(在 M 内)的最大解析延拓(maximal analytic continuation)是一个元素 (D, f), f_0 解析延拓到区域 $D \supset D_0$, 但不能解析延拓到 D 的任一边界点. (D_0, f_0) 在 M 内的最大解析延拓是唯一的, 但不一定存在. 为了克服这个缺点, 要引进 M 上的覆叠域(covering domain)(在 $M = \mathbf{C}$ 的情形, 是一个 Riemann 曲面)的概念. 它是由作为 (D_0, f_0) 的解析延拓的那些元素构成的. 如果存在一条有限的元素链 (D_i, f_i), $i = 0, \cdots, n$, 和在 $D_i \cap D_{i+1}$ 内的连通分支 Δ_i, 使得 $(D_n, f_n) = (D, f)$ 且 (D_i, f_i), (D_{i+1}, f_{i+1}) 通过 Δ_i 互为直接解析延拓, 则元素 (D, f) 称为元素 (D_0, f_0) 的解析延拓(analytic continuation of an element). 如果存在 (D_0, f_0) 的一个解析延拓 (D, f) 使得 $z \in D$, 我们就说最初定义在区域 D_0 的全纯函数 f_0 解析开拓到点 $z \in M$. 在作为 f_0 到点 z 的延拓的那些元素中引进一个等价关系(equivalence relation): $(D', f') \sim (D'', f'')$, 如果 $z \in D' \cap D''$ 且在 z 的一个邻域内 $f' = f''$. 在(对所有可能的 z 的)等价类组成的集合 D_f 上, 存在一个引进 M 上面的覆盖域的拓扑和复结构的自然方法. 函数 f_0 以自然的方式被提

升到 D_f 上(令它在包含 (D_0, f_0) 的在 z 的等价类上的值等于 $f_0(z)$)；它解析延拓到整个 D_f，而按上面规定的意义，它不能延拓到 M 上面的 D_f 的任一边界点.

如果 M 是复平面 C，或更一般地，是复空间 $\mathbf{C}^n$，$n \geq 1$，则这个解析延拓的过程可以描述得更简单些.一个典型元(canonical element)是一对 (D_a, f_a)，其中 $a \in \mathbf{C}^n$，f_a 是以点 a 为中心，具有非空收敛域 D_a 的幂级数．如果存在一族中心为 $a_t=\gamma(t)$ 的典型元 (D_t, f_t)，$0 \leq t \leq 1$，使得 $(D_0, f_0)=(D_a, f_a)$，$(D_1, f_1)=(D_b, f_b)$，而对任一 $t_0 \in [0,1]$ 及所有充分接近 t_0 的 t，元素 (D_t, f_t) 是 (D_{t_0}, f_{t_0}) 的直接解析延拓，则典型元 (D_b, f_b) 是 (D_a, f_a) 沿路径 $\gamma:[0,1] \to \mathbf{C}^n$ 的解析延拓．族 (D_t, f_t) 事实上是唯一确定的．若 $\gamma_\tau (0 \leq \tau \leq 1)$ 是 $\mathbf{C}^n$ 内具有公共端点 a 和 b 的连续的路径族，而 (D_a, f_a) 沿每一 γ_τ 解析延拓，则延拓的结果 (D_b, f_b) 不依赖于 τ (单值定理(monodromy theorem)). 在 $\mathbf{C}^n$ 的情形，沿 $\mathbf{C}^n$ 内所有可能路径解析延拓得到的典型元素 (D_a, f_a) 变成 D_f 中的点；f_a 被提升到 D_f 且在整个 D_f 上解析延拓到一个全纯函数 f，而 D_f 是 f 的全纯域.

这个解析延拓的一般过程不十分实用．因此，还采用许多特别的解析延拓方法．这些方法包括各种解析表示：依赖于参数的积分，如 Cauchy 型积分(见 **Cauchy 积分**(Cauchy integral))；**Laplace 积分**(Laplace integral)；**Borel 变换**(Borel transform)；幂级数中的变量替换，幂级数求和的特殊方法(Borel 展开为一个在最大多边形内收敛的多项式级数(见 **Borel 求和法**(Borel summation method))，在一个最大星形内收敛的 Mittag-Leffler 级数(见**函数元的星形**(star of a function element)；**Mittag-Leffler 求和法**(Mittag-Leffler summation method))等等；Riemann-Schwarz 反射方法(见 **Riemann-Schwarz 原理**(Riemann-Schwarz principle))；一个函数所满足的函数方程和微分方程(例如，对于 γ 函数的方程 $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$，周期性、偶性、对称性条件，等等)，以及藉助于已知函数的解析表示式.

解析延拓的问题也包括对解析函数的起始元素(一个 Taylor 级数)和由此元素生成的**完全解析函数**(complete analytic function)的性质之间的关系的研究([1])．已经获得了关于奇点的结果(关于奇点的判别法，关于乘积的 **Hadamard 定理**(Hadamard theorem)，关于商的 **Fabry 定理**(Fabry theorem))以及关于奇异曲线的结果(缺项定理及越过收敛圆边界的不可延拓性定理，例如，关于缺项的 **Hadamard 定理**，关于缺项的 **Fabry 定理**，等等)，关于**过度收敛**(over-convergence)的定理和关于幂级数的解析延拓与确定其系数的整函数的性质的关系，亚纯延拓问题，通过 **Padé 逼近**(Padé approximation)的亚纯延拓，等等.

解析延拓的领域还包括关于可去奇异性的定理(有界全纯函数孤立奇点的可去性，在连续条件下可求长奇异曲线的可去性，等等)，以及一大类关于多复变量全纯函数同时延拓的定理．空间 $\mathbf{C}^n(n>1)$ 包含一些区域，每个全纯函数可以从这种区域延拓到一个更大区域中去(这种现象在一维的情形不会出现)．因此，在多复变函数的解析延拓理论中，刻画这些更大的区域——所谓全纯包(envelopes of holomorphy)，是一个重要的问题．所以，有对 Hartogs 域，n 环域及管形域的全纯包的描述，有关于紧奇集和余维数 ≥ 2 的奇集的可去性定理，关于"楔形的边"的 **Боголюбов 定理**(Bogolyubov theorem)和关于 C 凸包的 Владимиров 定理([3])(见**全纯包**(holomorphic envelope)；**Hartogs 域**(Hartogs domain)；**管形域**(tube domain)). 有一些构造全纯包的有效方法可供应用([3]).

实变量函数的解析延拓问题可以归结为全纯函数的解析延拓问题，因为对任一区域 $G \subset \mathbf{R}^n$ 和任一在 G 内解析的函数 f，存在区域 $D \subset \mathbf{C}^n$ 和在 D 内全纯的函数 $\tilde{f}$ 使得 $D \cap \mathbf{R}^n = G$ 且 $\tilde{f}|_G = f$.

参考文献

[1] Bieberbach, L., Analytische Fortsetzung, Springer, 1955.

[2] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968 (中译本：А. И. 马库雪维奇，解析函数论，高等教育出版社，1957).

[3] Владимиров, В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964 (英译本：Vladimirov, V. S., Methods of the theory of functions of several complex variables, M. I. T., 1966).

Е. М. Чирка 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hörmander, L., Introduction to complex analysis in several variables, v. Nostrand, 1966.

[A2] Grauert, H. and Fritzsche, K., Several complex variables, Springer, 1976 (中译本：H. 格劳尔特，K. 弗里切，多复变数，科学出版社，1988).

侯纪欣 译　何育赞 校

解析曲线 [**analytic curve; аналитическая кривая**]，**解析弧**(analytic arc)

n 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n (n \geq 2)$ 中具有解析参数化的曲线 K，意即曲线上点的坐标 $x=(x_1, \cdots, x_n)$ 可表为实参数的解析函数 $x_i=x_i(t)$ $(i=1,\cdots,n,\ \alpha \leq t \leq \beta)$，也就是在每点 $t_0(\alpha \leq t_0 \leq \beta)$ 的某个邻域内，函数 $x_i(t)$ 可表示成 $t-t_0$ 的收敛幂级数，并且在线段 $[\alpha, \beta]$ 的任一点，导数 $x_i'(t_0)$ $(i=1,\cdots,n)$ 不同时为零．后一条件有时作分开处理，把满足此条件的解析曲线称为**正则解析曲线**(regular analytic curve)．若 $x_i(\alpha)=x_i(\beta)$ $(i=1,\cdots,n)$，则称解析曲线是**闭的**(closed).

在复变量 $z=x_1+ix_2$ 的平面 $\mathbf{C}=\mathbf{C}^1$ 上一条解析曲线可表为实参数的复解析函数 $z=f(t)$ $(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$，且在 $[\alpha,\beta]$ 上 $f'(t)\neq 0$．若解析曲线被限于区域 $D\subset\mathbf{C}$ 中，则 D 到任一区域的共形映射也产生一解析曲线，若两解析曲线的交点集是无限集，则此两曲线重合．

一般地，在复空间 $\mathbf{C}^n(n\geqslant 1)$ 中，一条解析曲线的点的复坐标 z_i 可表为实参数的解析函数 $z_i=z_i(t)$ $(\alpha\leqslant t\leqslant\beta,\ i=1,\cdots,n)$．然而应该注意，若 $n>1$，术语"解析曲线"有时亦表示复 1 维的**解析曲面**(analytic surface)．

Riemann 曲面 S 上一条解析曲线 K 可表示成 $f(t)=\psi(\varphi(t))$，其中 $z=\psi(P)$ 是 S 上点 P 的局部单值化参数，$f(t)$ 是在任何点 $t_0\in[\alpha,\beta]$ 的一个邻域内的实参数的解析函数．

参考文献

[1] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, Т°. 2, М., 1968. гл. 8 (中译本: А. И. 马库雪维奇，解析函数论，高等教育出版社，1951)．

[2] Шабат, Б. В., Введение в комплексный анализ, ч. 1－2, 2 изд., М., 1976.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Gunning, R. C. and Rossi, H., Analytic functions of several complex variables, Prentice - Hall, 1965.

沈一兵 译

解析微分 [analytic differential; аналитический дифференциал]

见 **Riemann 曲面上的微分** (differential on a Riemann surface)．

解析表达式 [analytic expressio; аналитическое выражение]，公式(formula)

为了得到函数值而对自变量的值和常数按一定顺序进行的运算的总合．对于每个含一个自变量 x 的、具有不超过可数过间断点的函数，都存在一个仅含从自变量 x 和常数出发、至多进行可数次的三种运算(加法、乘法和按自然数取极限)的解析表达式 $A(x)$，例如

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

如果至少存在一个描述给定函数的解析表达式，则存在无穷多个这样的表达式．例如，恒等于零的函数可以表示为下列级数：

$$0=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}(x-n)}{n!}+1,$$

从任何解析表达式 $A(x)$，总可得到与其恒等的另一个解析表达式：

$$A(x)+B(x)\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}(x-n)}{n!}+1\right],$$

其中 $B(x)$ 是任意解析表达式．

参考文献

[1] Лузин, Н. Н., Теория функций действительного переменного. Общая часть, 2 изд., М., 1948.

Б. В. Кутузов 撰　张鸿林 译

解析函数 [analytic function; аналитическая функция]

能局部地表示为幂级数的函数．基于下述理由，解析函数类具有特殊的重要性．首先，该函数类的范围足够大，它包括了数学及其在自然科学和技术应用的主要问题中所遇到的大多数函数．其次，解析函数类关于算术、代数和分析的各种基本运算是封闭的．最后，解析函数具有一个重要性质，即唯一性(uniqueness)：每个解析函数是一个"有机联系的整体"，它在其整个自然存在域内代表"唯一的"一个函数．这一性质在 18 世纪是被看作与函数概念本身不可分割的，但随着 19 世纪上半叶把函数看作任意的一种对应之后，这一性质就显出了它所具有的基本意义．解析函数论起源于 19 世纪，主要是 A. L. Cauchy, B. Riemann 和 K. Weierstrass 的工作．在这一理论中，"过渡到复域"具有决定性的意义．解析函数论在其勃兴时是关于单复变量函数的理论，现在(20 世纪 70 年代)它已成了关于复变量函数的一般理论的主要内容．

关于解析性的概念，有几种不同的定义方式．其中之一是基于函数的结构性质(structural property)——关于复自变量的导数的存在性即复可微性．这一定义最早由 Cauchy 提出，后来 Riemann 作出了重要发展．这种定义方式与几何观念紧密相联．另一种定义方式是由 Weierstrass 系统地开创的，它基于表示函数为幂级数的可能性；因之它同表示函数的解析工具相联系．解析函数论的一个基本事实是在复平面的任一区域上对应的函数类的同一性．

下面给出确切的定义，设 D 是复平面 $\mathbf{C}$ 中的一个区域．如果对每个点 $z\in D$，指定某一复数 w 与之对应，则称在 D 上定义了复变量 z 的一个(单值)函数 f，并记为 $w=f(z),z\in D$ (或 $f:D\to\mathbf{C}$)．函数 $w=f(z)=f(x+iy)$ 可以看作两个实变量 x,y 的定义于区域 $D\subset\mathbf{R}^2$ (此处 $\mathbf{R}^2$ 是 Euclid 平面)上的复值函数．定义这样一个函数相当于定义两个实值函数

$$u=\varphi(x,y),\quad v=\psi(x,y),\quad (x,y)\in D\quad (w=u+iv).$$

固定点 $z\in D$，并给予 z 以改变量 $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$ (使得 $z+\Delta z\in D$)，考虑函数 f 的相应改变量

$$\Delta f(z)=f(z+\Delta z)-f(z).$$

如果当 $\Delta z\to 0$ 时，

$$\Delta f(z) = A\Delta z + o(\Delta z),$$

换言之，如果

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = A$$

存在，则称函数 f 在 z 处(按复分析意义或 C 意义)是可微的(differentiable)；$A=f'(z)$ 称为 f 在 z 处的导数，而

$$A\Delta z = f'(z)dz = df(z)$$

称为它在该点处的微分．在区域 D 的每个点处可微的函数 f，称为在区域 D 内是可微的(differentiable)．

可以把看作两个变量的函数 f（按 $\mathbf{R}^2$ 意义）的可微性概念与按 C意义的可微性概念作一比较．在前一情形，微分 df 具有形式

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy,$$

其中

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}+i\frac{\partial \psi}{\partial x},\quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}+i\frac{\partial \psi}{\partial y},$$

是 f 的偏导数．把自变量 x,y 转化为变量 $z,\bar z$，它们之间的关系由方程 $z=x+iy,\bar z=x+iy$ 给出，并可形式地视 z，$\bar z$ 为新的自变量(按照这一观点，函数 f 也可写为 $f(z,\bar z)$)．按通常的微分法则把 dx, dy 用 dz, $d\bar z$ 表示，就可将 df 写为复形式：

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}dz+\frac{\partial f}{\partial \bar z}d\bar z,$$

其中

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial f}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

它们分别是 f 关于 z 和 $\bar z$ 的(形式)导数．由此可知，f 按 C意义是可微的，当且仅当它按 $\mathbf{R}^2$ 意义可微，且满足方程 $\partial f/\partial \bar z=0$，后一方程可写为扩展的形式

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y},\quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

如果 f 在 D 内按 C意义可微，则上面的关系式在区域 D 的所有点都成立；它们称为 Cauchy - Riemann 方程 (Cauchy - Riemann equations)．在 18 世纪 J. L. d'Alembert 和 L. Euler 关于单复变量函数的研究中，就已出现这两个方程．早先给出的另一定义也可更精确地表达如下．定义于区域 D 内的函数 f 称为在点 $z_0\in D$ 处是全纯的(holomorphic)(解析的)，如果存在该点的一个邻域，使得 f 在该邻域内可表示为幂级数：

$$f(z) = a_0+a_1(z-z_0)+\cdots+a_n(z-z_0)^n+\cdots.$$

如果上述性质在区域 D 的每个点 z_0 处成立，则称函数 f 在区域 D 内是全纯的(holomorphic)(解析的)．

在点 $z_0\in D$ 处全纯的函数 f 在该点可微．更进一步，收敛幂级数的和具有关于复变量 z 的任何阶导数(即无穷次可微)；该幂级数的系数可通过 f 在 z_0 处的各阶导数由公式 $a_n=f^{(n)}(z_0)/n!$ 表出．写成形式为

$$f(z_0)+\frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n+\cdots$$

的幂级数通称为 f 在 z_0 处的 Taylor 级数(Taylor series)．这样，函数 f 在区域 D 内的全纯性意味着它在 D 的任一点处无穷次可微且其 Taylor 级数在该点的某个邻域内收敛于此函数．

另一方面，在解析函数论中建立了下述值得注意的事实：如果函数 f 在区域 D 内可微，则它在该区域内全纯(对于单个的点，这一陈述不真：$f(z)=|z|^2=z\bar z$ 在 $z_0=0$ 处可微，但它无处全纯)．这样，函数在一个区域内的复可微性与全纯性概念是等价的；函数 f 在区域 D 内的下述性质的任何一个都可作为 f 在该区域内的解析性(analyticity)的定义：按 C意义的可微性；按 $\mathbf{R}^2$ 意义的可微性并满足 Cauchy - Riemann 方程；全纯性．

解析函数的另一特征与积分概念有关．函数 $f=\varphi+i\psi$ 沿(有向可求长)曲线 $\Gamma: z=z(t)$ $(t\in[\alpha,\beta])$ 的积分可由公式

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)dt$$

定义，也可由曲线积分

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma[\varphi dx-\psi dy]+i\int_\Gamma[\psi dx+\varphi dy]$$

定义．

解析函数论的一个核心命题是 Cauchy 积分定理(Cauchy integral theorem)：如果 f 是区域 D 内的解析函数，则对任何所围区域位于 D 内的闭曲线 $\Gamma\subset D$，有 $\int_\Gamma f(z)dz=0$．其逆定理(Morera 定理(Morera theorem))也成立：如果 f 在区域 D 内连续且对任何上述的曲线 Γ 有 $\int_\Gamma f(z)dz=0$，则 f 是区域 D 内的解析函数．特别是，在单连通域内，具备下述性质的连续函数 f 且只有这些连续函数是解析的：f 沿任一闭曲线 $\Gamma\subset D$ 的积分为零(或与之等价地，f 沿任一连接任意两点 $z_1,z_2\in D$ 的曲线 Γ 的积分只依赖于点 z_1 和 z_2 本身，不依赖于曲线 Γ 的形状)．解析函数的这个特征构成了它的许多应用的基础．

由 Cauchy 积分定理可导出 Cauchy 积分公式(Cauchy integral formula)．借助这个公式，解析函数在区域内部的值可以通过它在该区域边界上的值来表示：

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z},\quad z\in D.$$

其中 D 是一个区域，∂D 是其边界，由有限条不相交的可求长曲线组成(取 ∂D 的方向为关于 D 的正向)，

而 f 是在某个区域 $G\supset\bar{D}=D\cup\partial D$ 内解析的函数．特别是，这个公式提供了这样的可能性，即把许多与解析函数有关的问题的研究归结为对于一个非常简单的函数——Cauchy 核 (Cauchy kernel) $1/(\zeta-z)$ $(\zeta\in\partial D, z\in D)$ 的相应问题的研究．其细节见**解析函数的积分表示** (integral representation of an analytic function)．

解析函数的一个极其重要的性质由下述唯一性定理 (uniqueness theorem) 所表述：如果两个在区域 D 内解析的函数在某个具有位于 D 内的极限点的集上取值相同，则它们在整个 D 内取值相同（即恒等）．特别是，不恒等于零的解析函数 $f(z)$ $(z\in D)$ 在 D 内只能有孤立零点．此外，如果 z_0 是 f 的零点，则在 z_0 的某一邻域 $U(z_0)$ 内有 $f(z)=(z-z_0)^{\nu}g(z)$，其中 $\nu\geqslant 1$ 是一自然数（称为 f 在 z_0 处零点的重数），而 $g(z)$ 是 $U(z_0)$ 内的解析函数且 $g(z_0)\neq 0$．

函数不解析的点，即所谓解析函数的奇点 (singular point of the analytic function)，在解析函数论中起着重要作用．此处只考虑（单值）解析函数的孤立奇点；细节见**奇点** (singular point)．设 f 是形如 $0<|z-z_0|<\rho$ 的圆环内的解析函数，则它能展开为 Laurent 级数 (Laurent series)

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n,$$

通常此级数不仅含有 $z-z_0$ 的正幂，而且含有 $z-z_0$ 的负幂．如果该级数不含有负幂项（即对 $n=-1,-2,\cdots$ 有 $a_n=0$），则称 z_0 为 f 的正则点 (regular point)（或可去奇点）．在正则点处，存在有限极限

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=a_0,$$

令 $f(z_0)=a_0$，就得到整个圆盘 $|z-z_0|<\rho$ 内的一个解析函数．如果所给函数的 Laurent 级数只含有有限个 $z-z_0$ 的负幂项：

$$f(z)=\sum_{n=-\mu}^{\infty}a_n(z-z_0)^n,\ \mu>0,\ a_{-\mu}\neq 0,$$

则称点 z_0 为 f 的（重数为 μ 的）极点 (pole)；极点 z_0 由

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=\infty$$

所刻画．函数 f 在点 z_0 处具有重数为 μ 的极点，当且仅当函数 $1/f$ 在该点处具有重数为 μ 的零点．如果所给函数的 Laurent 级数含有无穷多个 $z-z_0$ 的负幂项（即对负指标 n 的一个无穷集有 $a_n\neq 0$），则称 z_0 为 f 的本质奇点 (essential singular point)；f 在这样的点处没有有限或无穷的极限．f 的以孤立奇点 z_0 为中心的 Laurent 级数中的系数 a_{-1} 称为 f 在 z_0 处的残数 (residue)：

$$a_{-1}=\mathrm{res}[f(z);z=z_0].$$

残数可由公式

$$\mathrm{res}[f(z);z=z_0]=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}f(z)\,dz$$

定义，其中 $\gamma=\{z:|z-z_0|=\rho\}$ 且 $\rho>0$ 充分小（使得圆盘 $|z-z_0|\leqslant\rho$ 不含有 f 的异于 z_0 的奇点）．下述定理清楚地表明了残数的重要作用：如果 f 是区域 G 内除去一些孤立奇点所组成的某个集外的解析函数，$\Gamma\subset G$ 是其所围区域 $D\subset G$ 且不通过 f 的任何奇点的围道，$z_1,\cdots,z_n$ 是 f 在 D 内的所有奇点，则

$$\int_{\Gamma}f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{res}[f(z);z=z_k].$$

这一定理是计算定积分的有效工具．亦见**解析函数的残数** (residue of an analytic function)．

f 在 z_0 处的 Laurent 级数的对应于负指标 n 的各项之和

$$\sum_{n=-\infty}^{-1}a_n(z-z_0)^n$$

称为点 z_0 处 Laurant 级数（或函数 f）的主部 (principal part)．主部决定 f 在 z_0 处奇异性的特征．

能表示为两个在区域 D 内全纯的函数之商的函数，称为在区域 D 内是亚纯的 (meromorphic)．在某个区域内亚纯的函数，可能除去一个由极点构成的有限或可数集外，在该区域内是全纯的；亚纯函数在极点处的值规定为无穷．如果允许函数取值无穷，则区域 D 内的亚纯函数可定义为这样的函数：在每个点 $z_0\in D$ 的某邻域内，它可以表示为具有有限个 $z-z_0$ 的负幂项（项数依赖于 z_0）的 Laurent 级数．

通常把在区域 D 内全纯和亚纯的函数合称为在区域 D 内是解析的 (analytic)．这时，也称全纯函数为正则解析 (regular analytic) 函数或简称为正则 (regular) 函数．

在全平面上全纯的函数组成最简单的解析函数类；这类函数称为整函数 (entire function)．整函数可表示为在全平面上收敛的级数 $a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n+\cdots$．整函数类包括 z 的多项式以及函数

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots,$$

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\cdots,$$

等等．

Weierstrass 定理 (Weierstrass theorem) 断言，对任何在 $\mathbf{C}$ 内没有极限点的复数列 α_n $(n=1,2,\cdots)$，存在整函数 F，它在且仅在这些点处取值为零（α_n 中可能有重合的点，它对应于 F 的相应重数的零点）．于是，函数 F 可表示为仅有单个零点的一些整函数的乘

积（通常是无穷乘积）. 例如，

$$\sin z=z(1-\frac{z}{\pi})(1+\frac{z}{\pi})(1-\frac{z}{2\pi})(1+\frac{z}{2\pi})\cdots.$$

在全平面上亚纯的函数（即能表示为整函数之商的函数）称为亚纯函数（meromorphic function）. 这类函数包括有理函数，$\operatorname{tg} z=\sin z/\cos z$，$\operatorname{ctg} z=\cos z/\sin z$，椭圆函数，等等.

根据 Mittag-Leffler 定理（Mittag-Leffler theorem），对任何在 C 内没有极限点的序列 $\beta_n\in C(n=1,2,\cdots)$，存在亚纯函数 G，它以且仅以 $\beta_n(n=1,2,\cdots)$ 为极点，并且在点 β_n 处的主部取预先指定的 $1/(z-\beta_n)$ 的多项式. 函数 G 可以表示为一些仅有单个极点的亚纯函数之和（通常是无穷和）. 例如，

$$\operatorname{ctg} z=\frac{1}{z}+\frac{1}{z-\pi}+\frac{1}{z+\pi}+\frac{1}{z-2\pi}+\frac{1}{z+2\pi}+\cdots.$$

关于具有预先指定的零点的全纯函数的存在性与具有预先指定的极点和主部的亚纯函数的存在性定理，对任意区域 $D\subset C$ 也同样成立.

在解析函数的研究中，有关的几何概念也很重要. 如果 $f: D\to C$ 是解析函数，则区域 D 的象 $f(D)$ 也是区域（保域原理（principle of preservation of domains））. 如果 $f'(z_0)\neq 0$，则映射 f 在 z_0 处同时保持角的大小与符号不变，即它是保角的. 这样，解析性与共形映射（conformal mapping）这一重要几何概念之间，有着紧密的联系. 如果 f 是区域 D 内的解析函数且当 $z'\neq z''$ 时有 $f(z')\neq f(z'')$（这样的函数称为单叶的（univalent）），则在 D 内 $f'(z)\neq 0$ 且 f 定义了区域 D 到区域 $f(D)$ 上的一个一对一的共形映射. 共形映射理论的基本定理是 Riemann 定理（Riemann theorem），它断言，对于边界多于一个点的任何单连通域，存在把这个区域保角地映射到圆盘或半平面上的单叶解析函数（见**共形映射**（conformal mapping）；**单叶函数**（univalent function））.

在区域 D 内全纯的函数 $f=\varphi+i\psi$ 的实部与虚部在该域内满足 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0,\quad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0,$$

即它们都是调和函数（见**调和函数**（harmonic function））. 由 Cauchy-Riemann 方程相联系的两个调和函数，称为共轭的（conjugate）. 单连通域内的任何调和函数 φ 具有共轭函数 ψ，因而是区域 D 内的某个全纯函数 f 的实部.

共形映射与调和函数之间的联系，构成了解析函数论许多应用的基础.

函数 $f(z)$，$z\in E$（$E\subset C$ 是任一集合）称为在点 $z_0\in E$ 处是解析的（analytic），如果存在该点的一个邻域，使在该邻域与 E 的交上，f 能表示为收敛幂级数. 函数 f 称为在集合 E 上是解析的（analytic），如果它在某个包含 E 的开集上解析（更确切地说，如果同时存在一个包含 E 的开集和在该开集上解析的函数 F，使得 F 与 f 在集合 E 上相等），对于开集，解析性概念与在该集合上的可微性概念是一致的. 然而一般情形并非如此；特别是，在实直线上存在这样的函数，它不仅具有导数，而且在每个点处无穷次可微，但它在实直线的任一点均不解析. 为使解析函数的唯一性定理成立，集合 E 的连通性（connectedness）是必要的. 这就是为什么通常都考虑区域（domain）即连通开集内的解析函数的理由.

上述所有内容涉及的是在复平面的一个给定的区域 D（或给定的集合 E）中考虑的单值（single-valued）解析函数 f. 当考虑函数 f 作为解析函数向更大区域的可能的开拓时，就得到作为一个整体考虑的即遍及它的整个自然存在域的解析函数概念. 这样开拓后，函数解析性的区域变大，而且可能互相重叠，以致在平面上已经定义了函数值的点处给出新的函数值. 因此，作为整体考虑的解析函数通常是多值的（multi-valued）. 分析中的许多问题需要研究多值函数（例如反函数，确定原函数及在多连通域（见**多连通域**（multiply-connected domain））内构造具有给定实部的解析函数，具有解析系数的代数方程的解，等等）；这样的函数包括 $z^{1/n}$，$\ln z$，$\operatorname{arctg} z$，$\arcsin z$，代数函数，等等（见**代数函数**（algebraic function））.

给出遍及其自然存在域的完全解析函数的一个常规过程是由 Weierstrass 提出的，称为 Weierstrass 解析开拓（analytic continuation）方法.

解析开拓的起始概念是解析函数的元素（element）即具有非零收敛半径的幂级数. 这样的一个元素 W_0：

$$a_0+a_1(z-z_0)+\cdots+a_n(z-z_0)^n+\cdots,$$

在其收敛圆盘 K_0 内定义了某个解析函数 f. 设 z_1 是 K_0 中异于 z_0 的点，以 z_1 为中心展开 f 为幂级数，就得到一个新的元素 W_1：

$$b_0+b_1(z-z_1)+\cdots+b_n(z-z_1)^n+\cdots,$$

以 K_1 记此幂级数的收敛圆盘. 在 K_0 与 K_1 的交上，级数 W_1 收敛到级数 W_0 所表示的同一函数. 如果 K_1 扩展到 K_0 的边界以外，则级数 W_1 在 K_0 之外的某个集合（级数 W_0 在其上发散）上定义了由 W_0 确定的函数. 此时元素 W_1 称为元素 W_0 的一个直接解析开拓. 设 $W_0,\cdots,W_N$ 是元素的一个链，其中 W_{n+1} 是 W_n 的直接解析开拓（$n=0,\cdots,N-1$），则元素 W_N 称为元素 W_0 的一个（由给定的元素链给出的）解析开拓. 如果圆盘 K_N 的中心在 K_0 内，就可能发生元素 W_N 不是元素 W_0 的直接解析开拓的情形，此时级数 W_0 与 W_N 的和在 K_0

与 K_N 的交上可能会有不同的值；因之，解析开拓可能导致给定函数在 K_0 内的新的值．

解析开拓元素 W_0 所可能得到的一切元素的全体，构成由 W_0 生成的（Weierstrass 意义下的）完全解析函数（complete analytic function)；这些元素的收敛圆盘之并就是该函数的（Weierstrass）存在域（domain of existence）.由解析函数的唯一性定理得到，Weierstrass 意义下的解析函数完全由给定的元素 W_0 确定.初始元素可以是属于该函数的任一别的元素，它并不影响这个完全解析函数．

把完全解析函数看作平面上属于它的存在域 D 的点的函数时，一般是多值的．为消除多值性，就需不把 f 看作平面域 D 的点的函数，而把它看作某个（位于 D 之上的）多叶曲面 R 上的点的函数；对于 D 的每个点，曲面 R 上对应的点（投影到 D 的给定点的点）的数目，与完全解析函数 f 以该点为中心的不同元素的数目相同；在曲面 R 上，函数 f 就成为单值的．过渡到这种曲面的观念来自 Riemann，这种曲面称为 Riemann 曲面（Riemann surface)．Riemann 曲面概念的抽象定义使得用 Riemann 曲面上的单值解析函数论代替多值解析函数论成为可能（见 **Riemann 曲面**(Riemann surface))．

固定包含于完全解析函数 f 的存在域 D 中的某个区域 Δ 并固定 f 的以 Δ 中一个点为中心的某个元素 W，通过中心属于 Δ 的链解析开拓 W 所可能得到的一切元素的全体，称为解析函数 f 的分支（branch of an analytic function）.多值解析函数的分支可能成为区域 Δ 内的单值解析函数，例如，函数 $z^{1/n}$ 和 $\ln z$ 对应于不含有点 0 的任何单连通域的任何分支是单值函数．在这样的区域内，函数 $z^{1/n}$ 恰有 n 个不同的分支，而 $\ln z$ 具有无穷多个分支．通过分割存在域选取单值分支并以单值解析函数的理论来研究这些分支，是研究特殊的多值解析函数的主要方法之一．　A. A. Гончар 撰

多复变解析函数（analytic functions of several complex variables）. 由点 $z=(z_1,\cdots,z_n)(z_k=x_k+iy_k)$ 构成的复空间 $\mathbf{C}^n$，是复数域上具有 Euclid 度量

$$|z| = \left\{\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2\right\}^{1/2}, \quad \mathbf{C}^1 = \mathbf{C},$$

的向量空间．$\mathbf{C}^n$ 与 $2n$ 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^{2n}$ 不同之处在于某种不对称性：当从 $\mathbf{R}^{2n}$ 转向 $\mathbf{C}^n$（即在 $\mathbf{R}^{2n}$ 中引进一个复结构）时，其坐标被成对地划分为复组合 $z_k=x_k+iy_k$ 的形式．

如果复值函数 $f=\varphi+i\psi$ 定义于区域 $D\subset\mathbf{C}^n$ 中并在所有点 $z\in D$ 处按 $\mathbf{R}^{2n}$ 意义（即作为 $2n$ 个实变量 x_k，y_k 的函数）可微，则其微分可表示为如下形式：

$$df = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial z_k}dz_k + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial \bar z_k}d\bar z_k.$$

其中 $dz_k=dx_k+idy_k$，$d\bar z_k=dx_k-idy_k$，而记号 $\partial f/\partial z_k$，$\partial f/\partial\bar z_k$ 的定义与平面情形相同．如果 df 的形式为

$$df = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial z_k}dz_k,$$

即如果 df 为 $dz_1,\cdots,dz_n$ 的复线性组合，则函数 f 称为按 $\mathbf{C}^n$ 意义是可微的（differentiable）或在区域 D 内是全纯的（holomorphic）或解析的（analytic）.

这样，f 在区域 $D\subseteq\mathbf{C}^n$ 内的全纯性条件由它按 $\mathbf{R}^{2n}$ 意义可微和满足 n 个方程的复方程组 $\partial f/\partial\bar z_k=0(k=1,\cdots,n)$ 两个条件构成，后者等价于 $2n$ 个一阶偏微分方程

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_k} = \frac{\partial\psi}{\partial y_k},\ \frac{\partial\varphi}{\partial y_k} = -\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\ (k=1,\ldots,n)$$

构成的方程组（Cauchy - Riemann 方程组（Cauchy - Riemann system))．

空间情形（$n>1$）与平面情形（$n=1$）的差别在于：在前一情形下，上述方程组是超定的，因为方程的数目大于未知函数的数目．转向单复变量全纯函数到空间情形的推广（这在几何上更加自然）即全纯映射（holomorphic mapping）f（它是 n 个在区域 $D\subset\mathbf{C}^n$ 内全纯的函数 f_k 所构成的函数组 $f=(f_1,\cdots,f_n)$），这一方程组仍是超定的．映射 $f:D\to G=f(D)$ 称为双全纯的（biholomorphic），如果它是一对一的且它自身连同其逆 $f^{-1}:G\to D$ 都是全纯的．映射 $f:D\to\mathbf{C}^n$ 的全纯性条件由涉及 $2n$ 个实函数的 $2n^2$ 个实方程构成的方程组表示．$n>1$ 情形下的全纯性条件的超定性是空间情形的许多典型现象的导因．例如，在空间情形，没有类似于共形映射存在性的 **Riemann 定理**（Riemann theorem）那样的定理．如果 $n=1$，根据 Riemann 定理，边界不退化为单个点的任何两个单连通域是同构的．然而，如果 $n>1$，甚至诸如球 $\{|z|<1\}$ 和圆盘之积（多圆盘）$\{|z_\nu|<1:\nu=1,\cdots,n\}$ 都不是同构的．在比较这些域的自同构（automorphisms；即它们到其自身的**双全纯映射**（biholomorphic mapping））群时非同构显示了出来——可以证明这些群在代数上是不同构的，然而如果存在一个区域到另一个区域的双全纯映射，就可以建立这些群之间的同构．基于这个原因，复空间区域的双全纯映射理论，与平面上的共形映射理论有本质的差别．

函数 f 称为在点 $a\in\mathbf{C}^n$ 处是全纯的（holomorphic），如果它在该点的某一邻域内全纯．根据 Cauchy - Riemann 判别准则，在点 a 处全纯的多变量函数关于每个变量（固定其余变量的值）是全纯的．逆命题也成立：如果函数 f 在某个点的邻域内关于每个变量分别是全纯的，则它在该点全纯（Hartogs 基本定理（Hartogs fundamental theorem））．

类似于平面情形，函数 f 在点 $a=(a_1,\cdots,a_n)$ 的

全纯性等价于它在该点的某邻域内可展开为多重幂级数(mutiple power series):

$$f(z) = \sum_{k_\nu \geq 0} c_{k_1 \cdots k_n}(z_1-a_1)^{k_1}\cdots(z_n-a_n)^{k_n},$$

或写为简缩形式,

$$f(z) = \sum_{|k|\geq 0} c_k (z-a)^k,$$

其中 $k=(k_1, \cdots, k_n)$ 是由整数 $k_\nu \geq 0$ 组成的多重指标, $|k|=k_1+\cdots+k_n$, 且

$$(z-a)^k = (z_1-a_1)^{k_1}\cdots(z_n-a_n)^{k_n}$$

全纯函数是无穷次可微的,且上述级数是其 Taylor 级数, 即

$$c_k = \frac{1}{k_1!\cdots k_n!}\frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n} f}{\partial z_1^{k_1}\cdots\partial z_n^{k_n}},$$

导数取点 a 处的值.

单变量全纯函数的基本事实可推广到多变量全纯函数,但有时要改变形式.例证之一是 Weierstrass 预备定理(见 **Weierstrass 定理**(Weierstrass theorem)),它把单变量全纯函数作为 $z-a$ 的整幂取零值的性质推广到空间情形.这条定理可表述如下:如果在点 $a\in \mathbf{C}^n$ 处全纯的函数 $f\neq 0$ 在该点处等于零,则在某个邻域 $U(a)$ 内 f 可表示为(可能要作自变量的一个非退化线性变换)

$$f(z) = \{(z_n-a_n)^k + c_1('z)(z_n-a_n)^{k-1} + \\ + \cdots + c_k('z)\}\varphi(z),$$

其中 $k\geq 1$ 是整数, c_ν $(\nu=1, \cdots, k)$ 是 $'z=(z_1, \cdots, z_{n-1})$ 的函数, 它们在点 $'a=(a_1, \cdots, a_{n-1})\in \mathbf{C}^{n-1}$ 的一个邻域内全纯(一个字母左方加撇表示空间到前 $n-1$ 个坐标的投影),且在点 a 处取零值; φ 在 $U(a)$ 中全纯且不等于零.

这条定理在**解析集**(analytic set)研究中具有基本意义,解析集在其每个点的一个邻域内被描述为某些在该点处全纯的函数的公共零点的集合.基于 Weierstrass 预备定理,这样的集合可局部地描述为变量 z_n 的一些多项式的公共零点的集合,这些多项式的系数取自其余变量 $'z$ 的全纯函数构成的环.这个事实使得在解析集的局部研究中广泛运用代数方法成为可能.

在空间情形, Cauchy 积分定理也要有些改变,称为 Cauchy-Poincaré 定理(Cauchy-Poincaré theorem):设函数 f 在区域 $D\subset \mathbf{C}^n$ 内全纯,则对任一紧嵌入于 D 中的具有分段光滑边界 ∂G 的 $n+1$ 维曲面 G, 有

$$\int_{\partial G} f\,dz = 0.$$

如同平面情形,上述积分由给定集合的参数表示定义:如果 ∂G 具有参数方程 $z=z(t)$,其中 $t=(t_1, \cdots, t_n)$ 在一 n 维胞腔 $I^n=\{\alpha_k\leq t_k\leq \beta_k: k=1, \cdots, n\}$ 上变动,则定义

$$\int_{\partial G} f\,dz = \int_{I^n} f[z(t)]\frac{\partial(z_1, \ldots, z_n)}{\partial(t_1, \ldots, t_n)}dt_1\cdots dt_n.$$

空间与平面情形的不同在于,前者曲面 G 的维数小于区域 D 的维数,而在平面情形, G 与 D 的维数相等 $(n+1=2n)$.

对于多圆柱域即平面域之积,空间情形的 Cauchy 积分公式能写成特别简单的形式.设 $D=D_1\times\cdots\times D_n$ 是一个区域,其中 D_k 是复平面内具有分段光滑边界 ∂D_k $(k=1, \cdots, n)$ 的区域,函数 f 在紧包含 D 的某个区域内全纯,则逐次应用单变量 Cauchy 积分公式可得,对每个点 $z\in D$, 有

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z},$$

其中 $\Gamma=\partial D_1\times\cdots\times\partial D_n$ 是边界 ∂D 中的 n 维曲面, $\zeta=(\zeta_1, \cdots, \zeta_n)$, 而

$$\frac{d\zeta}{\zeta-z} = \frac{d\zeta_1\cdots d\zeta_n}{(\zeta_1-z_1)\cdots(\zeta_n-z_n)}.$$

然而,多圆柱域只是一类非常特殊的区域;对于一般的区域,这样分离变量是不可能的.对任意的具有分段光滑边界的区域 $D\subset \mathbf{C}^n$, Martinelli-Bochner 积分公式(Martinelli-Bochner integral formula)起着 Cauchy 积分公式的作用:对于在包含 $\bar{D}$ 的某个区域内全纯的函数 f 以及对于任何点 $z\in D$, 有

$$f(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int_{\partial D} f(\zeta)\frac{\delta(\bar{\zeta}-\bar{z})\,d\zeta}{|\zeta-z|^{2n}},$$

其中 $d\zeta=d\zeta_1\cdots d\zeta_n$,

$$\delta(\omega) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\omega_k\,d\omega_1\cdots d\omega_{k-1}\,d\omega_{k+1}\cdots d\omega_n.$$

这是关于一对函数的 Green 公式(Green formula),这对函数中的一个在 D 内全纯,而另一个则是空间 $\mathbf{R}^{2n}$ 的 Laplace 方程具有奇点 $\zeta=z$ 的基本解.当 $n=1$ 时,就是通常的 Cauchy 积分公式.当 $n>1$ 时,这一公式与关于平面域之积的 Cauchy 重积分公式的差别在于:首先,公式中的积分不是展布在边界的一个 n 维部分上,而是展布在所给域的 $2n-1$ 维边界上;其次,它的核(积分号中乘以 f 的因子)并非解析依赖于参数 z.然而,在许多问题中,解析核是必不可少的,这就要求对于尽可能广泛的区域类,构造具有解析核的积分公式.一般 **Leray 公式**(Leray formula)提供了很多积分公式,包括对于许多区域具有解析核的公式.这个公式是

$$f(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int_{\partial D} f(\zeta)\frac{\delta[\omega(\zeta)]\,d\zeta}{\langle \zeta-z, \omega(\zeta)\rangle^n},$$

其中 $\omega=(\omega_1,\cdots,\omega_n)$是也依赖于$z$的光滑向量函数，$d\zeta$与$\delta$的定义如前，$\langle\zeta-z,\ \omega\rangle=\sum_{k=1}^{n}(\zeta_k-z_k)\omega_k$；假定对任何固定的$z\in D$并当$\zeta$取遍$\partial D$时，$\langle\zeta-z,\omega(\zeta)\rangle\neq0$. 上述公式中积分的值不依赖于向量函数$\omega(\zeta)$的选取(假定对所有$z\in D$，$\zeta\in\partial D$且$\langle\zeta-z,\ \omega(\zeta)\rangle\neq0$)；如果$\omega(\zeta)=\bar\zeta-\bar z$，则这个积分与Martinelli - Bochner积分相同．对不同的区域类选择不同的ω，从Leray公式就能得到各种积分公式．在多变量解析函数论中，也考虑别的只对某些区域类成立的积分表示．其中重要的一类是所谓 Weil 域(Weil domain)，它是平面域之积的推广．对于这类域有**Bergman - Weil 表示**(Bergman - Weil representation)，它具有解析依赖于参数的核．

如同平面情形，研究解析函数的奇点具有基本的意义；在这方面，平面情形与空间情形的主要区别由关于紧奇点集的可去性的 Osgood - Brown 定理显示出来：根据这条定理，如果D是$\mathbf{C}^n(n>1)$中的区域，K是D的紧子集，$D\backslash K$是连通的，则任一在$D\backslash K$内全纯的函数可以全纯开拓到整个区域D上．由这条定理，多变量全纯函数不可能有孤立奇点．在$\mathbf{C}^n(n>1)$中，孤立奇点为奇集所取代，当奇集维数低于$2n-1$时，它是解析集．

上述事实在多维残数理论中具有基本意义．多维残数理论研究计算函数f的积分问题，其中f在区域$D\subset\mathbf{C}^n$内除去解析集M(它位于与M不相交的n维闭曲面σ上)外处处全纯．由于奇集M的维数比D的维数至少低2，所以$D\backslash M$是连通的．如果曲面σ不与M相连，即M包围$D\backslash M$中一个紧$n+1$维曲面G，则由Cauchy - Poincaré 定理，$\int_\sigma f\,dz=0$．为在一般情形下计算积分$\int_\sigma f\,dz$，就必须弄清楚σ怎样与奇集M相连，并计算展布在与集合M的分隔部分相连的特殊n维曲面上的积分(残数)．

解决上述问题涉及很大的拓扑和分析的困难．用E. Martinelli 和 J. Leray 提出的方法，常可克服它们．Martinelli 方法的基础是应用拓扑中的 Aleksander - Понтрягин 对偶性原理，把集$D\backslash M$的n维同调的研究，归结为奇集M的$n-1$维同调的研究．Leray的方法更具一般性，其基础是审察特殊的同调类以及计算某些微分形式(残数形式)．也已发现，多维残数理论可应用于**理论物理** (见 **Feynman 积分**(Feynman integral))．

Osgood - Brown 定理揭示了空间情形与平面情形的理论之间的一个重大的基本差异．在平面情形，对任何区域D，可构造在D内全纯但不能解析开拓到D的边界之外的函数f，即D是自然存在域．空间情形则不同：例如，球壳$\{\frac{1}{2}<|z|<1\}$不可能是任何全纯函数的存在域，因为据 Osgood - Brown 定理，任一在该球壳内全纯的函数必可解析开拓到整个球$\{|z|<1\}$上．

这就产生了怎样刻画全纯函数的自然存在域——所谓全纯域(domains of holomorphy)这一问题．一个简单的充分条件可借助所给区域的边界点ζ处的障碍函数$f_\zeta(z)$来表述．$f_\zeta(z)$在所给区域内全纯，而当z趋于ζ时无限增长．如果能对区域$D\subset\mathbf{C}^n$边界中的一个处处稠密点集构造障碍，则D是全纯域．特别地，任何凸域满足这个条件：对任一点$\zeta\in\partial D$，只须从D在点ζ处的$2n-1$维支撑平面中选取形如

$$L_\zeta(z)=\sum_{k=1}^{n}a_k(z_k-\zeta_k)=0$$

的$2n-2$维平面，则函数$f_\zeta=1/L_\zeta$就会是一个障碍．于是，$\mathbf{C}^n$中的任一凸域是全纯域．然而，凸性不是全纯性的必要条件：平面域之积总是全纯域，但不一定是凸的．不过，如果适当地推广凸性概念，就可能得到必要充分条件．有一个基于下述事实的推广：集合$K\subset\mathbf{R}^n$的凸包可描述为这样的点的集合，在这些点处任一线性函数的值不大于该函数在K上的值的上确界．类比于此，集$K\subset D\subset\mathbf{C}^n$的全纯凸包定义为

$$\hat K_{\mathcal{O}}=\left\{z\in D:\ |f(z)|\leqslant\sup_{\zeta\in K}|f(\zeta)|,\ f\in\mathcal{O}(D)\right\}.$$

其中$\mathcal{O}(D)$为所有在D内全纯的函数的集．区域$D\subset\mathbf{C}^n$称为全纯凸的(holomorphically convex)，如果对D的每个紧子集K，全纯凸包$\hat K_{\mathcal{O}}$也是D的紧子集．全纯凸性是全纯域的必要充分条件．但是，由于难以验证全纯凸性，这个判断准则并不十分有效．

另一推广与**多重次调和函数**(plurisubharmonic function)概念相联，这种函数是凸函数在复情形下的推广．$\mathbf{R}^n$的区域D中的凸函数可定义为这样的函数：它在直线$x=x^0+\omega t$(其中x^0，$\omega\in\mathbf{R}^n$，t是实参数)位于D内的线段上的限制是t的凸函数．定义于区域$D\subset\mathbf{C}^n$内并在D内上半连续的实函数φ称为在D内是多重次调和的，如果对每条复直线$z=z^0+\omega\zeta(z^0,\ \omega\in\mathbf{C}^n$，$\zeta$是复参数)，$\varphi$在该直线位于$D$内的部分上的限制是$\zeta$的次调和函数．如果$\varphi$二次连续可微，则由复合函数微分法则，多重次调和性的条件就是 Hermite 形式

$$H(\omega,\bar\omega)=\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_j\partial\bar z_k}\omega_j\bar\omega_k$$

——此即所谓 Levi 形式(Levi form)——是非负的．

区域$D\subset\mathbf{C}^n$称为伪凸的(pseudo - convex)，如果函数$\ln d(z,\partial D)$ ($d(z,\partial D)$表示点$z\in D$到D的边界∂D的 Euclid 距离)在D内是多重次调和的．伪凸性也是一个区域为全纯域的必要充分条件．

在某些情形下，有可能有效地验证一个区域的伪凸性．

至于对并非全纯域的区域 D，就产生了如何描绘其全纯包(envelope of holomorphy)的问题；D 的全纯包是使得 D 内任一全纯函数可解析开拓到其上的最小全纯域．对于最简单的区域类，能够有效地构造全纯包；但对于一般情形，这个问题在单叶域类范围内是不可解的．当把函数解析开拓出给定区域 D 的边界时，就可能出现多值性；通过引进类似于 Riemann 曲面(见 **Riemann 曲面**(Riemann surface))的 D 上的多叶覆叠域(covering domain)，可以消除多值性．对于覆叠域类，构造全纯包的问题恒可解．这个问题的解也可应用于理论物理的量子场论中．

从平面转向复空间时极大地增加了与全纯函数有关的几何问题的多样性．特别是，在空间情形，不仅自然地考虑区域内的全纯函数，而且自然地考虑复流形(complex manifold)——偶实数维的光滑流形，其邻域由双全纯映射相联系——上的全纯函数．在这方面，**Stein 流形**(Stein manifold)——全纯域的自然推广——具有特殊意义．

分析中的一些问题可以归结为下述问题：在给定区域中构造具有给定零点的全纯函数或具有给定极点及 Laurent 级数主部的亚纯函数．在平面情形，对任意的区域，这些问题为 Weierstrass 定理和 Mittag - Leffler 定理及其推广所解决．空间情形则不同，相应的问题即所谓 Cousin 问题(Cousin problem)的可解性依赖于所考虑的复流形的拓扑和分析特性．

解 Cousin 问题的关键步骤是从具有给定性质的局部定义的函数出发，构造定义于所考虑的整个流形上且具有相同局部性质的大范围函数．应用层论(theory of sheaves)可以非常方便地实现这种构造．层论起源于研究解析函数概念的代数拓扑方法，它在数学的许多不同分支中有重要应用．利用层论方法得到 Cousin 问题的解是由 H. Cartan 和 J. - P. Serre 实现的．

Б. В. Шабат 撰

解析函数的现代理论及其推广 这是分析中最重要的分支之一，与数学中很不同的一些分支紧密相联，并在理论物理、力学和技术中有很多应用．

苏联的数学家对解析函数论及其应用开展了基础性的研究．20 世纪初，在俄国涌现了研究单复变量函数论的广泛兴趣．这与俄罗斯科学家对解析函数论在连续介质力学中的应用的引人注目的研究联系在一起．Н. Е. Жуковский 和 С. А. Чаплыгин 用解析函数论方法解决了流体动力学和空气动力学中的非常重要的问题．在 Г. В. Колосов 和 Н. И. Мусхелишвили 的工作中，这些方法被应用于弹性理论的基本问题．在随后的年代中，单复变量函数论取得了广阔的发展．解析函数论各个方面的进展为下列具有基本意义的研究所决定：В. В. Голубев，Н. Н. Лузин，И. И. Привалов 和 В. И. Смирнов (解析函数的边界性质)；М. А. Лаврентьев (复变函数的几何理论，拟共形映射及其在气体动力学中的应用)；М. В. Келдыш，М. А. Лаврентьев 和 Л. И. Седов (解析函数论方法在连续介质力学问题中的应用)；Д. Е. Меньшов (单演性理论)；М. В. Келдыш，М. А. Лаврентьев 和 С. Н. Мергелян (复变量函数逼近论)；И. Н. Векуа (广义解析函数论及其应用)；А. О. Гельфонд(插值理论)；Н. Н. Боголюбов 和 В. С. Владимиров (多变量解析函数论及其在量子场论中的应用)．单复变量和多复变量解析函数论及其推广的发展仍在继续进行．见**解析函数的边界性质**(boundary properties of analytic functions)；**拟共形映射**(quasi - conformal mapping)；**解析函数论的边值问题**(boundary value problems of analytic function theory)，**复变函数逼近**(approximation of functions of a complex variable)．

参考文献

[1] Привалов，И. И.，Введение в теорию функций комплексного переменного，11 изд.，М.，1967 (中译本：И. И. 普里瓦洛夫，复变函数引论，人民教育出版社，1956)．

[2] Смирнов，В. И.，Курс высшей математики，8 изд.，т. 3，ч. 2，М.，1969 (中译本：В. И. 斯米尔诺夫，高等数学教程，第三卷第二分册，人民教育出版社，1958)．

[3] Маркушевич，А. И.，Теория аналитических функций，2 изд.，т. 1－2，М.，1967－1968(中译本：А. И. 马库雪维奇，解析函数论，高等教育出版社，1957)．

[4] Лаврентьев，М. А.，Шабат，Б. В.，Методы теории функций комплексного переменного，4 изд.，М.，1973 (中译本：М. А. 拉甫伦捷夫，Б. В. 沙巴特，复变函数论方法，高等教育出版社，上册，1956，下册，1957)．

[5] Голузин，Г. М.，Геометрическая теория функций комплексного переменного，2 изд.，М.，1966 (中译本：Г. М. 戈鲁辛，复变函数的几何理论，科学出版社，1956)．

[6] Евграфов，М. А.，Аналитические функции，2 изд.，М.，1968 (英译本：Evgrafov，M. A.，Analytic functions，Saunders，Philadelphia，1966)．

[7] Свешников，А. Г.，Тихонов，А. Н.，Теория функций комплексной переменной，М.，1967．

[8] Фукс，Б. А.，Теория аналитических функций многих комплексных переменных，2 изд.，ч. 1－2，М.，1962－1963(英译本：Fuks，B. A.，Theory of analytic functions of several complex variables，1－2，Amer. Math. Soc.，1963－1965)．

[9] Владимиров，В. С.，Методы теории функций многих комплексных переменных，М.，1964 (英译本：Vladimirov，V. S.，Methods of the theory of functions of several complex variables，M. I. T.，1966)．

[10] Маркушевич，А. И.，Очерки по истории теории

аналитических функций, М. - Л., 1951.

[11] Математика в СССР за тридцать лет, 1917–1947, М. - Л., 1948, 319–414.

[12] Математика в СССР за сорок лет., 1917–1957, т. 1, М., 1959, 381–510.

[13] Шабат, Б. В., Введение в комплексный анализ, ч. 1–2, 2 изд., М., 1976.

[14] Бицадзе, А. В., Основы теории аналитических функций комплексного переменного, М., 1969.

А. А. Гончар, Б. В. Шабат 撰

【补注】 复分析(complex analysis)即解析函数论，一直到目前，在西方也是一个活跃的研究领域. 在《不列颠百科全书》的题为《复分析》(analysis, complex)的综述条目中，可以读到关于解析函数论的某些历史发展情况.

除上述参考文献列举的之外，还有大量关于复分析的教科书. 下面列举了新近出版的一些好书，[A1]到[A10]是关于单复变量的，[A11]到[A18]是关于多复变量的.

再对多复变分析加一些评注是适宜的. 在西方，"关于紧奇点集的可去性的 Osgood - Brown 定理"通常称为 Hartogs 扩张定理(Hartogs extension theorem). 这个定理的由 L. Ehrenpreis 给出的现代证明，应用了非齐次 Cauchy - Riemann 方程或 $\bar\partial$ 方程. 由 J. J. Kohn 和 L. Hörmander 广泛发展的所谓 $\bar\partial$ 方法，现已成为复分析中使用的三种最有力的方法之一. 例如，这一方法可用来解 Levi 问题(全纯域与伪凸域是否一样?)和 Cousin 问题，见 [A15]. 早先这些基本问题是用现在划归到层论的方法解决的，这种方法可追溯到冈潔(1936–1954)，而 H. Cartan, J. - P. Serre, H. Grauert 及其他人的层同调论使这一方法臻于极盛，见[A12]中的优美论述. 第三种也是最新的方法应用适当的积分表示，它是由 G. M. Henkin (Г. М. Хенкин)和 E. Ramirez de Arellano 开发的，见 [A14].

参考文献

[A1] Ahlfors, L. V., Complex analysis, McGraw - Hill, 1966 (中译本:L. V. 阿尔福斯,复分析,第二版,上海科学技术出版社,1984).

[A2] Conway, J. B., Functions of one complex variable, Springer, 1973 (中译本:J. B. 康威，单复变函数,上海科学技术出版社，1985).

[A3] Dinghas, A., Vorlesungen über Funktionentheorie, Springer, 1961.

[A4] Henrici, P., Applied and computational complex analysis, 1–3, Wiley, 1974–1986.

[A5] Hille, E., Analytic function theory, 1–2, Chelsea, reprint, 1974.

[A6] Nehari, Z., Conformal mapping, Dover, reprint, 1975.

[A7] Nevanlinna, R., Analytic functions, Springer, 1970 (译自德文).

[A8] Nevanlinna., R., Paatero, V., Introduction to complex analysis, Addison - Wesley, 1969 (译自德文).

[A9] Rudin, W., Real and complex analysis, McGraw - Hill, 1974 (中译本: W. 卢丁，实分析和复分析，人民教育出版社，1981).

[A10] Titchmarsh, E. C., The theory of functions, Oxford Univ. Press, 1939 (中译本: E. C. 梯其玛希，函数论,科学出版社，1962).

[A11] Grauert, H., Fritzsche, K., Several complex variables, Springer, 1976 (中译本: H. 格劳尔特，K. 弗里切,多复变数,科学出版社，1988).

[A12] Grauert, H., Remmert, R., Theory of Stein spaces, Springer, 1979 (译自德文).

[A13] Gunning, R., Rossi, H., Analytic functions of several complex variables, Prentice - Hall, 1965.

[A14] Henkin, G. M. (G. M. Khenkin), Leiterer, J., Theory of functions on complex manifolds, Birkhäuser, 1984.

[A15] Hörmander, L., An introduction to complex analysis in several variables, North - Holland, 1973.

[A16] Krantz, S. G., Function theory of several complex variables, Wiley (Interscience), 1982.

[A17] Narasimhan, R., Several complex variables, Univ. of Chicago Press, 1971(中译本: R. 纳拉西汉姆，多复变函数,科学出版社，1985).

[A18] Rudin, W., Function theory in the unit ball of $\mathbf{C}^n$, Springer, 1980.

[A19] Range, R. M., Holomorphic functions and integral representations in several complex variables, Springer, 1986.

沈永欢 译

解析函数元 [analytic function, element of an; элемент аналитической функции]

按照某个解析结构给出的复变量 z 的平面 $\mathbf{C}$ 内的区域 D 与在 D 上给定的解析函数 $f(z)$ 的集合 (D, f)，这个结构能有效地实现 $f(z)$ 到它的整个存在区域的解析开拓，形成一个**完全解析函数**(complete analytic function). 解析函数元素最简单和最常用的形式是用幂级数

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k \tag{1}$$

及其中心为 a (元素的中心(centre of an element)), 收敛半径为 $R>0$ 的收敛圆盘 $D=\{z\in\mathbf{C}:|z-a|<R\}$ 表示的圆元 (circular element). 这里，解析开拓由对各个中心 $b\,(|b-a|\leqslant R)$ 按形如

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z-b)^n = c_0 +$$
$$+[c_1(b-a)+c_1(z-b)]+$$
$$+[c_2(b-a)^2+2c_2(b-a)(z-b)+c_2(z-b)^2]+\cdots$$

的公式把级数(1)重新展开(可能重复)来得到. 完全解

析函数的任一个元素 (D, f) 都唯一确定并可用以 $a\in D$ 为中心的圆元表示. 在中心为无穷远, 即 $a=\infty$ 的情形, 圆元取

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{-k}$$

及其收敛域 $D=\{z\in\mathbf{C}:|z|>R\}$.

在解析开拓的过程中, $f(z)$ 可能变为多值并出现相应的**代数分支点** (algebraic branch point), 即形如

$$f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} c_k (z-a)^{k/v},$$

$$f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} c_k z^{-k/v}$$

的分支元 (branched elements), 其中 $v>1$; 数 $v-1$ 称为分支的阶 (branching order). 分支元推广了解析函数元的概念, 因此, 解析函数元也称为非分歧 (因为 $v=1$) 正则 (因为 $m\geqslant 0$) 元 (unramified regular element).

作为多复变量 $z=(z_1,\cdots,z_n)(n>1)$ 的解析函数 $f(z)$ 的最简单的元素 (D, f), 可取多重幂级数

$$f(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} c_k (z-a)^k = \tag{2}$$

$$= \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=0}^{\infty} c_{k_1}\cdots c_{k_n}(z_1-a_1)^{k_1}\cdots(z_n-a_n)^{k_n},$$

其中 $a=(a_1,\cdots,a_n)$ 是元素的中心, $|k|=k_1+\cdots+k_n$, $c_k=c_{k_1}\cdots c_{k_n}$, $(z-a)^k=(z-a_1)^{k_1}\cdots(z-a_n)^{k_n}$, 而 D 是某个多圆柱

$$D = \{z\in\mathbf{C}^n: |z_j-a_j|<R_j, j=1,\ldots,n\}.$$

级数(2)在 D 内绝对收敛. 不过, 必须注意, 当 $n>1$ 时多圆柱并不正好是幂级数的绝对收敛域.

解析函数元的概念与解析函数芽 (germ) 的概念相近.

参考文献

[1] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1-2, М., 1967-1968(中译本: А. И. 马库雪维奇, 解析函数论, 高等教育出版社, 1957).

[2] Владимиров, В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964 (英译本: Vladimirov, V. S., Methods of the theory of functions of several complex variables, M. I. T., 1966).

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 当 $n>1$ 时, 幂级数的绝对收敛域是一个所谓 **Reinhardt 域** (Reinhardt domain), 见 [A1].

参考文献

[A1] Hörmander, L., An introduction to complex analysis in several variables, North-Holland, 1973, Chapt. 2.4.

侯纪欣 译 何育赞 校

解析泛函 [analytic functional; аналитический функционал]

定义在 $\mathbf{C}^n$ 的开子集 Ω 上的解析函数空间 $H(\Omega)$ 的共轭空间 $H'(\Omega)$ 的元素 f, 即 $H(\Omega)$ 上的连续线性泛函. 例如, 有紧支集的分布是解析泛函. 存在紧集 $K\subset\Omega$, 称为解析泛函 f 的支集 (support), 使得 f 集中在 K 上: 对于任何开集 $\omega\supset K$, 泛函 f 可以延拓到 $H(\omega)$, 并对于所有 $u\in H(\Omega)$, 下列不等式成立:

$$|f(u)| \leqslant C_\omega \sup_\omega |u|,$$

其中 C_ω 是依赖于 ω 的常数. 存在支集在 K 中的测度 μ, 使得

$$f(u) = \int_\omega u\, d\mu.$$

实值函数空间上的解析泛函可用类似的方式来定义.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 关于对偏微分方程的应用, 见 [A1].

参考文献

[A1] Ehrenpreis, L., Fourier analysis in several complex variables, Wiley (Interscience), 1970.

[A2] Homander, L., An introduction to complex analysis in several variables, North-Holland, 1973, Sect. 4.5.

史树中 译

解析几何学 [analytic geometry; аналитическая геометрия]

几何学的一个分支. 解析几何学的基本概念是最简单的几何元素 (点、直线、平面、二次曲线和曲面). 在解析几何学中, 最主要的研究工具是坐标法和初等代数法. 坐标法的产生同 17 世纪天文学、力学和工艺的飞速发展有着密切的联系. R. Descartes 在他的《几何学》(Géometrie, 1637) 一书中, 对坐标法和解析几何基础作了清晰而详尽的叙述. 与 Descartes 同时代的 P. Fermat 也熟悉坐标法原理. 解析几何学后来的发展, 应归功于 G. Leibniz, I. Newton, 特别是 L. Euler 的研究工作. J. L. Lagrange 在建立分析力学时, G. Monge 在研究微分几何学时, 都使用了解析几何学的工具. 现在解析几何学作为一门独立学科, 虽然没有什么重要意义, 但是它的方法已广泛应用于数学、力学、物理学和其他科学领域之中.

坐标法的原理如下所述. 例如, 考虑平面 π 上的两条相互垂直的直线 Ox 和 Oy. 这两条直线 (包括它们的方向)、坐标原点 O 以及所选取的标度单位 e, 构成所谓的平面 π 上的 Descartes 直角坐标系 (Cartesian orthogonal system) Oxy. 直线 Ox 和 Oy 分别称为横轴 (abscissa axis) 和纵轴 (ordinate axis). 平面 π 上的任何点 M 相对于这个坐标系 Oxy 的位置, 可以按下述

方式确定. 设 M_x 和 M_y 是 M 在 Ox 和 Oy 上的投影, 数 x 和 y 是线段 OM_x 和 OM_y 的大小(例如,线段 OM_x 的大小 x 等于这个线段的长度再加上相应的符号,如果从 O 到 M_x 的方向与直线 O_x 的方向相同,则加正号;在相反情况,则加负号). 数 x(横坐标(abscissa))和 y(纵坐标(ordinate))称为点 M 在坐标系 Oxy 中的 Descartes 直角坐标(Cartesian orthogonal coordinates). 具有横坐标 x 和纵坐标 y 的点 M 用符号 $M(x,y)$ 来表示. 点 M 的坐标显然确定了这一点相对于坐标系 Oxy 的位置.

设在具有给定的 Descartes 直角坐标系 Oxy 的平面 π 上,给定一条曲线 L. 利用点的坐标概念, 相对于坐标系 Oxy, 就有可能建立曲线 L 的形如 $F(x,y)=0$ 的方程,当然,曲线 L 上的任何点 M 的坐标 x 和 y 都将满足这个方程,而不在 L 上的任何点的坐标都不满足这个方程.

平面坐标法的基本思想是:通过用分析的和代数的工具研究线 L 的方程 $F(x,y)=0$,便可得知 L 的几何性质. 例如,确定一条直线和一个圆的交点个数的几何问题,便可化为这条直线和这个圆的方程联立求解的问题,这是一个分析问题.

事实上,这正是研究**椭圆**(ellipse)、**双曲线**(hyperbola)和**抛物线**(parabola)性质的方法,这三种曲线是圆锥与不过其顶点的平面之交线(见**圆锥曲线**(conic sections)).

所谓一次和二次代数曲线(algebraic curves of the first and second orders)是平面解析几何学系统研究的对象;在 Descartes 直角坐标系中,这些曲线分别用一次和二次方程来描述. 一次曲线是直线,反之,任何直线都能用一次代数方程 $Ax+By+C=0$ 来描述. 二次曲线用形如 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 的方程来描述. 对于这些曲线进行研究和分类的基本方程是:选择适当 Descartes 直角坐标系,使得曲线的方程具有最简单的形式,然后来研究这个简单的方程.(见**二次曲线**(second-order curve).)

在空间解析几何学中, Descartes 直角坐标是 x, y 和 z(横坐标、纵坐标和竖坐标),点 M 的位置完全像在平面解析几何学中那样来描述. 空间中任何给定的曲面 S 在坐标系 $Oxyz$ 中都具有它自己的方程 $F(x,y,z)=0$,而通过用分析和代数的方法来研究这个方程,便可得知曲面 S 的几何性质. 空间中的曲线 L 可以作为两个曲面 S_1 和 S_2 的交线来给出. 如果 S_1 和 S_2 的方程分别为 $F_1(x,y,z)=0$ 和 $F_2(x,y,z)=0$, 则这两个方程联立便是曲线 L 的方程. 例如, 空间中的直线 L 可以看作两个平面的交线. 在空间解析几何学中,对于所谓一次和二次代数曲面(algebraic surfaces of the first and second orders)进行了系统的研究. 结果发现,只有平面是一次代数曲面. 二次曲面(surfaces of the second order)具有下列形式的方程:

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fxz+$$
$$+Gx+Hy+Mz+N=0.$$

对这些曲面研究和分类的基本方法是:适当选择 Descartes 直角坐标系,使得曲面的方程具有最简单的形式,然后再研究这个方程.(见**二次曲面**(sufaces of the second order).)

参考文献

[1] Descartes, R., La géometrie, Leiden, 1637.

[2] Wieleitner, H., Die Geschichte der Mathematik von Descartes bis zun Hälfte des 19. Jahrhunderts, de Gruyter, 1923.

[3] Ефимов, Н. В., Краткий курс аналитической геометрии, 9 изд., М., 1967.

[4] Ильин, В. А., Позняк, Э. Г., Аналитическая геометрия, М., 1968.

[5] Александров, П. С., Лекции по аналитической геометрии, М., 1968.

[6] Постников, М. М., Аналитическая геометрия, М., 1973.

[7] Бахвалов, С. В., Моденов, П. С., Пархоменков, А. С., Сборник задач по аналичической геометрии, 3 изд., М., 1964.

Э. Г. Позняк 撰

【补注】

参考文献

[A1] Bol, G., Elemente der analytischen Geometrie, Vandenhoeck & Ruprecht, 1948.

[A2] Borsuk, K., Analytic geometry, PWN, 1969.

[A3] Struik, D. J., Lectures on analytic and projective geometry, Addison-Wesley, 1953.

[A4] Todd, J. A., Projective and analytical geometry, Pitman and Sons, 1947.

张鸿林 译　蒋正新 校

解析几何学 [analytic geometry; аналитическая геометрия]

解析空间(analytic space)的理论,这个名称是 J. P. Serre 类比于代数几何学引入的([1]).

参考文献

[1] Serre, J.-P., Géométrie algébrique et géometrie analytique, *Ann. Inst. Fourier* (*Grenoble*), **6** (1955-1956), 1-42.

А. Л. Онищик 撰　张鸿林 译

解析群 [analytic group; аналитическая группа]

一个集合 G,它同时具有**拓扑群**(topological group)构造及有限维**解析流形**(analytic manifold)构造(在域 k 上,它对某个非平凡范数是完全的,见**域上的范数**(norm on a field)),使按规则 $(x,y)\to xy^{-1}$ 定

义的映射 $G\times G\to G$ 是解析的. 解析群恒为 Hausdorff 拓扑群; 如果 k 是局部紧的, 则 G 是局部紧的. 如果 k 分别为实数域、复数域或 p 进数域, 则 G 分别称为实的、复的或 p 进的解析群. k 上向量空间 k^n 的一般线性群 GL (n,k) (见**线性典型群** (linear classical group)), 或者更一般地, 由 k 上有单位元的任何有限维结合代数的所有可逆元素组成的群是解析群的例子. 一般说来, k 上定义的**代数群** (algebraic group) 的 k 有理点组成的群是一个解析群. 解析群 G 的子群如果是 G 的子流形, 则称之为解析子群 (analytic subgroup); 这种子群必定在 G 中是闭的. 例如, 正交群 $O(n,k)=\{g\in GL(n,k):{}^t gg=1\}$ 是 GL (n,k) 中的解析子群. 实的或 p 进解析群的所有闭子群都是解析的, 这种群的每个连续同态都是解析的 (Cartan 定理 (Cartan theorems), 见 [1]).

解析群有时称为 Lie 群 (Lie group) ([1]), 但是 Lie 群通常指的是实解析群, 见 [2], [3] 及 **Lie 群** (Lie group). 复的和 p 进的解析群分别称为复 Lie 群及 p 进 Lie 群.

上面所述的 Cartan 定理表明, 实的或 p 进的解析群的**范畴** (category) 是局部紧拓扑群的范畴中的完全子范畴. 这些范畴相差有多大, 即何时一个局部紧群 G 为实解析群或 p 进解析群, 这个问题可用穷举法予以回答: 如果 G 是实解析群, 则它必含有单位元的一个邻域, 其中没有非平凡子群 (见[5]−[9]); 如果它是 p 进解析群, 则它必含有一个有限生成的开子群 U, U 是一个**射影 p 群** (pro-p-group), 且其换位子群包含在由 U 的元素的 p^2 次幂组成的集合 U^{p^2} 之中 (见[10]). 特别地, 任何拓扑群, 只要有单位元的一个邻域同胚于一个 Euclid 空间 (所谓的局部 Euclid 拓扑群 (locally Euclidean topological group), 见 [4]), 它就是一个实解析群. 换言之, 如果在一个拓扑群中存在连续的局部坐标, 即可推得解析的局部坐标存在, 这个结果对 Hilbert 第五问题 (Hilbert fifth problem) (见[5], [11]) 给出了肯定的回答.

如果域 k 的特征为 0, 那么研究解析群的最重要的方法是研究它们的 Lie 代数 (见**解析群的 Lie 代数** (Lie algebra of an analytic group)).

有关无限维解析群, 见 **Banach Lie 群** (Lie group, Banach).

参考文献

[1] Serre, J.-P., Lie algebras and Lie groups, Benjamin, 1965 (译自法文).

[2] Понтрягин, Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973 (中译本: Понтрягин, Л. С., 连续群 (上、下册), 科学出版社, 1978).

[3] Chevalley, C., Theory of Lie groups, 1, Princeton Univ. Press, 1946 (译自法文).

[4] Helgason, S., Differential geometry and symmetric spaces, Academic Press, 1962.

[5] Проблемы Гильберта, М., 1969, 101−115.

[6] Gleason, A. M., Groups without small subgroups, *Ann. of Math.* (2), **56** (1952), 2, 193−212.

[7] Montgomery, D. and Zippin, L., Small subgroups for finite dimensional groups, *Ann. of Math.* (2), **56** (1952), 2, 213−241.

[8] Yamabe, H., On the conjecture of Iwasawa and Gleason, *Ann. of Math.* (2), **58** (1953), 1, 48−54.

[9] Yamabe, H., A generalization of a theorem of Gleason, *Ann. of Math.* (2), **58** (1953), 2, 351−365.

[10] Lazard, M., Groupes analytiques p-adiques, *Publ. Math. IHES*, **26** (1965).

[11] Kaplansky, I., Lie algebras and locally compact groups, Chicago Univ Press, 1971.

В. Л. Попов 撰

【补注】 在西方的文献中连通 Lie 群 (connected Lie group) 常称为解析群 (analytic group).

Cartan 定理通常可追溯到 J. von Neumann (见 [A1], [A2]).

参考文献

[A1] Neumann, J. von., Collected works, Vol. 1, Pergamon Press, 1961, 134−148.

[A2] Neumann, J. von., Collected works, Vol. 1, Pergamon Press, 1961, 509−548.

张明尧 译 潘承彪 校

解析形 [**analytic image**; **аналитический образ**]

完全解析函数 (complete analytic function) 概念的推广, 是通过考察一个解析函数的所有具有广义幂级数 (Puiseux 级数 (Puiseux series))

$$\sum_{\nu=m}^{\infty}a_\nu(z-z_0)^{\nu/n},\quad \sum_{\nu=m}^{\infty}a_\nu z^{-\nu/n}\qquad (*)$$

形式的元素而得到的概念. 此外 z 是复变量, m 是整数, n 是自然数. 两种级数分别在区域 $|z-z_0|<r$ 和 $|z|>r>0$ 中收敛. 解析形等同于所有具有形式 (*) 且互为**解析延拓** (analytic continuation) 的元素组成的类. 解析形同完全解析函数的区别是添加了所有具有形式 (*) ($n>1$) 的分歧元素, 它们是从那些 $n=1$ 的正则元经解析延拓得到的. 引入适当的拓扑, 可将所给函数的解析形转换成该函数的 **Riemann 曲面** (Riemann surface).

参考文献

[1] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, т. 2, М., 1968, гл. 8 (中译本: А. И. 马库雪维奇, 解析函数论, 高等教育出版社, 1957, 第八章).

Е. Д. Соломенцев 撰 杨维奇 译

解析浮雕 [**analytic "landschaft"** (或 **analytic relief**); **аналитический ландшафт**], 模曲面 (modulus surface).

解析函数 $f(z)$ 的模 $|f(z)|$ 的几何图形, 其中 $z=x+iy$. 函数 $f(z)$ 的解析浮雕是指 (x,y) 平面上具

有 z 坐标 $|f(z)|$ 的曲面. 有时, 解析浮雕能对特定函数的性质提供一种较好的图解说明. 关于一些重要函数的立体图形见[2].

参考文献

[1] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, т. 1, М., 1968, гл. 2 (中译本: А. И. 马库雪维奇, 解析函数论, 高等教育出版社, 1957, 第 2 章).

[2] Jahnke, E. and Emde, F., Tables of functions with formulae and curves, Dover, reprint, 1945 (译自德文, 参照英文版).

[3] Шабат, Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 1. М., 1976.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 也可用英文字"landscape"代替德文字"Landschaft".

杨维奇 译

解析流形 [analytic manifold; аналитическое многообразие]

一个具有解析图册 (atlas) 的流形. 在拓扑空间上的完全非离散赋范域 k 上的一个 n 维解析流形 M 的结构是这样定义的: 对 M 确定 k 上的一个解析图册, 也就是那些取值于 k^n 且覆盖 M 的**坐标卡** (chart) 的全体, 使得其中任两个坐标卡都是解析相关的. 所谓两个图册定义一个相同的结构, 是指它们的并也是一个解析图册. 在一个解析流形上可以定义 k 值解析函数的芽层 $\mathscr{O}$. 由这种方法得到的环式空间 $(M, \mathscr{O})$ 类等同于 k 上的光滑解析空间类.

如果 k 是实数域 $\mathbf{R}$, 则称为实解析流形 (real-analytic manifolds); 如果 k 是复数域 $\mathbf{C}$, 则称为复解析流形 (complex-analytic manifolds) 或简称复流形 (complex manifolds); 如果 k 是 p 进数域 $\mathbf{Q}_p$, 称为 p 进解析流形 (P-adic analytic manifolds). 解析流形的例子包括 n 维 Euclid 空间 k^n, k 上的 n 维射影空间, k 上没有奇点的仿射和射影代数簇, 以及 Lie 群和它们的齐性空间.

解析流形的概念可追溯到 B. Riemann 和 F. Klein, 但 H. Weyl ([4]) 在考虑 Riemann 曲面即一维复流形的情形时首次对解析流形给予确切的描述. 现在 (70 年代) 则自然地将解析流形看作是**解析空间** (analytic space) 的一特殊情形, 它可粗略地被描述为"具有奇点的簇". 解析空间的概念是 50 年代引进的并且已成为解析函数论中的主要对象; 对解析流形得到的许多基本的结果都可成功地应用于非光滑的情形. 关于任意域上的解析流形的一般性质的叙述见[3].

在实解析流形和**微分流形** (differentiable manifold) 理论之间存在着一种紧密的联系, 并且在实解析流形和复解析流形理论之间也是这样, 显然, 在每一实解析流形上可以定义一个 C^∞ 类流形的自然结构. 1936 年 H. Whitney 证明逆命题也是成立的: 在任何一个仿紧的 C^∞ 类流形上可以定义一个在 $\mathbf{R}$ 上的解析结构, 而此解析结构诱导出原来的光滑结构. 由 Grauert 关于在 $\mathbf{R}$ 上的仿紧解析流形可以嵌入到 Euclid 空间的定理可知, 这个解析结构在同构意义下是明确地被确定了的 (不必是恒等的) ([2]).

在所有复流形 M 上可以确定一个 (二维的) 实解析流形的自然结构. 逆问题 (即在给定的实解析流形上是否存在一个复结构并且它是否唯一) 只是在最简单的情形才得到解答. 因此, 如果 M 是一个连通的二维实解析流形, 那么 M 上存在复结构的充分必要条件是 M 为仿紧的和可定向的, 而这些结构的分类问题则等同于 Riemann 曲面的经典的参模问题 (见 **Riemann 曲面的模** (moduli of a Riemann surface)). 存在紧解析曲面 (即二维复流形, 见**解析曲面** (analytic surface)) 的一个分类, 它给出了关于四维实解析流形的上述问题的部分解答. 另一方面, 可以用拓扑方法来对不具殆复结构或者不具有复结构的实流形进行分类. 这样的流形包括球 S^{2k}, $k \neq 1, 3$. 对足够接近于一给定复结构的那些复结构的描述, 可由解析结构的形变 (deformation) 理论给出, 其中 Banach 解析流形 (无穷维的解析流形) 起了重要作用.

参考文献

[1] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Differentiable and analytic manifolds, Addison-Wesley, 1966 (译自法文).

[2] Narasimhan, R., Analysis on real and complex manifolds, Springer, 1971 (中译本: R. 纳拉西姆汉, 实流形和复流形上的分析, 科学出版社, 1986).

[3] Serre, J.-P., Lie algebras and Lie groups, Benjamin, 1965 (译自法文).

[4] Weyl, H., Die Idee der Riemannschen Fläche, Teubner, 1955.

А. Л. Онищик 撰

【补注】 在复分析中一个与此很有关系的基本问题是在射影空间上除了通常的一个结构外是否存在任何复结构 (并且诱导相同的拓扑) 的问题. 当 $n=1$ 时, 这是十分经典的 (所有亏格为零的 Riemann 曲面都同构于 P_C^1). 当 $n=2$ 时, 复结构的唯一性由 F. Hirzebruch, K. Kodaira ([A4]) 和 S. T. Yau ([A5]) 的工作一起得到. 当 $n=3$ 时, 对于一个双映入自同构地等价于一 Kähler 流形并且还是拓扑地为 P_C^3 的紧流形, 它必是解析地同构于 P_C^3 ([A6]).

参考文献

[A1] Whitney, H., Complex analytic varieties, Addison-Wesley, 1972.

[A2] Barth, W., Peters, C. and Ven, A. van der, Compact complex surfaces, Springer, 1984.

[A3] Wells, R. O., Differential analysis on complex manifolds, Springer, 1980.

[A4] Hirzebruch, F. and Kodaira, K., On the complex

projective spaces, *J. Math. Pures Appl.*, **36**(1957), 201－216.

[A5] Yau, S. T., Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **74** (1977), 1789－1799.

[A6] Peternell, T., A rigidity theorem for $P_3(C)$, *Manuscripta Math.*, **50**(1985), 397－428.

钟同德 译

解析映射 [**analytic mapping**; **аналитическое отображение**], 解析态射(analytic morphism)

解析空间(analytic space)作为**赋环空间**(ringed space)的态射. 空间$(X, \mathcal{O}_X)$到空间$(X, \mathcal{O}_Y)$的解析映射是一对(f_0, f_1),其中

$$f_0: X \to Y$$

是一连续映射,而

$$f_1: f_0^{-1}(\mathcal{O}_Y) \to \mathcal{O}_X$$

是X上环的层之间的同态. 若空间为复的,则解析映射也称为全纯映射(holomorphic mapping).

若$(X, \mathcal{O}_X)$和$(Y, \mathcal{O}_Y)$是约化解析空间,则同态f_1完全由映射f_0决定而且是相应于f_0的函数芽的逆映射. 于是,这时解析映射是一映射$f: X \to Y$,使对任意$x \in X$及任意$\varphi \in \mathcal{O}_{f(x)}$均有$\varphi \circ f \in \mathcal{O}_X$.

解析映射

$$f = (f_0, f_1): (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$$

在一点$y \in Y$处的纤维是空间$(X, \mathcal{O}_X)$的解析子空间

$$f^{-1}(y) = (f_0^{-1}(y), \mathcal{O}_X / f_1(m_y)\mathcal{O}_X|_{f_0^{-1}(y)}),$$

这里$m_y \in \mathcal{O}_y$是在点y上为0的函数芽的层. 令

$$d(x) = \dim_x f^{-1}(f_0(x)), \quad x \in X,$$

可得不等式

$$\dim_x X \leqslant \dim_{f_0(x)} Y + d(x). \qquad (*)$$

若X, Y是约化复空间, 则对任意$l \geqslant 0$, 集合

$$X_l = \{x \in X: d(x) \geqslant l\}$$

是X中的解析集.

解析映射$f=(f_0, f_1)$称为在一点$x \in X$上平坦的,若$\mathcal{O}_{X,x}$是环$\mathcal{O}_{Y, f_0(x)}$上的**平坦模**(flat module). 这时(*)成为等式. 若一解析映射f在一切点$x \in X$为平坦的,则称为平坦的(flat). 复空间的平坦解析映射必为开的. 反之,若f_0为开的,Y为光滑的且一切纤维均为既约的,则f为平坦解析映射. 一个复空间或刚性解析空间(rigid analytic space)X中使得解析映射f为不平坦的点构成X的一个解析集. 若X,Y为约化复空间而X有可数基,则Y包含一个稠密的处处开的集合,使f在其上为一平坦解析映射. 若复空间上的解析映射

$$f: (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$$

是平坦的,则使得纤维$f^{-1}(y)$不是既约的,或不是正规的点$y \in Y$构成$(X, \mathcal{O}_X)$中的解析集.

令$f: X \to Y$为约化复空间的解析映射, 若$\dim X < \infty$, 则必有一分层结构

$$\varnothing = X(-1) \subseteq X(0) \subseteq \cdots \subseteq X(r_i) \subseteq \cdots,$$

其中$X(r)$为解析集,且对于大的r, $X(r)=X$, 并具有以下的性质:任一点$x \in X(r) \setminus X(r-1)$必有在$X$中的邻域$U$, 使$f(U \cap X(r))$是$Y$中的局部解析集, 它的芽的所有不可约分量在$f(x)$的维数均为$r$. 若$f$是真映射, 则$f(X)$是$X$中的解析集. 这是解析映射的有限性定理的特例.

令X, Y为复空间而X为紧的,则所有解析映射$f: X \to Y$所成的集合$\mathrm{Mor}(X, Y)$可赋以复空间结构,使得把(f, x)映为$f(x)$的映射

$$\mathrm{Mor}(X, Y) \times X \to Y$$

为解析的. 特别是,紧复空间X的自同构群是解析作用于X上的复Lie群.

参考文献

[1] Remmert, R., Projektionen analytischer Mengen, *Math. Ann.*, **130** (1956), 410－441.

[2] Remmert, R., Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Räume, *Math. Ann.*, **133** (1957), 328－370.

[3] Stein, K., Colloquium for topology, Strasbourg, 1954.

[4] Frisch, J., Points de plattitude d'une morphisme d'espaces analytiques complexes, *Invent. Math.*, **4** (1967), 118－138.

[5] Fisher, G., Complex analytic geometry, Springer, 1976.

Д. А. Пономарев 撰　齐民友 译

语言的解析模型 [**analytic model of a language** 或 analyzing model of a language; **аналитическая модель языка**]

数学语言学中描述自然语言结构的一种数学构造法. 这些构造方法用于基本语言范畴和语言学研究过程本身的形式模型化; 换句话说, 用关于语言的(或者更确切地说, 关于言语的)"无序"材料的一些集合, 以得到关于语言的构造机制(在更广泛意义下关于语言的文法)的某些信息. 这样一个模型的"行为"并不总有能行的构造特性, 因为初始材料集合不一定是一个构造对象; 原则上,这不会减少这种模型的意义.

在充分发展的语言的解析模型中,初始材料的集合通常是这样一个对象, 它可以作为自然语言的文法句子集合的一个模型, 即一个给定字母表V上的某一形式语言(formal language). 如果L是字母表V上的一个

语言，并且 $\forall u, v \in V^*[uxv \in L \Rightarrow uyv \in L]$，那么就说，关于 V 和 L 串 x 可以用串 y 替换；如果关于 V 和 L 串 x 和串 y 中的每一个可以用另一个替换，那么就说 x 和 y 关于 V 和 L 可以互相替换．互相替换概念具有简单的语言学意义：如果把 L 视为某一自然语文的文法句子的集合，那么可以互相替换的串就是"语法等价的"(即有相同的语法功能的)字的组合．特别地，如果一个单一符号串 a (在语言学中解释为一个单词)与一个长度 >1 的串 x 可以互相替换，那么 x 是一个"可能的构成成分"，即可以是这个语言的语法句子的语言学上自然构成结构的构成成分(见**语法结构** (syntactic structure))；在这种情况下，串 x 称为语言 L 的具有结式(resultant) a 的秩(rank)为 1 的构形(configuration)．例如在英语中，串"uniformly continuous"可以认为是具有结式"continuous"的秩为 1 的构形，然而秩为 1 的构形不能穷尽所有的"可能的构成成分"．例如，字的组合"continuous function"不是秩为 1 的构形，因为只是像"function"，"derivative"等这样一些词可以被它替换，但它本身不能用这些词中的任何一个词来替换("$f(x)$ is a uniformly continuous function"是一正确的陈述，但是"$f(x)$ is a uniform function"则否)．因此引入下述定义：如果 $r>1$ 是一个自然数，并且语言 L 的秩为 i $(i=1, 2,\cdots, r-1)$ 的构形概念已经定义，那么长度 >1 的串 x 称为一个语言 L 的具有结式 $a(a\in V)$ 的秩为 r 的构形，如果下列条件成立：如果关于 V 和 L，a 可以用 x 替换，$z_1xz_2\in L$，并且 z_1xz_2 不包含秩比 r 小，与 x 的一部分重合，但不整个包含于 x 中的构形，则 $z_1az_2\in L$．在英语中，字的组合"continuous function"可以认为是秩为 2 的构形；字"function"是一个结式(字"derivative"也是一个结式)．可以证明，在某种意义上，一个语言完全由它的构形集决定．

构形模型属于语言的**横组合解析模型** (syntagmatic analytic model)，它们试图刻画语言段诸元素之间的关系(在语言学中此种关系称为横组合关系)．语言的解析模型的另一个类是**纵聚合模型**(paradigmatic model)，以此刻画纵聚合关系，即一个语言的元素之间在其系统内的关系．在这样一个模型中，通常的方法是构造字母表上的某些关系，这些关系往往是等价关系(但不总是等价关系)．特别地，语言的纵聚合解析模型可以用来构造传统语言学范畴的形式类似物，诸如词类，词格，词性，音素等等．在很多语言的纵聚合解析模型中，语法句子集合也可作为"起始材料"；替换性概念应用于这个类型的各模型中．用这种方式得到的最简单的等价关系是字母表((即所有一个元素的串的集合)上的互相替换性关系；由这个关系导出的等价类称为**族**(family)．如果在字母表上引入另外一个关系，由同一个字的不同形式构成的关系(更准确地说是由一个词位构成的，例如在英语中的"to limit"和"limiting"之间的关系，或者"number"和"numbers"之间的关系；其中包含了某些理想化的东西，如假定一个词仅可能有一个词位形式；各自的等价类称为邻域(neigbourhood))，那么这两个关系可以用来引入另外一些分类，可以把它们看成词类及其他传统文法概念(特别是词格和词性概念)的形式化类似物的近似．上面两个概念已被特别地深入研究过；为了它们的形式化，已提出基于文法概念的一些模型以及其他类型的模型．特别是在一个模型中，名词的每一个格被看作名词的"一致定向"形式的一个集合，而每一个词性则被看作"一致定向"的名词的集合．在这个模型中的初始材料(用以决定词性)是字母表，邻域集，名词集和字母表上"可能从属"的二元关系：如果在这个语言的一个文法句子的"语言学上自然的"依赖性结构中(见**语法结构** (syntactic structure))，b 的某一出现(直接)依赖于 a 的某一出现，那么就说 a 可能从属于 b．同样性质的其他初始材料也用于决定词性．基于"可能从属"概念或其他与依赖性结构有关的概念的模型比仅含串的模型显然可以给出传统文法范畴的更好的形式化，因为前一类模型中语法关系和线性关系是可分的(见**变换文法** (grammar, transformational))．

在建立语言的解析模型时所利用的数学工具通常是相当简单的．在某些模型中仅仅用到集合论中的最简单概念(这样的模型通常称为集合论模型，这个称呼有时可推广到一切语言的解析模型)．在其他情况下，也用到一些代数概念，特别是半群理论和二元关系的代数理论中的概念；这就是语言的解析模型的理论有时也称为**代数语言学** (algebraic linguistics)的原因．

参考文献

[1] Кулагина, О. С., « Проблемы кибернетики », 1 (1958), 203－214.

[2] Успенский, В. А., «Бюллетень Объединения по проблемам машинного перевода », 1957, 5, 11－18

[3] Успенский, В. А., « Вопросы языкознания », 1964, 6, 39－53.

[4] Markus, S., Algebraic linguistics: analytical models, Acad. Press, 1967.

[5] Ревзин, И. И., Метод моделирования и типология славянских языков, М., 1967.

[6] Гладкий, А. В., « Вопросы языкознания », 1969, 2, 110－123 (英译本: Gladkii, A. V. and Mel'cuk, I. A., Elements of mathematical linguistics, Mouton Publ., 1983).

[7] Гладкий, А. В., Формальные грамматики и языки, М., 1973.

А. В. Гладкий 撰 卢景波 译

解析数论 [analytic number theory; аналитическая теория чисел]

数论的一个分支．解析数论是讨论各种素数分布问题、研究数论函数的性质以及代数数和超越数的理论．

素数分布(distribution of prime numbers). a) 素数分布问题是解析数论中最有趣、最困难的问题之一．关于素数分布问题的第一个结果是 Euclid 得到的：素数有无穷多个．设 $\pi(x)$ 是不超过 x 的素数的个数．Euclid 的定理可表述为：当 $x\to+\infty$ 时，$\pi(x)\to+\infty$. 下一个进展属于 П. Л. Чебышев (1850)．他证明了：

1) $\pi(x)$ 满足不等式

$$\frac{ax}{\ln x}<\pi(x)<\frac{bx}{\ln x},$$

其中 $a\geqslant(\ln 2)/2$, $b\leqslant 2\ln 2$.

2) 如果当 $x\to+\infty$ 时，$\pi(x)(\ln x)/x$ 存在极限，那么这个极限必为 1.

这个极限的存在性问题，在 1896 年被 J. Hadamard 和 Ch. J. de la Vallée - Poussin 解决，他们证明了

$$\pi(x)=\frac{x}{\ln x}(1+o(1)).$$

de la Vallée - Poussin 证明了一个更为重要的结论，即若

$$\pi(x)=\int_2^x\frac{dt}{\ln t}+R(x),$$

则

$$R(x)=O(xe^{-\alpha\sqrt{\ln x}}),$$

其中 $\alpha>0$ 是一个绝对常数（见 **de la Vallée - Poussin 定理**(de la Vallée - Poussin theorem)）．这是用复变函数论的方法解决的．估计 $R(x)$ 的问题和某个复变函数的性质紧密相关，这个函数首先是由 B. Riemann 在 1859 年研究的，因此称为 Riemann **ζ 函数**(zeta - function)，它的定义是

$$\zeta(s)=1^{-s}+2^{-s}+\cdots+n^{-s}+\cdots,\quad s=\sigma+it,\ \sigma>1.$$

在更早的时候(1737, 1749)，L. Euler 就研究了 s 取实值时的 ζ 函数，他证明了一个阐明 $\zeta(s)$ 与素数之间的关系的恒等式：

$$\zeta(s)=(1-2^{-s})^{-1}(1-3^{-s})^{-1}\cdots(1-p^{-s})^{-1}\cdots,\quad\sigma>1.$$

上式右边对全体素数求积．对 $\sigma>1$，用级数形式给出的这个函数 $\zeta(s)$ 可以解析开拓到整个复平面，所得到的函数除了点 $s=1$ 外在整个复平面内是解析的，$s=1$ 是它的残数为 1 的单极点．素数分布的渐近公式中的余项 $R(x)$ 的估计问题同 $\zeta(s)$ 在"临界"长条 $0\leqslant\sigma\leqslant1$ 中的零点的分布问题有密切联系．按照 Riemann 猜想，$\zeta(s)$ 在临界长条 $0\leqslant\sigma\leqslant1$ 中的全部零点都位于直线 $\sigma=1/2$ 上．若这个猜想成立，则可推出 $R(x)=O(\sqrt{x}\ \ln x)$. 反之，从关系式 $R(x)=O(x^{1/2+\varepsilon})$ 可以推出这个关于 $\zeta(s)$ 的零点的 Riemann 猜想，这里 ε 是一个任意小的正数（见 **Riemann 假设**（Riemann hypotheses））. Hadamard 和 de la Vallée - Poussin 正是通过证明当 $\sigma\geqslant1$ 时 $\zeta(s)$ 没有零点来推出素数分布的渐近公式的．对 $R(x)$ 还可以证明下面的所谓 Ω 定理：存在两个数列 $X\to+\infty$, $Y\to+\infty$，使得

$$R(X)<-X^{1/2}\frac{\ln\ln\ln X}{\ln\ln X},$$

$$R(Y)>Y^{1/2}\frac{\ln\ln\ln Y}{\ln\ln Y}.$$

b) 关于素数分布的第二个问题是估计两个相邻素数的差，即数 $\Delta_n=p_{n+1}-p_n$，其中 p_n 是第 n 个素数．关于这个问题的第一个重要的结果也属于 Чебышев，他证明了：对于 $N\geqslant1$，在 N 和 $2N$ 之间至少包含一个素数（**Bertrand 假设**(Bertrand postulate)）. Δ_n 的估计和函数 $N(\alpha,T)$ 紧密相关，$N(\alpha,T)$ 是 $\zeta(s)$ 在矩形 $1/2\leqslant\alpha\leqslant\sigma\leqslant1$, $|t|\leqslant T$ 中的零点个数．函数 $N(\alpha,T)$ 和函数 $\zeta(1/2+it)$ 有密切联系．有这样两个假设：$N(\alpha,T)=O(T^{2(1-\alpha)+\varepsilon})$（**密度假设** (density hypothsis)）及 $\zeta(1/2+it)=O(|t|^{\varepsilon})$（**Lindelöf 假设**（Lindelöf hypothesis）），这里 ε 是任意小的正数．从关于 $\zeta(s)$ 的 Riemann 假设可推出 Lindelöf 假设；从 Lindelöf 假设可推出密度假设；以及从密度假设可推出 $\Delta_n=O(n^{1/2+\varepsilon})$. 已经证明：存在正常数 $\gamma<1$ 使得 $\Delta_n=(n^{\gamma})$.

c) 算术数列 $nk+l$ ($(k,l)=1$, $n=0, 1, \cdots$) 中的素数分布问题导致讨论一类特殊 ζ 函数的零点问题，这类特殊的 ζ 函数就是所谓的 Dirichlet L 级数，当 $\sigma>1$ 时它可表为

$$a_1\cdot1^{-s}+a_2\cdot2^{-s}+\cdots+a_n\cdot n^{-s}+\cdots,$$

其中 a_n 依赖于 n 及数列的公差 k（模 k 的 Dirichlet 特征标）.

Dirichlet L 级数的零点分布问题及算术数列中的素数分布问题有它们自己的特色．这一领域内的主要成就之一属于 C. L. Siegel (1935)：设 $\pi(x,k,l)$ 是数列 $nk+l$ ($(k,l)=1$, $n=0, 1, \cdots$) 中不超过 x 的素数个数．那么，对任意给定的正数 A 和 B，当 $1\leqslant k\leqslant\ln^{B}x$ 时有

$$\pi(x,k,l)=\frac{1}{\varphi(k)}\int_2^x\frac{dt}{\ln t}+O(x\ln^{-A}x),$$

这里 $\varphi(k)$ 是 **Euler 函数**（Euler function）．关于算术数列中素数分布的知识被广泛地用于解决包含素变数的加性问题．也见**素数分布**（distribution of prime numbers）.

加性问题(additive problems). 解析数论中的加性问

题包含涉及一类特殊类型整数方程的问题．这种类型的主要问题是：证明给定方程的可解性，以及求出给定方程解数的渐近公式．后一问题要困难得多，而且，在某种意义上解决了后一问题也就解决了前一问题．加性问题的经典例子有 **Waring 问题** (Waring problem)，**Goldbach 问题** (Goldbach problem)，及 **Hardy - Littlewood 问题** (Hardy - Littlewood Problem).

Waring问题(1770)可表述如下：设 $J_{k,n}(N)$ 是方程

$$x_1^n + \cdots + x_k^n = N \tag{1}$$

的正整数解的个数，其中 $N \geq 1$ 是整数．要证明存在一个仅依赖于 n 的数 $k_0 = k_0(n)$，使得当 $k \geq k_0$ 时 $J_{k,n}(N) \geq 1$．换句话说，就是要证明：任意整数 $N \geq 1$ 一定能表为正整数的 n 次幂之和，且这表示式中的项数仅和 n 有关．当 $n=2$ 时，J. L. Lagrange (1770) 解决了这一问题，他证明了任一正整数是四个整数的平方和．对于一般的 n，D. Hilbert (1909)首先解决了 Waring 问题．G. H. Hardy 和 J. E. Littlewood (1924) 利用他们的圆法证明了：当 $k \geq n2^n+1$ 时，对 $J_{k,n}(N)$ 有渐近公式：

$$J_{k,n}(N) = AN^{k/n-1} + O(N^{k/n-1-\gamma}), \tag{2}$$

其中 $\gamma > 0$ 及 $A = A(N) \geq c > 0$，c 是一个绝对常数．由于存在无穷多个整数 N，当 $k=n$ 时它们不是 n 次幂之和，即 $J_{n,n}(N)=0$，因此就提出了如下的问题：把 k 看作是 n 的函数，去确定 k 的确切的阶，使得方程(1)可解及公式(2)成立．关于这一问题的最强的结果是 И. М. Виноградов (1934)得到的，他证明了：

a) 当 $k \geq 3n\ln n + 11n$ 时，对 $N \geq N_0(n)$ 有 $J_{k,n}(N) \geq 1$.

b) 当 $k \geq 4n^2 \ln n$ 时，公式(2)成立．

第二个经典的加性问题 —— Goldbach - Euler 问题(1742)——是这样的：设 $J(N)$ 是方程 $p_1+p_2+p_3=N$ 的素数解 p_1, p_2, p_3 的个数，证明对于奇数 $N \geq 7$ 有 $J(N) \geq 1$．1937 年 Виноградов 证明了对 $J(N)$ 的渐近公式：

$$J(N) = BN^2 \ln^{-3} N + O(N^2 \ln^{-3.5+\varepsilon} N),$$

这里 $B = B(N) \geq 0.6$ (N为奇数)，及 ε 是任意小的正数．特别地，由此推出当 $N \geq N_0$ 时 $J(N) \geq 1$，即对充分大的 N 解决了 Goldbach - Euler 问题．

加性问题也包括下面的 Hardy - Littlewood 问题(1923)：每个整数 $N \geq 2$ 可以表为 $N = p + x^2 + y^2$，这里 p 是素数，x 和 y 是正整数．设 $W(N)$ 是这个方程的解数，1958 年 Ю. В. Линник 证明了渐近公式：

$$W(N) = \frac{\sigma N}{\ln N} + O(N \ln^{-1.028} N),$$

这里 $\sigma = \sigma(N) \geq c_1 > 0$，$c_1$ 是一个绝对常数．由此推出，当 $N \geq N_0$ 时 $W(N) \geq 1$，这就对充分大的 N 解决了 Hardy - Littlewood 问题．有许多加性问题，提出了几百年甚至几千年，至今还没有解决，这些问题中有：例如，有无穷多对孪生素数的问题，所谓孪生素数是指一对素数 p, q 满足 $|p-q|=2$；二元的 Goldbach - Euler 问题，即任意偶数 ≥ 4 一定是两个素数之和；以及在形如 n^2+1 的数列中存在无穷多个素数的问题．也见**加性问题** (additive problems)．

数论函数(number - theoretic functions)的性质．在数论中有几个典型的函数：$\varphi(n)$ —— 不超过 n 且和 n 互素的正整数的个数 (Euler 函数)；$\tau(n)$ —— n 的除数的个数；$\mu(n)$ —— **Möbius 函数** (Möbius function)；$\Lambda(n)$ —— **Mangoldt 函数** (Mangoldt function) 等．虽然所有这些函数的性状是明显地"不规则的"，但它们的均值可以正常地研究．函数 $f(n)$ 的均值是指平均值 $\sum_{n \leq x} f(n)/x$．估计 $\mu(n)$ 的均值问题等价于确定 Riemann ζ 函数的零点的界限问题．$\Lambda(n)$ 的均值渐近性质问题等价于 $\pi(x)$ 的渐近公式问题，即等价于 Riemann ζ 函数的零点的界限问题．关于所有这些问题所得到的结果与素数分布问题中所得到的结果是同样的．但是，这一点不适用于 $\tau(n)$ 的均值的渐近性质问题，或者稍为改变一下形式，不适用于 $\tau(n)$ 的值的和的渐近公式问题．设

$$\Phi(N) = \tau(1) + \cdots + \tau(N).$$

这样，$\Phi(N)$ 就是双曲线 $y = N/x$ 下方的坐标为正整数的整点的个数．因此，确定 $\Phi(N)$ 的渐近性质就相当于要确定在所说扩张区域中的整点的个数的渐近性质．这一类问题还包括圆内整点问题，即确定量

$$G(N) = \sum_{x^2+y^2 \leq N} 1$$

的问题，其中 x 和 y 是整数．这类问题还可以进一步推广到平面及空间的任意区域中去．1849年，P. Dirichlet 证明了

$$\Phi(N) = N \ln N + (2\gamma + 1)N + R_1(N),$$

其中 $R_1(N) = O(\sqrt{N})$；1863 年，C. F. Gauss 证明了

$$G(N) = \pi N + R_2(N),$$

其中 $R_2(N) = O(\sqrt{N})$．求 $R_1(N)$ 和 $R_2(N)$ 的最佳可能估计问题分别被称为**除数问题** (divisor problems) 和**圆问题** (circle problem)．Г. Ф. Вороной (1903) 证明了公式

$$R_1(N) = O(N^{1/3} \ln N),$$

而公式

$$R_2(N) = O(N^{1/3}).$$

则是由 W. Sierpiński (1906)得到的. 此外, 还证明了下面的 Ω 定理:

$$R_1(N) = \Omega(N^{1/4}) \quad 和 \quad R_2(N) = \Omega(N^{1/4}).$$

至今(1976)所得到的 $R_1(N)$ 和 $R_2(N)$ 的估计比 Вороной 和 Sierpiński 的估计要稍好些.

与刚才讨论的那些问题相关的一个问题是关于各种类型的函数的分数部分的和的渐近性质,或者一个等价的问题,即各种类型的函数的分数部分的分布问题. 设$\{\alpha\}$表示实数 α 的分数部分, $F(x)$是一个实函数. 那么,所说的问题就是研究以下两个函数的渐近性质:

$$T_1(N) = \sum_{n\leqslant N}\{F(n)\},$$

$$T_2(\gamma;N) = \sum_{\substack{0\leqslant\{F(n)\}\leqslant\gamma,\\ n\leqslant N}} 1.$$

如果对任意的 $0<\gamma\leqslant 1$,一定有

$$T_2(\gamma;N) = \gamma N + o(N),$$

那么就说 $F(n)$ 的分数部分是一致分布的. 也能利用 $T_1(N)$ 的渐近性质来表述 $F(n)$ 的分数部分的一致分布概念. 关于多项式的分数部分的一致分布,及一致分布的判别法方面的最早的一些结果是由 H. Weyl 在 1916 年给出的. 这一领域内的最精确的结果是 Виноградов 得到的,他还给出了以下情形的 $T_1(N)$ 和 $T_2(N)$ 的渐近公式: n 仅取值于不超过 N 的正整数集合的一个子集,特别地,仅取值于不超过 N 的素数组成的集合. 关于比多项式增长得更快的函数的分数部分的分布知道得很少. 例如,关于函数$(3/2)^x$的分数部分的分布就一无所知.

代数数 (algebraic number) 和**超越数** (transcendental numbers). 代数数和超越数的理论包括与给定的数和数类的算术性质有关的一些问题. 考虑首项系数为 1的整系数多项式. 如果 α 是这样的一个 n 次多项式的根,但不是较低次的这样的多项式的根,那么 α 就称为 n 次代数数 (algebraic number); 当 $n=1$ 时 α 称为有理数 (rational number). 另一方面,如果 α 不是代数数,则称为超越数 (transcendental number). 代数数比超越数要"少得多"; "几乎任意"一个数都是超越的,但是,判断一个特定的数是超越数还是代数数则十分困难. 代数数的主要"特征"是: 用有理数来逼近代数数时,只能得到很"坏的"逼近. 这一结论 (**Liouville 定理** (Liouville theorems), 1844) 可表述如下: 若 α 是 n 次代数数,则对任意整数 p 和 q 有

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > cq^{-\kappa},$$

这里 $\kappa=n$, $c=c(\alpha)>0$ 是仅依赖于 α 的常数. 在这个问题上,下一个决定性的贡献是由 A. Thue (1909) 给出的,他的思想对超越数理论的发展起着主要的影响. 他证明了可取 $\kappa=n/2+\varepsilon$, $\varepsilon>0$. 以后,一些数学家又改进了 κ 的取值, 最后, 在 1955 年 K. F. Roth 证明了 $\kappa=2+\varepsilon$ (已知 $\kappa\geqslant 2$). 除了 Liouville 定理之外,所有这些定理的缺点在于它们是非实效的,即从已知的 α 和 ε 不能具体计算出 c 的值.

逼近问题和不定方程理论中的某类问题有关. 例如,Thue 利用他的逼近定理证明了: 方程 $F_n(x,y)=a$ 的整数解的个数是有限的, 其中 $F_n(x,y)$ 是整系数的 n ($n\geqslant 3$) 次型及 a 是非零整数 (这个定理也是非实效的,即不能给出方程的解数的上界).

这个理论的另一个方面是数的超越性的证明. 关于这一课题的最初的结果是在近 19 世纪末由 Ch. Hermite (1873) 和 F. Lindemann(1882) 得到的,前者证明了数 e 的超越性; 后者证明了数 π 的超越性,从而证明了化圆为方的问题是不可解的. 1934 年, A. O. Гельфонд 和 T. Schneider 证明了: 若 α 是代数数, $\alpha\neq 0, 1$, 及 β 是次数 $\geqslant 2$ 的代数数,则 α^β 是超越数 (Hilbert 第七问题). 1967 年初, A. Baker 得到了关于代数数的对数线性型估计的若干实效定理. 由此,也就给出了关于一个型表示整数的表法个数的 Thue 定理的实效性证明. 在超越数论中仍然有许多未解决的问题, 它们中有 Euler 常数

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left\{\ln n - 1 - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{n}\right\}$$

的超越性,数 e 和 π 的代数无关性问题,等等.

解析数论中的若干方法. a) 复积分法 (method of complex integration). 这个方法来自 Euler 的母函数法,经常用于解初等数学问题. 这一个方法基于下述公式(不连续乘子):

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Re}\,s=\sigma>0}\frac{x^s}{s}\,ds = \begin{cases} 1 & 若\ x>1, \\ \frac{1}{2} & 若\ x=1, \\ 0 & 若\ 0<x<1, \end{cases}$$

其中的积分取在直线 $\mathrm{Re}\,s=\sigma>0$ $(s=\sigma+it)$ 上. 例如,当 $\mathrm{Re}\,s>1$ 时,

$$f(s) = \frac{-\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)n^{-s},$$

因此,对 $x=N+1/2$ 有

$$\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Re}\,s=2}\frac{x^s f(s)}{s}\,ds.$$

这个等式的左边是 **Чебышев 函数** (Chebyshev func-

tion)，求它的渐近公式问题就等价于求不超过 x 的素数的个数的渐近公式问题．右边的积分在分出它的主要部分后，积分线路愈往左移，积分就变得愈小（见**复积分法**（complex integration, method of））

b)（Hardy - Littlewood - Ramanujan）圆法（circle method）．这是在加性问题中最常用的方法．下面以应用 Виноградов 三角和法解决三元 Goldbach - Euler 问题为例，来介绍圆法的本质及应用．设 m 是整数，则有（不连续乘子）：

$$\int_0^1 e^{2\pi i\alpha m}d\alpha = \begin{cases}1 \text{ 若 } m=0,\\ 0 \text{ 若 } m\neq 0.\end{cases}$$

因此有

$$I(N)=\int_0^1 S^3(\alpha)e^{-2\pi i\alpha N}d\alpha,\ S(\alpha)=\sum_{p\leqslant N}e^{2\pi i\alpha p},$$

而 $I(N)$ 是方程 $p_1+p_2+p_3=N$ 的素数解的个数．然后，把积分区间分为两部分——基本区间和余区间．基本区间由以下形式的所有小区间组成：

$$\left|\alpha-\frac{a}{q}\right|<\frac{1}{q^\tau},$$

其中 $(a,q)=1$，$0\leqslant a\leqslant q$，$q\leqslant \ln^{10}N$，$\tau=N\ln^{-20}N$；余区间则由所有其余的小区间组成．这些基本区间是两两不相交的．对于基本区间内的 α，和 $S(\alpha)$"接近"于有理和 $S(a/q)$．而对于"小的" $q(q\leqslant\ln^{10}N)$，在公差为 q 的算术数列中的素数分布规律是已知的（例如，Siegel 定理），也就是知道了这些和 $S(a/q)$ 的渐近性质．用这种方法，分离出了这个问题的主要项，这就是圆法的基本思想．如果给出了 $|S(\alpha)|$ 在余区间上的非显然估计（见 **Виноградов 法**（Vinogradov method）），那么就得到了三元 Goldbach - Euler 问题中的 $I(N)$ 的渐近公式．（亦见**圆法**（circle method）．）

c) 三角和法（method of trigonometric sums）．解析数论中的绝大多数问题都可以用三角和；即形如

$$S=\sum_{x_1,\cdots,x_n}e^{2\pi iF(x_1,\cdots,x_n)} \tag{3}$$

的有限和来表述，其中 $F(x_1,\cdots,x_n)$ 是实函数，而 $x_1,\cdots,x_n$ 在一个 n 元整数组集合中取值，这个集合的元素个数为 P．这样，许多问题实质上就是研究这种和，特别是去寻求这种和的模的最佳可能估计．和（3）的显然估计是 P．于是，问题就是要得到形如

$$|S|\leqslant\Delta P$$

的估计，其中 $0\leqslant\Delta\leqslant1$ 称为收缩因子．1919 年，Weyl 首先对 $F=F(x)$ 是多项式，x 取值 $1,\cdots,P$ 的情形，得到了三角和 S 的非显然估计；同时，他利用三角和得到了一个函数的分数部分的一致分布判别法．三角和方法是 Виноградов 创造的，他利用这种和的内在的算术性质，对一大类这种和的模得到了十分强的估计．用这种方法，使他得以在数论的若干问题（Waring 问题，**Hilbert - Kamke 问题**（Hilbert - Kamke problem），及 **Weyl 和**（Weyl sum））上得到了接近于最佳可能的若干基本结论．Виноградов 法（1937）的另一个应用是解一些关于素数的加性问题，特别是 Goldbach - Euler 问题．Виноградов 法的基本思想是"光滑化"（对三角和取幂，然后把三角和的估计归结为估计 Weyl 和的均值定理；在估计素变数的三角和时，引进二重三角和，等等）．（亦见**三角和法**（trigonometric sums, method of）．）

d) 离差法（dispersion method）和大筛法（method of the large sieve）．在 1958 至 1960 年间，Ю. В. Линник 提出了离差法用以解决数论中的若干加性问题．他解决了 Hardy - Littlewood 问题，关于除数的 **Titchmarsh 问题**（Titchmarsh problem），及**加性除数问题**（additive divisor problem）．这个方法的基本概念是一个给定的和主要方程有关的辅助方程的解的个数的离差（亦见**离差法**（dispersion method））．Линник 在 1940 年为了解决最小二次剩余问题提出了**大筛法**（large sieve），后来利用这个方法得到了一些深刻的结果．

e) **代数数和超越数理论中的方法**．为了证明他的关于用有理数逼近代数数的定理，Thue 构造了整系数多项式

$$f(x,y)=(y-\alpha)f_1(x,y)+(x-\alpha)^n f_2(x,\alpha).$$

其中 f_1 和 f_2 也是多项式（见 **Thue 法**（Thue method））．假若对充分大的 q_1，q_2，分数 p_1/q_1 和 p_2/q_2 是 α 的"好的"逼近，那么，令 $m\approx\ln q_1/\ln q_2$，并证明当 $x=p_1/q_1$，$y=p_2/q_2$ 时 $f(x,y)$ 不等于零，由此就得到一个矛盾．

在证明数的超越性时，A. O. Гельфонд 引进了函数

$$f(z)=\sum_{k=0}^{q_0}\sum_{l=0}^{q}c_{k,l}e^{(\lambda k+l)z},\ \lambda=\frac{\ln\alpha}{\ln\beta}.$$

假若 α 是代数数，那么，利用 Dirichlet 抽屉原理就可选取不全为零的整数 $c_{k,l}$，使得 $f(z)$ 及其"许多"阶导数有"许多"零点．由零点的个数有"足够多"可以对"足够多"阶导数在"足够多的"点上推出"好的"上界估计；而由此，利用从 Liouville 定理得到的下界估计，就可推出 $f(z)$ 及其"许多"阶导数将比原先有更多的零点．重复这样的推理可得：或者 λ 是有理数，或者 $C_{k,l}$ 全为零，这就和它们的选取相矛盾．亦见**代数数**（algebraic number）；**超越数**（transcendental number）．

参考文献

[1] Виноградов，И. М.，Избр. тр.，М.，1952（英译本：Vinogradov, I. M., Selected works, Springer, 1985）．

[2] Виноградов，И. М.，Основы теории чисел，7 изд.，М.，

1965（中译本：维诺格拉陀夫，数论基础，商务印书馆，1952）.

[3] Виноградов, И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М., 1971（英译本：Vinogradov, I. M., The method of trigonometric sums in the theory of numbers, Interscience, 1954）.

[4] Гельфонд, А. О., Трансцендентные и алгебраические числа, М., 1952（英译本：Gel'fond, A. O., Transcendental and algebraic numbers, Dover, 1960）.

[5] Делоне, Б. Н., Петербургская школа теории чисел, М.-Л., 1947.

[6] Карацуба, А. А., Основы аналитической теории чисел, М., 1975（中译本：A. A. 卡拉楚巴，解析数论基础，科学出版社，1984）.

[7] Линник, Ю. В., Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах, Л., 1961（英译本：Linnik, Yu. V., The dispersion method in binary additive problems, Amer. Math. Soc., 1963）.

[8] Чудаков, Н. Г., Введение в теорию L-функций Дирихле, М.-Л., 1947.

[9] Prachar, K., Primzahlverteilung, Springer, 1957.

[10] Davenport, H., Multiplicative number theory, Springer, 1980.

[11] Titchmarsh, E. C., The theory of Riemann zeta-function, Clarendon, 1951.

[12] Hua, L.-K., Abschätzungen von Exponentialsummen und ihre Anwendung in der Zahlentheorie, *Enzyklopaedie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, Vol. 1, 1959, Heft 13, Teil 1（中译本：华罗庚，指数和的估计及其在数论中的应用，科学出版社，1963）.

[13] Baker, A., Linear forms in the logarithms of algebraic numbers (Ⅱ), *Mathematika*, **14** (1967), 102－107.

[14] Виноградов, А. И., О плотностной гипотезе для L-функции Дирихле《Изв. АН СССР. серия матем.》, **29** (1965), 903－934.

[15] Bombieri, E., On the large sieve, *Mathematika*, 12 (1965), 201－225.

A. A. Карацуба 撰

【补注】 Liouvill 定理和连分数理论有密切联系（见**连分数**（continued fraction））.

关于加性问题及算术数列中的素数分布所得到的各种结果的介绍可见**大筛法**（large sieve），**素数分布**（distribution of prime numbers），**筛法**（sieve method）.

参考文献

[A1] Vaughan, R. C., The Hardy-Littlewood method, Cambridge Univ. Press, 1981.

[A2] Halberstam, H. and Richert, H. E., Sieve methods, Acad. Press, 1974.

[A3] Ivić, A., The Riemann zeta-function, Wiley, 1985.

【译注】

参考文献

[B1] 华罗庚，数论导引，科学出版社，1975.

[B2] 闵嗣鹤，数论的方法，科学出版社，1981.

[B3] 潘承洞、潘承彪，解析数论基础，科学出版社，1990.

潘承彪 译 戚鸣皋 校

解析算子［**analytic operator**；**аналитический оператор**］，在点 x_0 上的

由一个 Banach 空间映到另一个 Banach 空间的具有下列表达形式的算子 A：

$$A(x_0+h)-Ax_0 = \sum_{k=1}^{\infty} C_k h^k,$$

其中 C_k 是 k 次型，且级数在某个球 $\|h\|<r$ 中一致收敛．一个算子称为在区域 G 中解析的（analytic in a domain），如果它在该区域的所有点上是解析的．解析算子是无限次可微的．在复空间情形下，一个算子在某区域中解析是它在该区域的每一点上（Gâteaux 意义下）可微的推论．连续函数空间 C 上的 Ляпунов 整幂级数以及具有光滑核的 Hammerstein 算子和 Урысон 算子，都是解析算子的例子．

参考文献

[1] Hille, E. and Phillips, R., Functional analysis and semigroups, Amer. Math. Soc., 1957（中译本：E. 希尔，R. S. 菲列普斯，泛函分析与半群，上海科学技术出版社，1964）.

[2] Красносельский, М. А. и др., Приближенное решение операторных уравнений, М., 1969（英译本：Krasnosel'skii, M. A., et al., Approximate solution of operator equations, Wolters-Noordhoff, 1972）.

П. П. Забрейко 撰 史树中 译

解析平面［**analytic plane**；**аналитическая плоскость**］，复解析平面（complex-analytic plane）

由复向量空间 $\mathbf{C}^n$ 中满足方程组

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} z_i = b_j,\ \ j=1,\ldots,k;\ \ a_{ij}, b_j \in \mathbf{C};$$

$$\operatorname{rank}\|a_{ij}\| = k < n$$

的点 $z=(z_1,\cdots,z_n)$ 组成的非空集合．数 k 称为该解析平面的复余维数（complex codimension），而 $n-k$ 称为复维数（complex dimension）．这个解析平面的实维数等于 $2(n-k)$，且为偶数，但在 $\mathbf{R}^{2n}=\mathbf{C}^n$ 中偶维数的实平面不都是解析平面．复一维解析平面有时也称为复直线（complex straight lines）或解析直线（analytic straight lines）．亦见**解析曲面**（analytic surface）．

Е. Д. Соломенцев, Е. М. Чирка 撰 陈公宁 译

解析多面体［**analytic polyhedron**；**аналитический полиэдр**］

可用不等式 $|f_i(z)|<1$ 表示的复空间 $\mathbf{C}^n(n\geqslant 1)$ 中的区域 Π，其中函数 $f_i(z)(i=1,\cdots,m)$ 在包含 Π 的某

一区域 $D\subset\mathbf{C}^n$ 上是全纯的，即 $\Pi=\{z\in D:|f_i(z)|<1, i=1,\cdots,m\}$. 同时假定 Π 在 D 内是紧的. 如果 $f_i(z)$ 是多项式，则解析多面体称为多项式多面体(polynomial polyhedron). 如果 $m=n$ 且 $f_i(z)=a_iz_i$，则解析多面体称为一**多圆盘** (polydisc). 集合 $\sigma_i=\{z\in D:|f_i(z)|=1; |f_j(z)|<1, j\neq i\}$ 称为解析多面体的面 (faces of the analytic polyhedron). 任意 k 个不同面 ($2\leqslant k\leqslant n$) 的交称为解析多面体的棱(edge of the analytic polyhedron). 如果 $m\geqslant n$ 且所有的面的维数为 $2n-1$，而每一条棱的维数都不超过 $2n-k$，则此解析多面体称为 **Weil 域** (Weil domain). n 维棱 $\sigma_{i_1\cdots i_n}=\sigma_{i_1}\cap\cdots\cap\sigma_{i_n}$ 的集合构成解析多面体的骨架(skeleton of the analytic polyhedron). 解析多面体的概念在多个变量的解析函数的积分表示问题中起着重要的作用.

参考文献

[1] Шабат, Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 2, М., 1976.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 上面定义的解析多面体 Π 有时称为 m 阶解析多面体 (见[A1]).

参考文献

[A1] Hölmander, L., An introduction to complex analysis in several variables, North-Holland, 1973.

钟同德 译

解析表示 [**analytic representation**; **аналитическое представление**], 全纯表示(holomorphic representation)

设 G 为复 Lie 群，φ 为 G 在拓扑向量空间 E 中的表示，E' 为 E 的对偶拓扑向量空间. 如果所有矩阵元素 $(\varphi(g)\xi,\eta)$, $\xi\in E$, $\eta\in E'$ 在 G 上全纯，则 φ 称为 G 的解析表示. 如果所有矩阵元素之共轭 $\overline{(\varphi(g)\xi,\eta)}$, $\xi\in E$, $\eta\in E'$ 在 G 上全纯，则 φ 称为 G 的反解析表示(anti-analytic representation). 一个连通复 Lie 群的解析(反解析)表示由此 Lie 群的 Lie 代数的相应表示唯一决定，见 **Lie 代数的表示** (representation of a Lie algebra). 如果 G 为复半单 Lie 群，则所有拓扑不可约解析(反解析)表示都是有限维的.

参考文献

[1] Наймарк, М. А., Теория представления групп, М., 1976 (英译本: Naimark, M. A., Theory of group representations, Springer, 1982).

[2] Желобенко, Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1970 (英译本: Zhelobenko, D. P., Compact Lie groups and their representation, Amer. Math. Soc., 1973).

Д. П. Желобенко 撰 许以超 译 石生明 校

解析环 [**analytic ring**; **аналитическое кольцо**]

解析函数在**解析空间** (analytic space)中的一点的芽的环. 下面是一个更确切的定义. 命 k 为一具有非平凡范数的域(见**域上的范数** (norm on a field)) (通常假定它是完全的)，又命 $k\{\{X_1,\cdots,X_n\}\}$ 是系数在 k 内关于 $X_1,\cdots,X_n$ 的幂级数的 k 代数，此幂级数在中心为 $(0,\cdots,0)$ 的某一多圆柱上收敛，并且每一级数都在其本身的多圆柱上收敛. 环 $k\{\{X_1,\cdots,X_n\}\}$ 的商环称为 k 上的解析环或解析 k 代数(analytic k-algebra); 通常 k 是实数域 $\mathbf{R}$ 或复数域 $\mathbf{C}$. 任一解析环是一局部环，Noether 环，Hensel 环; 它的剩余域同构于 k. 一解析环 $k\{\{X_1,\cdots,X_n\}\}$ 是一正则(和一析因)环，而它用极大理想 $(X_1,\cdots,X_n)$ 所定义的拓扑进行的完全化与形式幂级数的环 $k[[X_1,\cdots,X_n]]$ 一致. 正规化引理 (normalization lemma)成立: 一整解析环是一解析环 $k\{\{X_1,\cdots,X_n\}\}$ 的有限扩张. 在 $k\{\{X_1,\cdots,X_n\}\}$ 上有限的代数一般称为拟解析 k 代数(quasi-analytic k-algebras). 如果 k 是一完全域，则解析环称为**优环** (excellent ring).

参考文献

[1] Dieudonné, J. and Grothendieck, A., Critéres differentiels de régularité pour les localisés des algébres analytiques, *J. of Algebra*, 5 (1967), 305-324.

[2] Malgrange, B., Indeals of differentiable functions, Tata Inst. Fundam. Res., 1966.

[3] Abhyankar, S. S., local analytic geometry, Academic Press, 1964.

В. И. Данилов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Grauert, H. and Remmert, R., Coherent analytic sheaves, Springer, 1984 (译自德文).

钟同德 译

解析集 [**analytic set**; **аналитическое множество**]

完全可分度量空间的子集，它是无理数空间的连续象. 解析集的概念是 Н. Н. Лузин ([1]) 导入的. 他的经典定义已被推广到广义度量空间和拓扑空间.

1) 任意拓扑空间 X 中的解析集是该空间的子集，它是无理数空间的闭子集在具有点的紧象和闭图的上半连续多值映射下的象([2]). 若 X 是 Hausdorff 空间，则最后提到的条件自然满足. 若 X 是可度量化的，则此定义等价于经典定义.

2) 在完全可分度量空间中，经典解析集恒等于 $\mathscr{A}$ 集 ($\mathscr{A}$-set). 在广义度量空间和拓扑空间中，这个事实形成解析集其他定义的基础(它的容量如 $\mathscr{A}$ 集)([3], [4], [5]). 在完全正则空间类中，1) 的意义下的解析集是 2) 的意义下的绝对解析集. 在不可分可度量化空间类中使用定义 2)，因定义 1) 产生可分解析集.

3) Hausdorff 空间的解析集([6], [7]) 是 $F_{\sigma\delta}$ 型的紧空间的子集的连续象.

4) 解析集是属于族 $K_{\sigma\delta}$ 的集合的连续象，其中 K 是某拓扑空间的所有闭紧子集族([8]). 在 Hausdorff空

间类中，定义 1)，3) 和 4) 是等价的.

5) 另一方面的推广见[4]；从拓扑空间的闭集通过广义 $\mathscr{A}$ 运算得到 k 解析集(见 $\mathscr{A}$ **运算**($\mathscr{A}$ - operation)；可数权的 Baire 空间 (Baire space) 用权 k 的 Baire 空间代替)，它是解析集在 2) 意义下的推广.

参考文献

[1] Luzin, N. N., Sur la classification de M. Baire, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **164** (1917), 91–94.

[2] Frolík, Z., Respectability of the graphs of composites, *Mathematika*, **16** (1969), 153–157.

[3] Sierpiński, W., General topology, Univ. Toronto Press, 1956 (译自波兰文).

[4] Stone, A. H., Non-separable Borel sets II, *Gen. Topol. and Appl.*, **2** (1972), 249–270.

[5] Kuratowski, K. and Mostowski, A., Set theory, North-Holland, 1968.

[6] Шнейдер, В. Е., 《Уч. зап. МГУ》, **135** (1948), 37–85.

[7] Choquet, G., Theory of capacities, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **5** (1953–1954), 131–295.

[8] Sion, M., On analytic sets in topological spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **96** (1960), 341–354.

[9] Jayne J. E., Structure of analytic Hausdorff spaces, *Mathematika*, **23** (1976), 208–211.

[10] Rogers, C. A., Jayne J. E. and Dellacherie, C., et al. (eds.), Analytic sets, Acad. Press, 1980.

А. Г. Елькин 撰

6) 在解析函数论中，解析集可局部地定义为有限个全纯函数的公共零点的集合. 如果 S 为复 n 维空间 $\mathbf{C}^n$ 的开子集 U 中的解析集，这意味着对任一点 $a\in U$，存在邻域 $V\subset U$ 及有限个在 V 中全纯的函数 $f_1,\cdots,f_r$，使 $S\cap V=\{z\in V: f_1(z)=\cdots=f_r(z)=0\}$. 若可选定函数 f_i (在某邻域 V 中)使 Jacobi 矩阵 $|\partial f_i/\partial z_j|$ 在点 a 的秩为 r，则称 a 为解析集 S 的正则点 (regular point)；数 $n-r$ 称为 S 在点 a 的 (复) 维数 (dimension)，记作 $\dim_a S$. 解析集 S 的所有正则点的集合 S^* 是 S 的开的处处稠密子集 (S 作为 U 的子集在诱导拓扑下). 它的补集 $S\setminus S^*$(S 的奇点集)在 U 中是解析集，在 S 中无处稠密.

由定义

$$\dim_a S=\varlimsup_{\substack{z\in S\\ z\to a}}\dim_z S,\quad a\in S;$$

解析集 S 的维数是数

$$\dim S=\sup_{a\in S}\dim_a S.$$

解析集 S 称为纯 k 维的 (purely k-dimensional)，如果对所有 $a\in S$，$\dim_a S=k$. 对任意 $0\leqslant k\leqslant\dim S$，集合 $S_k=\{a\in S:\dim_a S=k\}$ 是 $U\setminus\bigcup_{j>k}S_j$ 中纯 k 维解析集. 于是 U 中任意解析集可表示为纯解析集的有限并，$S=\bigcup S_k$. 在奇点上 $\dim_a(S\setminus S^*)<\dim_a S$，于是 U 中纯 k 维解析集的奇点解析集的维数小于 k. S^* 的连通分支是复流形. 因对解析集 $S\setminus S^*$ 也成立，故得到解析集的复流形分解.

$$S=S^*\bigcup(S\setminus S^*)^*\bigcup\cdots$$

分解

$$S=S_d^*\bigcup(S\setminus S_d^*)_{d-1}^*\bigcup\cdots$$

更为方便(被加数的维数严格缩减，$d=\dim S$)；它称为 S 的层化 (stratification)；此和的第 k 个被加数的连通分支称为解析集 S 的 k 维层(strata).

解析集 S 称为可约的 (reducible) (在 U 中)，如果它是 U 中除本身外的两个解析集的并；否则称为不可约的 (irreducible) (在 U 中). U 中所有不可约解析集是连通且纯的. U 中解析集 S 是不可约的，当且仅当它的正则点集 S^* 是连通的. S^* 的每个连通分支的闭包在 U 中是不可约解析集；这样的解析集称为 S 的不可约分支 (irreducible components). U 中所有解析集是它的不可约分支的局部有限并. 如果两个解析集没有共同的不可约分支，则它们的交的维数严格小于每个集合的维数. 如果在 U 中两个不可约集的交含有一个集合，它在这两个集合中都是开集，则这两个解析集是恒等的(恒等定理 (identity theorem)).

U 中解析集 S 称为在点 $a\in S$ 不可约，如果存在点 a 在 U 中的基本邻域系 V_i，使所有解析集 $S\cap V_i$ 在 V_i 中是不可约的；此时 a 称为解析集 S 的不可约点(irreduciblity point). 在每个不可约点的邻域中，解析集有解析覆盖 (analytic covering) 的结构，即对每个这种点 $a\in S$，$\dim_a S=k$，存在连通邻域 $V\subset U$，线性映射 $\lambda:\mathbf{C}^n\to\mathbf{C}^k$ 和解析集 $\sigma\subset\lambda(V)$，使 λ 在 $S\cap V$ 的限制是到 $\lambda(V)$ 中的真映射，而 λ 在 $(S\cap V)\setminus\lambda^{-1}(\sigma)$ 的限制是 $\lambda(V)\setminus\sigma$ 上的有限对一的局部双全纯覆盖. 对不可约一维解析集，(在坐标的适当线性变换之后)存在形如

$$z_1=\zeta^m,\ z_2=f_2(\zeta),\ \ldots,\ z_n=f_n(\zeta),$$

的局部参数表示，其中 $\zeta\in\mathbf{C}$，$|\zeta|<r$，m 是正整数，函数 f_i 在圆盘 $|\zeta|<r$ 中是全纯的. 于是在每个不可约点的邻域中，一维解析集是拓扑流形. 对高维解析集，这通常是不对的.

U 中解析集的有限并和任意交在 U 中仍是解析集. U 中任意解析集在 U 中是闭的. $U\subset\mathbf{C}^n$ 中任意紧解析集由有限个点组成. 如果 U 是连通的且解析集 $S\neq U$，则 $U\setminus S$ 在 U 中是开的处处稠密的，而且也是连通的. U 中解析集的所有孤立点的集合在 U 中没有极限点. 而且所有解析集是局部连通的. 连通解析集是道路连通的.

U 中任何 d 维解析集在 U 中具有局部有限 $2d$ 维

Hausdorff 测度 mes_{2d}. 如果 $\dim_a S = k$, 则有正常数 c 和 C(依赖于 a 和 S), 使对所有充分小的 $r>0$, 有

$$cr^{2k} \leqslant \mathrm{mes}_{2k}(S \cap \{|z-a|<r\}) \leqslant Cr^{2k}.$$

解析集族在**双全纯映射** (biholomorphic mapping) 下是不变的. 而且, 若 S 是 U 中解析集, $f: U \to U_1$ 是真全纯映射, 则 $f(S)$ 是 U_1 中的解析集.

在复流形上解析集的定义类似于关于 $\mathbf{C}^n$ 的定义, 并且在上边列出的所有性质中除了一个外都保持着: 在一般情形下, 存在紧非离散解析集. 在特殊流形中, 解析集可能有某个附加的性质. 例如, 在复 n 维射影空间中, 所有解析集都是代数的, 即和某有限个齐次多项式的共同零点的集合重合(周(炜良)定理 (Chow theorem)).

$\mathbf{R}^n$ 的开子集中实解析集可用同样方法定义, 只是用实解析函数代替全纯函数. 任何实解析集都是某解析集(在 $\mathbf{C}^n$ 的某开子集中)和实子空间 $\mathbf{R}^n \subset \mathbf{C}^n$ 的交.

参考文献

[1] Gunning, R. C. and Rossi, H., Analytic functions of several complex variables, Prentice - Hall, 1965.

[2] Hervé, M., Several complex variables, local theory, Oxford Univ. Press, 1963.

E. M Чирка 撰 方嘉琳 译

解析层 [analytic sheaf; аналитический пучок]

解析空间 X 上的一个层 F, 使得对任何点 $x \in X$, 集合 F_x 是在点 x 的全纯函数的芽组成的环 $\mathcal{O}_x$ 上的**模** (module), 并且在偶对 (f, α) 组成的集上定义的映射 $(f, \alpha) \to f\alpha$ 是 $\mathcal{O} \times F$ 到 F 内的一个连续映射, 其中 $f \in \mathcal{O}_x$, $\alpha \in F_x$, $x \in X$. М И. Войцеховский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Grauert, H. and Remmert, R., Theory of Stein spaces, Springer, 1979 (译自德文).

[A2] Grauert, H. and Remmert, R., Coherent analytic sheaves, Springer, 1984 (译自德文).

钟同德 译

解析空间 [analytic space; аналитическое пространство]

解析流形 (analytic manifold) 的概念的拓广. 设 k 是完全非离散赋范域. U 是 k 上的 n 维空间 k^n 的区域. k 上的解析空间的一个局部模型 (同时也是最重要的例子) 是 U 中由方程 $f_1 = \cdots = f_p = 0$ 定义的**解析集** (analytic set) X, 其中 f_i 是 U 中的解析函数, 且在解析集上具有层 $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}$ 是由层 $\mathcal{O}_U / I$ 在 X 上的限制得到的; 这里 $\mathcal{O}_U$ 是 U 中解析函数的芽层, 而 I 是由 $f_1, \cdots, f_p$ 生成的理想的子层. k 上的解析空间 (analytic space) 是一**赋环空间** (ringed space), 它局部同构于上述类型的环式空间 $(X, \mathcal{O})$. 如果 k 是实数域 $\mathbf{R}$, 我们称之为实解析空间 (real - analytic space); 如果 k 是复数域 $\mathbf{C}$, 则称为复解析空间 (complex - analytic space) 或简称复空间 (complex space); 如果 k 是一 p 进数域 $\mathbf{Q}_p$, 则称为 p 进解析空间 (p - adic analytic space).

一个从解析空间 $(X, \mathcal{O}_X)$ 到另一解析空间 $(Y, \mathcal{O}_Y)$ 的解析 (全纯) 映射 (analytic (holomorphic) mapping) 是指在赋环空间理论意义下的一个射 $(X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$, 即一个对 (φ_0, φ_1), 其中 $\varphi_0: X \to Y$ 是一连续映射, 而 $\varphi_1: \varphi_0^{-1}\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$ 是一个层同态.

解析空间 $(X, \mathcal{O})$ 的点 x 称为简单的 (simple) (或正则的 (regular), 或非奇异的 (non-singular)), 如果 x 存在一邻域, 使在其上 $(X, \mathcal{O})$ 同构于形如 $(U, \mathcal{O}_U)$ 的空间, 这里 U 是 k^n 中的一个区域. 否则 x 称为一奇点 (singular point). 一空间称为光滑的 (smooth), 如果空间的所有点都是简单的. 一光滑解析空间等同于一解析流形.

一解析空间 X 在点 $x \in X$ 的维数 (dimension) $\dim_x X$ 定义为在局部模型中相应的**解析集** (analytic set) 的维数. 整体维数 (global dimension) 由公式

$$\dim X = \sup_{x \in X} \dim_x X$$

定义. 令 m_x 为局部环 $\mathcal{O}_x (x \in X)$ 的极大理想. k 上的向量空间 $T_x(X) = (m_x / m_x^2)^*$ 称为 X 在点 x 的切空间 (tangent space), 而 $T_x^*(X) = m_x / m_x^2$ 称为余切空间 (cotangent space). 数

$$\mathrm{em}\dim_x X = \dim T_x(X)$$

称为在点 x 的切维数 (tangent dimension) 或嵌入维数 (embedding dimension) (后一名词与这样的事实有联系: $\mathrm{emdim}_x X$ 是使得 $(X, \mathcal{O})$ 在点 x 的一邻域同构于 k^n 中的一局部模型的最小数 n). 我们有 $\dim_x X \leqslant \mathrm{em}\dim_x X$ 两者相等当且仅当 x 是一简单点. 我们也定义维数

$$\mathrm{em}\dim X = \sup_{x \in X} \mathrm{em}\dim_x X.$$

解析空间的每一解析映射 $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1): (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ 确定一个线性映射 $d\varphi_x: T_x(X) \to T_{\varphi_0(x)}(X)$, 称为它在点 $x \in X$ 的微分 (differential).

一解析空间 $(X, \mathcal{O})$ 称为约化的 (reduced), 如果在任意一点的邻域内它的局部模型有下面的性质: I 由所有在 $X \subset U$ 上为零的全纯函数的芽组成. 在代数闭域 k 的情形下, 这个陈述相当于说层 $\mathcal{O}$ 的纤维 $\mathcal{O}_x (x \in X)$ 不包含幂零元素. 所有光滑空间都是约化的. 如果 $(X, \mathcal{O})$ 是约化的, 则可以说 $\mathcal{O}$ 由 X 上的某些连续函数的芽组成. 层 $\mathcal{O}$ 在约化空间 $(X, \mathcal{O})$ 上的截面等同于 X 上的解析函数, 即具有**解析映射** (analytic mapping) $X \to k$. 对任何解析空间 $(X, \mathcal{O})$, 存在一自然的层满射 red:

$\mathcal{O} \to \mathcal{O}_I$（其中$(X, \mathcal{O}_I)$是一约化解析空间）. 此满射称为约化(reduction). 如果$f \in \Gamma(X, \mathcal{O})$是层$\mathcal{O}$的截面，我们可以讲$f$在一点$x \in X$的值(它和解析函数red f在x的值一致). 由于这个理由，甚至在非约化的情形，代数$\Gamma(X, \mathcal{O})$也常常被称为在$(X, \mathcal{O})$上的解析(全纯)函数的代数. 在一解析空间$(X, \mathcal{O})$上的$\mathcal{O}$模的层也称为解析层(analytic sheaves).

如果$(X, \mathcal{O})$是一解析空间，那么每一开集$U \subset X$定义一开子空间$(U, \mathcal{O}|_U)$. 另一方面，我们可以引进$(X, \mathcal{O})$的解析子空间的概念，它必须是闭的. 一集合$Y \subset X$称为解析的，如果在每一点$x \in X$的邻域内，它由有限个解析方程所确定. 由所有在Y为零的解析函数的芽组成的理想$I_Y \subset \mathcal{O}$的层，它和这样的集是有联系的. 反之，有限型理想$I \subset \mathcal{O}$的每个解析层(analytic sheaf)确定一解析集$Y \subset X$. 如果$\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}/I|_Y$，我们就得到一解析空间$(Y, \mathcal{O})$，它称为$(X, \mathcal{O})$的解析子空间(analytic subspace)；存在一个自然的射$(1, \varphi_1)$: $(Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O})$. $(X, \mathcal{O})$的一个解析子空间的例子是这个空间的约化.

解析空间的概念原是解析流形概念的拓广. 这样的拓广主要是由代数几何中提出的，在代数几何中对具有奇点的空间早已系统研究过. 代数几何思想的影响直接反映到解析空间概念的基本阐述上(关于约化复空间见[9]；对一般的情形见[6]). 特别地，在一完全的赋范域k上的有限型的任意一个格式自然地决定k上的一解析空间. k上的概形与解析空间之间的这个对应对约化复空间的情形在[9]中有研究，其中解析空间的理论称为"解析几何". 此后这两种几何平行地发展，且两者之间思想的交流对这两个领域内所取得的成就作出了本质的贡献.

在多个复变量的函数理论中，首先出现了具有奇点的空间，首先是**Riemann域**(Riemannian domain)，它类似于一个复变函数的Riemann曲面. 用这些作为局部模型，H. Behnke和K. Stein在1951年定义了一类环式空间，如象[5]中指出的那样，它和一类约化**正规解析空间**(normal analytic space)是一致的. $\mathbf{C}^n$中的解析集的局部几何早在1932年W. Rüchert就已研究了. 最后，非光滑解析空间是作为解析流形对严格离散自同构群的商空间在自守函数论中自然产生的(见**离散变换群**(discrete group of transformations)). p进解析集于1935年由I. Skolem联系某些数论问题而首先被引进.

解析空间理论有两个方面：局部方面和整体方面. 局部解析几何与具有上述类型的层的空间k^n中解析集的芽有关. 这里k上n个变量的收敛幂级数的代数性质和它的商代数(所谓解析代数)的研究起着主要的作用，其基础是由K. Weierstrass奠定的. 局部理论包括正规化理论，奇点的研究，解析函数的局部性质和映射等等. 在这领域所得到的最重要的结果是代数闭域k的情形([1], [4], [7]). 在那里出现了一个**凝聚解析层**(coherent analytic sheaf)的重要概念，它在整体理论中继续起着主要的作用. 特别地解析空间$(X, \mathcal{O})$的结构层和任一解析集$Y \subset X$的理想I_Y的层对任何代数闭域k是凝聚的. $k = \mathbf{R}$的情形也已经被彻底地研究了.

整体解析几何研究解析函数，映射和其他"整体地"定义在整个解析空间上的解析对象的性质，以及这些空间的几何性质. 在研究复解析空间的过程中它们的自然类是分离的. 其中首先包括Stein空间类(见**Stein空间**(Stein space))可粗略地描述为一类具有足够大量整体全纯函数的空间. Stein空间是单复变函数的经典理论中所考虑的复数平面上的区域最自然的多维拓广. 这类空间事实上与$\mathbf{C}^n$空间中的解析子空间类是一致的. 它的代数类似物是仿射代数簇的类(见**仿射簇**(affine variety)).

一个区域$D \subset \mathbf{C}^n$的全纯完全性等价于D是一**全纯域**(domain of holomorphy)这个事实，即存在D上的一个全纯函数，它不能拓展到一更大的区域内. 全纯域的边界是伪凸的，即它对于局部解析子流形的行为正象凸曲面对于实线性子流形的那样. 逆定理的正确性问题(见**Levi问题**(Levi problem))引起了一系列研究并产生Stein空间的一个新表征.

在某种意义上来说，紧空间类是相反的情形. 下列Liouville经典定理的拓广是成立的：在一约化紧空间上全纯的函数在这个空间的每一连通分支上是常数，因此形成一有限维的向量空间. 这个定理的拓广是那些**有限性定理**(finiteness theorems)，后者确认了取值于一凝聚解析层的同调群的维数的有限性. 全纯凸复空间，q完全空间，q伪凸空间，q伪凹空间(它们是Stein空间的拓广)，以及紧空间也都被考虑了(见**全纯凸复空间**(holomorphically-convex complex space)).

在全纯映射理论中，这些复空间类都有它们的类似物，因此，紧空间对应着真全纯映射；全纯完全空间对应着Stein映射，等等. 对于许多定理"相对"的类似被发现了，而一个定理的"绝对"的差异是从它的相对差异得到的，如果整个空间被映为一点的话. 有限性定理的相应拓广是凝聚解析层在全纯映射下的直接映象的凝聚定理，这些有限性定理中的第一个也是最重要的一个(对真映射)是由H. Grauert证明的([6A]).

一个特殊类型的全纯映射在复空间理论中起了重要作用，那就是所谓的**修改**(modification)，即映射f: $X \to Y$诱导出开子空间的一个同构$X \setminus X_1 \to Y \setminus Y_1$，其中$X_1 \subset X$，$Y_1 \subset Y$是某些解析集. 这时就说$Y$是从$X$用"收缩"子集$X_1$到$Y_1$上的方法得到的，而$X$是从$Y$

用"膨胀"子集 Y_1 到 X_1 的方法得到的. 特别有趣的是可以收缩到一点的解析子集(例外解析集 (exceptional analytic sets));这些都是由 H.Grauert 描写的 ([6B]). 在解析几何中一个自然的问题是下述奇点的分解问题: 是否可将一解析空间"膨胀"以使整个空间变为光滑的? 应当指出,早在 19 世纪代数几何中就已研究了修改, 而它在解析几何中却是 1951 年由 Behnke 和 Stein 在 Riemann 区域的概念意义上引进的.

另一与代数几何思想也有紧密联系的自然研究对象是复空间上的亚纯函数和它们的拓广 —— 亚纯映射 (例如一个产生相反于修改的运算的映射; 见**亚纯函数** (meromorphic function); **亚纯映射** (meromorphic mapping)) 在一约化紧空间 X 上的亚纯函数构成一超越次数 $t(X) \leqslant \dim X$ 的域(这首先由 C. L. Siegel 在 1955 年对光滑的情形得到证明). 对 $t(X)=\dim X$ 的空间 X (Мойшезон 空间 (Moishezon space)). 构成一个十分接近于射影代数簇的类; 它们是光滑射影代数簇的修改,这个事实表征了这个类. 另一十分接近于代数簇的解析空间类是 **Kähler 流形 (Kähler manifold)**. 人们已经知道很多关于判别紧复空间的射影性的准则 ([3], [6B], [13]). 多个复变量的自守函数的研究已经对这个课题的发展作出了重要的贡献.

解析结构的形变理论(见**形变** (deformation))是研究对一个给定类型的解析对象的分类问题(例如, 在一给定实解析簇上的所有复结构, 在一给定复空间的所有解析子空间等等), 目的是在这些对象的集合上引进复空间的"自然"结构,并且为了描述所有"足够接近"于给定对象的解析对象. 前者称为整体模问题,而后者称为局部模问题. 一个整体模问题的例子是紧 Riemann 曲面上所有复结构的分类问题(见 **Riemann 曲面的模** (moduli of a Riemann surface)).

整体解析几何的主要工具是由凝聚解析层及其上同调空间组成. 上同调方法的第一个成功的结果是加性 Cousin 问题和全纯函数从 Stein 流形 $(X, \mathcal{O})$ 的一闭 $Y \subset X$ 的开拓问题的 Cartan 解 (见 **Cousin 问题** (Cousin problems); [8]); 我们看到这些问题的解分别被上同调群 $H^1(X, \mathcal{O})$ 和 $H^1(X, I_Y)$ 所阻碍.

整体理论的大多数结果最初都是对复流形证明的,然后将它们拓广到解析空间. 在这个过程中遇到的困难常常需要发展完全新的方法. 一复流形上的一局部自由解析层的上同调空间可以用微分形式表示 (Dolbeault - Serre 定理, 也见**微分形式** (differential form)), 这使得能够应用椭圆型微分方程理论的方法和其他解析方法来研究它们. 在非光滑的情形这个方法遇到了较大的困难,常常需要用其他方法来定义上同调类,例如应用一适当覆盖中的 Čech 上链. 将 Banach 解析空间的技巧应用到模问题,已被证明在这方面是有用的(见 **Banach 解析空间** (Banach analytic space)).

也见**实解析空间** (real-analytic space); **刚性解析空间** (rigid analytic space).

参考文献

[1] Abhyankar, S. S., Local analytic geometry, Academic Press, 1964.

[2] Banica, C. and Stanasila, O., Algebraic methods in the global theory of complex spaces, Wiley, 1976 (译自罗马尼亚文).

[3] Gunning, R. C. and Rossi, H., Aanalytic functions of several complex variables, Prentice-Hall, 1965.

[4] Grauert, H. and Remmert, R., Analytische Stellenalgebren, Springer, 1971.

[5] Grauert, H. and Remmert, R., Komplexe Räume, *Math. Ann.*, **136** (1958), 245–318.

[6A] Grauert, H., Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen, *Publ. Math IHES*, **5** (1960), 233–292.

[6B] Grauert, H., Ueber modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen, *Math. Ann.*, **146** (1962), 4, 331–368.

[7] Narasimhan, R., Introduction to the theory of analytic spaces, Springer, 1966.

[8] Cartan, H., Variétés analytiques complexes et cohomologie, in *Colloque sur les fonctions de plusieurs variables. Bruxelles, 11 au 14 mars* 1953, G. Thone and Masson, Liège-Paris, 1953.

[9] Serre, J.-P., Géométrie algébrique et géométrie analytique, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **6** (1955–1956), 1–42.

[10] Фукс, Б. А., Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных, 2 изд., М., 1963 (英译本: Fuks, B. A., Special chapters in the theory of analytic functions of several complex variables, Amer. Math. Soc., 1965).

[11] Hörmander, L., An introduction to complex analysis in several variables, North-Holland, 1973.

[12] Hirzebruch, F., Topological methods in algebraic geometry, Springer, 1978 (译自德文).

[13] Chern, S. S., Complex manifolds without potential theory, Springer, 1979.

A. Л. Онищик 撰

【补注】 我们也可以参考 [A2] 来代替 [8].

引进现在称为 Moishezon 空间 (Moishezon space) 的原始论文是 [A3]. 它们是一个检验紧复空间的射影性问题的自然方法. 特别, 第 I 部分包含这个结果: Moishezon 空间是代数射影, 当且仅当它具有一个 Kähler 度量.

参考文献

[A1] Grauert, H. and Remmert, R., Coherent analytic sheaves, Springer, 1984 (译自德文).

[A2] Cartan, H., Sem. E. N. S. 1951–1952, Ecole Norm. Super..

[A3] Moishezon, B., On n-dimensional compact complex varieties with n algebraically independent meromorphic functions, *Amer. Math. Soc. Translation Ser.* 2, 63 (1967), 51−177.
钟同德 译

解析曲面[analytic surface; аналитическая поверхность], Euclid 空间中的

空间 $\mathbf{R}^n(n>2)$ 中的任意二维解析子流形 X. 然而,术语"$\mathbf{R}^n$ 中的解析曲面"常常在更广的意义下表示一个可以(局部)解析地参数化的流形. 这意味着点 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in X$ 的坐标可以表为实参数 $t=(t_1,\cdots,t_k)$ 的解析函数 $x_i=x_i(t)$, 其中 t 在某一范围 $\Delta\subset R^k$ $(1\leqslant k<n)$ 中变化. 如果 Jacobi 矩阵 $\|\partial x/\partial t\|$ 的秩对于一解析流形在 Δ 中是到处极大, 且等于 k, 那么解析曲面 X 的维数是 k.

在复空间 $\mathbf{C}^n$ 中术语"解析曲面"也用来表示 $\mathbf{C}^n$ 中的复解析曲面(complex-analytic surface) X, 即允许全纯(复解析)参数化的流形. 这意味着点 $z=(z_1,\cdots,z_n)\in X$ 的复坐标可以表为参数 $\tau=(\tau_1,\cdots,\tau_k)$ 的全纯函数 $z_i=z_i(\tau)$, 其中 τ 在某一范围 $\Delta\subset\mathbf{C}^k$ $(1\leqslant k<n)$ 内变动 (也常假设 $\|\partial z/\partial\tau\|$ 的秩 $\equiv k$). 如果 $\Delta=\mathbf{C}^k$ 并且所有的函数 $z_i(\tau)$ 都是线性的, 就得到一复**解析平面** (analytic plane). 如果 $k=1$, 有时也称为全纯曲线 (holomorphic curve)(或复解析曲线 (complex-analytic curve)): 如果所有函数 $z_i(\tau)$ 是线性的, 就称为具参数表示式

$$z_i=a_i\tau+b_i;\ a_i,b_i\in\mathbf{C},\ i=1,\cdots,n,$$
$$(a_1,\cdots,a_n)\neq 0$$

的复直线(complex straight line).

参考文献

[1] Шабат, Б. В., Введение в комплексный анализ, ч. 1−2, 2 изд., М., 1976.
[2] Владимиров, В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, ч. 2, М., 1964. (英译本: Vladimirov, V. S., Methods of the theory of functions of several complex variables, M. I. T, 1966, Chapt. 2.)

Е. Д. Соломенцев, Е. М. Чирка 撰 钟同德 译

解析曲面[analytic surface; аналитическая поверхность], 代数几何学中的

一个二维(复)**解析流形** (analytic manifold), 即具有复结构的光滑四维流形. 虽说解析曲面的理论是复流形的一般理论的一部分, 但二维的情形还是被分开处理, 因为人们对解析曲面的了解比 $n\ (n\geqslant 3)$ 维流形多得多. 此外, 某些事实是二维情形特有的. 这些结论涉及到解析曲面的分类, 它与**代数曲面** (algebraic surface) 的分类相似. 由于这一事实, 解析曲面理论多数归结为代数曲面的理论. 解析曲面分类的主要结果是小平邦彦 ([1], [2], [3]) 得出的, 他的工作以古典的意大利代数几何学派在代数曲面分类方面的结果为基础.

下面讨论的解析曲面都假定是紧连通的.

例. 1) 代数曲面 (algebraic surface). 设

$$f_i(x_0,\ldots,x_N),\quad i=1,\ldots,m$$

为一组复系数齐次多项式. 方程 $f_i(x)=0$ 所确定的复射影空间 $P^N(\mathbf{C})$ 中的闭子集是一个解析曲面, 如果它是非奇异,连通的,且复维数等于 2. 这是解析曲面的基本例子.

2) 复环面 (complex tori). 设 $\mathbf{C}^2$ 是复数域上的二维向量空间(作为实数域上的向量空间它同构于 $\mathbf{R}^4$), 设 $\Gamma\simeq\mathbf{Z}^4$ 是 $\mathbf{C}^2$ 中一个格. 商空间 $X=\mathbf{C}^2/\Gamma$ 是一个解析曲面. 作为光滑流形, X 微分同胚于四维环面, 但 X 上的复结构依赖于格 Γ. 复环面 $X=\mathbf{C}^2/\Gamma$ 在分析中起着重要作用, 因为这种环面上的亚纯函数就是 $\mathbf{C}^2$ 上的周期亚纯函数, 以格 Γ 为周期. $\mathbf{C}^2/\Gamma$ 型的解析曲面并不总是代数的. 也存在格 Γ 使得在相应的环面 $\mathbf{C}^2/\Gamma$ 上根本没有亚纯函数 (常函数除外). 这种环面的具体例子见 [5].

3) Hopf 曲面 (Hopf surface). 设 $Y=\mathbf{C}^2-\{0\}$, c 是一个正数. 考虑下式给出的群 $\mathbf{Z}$ 在 Y 上的作用:

$$(z_1,z_2)\rightarrow(c^kz_1,c^kz_2),\quad k\in\mathbf{Z}.$$

群 $\mathbf{Z}$ 在 Y 上的作用是离散的且无不动点, 商空间 $X=Y/\mathbf{Z}$ 微分同胚于 $S^1\times S^3$. 商空间 X 有解析曲面的自然结构, 称为 Hopf 曲面.

解析曲面的分类. 解析曲面分类中的主要不变量是解析曲面 X 上亚纯函数域 $\mathbf{C}(X)$ 的超越次数. 根据 Siegel 定理, 对于任何紧连通流形 X, 域 $\mathbf{C}(X)$ 是有限生成的, 而且它的超越次数不大于 X 的复维数. 因而对一个解析曲面 X, 域 $\mathbf{C}(X)$ 或者含两个独立的亚纯代数函数, 或含一个这样的函数, 或只含常数. 这些可能性导出以下定理.

解析曲面为代数曲面的充要条件是存在 X 上两个代数无关的亚纯函数.

如果解析曲面 X 有超越次数等于 1 的亚纯函数域, 则 X 是椭圆曲面, 即存在到代数曲线 Y 上的一个全纯映射 $P: X\rightarrow Y$, 使得

$$P^*\mathbf{C}(Y)=\mathbf{C}(X)$$

并且 P 的所有纤维除了有限个外都是椭圆曲线(奇异纤维只可能具有非常特殊的形式, 而且已被彻底地研究过).

如果在解析曲面 X 上没有不同于常数的亚纯函数, 也不存在 X 上的例外曲线 (见**例外子簇** (exceptional subvariety)), 则 X 的第一个 Betti 数 b_1 只能取三个值: 4, 1 或 0. 当 $b_1=4$ 时, X 是复环面; 当 $b_1=0$ 时, X 有平

凡典范纤维化．这些解析曲面称为 K3 曲面．它们都互相同胚．$b_1=1$ 的情形还没有详细研究，但是通过推广 Hopf 曲面的构造法，已得到 $b_1=1$ 的一些解析曲面的例子．

解析 Kähler 曲面并不总是代数的．但当它们的第一个陈(省身)类 (Chern class) 的自交数为正数时，它们是代数的．所有 $b_1>0$ 的解析 Kahler 曲面都是代数曲面的形变．

参考文献

[1] Kodaira, K., *Matematika*, **6** (1962), 6, 3−17.

[2] Kodaira, K., On compact (complex) analytic surfaces, Ⅰ − Ⅲ, *Ann. of Math.*, **71** (1960), 1, 111−152; **77** (1963), 3, 563−626; **78** (1963), 1, 1−40

[3] Kodaira, K., On the structure of compact (complex) analytic surfaces Ⅰ − Ⅳ, *Amer. J. Math.*, **86** (1964), 751−798; **88** (1966), 682−721; **90** (1968), 55−83; **90** (1968), 1048−1066.

[4] Алгебраические поверхности, М., 1965 (《Труды Матем. ин-та АН СССР》, **75** (1965)).

[5] Шафаревич, И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972 (英译本: Shafarevich, I. R., Basic algebraic geometry, Springer, 1977).

Б. Б Венков 撰

【补注】 上面定义的概念也称为复解析曲面 (complex-analytic surface)，因为考虑的是复结构与复数域 C．如果考虑的是实结构与实数域，就称为实解析曲面 (real-analytic surface)．不过解析曲面总是理解为前一种意义．

参考文献

[A1] Barth, W., Peters, C., Ven, A. van der, Compact complex surfaces, Springer, 1984.

陈志杰 译

微分方程解析理论 [**analytic theory of differential equations**; **аналитическая теория дифференциальных уравнений**]

从解析函数理论的观点来研究解的常微分方程理论的一个分支．微分方程解析理论问题的典型表述是：给定一定类型的微分方程，它的解都是一个变量的解析函数，找出这类方程解的解析函数的特性．在这一广泛的意义上，微分方程解析理论包含代数函数论，Abel 积分论，特殊函数论等．特殊函数——**Bessel 函数** (Bessel functions)，**Airy 函数** (Airy functions)，**Legendre 函数** (Legendre functions)，**Laguerre 函数** (Laguerre functions)，**Hermite 函数** (Hermite functions)，**Чебышев 函数** (Chebyshev function)，**Whittaker 函数** (Whittaker functions)，**Weber 函数** (Weber function)，**Mathieu 函数** (Mathieu functions)，**超几何函数** (hypergeometric function)，Sonin 函数以及许多其他函数——都是具有解析系数的线性微分方程的解．

线性理论 (linear theory)．考虑用矩阵表示 n 个方程的方程组：

$$\dot{x} = A(t)x+f(t). \tag{1}$$

1) 设矩阵 $A(t)$，$f(t)$ 在区域 $G\subset \mathbf{C}(t)$ 内为全纯的，其中 $\mathbf{C}(t)$ 是复 t 平面，那么方程 (1) 的任何解在 G 中都是解析的 (但是如果 G 不是单连通的，一般来说解不是单值的)．假定 $A(t)$ 在 G 中为亚纯的，考虑齐次方程组

$$\dot{x} = A(t)x. \tag{2}$$

(如果矩阵 $A(t)$ 的元素在 G 中是全纯的 (亚纯的)，则称 $A(t)$ 在 G 中为全纯的 (holomorphic) (亚纯的 (meromorphic)).) 如果在点 $t_0\in G$ 的一个给定邻域内，

$$A(t) = A_{-\nu}(t-t_0)^{-\nu}+\cdots+A_{-1}(t-t_0)^{-1}+B(t),$$

其中 A_{-j} 为常数矩阵，$A_{-\nu}\neq 0$，矩阵 $B(t)$ 在 t_0 处是全纯的，则称 $t_0\in G$ 为矩阵 $A(t)$ 的一个 ν ($\geqslant 1$) 阶极点 (pole of the matrix $A(t)$)．如果 $\nu=1$，则称 ν 阶极点 $t_0\neq\infty$ 为正则奇点 (regular singular point)，如果 $\nu\geqslant 2$，则称为非正则奇点 (irregular singular point)．用变量变换 $t\to t^{-1}$，可将 $t_0=\infty$ 的情况转换成 $t_0=0$ 的情况．由此得出 $t_0\neq\infty$．

2) 设 t_0 是 $A(t)$ 的一个极点，那么方程组 (2) 存在一个如下的基本矩阵

$$X(t) = \Phi(t)(t-t_0)^D, \tag{3}$$

其中 D 是一常数矩阵，对某一 $\rho>0$，若 t_0 为正则奇点，则当 $|t-t_0|<\rho$ 时，$\Phi(t)$ 是全纯的，若 t_0 为非正则奇点，则当 $0<|t-t_0|<\rho$ 时，$\Phi(t)$ 是全纯的．(根据定义，这里 $(t-t_0)^D=\exp(\ln(t-t_0)D)$．) 对于正则奇点，矩阵 D 可以用 $A(t)$ 以显式表示 ([1]，[2])；对于非正则奇点，则不是这种情况．

对具有亚纯系数的 n 阶微分方程引进了类似的奇点分类方法．所有奇点均为正则的微分方程和微分方程组称为 Fuchs 微分方程(组) (Fuchsian differential equations (systems))．对这样的方程组，$A(t)$ 的一般形式是：

$$A(t) = \sum_{j=1}^{k}(t-t_j)^{-1}A_j,\ A_j = \text{常数},\ k<\infty.$$

超几何方程 (hypergeometric equation) 就是 Fuchs 微分方程的一例．

3) 设 $A(t)=t^qB(t)$，其中 $q\geqslant 0$ 为整数，并设 $B(t)$ 在 $t=\infty$ 处是全纯的 (如果 $B(\infty)\neq 0$，则 ∞ 为非正则奇点)．如果 S 是充分窄的扇形：$|t|>R$，$\alpha<\arg t<\beta$，那么存在一个形如

$$X(t) = P(t)t^Q\exp(R(t)) \tag{4}$$

的基本矩阵，其中 Q 是常数矩阵，$R(t)$ 是对角矩阵，

其元素为 $t^{1/p}$ 的多项式，$p\geqslant1$ 是一整数，且当 $|t|\to\infty$ 和 $t\in S$ 时，有

$$P(t)\sim\sum_{j=0}^{\infty}P_j t^{-j/p}$$

平面 $\mathbf{C}(t)$ 被分割成有限个扇形，在每个扇形中存在着一个形如(4)的基本矩阵([3]，[4]；亦见 [1]，[2])．

4) 作为沿一条闭路径 γ 解析开拓的结果，基本矩阵 $X(t)$ 乘以 B_γ：$X(t)\to X(t)B_\gamma$，其中 B_γ 是一常数矩阵；可以获得此微分方程的**单值群**(monodromy group)．И. А. Лаппо-Данилевский ([5]) 研究了 Reimann 问题 (Reimann problem)：设 $A(t)$ 为 t 的有理函数，并设基本矩阵 $X(t)$ 的奇点为已知，求 $A(t)$．

5) 设函数 $z=\varphi(t)$ 为上半平面 $\operatorname{Im} t>0$ 到一多边形内部的保角映射，多边形的边界由有限个直线段和圆弧组成，那么函数 $\varphi(t)$ 满足 Schwarz 方程 (Schwarz equation)：

$$\{z,t\}\equiv\frac{z'''}{z'}-\frac{3}{2}\left(\frac{z''}{z'}\right)^2=R(t). \qquad (5)$$

其中 $R(t)$ 是一有理函数，而方程

$$w''+\frac{1}{2}R(t)w=0 \qquad (6)$$

为 Fuchs 型方程．方程(5)的任何一个解可以表示为形式 $z=w_1/w_2$，其中 w_1 和 w_2 为方程(6)的线性独立解．设 G 为无限离散群，并设 $\varphi(t)$ 为 G 的一个**自守函数**(automorphic function)，那么 $\varphi(t)$ 可以表示成 $\varphi=w_1/w_2$，其中 w_1, w_2 为方程(6)的线性独立解，而 $R(t)$ 是某一**代数函数**(algebraic function)．

非线性理论 (non-linear theory)．1) 考虑 Cauchy 问题：

$$\dot{x}=f(t,x),\ x(t_0)=x^0, \qquad (7)$$

其中 $t\in\mathbf{C}(t)$，$x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbf{C}^n(x)$，$f=(f_1,\cdots,f_n)$．

Cauchy 定理 (Cauchy theorem)：设函数 $f(t,x)$ 关于 (t,x) 在区域 $G\subset\mathbf{C}(t)\times\mathbf{C}^n(x)$ 内是全纯的，并设点 $(t_0,x^0)\in G$．那么存在一个 $\delta>0$，使得在区域 $|t-t_0|<\delta$ 内存在 Cauchy 问题(7)的一个解 $x(t;t_0,x^0)$，它是唯一的和全纯的．

解 $x(t;t_0,x^0)$ 的一个解析开拓也将是系统(7)的一个解，但是作为此开拓结果得到的函数可能有奇点，而且在一般情况下是 t 的一个多值函数．问题可这样提出：这一函数可能具有什么样的奇点以及如何能构造通解？ 在线性情况下这些问题已得到确定的回答，在非线性情况下问题要复杂得多，甚至在 $f_i(t,x)$ 为 t,x 的有理函数的情况下，也并未完全清楚．

2) 考虑微分方程：

$$\frac{dx}{dt}=\frac{P(t,x)}{Q(t,x)}, \qquad (8)$$

其中 $t\in\mathbf{C}$，$x\in\mathbf{C}$，P 和 Q 在某一区域 G 内为 (t,x) 的全纯函数．如果 $P(t_0,x_0)=0$，$Q(t_0,x_0)=0$，那么称点 (t_0,x_0) 为方程(8)的一个(本质)奇点((essentially) singular point)．下面说明解在方程的奇点邻域内的结构．将 P 和 Q 展成 Taylor 级数：

$$P(t,x)=a_{11}(x-x_0)+a_{12}(t-t_0)+\cdots,$$
$$Q(t,x)=a_{21}(x-x_0)+a_{22}(t-t_0)+\cdots,$$

并设 λ_1,λ_2 为矩阵 $\|a_{ij}\|$ 的本征值．下述定理成立．设 $\lambda_j\neq0$，λ_1/λ_2 和 λ_2/λ_1 中任何一个既不是非负整数也不是负实数．那么存在点 (t_0,x^0) 的邻域 U，点 $\tilde{t}=0$，$\tilde{x}=0$ 的邻域 V 以及函数 $\tilde{t}=\tilde{t}(t,x)$ 和 $\tilde{x}=\tilde{x}(t,x)$，使得由这些函数定义的映射 $U\to V$ 为双全纯的，以新变量表示的方程(8)取下列形式([6])：

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}}=\frac{\lambda_1\tilde{x}}{\lambda_2\tilde{t}}.$$

在新变量下方程(8)的所有解可写成形式 $\tilde{x}=C\tilde{t}^{\lambda_1/\lambda_2}$ 和 $\tilde{x}\equiv0$．因此，方程的奇点对于方程(8)的所有解是一个无限阶的分支点(平凡解除外)．解的奇点与方程的奇点重合时称为平稳的(stationary)．与线性情况不同的是非线性方程的解可能不仅仅在方程的奇点上有奇点；解的这种奇点称为流动的(movable)．Painleve 定理(Painleve theorem)成立：方程

$$P(t,x,\dot{x})=0$$

的解没有流动的超越奇点，其中 P 是 x 和 $\dot{x}$ 的系数为 t 的全纯函数的多项式([7])．

如果方程(8)中 P 和 Q 为 t,x 的多项式，那么从 Painleve 定理来考虑，所有流动奇点都是代数的．作变换 $t=1/t'$，$x=x'/t'$，则方程(8)取如下形式：

$$\frac{dx'}{dt'}=\frac{P_1(t',x')}{Q_1(t',x')},$$

其中 P_1 和 Q_1 为多项式．设 x_j' 为方程 $P_1(0,x')=0$ 的根，点 $(0,x_j')$ 称为方程(8)的无穷远奇点(infinitely-remote singular points)；前面引用的定理描述了解在这些点的邻域中的结构([6])．

设 P 和 Q 为 n 次多项式．因为 P、Q 是由它们的系数确定的，而且 $(\lambda P,\lambda Q)$ 定义了同样的方程，所以在方程(8)和复射影空间 $\mathbf{C}P^N$ 的点之间获得一个一对一的对应，$N=(n+1)(n-2)-1$．下面的定理成立：如果从 $\mathbf{C}P^N$ 中去掉一个测度为零的集合，那么留下的方程(8)将有以下性质：所有的解 $x=x(t)$ 在 $\mathbf{C}^2=\mathbf{C}(t)\times\mathbf{C}(x)$ 中处处稠密([8])．

3）考虑自治系统

$$\dot{x} = f(x), \tag{9}$$

$t \in \mathbf{C}(t)$, $x \in \mathbf{C}^n(x)$, $f=(f_1, \cdots, f_n)$. 如果 $f(x^0)=0$, 那么点 x^0 是系统(9)的奇点(singular point of the system). Paincaré 定理(Paincaré theorem)成立：设 x^0 为自治系统(9)的一个奇点. 同时设 a) Jacobi 矩阵 $f'(x^0)$ 的初等因子为素因子；b) 这个矩阵的本征值 λ_j 处于 $\mathbf{C}(\lambda)$ 中经过坐标原点的某一直线的一边. 那么存在点 $x=x^0$, $\tilde{x}=0$ 的邻域 U, V 和一个双向全纯的映射 $x=x(\tilde{x})$: $V \to U$, 使得用变量 $\tilde{x}$ 表示的系统(9)为形式([9]):

$$\frac{d\tilde{x}_j}{dt} = \lambda_j \tilde{x}_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

如果仅满足条件 a), 那么用变换 $x=\varphi(\tilde{x})$, 这里 $\varphi(\tilde{x})$ 是一个形式幂级数, 可将系统(9)在一个奇点的邻域内转换成一个可求积的系统([9], [10]). 但是, 这些级数的收敛性在接近 a), b) 的假定下得到了证明. 如果函数 $f(x)$ 和变换 $x=\varphi(\tilde{x})$ 对实的 x, $\tilde{x}$ 为实的, 那么一个类似 Poincaré 定理的定理得到了证明([11]). 一般情况下, 自治系统(9), 其中 $f_j(x)$ 为多项式, 且 $n \geqslant 3$, 它的解的结构至今(20世纪70年代)还未得到研究.

参考文献

[1] Coddington, E. A. and Levinson, N., Theory of ordinary differential equations, McGraw-Hill, 1955.

[2] Wazov, W., Asymptotic expansions for ordinary differential equations, Interscience, 1965

[3] Birkhoff, G. D., Singular points of ordinary linear differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **10** (1909), 436–470.

[4] Trjitzinsky, W. J., Analytic theory of linear differential equations, *Acta Math.*, **62** (1934), 167–226.

[5] Lappo-Danilevsky, J. A., Mémoire sur la théorie des systèmes des équations différentielles linéaires, Chelsea, reprint, 1953.

[6] Bieberbach, L., Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf funktionentheoretischer Grundlage dargestellt, Springer, 1965.

[7] Голубев, В. В., *Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений*, 2 изд., М.-Л., 1950.

[8] Худай-Веренов, М. Г., 《Матем. сб.》, **56** (1962), 3, 301–308.

[9] Немыцкий, В. В., Степанов, В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.-Л., 1949 (中译本: В. В. 涅梅茨基, В. В. 斯捷巴诺夫, 微分方程定性论, 科学出版社, 1956).

[10] Брюно, А. Д., 《Докл. АН СССР》, **157** (1964), 6, 1276–1279.

[11] Siegel, C. L., Ueber die Normalform analytischer Differentialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung, Nachrichten Akad. Wissenschaft. Göttingen (1952), 21–30.

[12] Poincaré, H., Oeuvers de Henri Poincare, Vol. 3, Gauthier-Villars, 1916–1965.

[13] Ford, L. R., Automorphic functions, Chelsea, reprint, 1951.

M. B. Федорюк 撰

【补注】 上面提到的 Riemann 单值问题(Riemann monodromy problem)在完全可积的现代理论或孤立子方程中是极为重要的. 见**孤立子**(soliton).

参考文献

[A1] Ince, E. L., Ordinary differential equations, Dover, reprint, 1956.

[A2] Hille, E., Ordinary differential equations in the complex domain, Wiley (Interscience), 1976.

周芝英 译

解析向量 [**analytic vector**; **аналитический вектор**], Lie 群 G 的表示 T 的空间 V 中的

向量 $\xi \in V$, 使得 G 到 V 的映射 $g \to T(g)\xi$ 为 G 上实解析向量函数, 见**表示论**(representation theory). 如果 V 为 Banach 空间, T 为 Lie 群 G 的弱连续表示, 则解析向量集 V^ω 为 V 的稠密子集([1], [2], [3]). 这个定理已经推广到很大一类表示, 其表示空间为局部凸空间([5]). 也已证明([6]): 连通 Lie 群 G 在一 Banach 空间 V 上的表示由此 Lie 群 G 的 Lie 代数在空间 V^ω 上的相应表示所唯一决定.

Banach 空间 V 上无界算子(unbounded operator) A 的解析向量(analytic vector)是在一域 $D(A)$ 上定义的如下的向量:

$$\xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n),$$

级数

$$\sum \frac{x^n}{n!} \| A^n \xi \|$$

有正收敛半径. 这个概念是由[2]引入的, 它是解析向量的一般概念的一种特殊情形; 这里, 实轴上具有加法运算的点集扮演了 Lie 群 G 的角色. 已发现它在 Banach 空间上算子理论及椭圆微分算子理论中是有用的.

参考文献

[1] Cartier, P. and Dixmier, J., Vecteurs analytiques dans les répresentation de groupes de Lie, *Amer. J. Math.*, **80** (1958), 131–145.

[2] Nelson, E., Anatytical vectors, *Ann. of Math.*, **70**(1969), 572–615.

[3] Gårding, L., Vecteurs analytiques dans les répresentations des groups, *Bull. Soc. Math. France*, **88** (1960),

73－93.

[4] Cartier, P., Vecteurs analytiques, in *Sem. Bourbaki* 1958/1959, Vol. 181, 1959, 12－27.

[5] Moore, R. T., Measurable, continuous and smooth vectors for semigroup and group representations, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **78** (1968).

[6] Harish-Chandra, Representations of a semisimple Lie group on a Banach space 1, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **75** (1953), 185－243.

A A Кириллов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Warner, G., Harmonic analysis on semi-simple Lie groups, 1, Springer, 1972.

许以超 译 石生明 校

Андронов-Витт 定理 [Andronov-Witt theorem; Андронова-Витта теорема]

（关于非自治微分方程组周期解的稳定性的）Ляпунов 定理在自治系统

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i=1, \ldots, n. \tag{1}$$

的情况下的修正. 设

$$x_i = \varphi_i(t) \tag{2}$$

是方程组(1)的周期解，而

$$\dot{\xi}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial X_i(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial x_j} \xi_j, \quad i=1, \ldots, n, \tag{3}$$

是相应的变分方程组，对于这里考虑的情况，它总是有一个特征指数等于零. 这时，下述 Андронов-Витт 定理成立：如果方程组(3)的 $n-1$ 个特征指数都具有负实部，则方程组(1)的周期解(2)是在 Ляпунов 意义下是稳定的（见 **Ляпунов 特征指数**(Lyapunov characteristic exponent)；**Ляпунов 稳定性**(Lyapunov stability)）.

Андронов-Витт 定理是 A. A. Андронов 和 A. A. Витт 在 1930 年首先提出的，并由他们在 1933 年给出证明(见[1]).

参考文献

[1] Андронов, А. А., Собрание трудов, М., 1956.

[2] Понтрягин, Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 2 изд., М., 1965 (中译本：Л. С. 庞特利雅金，常微分方程，上海科学技术出版社，1962).

E. A. Леонтович-Андронова 撰

【补注】 Андронов-Витт 定理在一些西方以"hyperbolic periodic attractor (双曲型周期吸引子)"为题的文献中常常出现.

下面的补充文献[A1]，[A2]，[A3]是很好的一般文献. 这个定理在[A2]中是作为关于周期吸引子的陈述而出现的. Андронов 和 Витт 的原始文章是[A4].

参考文献

[A1] Hahn, W., Stability of motion, Springer, 1967.

[A2] Hirsch, M. and Smale, S., Differential equations, dynamic systems and linear algebra, Acad. Press, 1974.

[A3] Coddington, E. A. and Levinson, M., Theory of ordinary differential equations, McGraw-Hill, 1955.

[A4] Andronov, A. A. and Witt, A. A., Zur Stabilität nach Liapounov, *Physikal. Z. Sowjetunion*, **4** (1933), 606－608.

张鸿林 译

Anger 函数 [Anger function; Ангера функция]

函数

$$\mathbf{J}_\nu(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(\nu\varphi - z\sin\varphi)\,d\varphi. \tag{*}$$

它满足非齐次 Bessel 方程：

$$z^2y'' + zy' + (z^2-\nu^2)y = \frac{1}{\pi}(z-\nu)\sin\nu\pi.$$

对于整数 $\nu=n$，$\mathbf{J}_\nu(z)=J_n(z)$ 是 n 阶 **Bessel 函数**(Bessel functions). 对于非整数 ν，下列展开式成立：

$$\mathbf{J}_\nu(z) = \frac{\sin\nu\pi}{\nu\pi}\left[1 - \frac{z^2}{2^2-\nu^2} + \frac{z^4}{(2^2-\nu^2)(4^2-\nu^2)} - \frac{z^6}{(2^2-\nu^2)(4^2-\nu^2)(6^2-\nu^2)} + \cdots\right] + \frac{\sin\nu\pi}{\pi}\left[\frac{z}{1^2-\nu^2} - \frac{z^3}{(1^2-\nu^2)(3^2-\nu^2)} + \frac{z^5}{(1^2-\nu^2)(3^2-\nu^2)(5^2-\nu^2)} - \cdots\right].$$

当 $|z|\to\infty$ 和 $|\arg z|<\pi$ 时，下列渐近展开式成立：

$$\mathbf{J}_\nu(z) \approx J_\nu(z) + \frac{\sin\nu\pi}{\pi z}\left[1 - \frac{1^2-\nu^2}{z^2} + \frac{(1^2-\nu^2)(3^2-\nu^2)}{z^4} - \cdots\right] - \frac{\sin\nu\pi}{\pi z}\left[\frac{\nu}{z} - \frac{\nu(2^2-\nu^2)}{z^3} + \frac{\nu(2^2-\nu^2)(4^2-\nu^2)}{z^5} - \cdots\right].$$

这个函数因 C. T. Anger 而得名([1])，他研究了类型(*)的函数，但是取 2π 作为积分上限.

参考文献

[1] Anger, C. T., *Neueste Schriften der Naturf. d. Ges. in Danzig*, **5** (1835), 1－29.

[2] Watson, G. N., A treatise on the theory of Bessel functions, Cambridge Univ. Press, 1952.

A. П. Прудников 撰 张鸿林 译

角 [angle; угол]

从同一点出发的两条射线所构成的几何图形. 这两条射线称为角的边(sides of the angle)，它们的公共出发点称为角的顶点或角顶(vertex of the angle). 设

$[BA)$, $[BC)$ 是一个角的两个边, B 是它的顶点, α 是由它的两个边所确定的平面. 图形 $\Gamma=[BA)\cup[BC)$ 把平面 α 分成两个相邻的区域 α_i $(i=1,2)$: $\alpha_1\cup\alpha_2=\alpha\setminus\Gamma$. 区域 $\alpha_i=\alpha_i'\cup\Gamma(i=1,2)$ 也称为角或平面角(plane angle), α_i' 称为平面角 α_i 的内部区域.

两个角称为相等的(equal)或全等的(congruent), 如果它们可以相叠,使得对应边和顶点彼此重合. 以平面上任何射线为一边,在它的指定的一侧可以作唯一的一个角,使之等于给定的角. 可以按下述两种方式来比较两个角的大小. 如果把角看成具有公共顶点的一对射线,那么为了确定两个角中哪一个角比较大,就需要在给定的平面上使这两个角的顶点和一对对应边相重合(见图 1). 如果第一个角的另一边处于第二个角的内部,则称第一个角小于第二个角.

比较角的大小的第二种方法是:为每一个角指定一个确定的数. 相等的角具有相同的度数或弧度数(见下文);角越大,对应的度数或弧度数也越大,角越小,对应的度数或弧度数也越小.

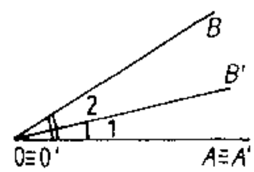


图 1

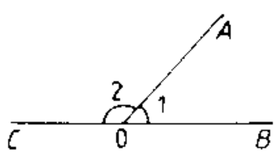


图 2

两个角称为互补的(supplementary), 如果它们具有公共的顶点和一个公共边,而另外两边构成一条直线(见图 2). 一般地说,具有公共顶点和一个公共边的两个角称为相邻的(adjoining). 两个角称为对顶角(vertical angles), 如果其中一个角的两个边是另一个角的两个边通过顶点的延长线. 对顶角彼此相等. 两个边构成一条直线的角称为平角(straight angle). 平角的一半称为直角(right angle). 直角也可以等价地定义如下: 一个角,如果等于其补角,则称为直角. 不大于平角的平面角的内部区域称为平面上的凸域.

可以采用直角的 90 分之 1 作为角的度量单位,称为 1 度(degree). 也可采用弧度(radian, cyclic)作为角的度量单位. 一个角的弧度值是这个角的两边在单位圆上所割取的弧长. 1 弧度相应于这样的一个角,这个角所对之弧的长度等于它的半径. 平角等于 π 弧度.

当平面上的两条直线同第三条直线相交时,形成八个角(见图 3): 1 和 5、2 和 6、4 和 8、3 和 7, 称为同位角(corresponding angles); 2 和 5、3 和 8, 称为同侧内角(interior angles on the same side); 1 和 6、4 和 7, 称为同侧外角(exterior angles on the same side); 3 和 5、2 和 8, 称为内错角(interior opposite angles); 1 和 7、4 和 6, 称为外错角(exterior opposite angles).

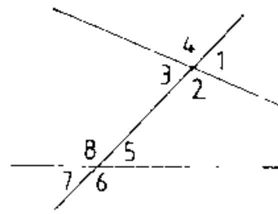


图 3

在实际问题中,把角看成为一条固定的射线绕其原点到一给定位置的旋转的度量是方便的. 在这种情况下,可以根据旋转的方向把形成的角看作正的或负的. 因此,这种意义下的角可以取任何实数值. 在三角函数的理论中,就是把角看作为射线旋转的度量的: 对于自变量(角)的任何值,都可以定义三角函数的值. 在根据点向量公理系统建立的几何体系中的角的概念,同作为图形的角的定义根本不同 —— 在这种公理系统中,把一个角理解为通过两个向量的纯量积同这两个向量联系着的一个完全确定的数量. 也就是说,每一对向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 定义一个确定的角,即由向量公式

$$\cos\varphi=\frac{(\mathbf{a},\mathbf{b})}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|},$$

给出的一个数,其中 $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 是这两个向量的纯量积.

作为平面图形和作为某一数量定义的角的概念适用于各种不同的几何问题,在这些问题中角起着特殊的作用. 例如,当两条曲线相交时,如果在它们的交点上具有确定的两条切线,则把两条切线构成的角理解为这两条曲线的交角.

一条直线和一个平面的交角,指的是这条直线同它在这个平面上的垂直投影所构成的角; 其值介于 0° 和 90° 之间. 两条相错直线之间的夹角,指的是这两条直线的方向之间的交角,即通过一给定点、分别与两给定直线平行的两条直线构成的角.

立体角(solid angle)是由某一锥面所界定的空间部分; 立体角的一种特殊情况是**多面角**(polyhedral angle).

在高维几何学中,定义了多维平面之间的角、直线和平面之间的角,等等. 在非 Euclid 空间中,也定义了直线之间的角、直线和平面之间的角、高维平面之间的角.

Л. А. Сидоров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Greenberg, M. J., Euclidean and non-Euclidean geometries, W. H. Freeman and Co., 1974.

张鸿林 译

角边界值 [**angular boundary value; угловое граничное значение**] 沿非切线路径的边界值 (boundary value along a non-tangential path)

对于定义在单位圆盘 $D=\{z\in\mathbf{C}:|z|<1\}$ 的复值函数 $f(z)$,它在边界点 $\zeta=e^{i\theta}$ 的角边界值等于 $f(z)$ 在角域点集

$$\lim_{\substack{z\in S\\ z\to\zeta}} f(z)=f^*(\zeta)$$

上的极限

$$S(\zeta,\varepsilon)=\left\{z=re^{i\varphi}\in D:\ |\arg(e^{i\theta}-z)|<\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right\},$$

并假定对所有 ε, $0<\varepsilon<2/\pi$,上述极限存在,因而此极限不依赖于 ε. 这个概念有时在更一般的意义下应用于任意域 D 上(包括高维情形)定义的函数 $f(z)$, 此时 $S(\zeta,\varepsilon)$ 是 D 与角域(或锥)之交,后者顶点为 $\zeta\in\partial D$,并以边界 ∂D 在 ζ 点的法线为轴,半顶角为 $\pi/2-\varepsilon$, $0<\varepsilon<2/\pi$.

参考文献

[1] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1−2, М., 1967−1968 (中译本: А. И. 马库雪维奇,解析函数论,高等教育出版社,1957).

[2] Привалов, И. И., Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.-Л., 1950 (中译本: И. И. 普里瓦洛夫,解析函数的边界性质,科学出版社,1956).

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 角边界值亦称非切边界值 (non-tangential boundary value). 见**解析函数的边界性质**(boundary properties of analytic functions).

何育赞 译 容尔谦 校

非迷向群 [**anisotropic group; анизотропная группа**],域 k 上的

定义在域 k 上的、k 秩为零的即不含非平凡 k 分裂环面的**线性代数群** (linear algebraic group) G. 见**可裂群** (splittable group). 非迷向群的经典例于包括 k 上不为零的二次型的正交群及 k 上可除代数中约化范数为 1 的元素的代数群. 如果 G 是半单的且 k 的特征是零,则 G 在 k 上是非迷向的当且仅当 G_k 包含非平凡幺幂元. (对实数域和 p 进数域,这相当于称 G_k 是紧的.)域 k 上任意半单群的分类本质上化为非迷向群的分类.

参考文献

[1] Borel, A., Linear algebraic groups, Benjamin, 1969.

[2] Tits, J., Classification of algebraic simple groups, Proc. Symp. Pure Math., Vol. 9, Amer. Math. Soc., 1966, 33−62.

В. П. Платонов 撰 石生明 译 许以超 校

非迷向核 [**anisotropic kernel; анизотропное ядро**]

定义在域 k 上的半单代数群 (algebraic group) G 的子群 D,它是极大 k 分裂环面 $S\subset G$ 的中心化子的换位子群,即 $D=[Z_G(S),Z_G(S)]$. 非迷向核 D 是定义在 k 上的半单**非迷向群** (anisotropic group); rank $D=$ rank $G-\mathrm{rank}_k G$. 非迷向核的概念在研究 G 的 k 结构中起重要作用 ([1]). 设 $D=G$,即 $\mathrm{rank}_k G=0$,则 G 在 k 上是非迷向的;如果 $D=(e)$,则群 G 称为在 k 上是拟分裂的 (quasi-split).

参考文献

[1] Tits, J., Classification of algebraic simple groups, Proc. Symp. Pure Math., Vol. 9, Amer. Math. Soc., 1966, 33−62.

[2] Borel, A. and Tits, J., Groupes réductifs, *Publ. Math. IHES*, **27** (1965), 55−150.

В. П. Платонов 撰 石生明 译 许以超 校

湮没算子 [**annihilation operators; уничтожения операторы**]

闭线性算子族 $\{a(f): f\in H\}$, 其中 H 是某个 Hilbert 空间,作用在由 H 构成的一个 **Фок 空间** (Fock space) (即 H 上的对称化或反对称化张量积空间, $\Gamma^s(H)$ 或 $\Gamma^a(H)$)上,以致对由 H 中一系列元素 $f_1,\cdots,f_n\in H$ $(n=1,2,\cdots)$ 的对称化 $(\alpha=s)$ 或反对称化 $(\alpha=a)$ 张量积组成的向量 $(f_1\otimes\cdots\otimes f_n)_\alpha\in\Gamma^\alpha(H)$ $(\alpha=s,a)$ 的作用,在对称情况下由公式

$$a(f)(f_1\otimes\cdots\otimes f_n)_s= \tag{1}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(f,f_i)(f_1\otimes\cdots\otimes f_{i-1}\otimes f_{i+1}\otimes\cdots\otimes f_n)_s$$

给出,而在反对称情况下由公式

$$a(f)(f_1\otimes\cdots\otimes f_n)_a= \tag{2}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}(f,f_i)(f_1\otimes\cdots\otimes f_{i-1}\otimes f_{i+1}\otimes\cdots\otimes f_n)_a$$

给出;空向量 $\Omega\in\Gamma^\alpha(H)$ $(\alpha=s,a)$ (即 $\Gamma^\alpha(H)$ 中常数子空间内的单位向量)由 $a(f)$ 映射为零. 在这些公式中, $(\cdot\ ,\ \cdot)$ 是 H 中的内积. 算子 $a(f)$ 的对偶算子 $\{a^*(f): f\in H\}$ 称为产生算子 (creation operators); 它们对向量 $(f_1\otimes\cdots\otimes f_n)_\alpha$ $(\alpha=s,a,n=1,2,\cdots)$ 的作用由公式

$$a^*(f)(f_1\otimes\cdots\otimes f_n)_\alpha=(f\otimes f_1\otimes\cdots\otimes f_n)_\alpha \tag{3}$$

和

$$a^*(f)\Omega = f$$

给出.由于这些定义的结果,对每个 $n>0$, H 的对称化或反对称化 n 阶张量子空间 $\Gamma_n^\alpha(H)_\alpha^{\otimes n}$ ($\alpha=s,\ a$) 由 $a(f)$ 映射为 $\Gamma_{n-1}^\alpha(H)$ 而由 $a^*(f)$ 映射为 $\Gamma_{n+1}^\alpha(H)$.

在量子物理学中,Фок 空间 $\Gamma^\alpha(H)$ ($\alpha=s,\ a$) 可理解为由任意(有限)数目全同粒子组成的系统的态空间,空间 H 是单粒子的态空间,子空间 $\Gamma_n^\alpha(H)$ 对应于 n 粒子系统的态,即其中恰好有 n 个粒子的态.具有 n 个粒子的一个态,由 $a(f)$ 映射到具有 $n-1$ 个粒子的态(一个粒子的"湮没"),而由 $a^*(f)$ 映射到具有 $n+1$ 个粒子的态(一个粒子的"产生").

算子 $a(f)$ 和 $a^*(f)$ 形成不可约算子族:在对称情况下满足对易关系 (commutation relations)

$$a(f_1)a(f_2)-a(f_2)a(f_1) = \tag{4}$$
$$= a^*(f_1)a^*(f_2)-a^*(f_2)a^*(f_1) = 0,$$
$$a(f_1)a^*(f_2)-a^*(f_2)a(f_1)=(f_1, f_2)E ,$$

而在反对称情况下满足反对易关系 (anti - commutation relations)

$$a(f_1)a(f_2)+a(f_2)a(f_1) = \tag{5}$$
$$= a^*(f_1)a^*(f_2)+a^*(f_2)a^*(f_1) = 0,$$
$$a(f_1)a^*(f_2)+a^*(f_2)a(f_1)=(f_1, f_2)E ,$$

其中 E 是 $\Gamma^s(H)$ 或 $\Gamma^a(H)$ 中的恒等算子.除这里所描述的算子族 $a(f)$ 和 $a^*(f)$ ($f\in H$) 外,在无限维空间 H 的情况下,还存在对易和反对易关系 (4) 或 (5) 的其他不可约表示,与上述给出的那些不等价.它们有时也称为产生和湮没算子.在有限维空间 H 的情况下,对易和反对易关系的所有不可约表示都是酉等价的.

算子 $\{a(f),\ a^*(f): f\in H\}$ 在许多场合是作用于空间 $\Gamma^\alpha(H)$ ($\alpha=s,\ a$) 的所有线性算子集方便的"生成元",而把这类算子作为任意产生和湮没算子之和的表示(一个算子的范式)在应用中是很有用的.关于这个形式体系,称为二次量子化方法 (method of second quantization),见 [1].

对于应用来说重要的特殊情况 $H=L_2(\mathbf{R}^\nu, d^\nu x)$ ($\nu=1,\ 2,\ \cdots$) (或者更普遍的情况 $H=L_2(M,\ Q)$, 其中 $(M,\ Q)$ 是测度空间),算子族 $\{a(f),\ a^*(f): f\in L_2(\mathbf{R}^\nu,\ d^\nu x)\}$ 定义两个算子广义函数 $a(x)$ 和 $a^*(x)$,以致

$$a(f) = \int_{\mathbf{R}^\nu} a(x)f(x)d^\nu x,\quad a^*(f) = \int_{\mathbf{R}^\nu} a^*(x)\bar{f}(x)d^\nu x.$$

对于二次量子化形式体系,引进 $a(x)$ 和 $a^*(x)$ 是方便的(例如,它使人们可以直接考虑下列形式的算子

$$\int_{(\mathbf{R}^\nu)^{n+m}} K(x_1,\dots,x_n;y_1,\dots,y_m)a^*(x_1)\cdots a^*(x_n)\times$$
$$\times a(y_1)\cdots a(y_n)d^\nu x_1\cdots d^\nu x_n d^\nu y_1\cdots d^\nu y_m,$$
$$n,\ m=1,\ 2,\ \dots,$$

其中 $K(x_1,\ \cdots,\ x_n,\ y_1,\ \cdots,\ y_m)$ 是某个"充分好的"函数),无需求助于将它们分解为单项式级数

$$a^*(f_1)\cdots a^*(f_n)a(g_1)\cdots a(g_m),$$

其中

$$f_1,\dots,f_n,g_1,\dots,g_m \in L_2(\mathbf{R}^\nu, d^\nu x).$$

参考文献

[1] Березин, Ф. А., Метод вторичного квантования, М., 1965 (英译本: Berezin, F. A., The method of second quantization, Acad. Press, 1966).

[2] Добрушин, Р. Л., Минлос, Р. А., 《Успехи матем. наук》, 32 (2) (1977), 67-122.

[3] Gårding, L. and Wightman, A., *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, 40 (1954), 7, 617-626.

Р. А. Минлос 撰

【补注】

参考文献

[A1] Glimm, J. and Jaffe, A., Quantum physics, Springer, 1981.

[A2] Боголюбов, Н. Н., Логунов, А. А., Тодоров, И. Т., Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля, М., 1969 (英译本: Bogolyubov, N. N., Logunov, A. A. and Todorov, I. T., Introduction to axiomatic quantum field theory, Benjamin, 1975).

[A3] Boer, J. de, Construction operator formalism in many particle systems, in J. de Boer and G. E. Uhlenbeck (eds.), Studies in statistical mechanics, Vol. 3, North-Holland, 1965.

徐锡申 译

零化子 [annihilator; аннулятор], R 中集合 X 的左

R 中所有使 $yX=0$ 的元素 y 的集合 $\mathfrak{Z}_l(X)$. 这里的 R 是环或具有零的半群(或一般地,广群). 用类似的方法,R 中集合的右零化子 (right annihilator) 定义为集合

$$\mathfrak{Z}_r(X) = \{z\in R:\ Xz=0\}.$$

集合

$$\mathfrak{Z}(X) = \mathfrak{Z}_l(X)\cap \mathfrak{Z}_r(X)$$

是 X 的双边零化子 (two - sided annihilator). 在结合环(或半群) R 中任意集合 X 的左零化子是左理想,如 X 是 R 的左理想,则 $\mathfrak{Z}_l(X)$ 是 R 的双边理想;在非结合的情形,这些结论通常不成立.

К. А. Жевлаков 撰 石生明 译 许以超 校

圆环域 [**annular domain**; **кольцевая область**]

1) 两条没有公共点的闭 Jordan 曲线之间的一个复连通平面区域,其中的一条包围另一条.

2) 关于二次微分的圆环域,见二次微分的**轨道的整体结构**(Global structure of trajectories).

Е. Д. Соломенцев 撰 徐定宥、罗嵩龄、许依群 译

反交换代数 [**anti-commutative algebra**; **антикоммутативная алгебра**]

在一个域上满足下列等式的线性代数:

$$x^2 = 0 \qquad (*)$$

如果域的特征不为 2, 则等式(*)等价于等式 $xy = -yx$. 自由反交换代数的所有子代数是自由的.最重要的反交换代数类是 **Lie 代数**(Lie algebra), **二元 Lie代数**(binary Lie algebra), **Мальцев代数**(Mal'tsev algebra).

参考文献

[1] Ширшов, А. И.,《Матем. сб》, 34 (1954), 76, 81–88.

А. Т. Гайнов 撰 林亚南 译

反共形映射 [**anti-conformal mapping**; **антиконформное отображение**], 第二类共形映射 (conformal mapping of the second kind)

复 z 平面上点 z_0 的邻域到复 w 平面上点 w_0 邻域上的连续映射, 它保持过点 z_0 的曲线间的角度但改变其方向. 产生反共形映射的函数 $f(z)$ 是**反全纯函数**(anti-holomorphic function). 亦见**共形映射**(conformal mapping).

参考文献

[1] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, т. 1, М., 1968, гл. 2 (中译本: А. И. 马库雪维奇, 解析函数论,高等教育出版社, 1957, 第 2 章).

Е. Д. Соломенцев 撰 杨维奇 译

反离散空间 [**anti discrete space**; **антидискретное пространство**]

仅有空集和全空间为开集的拓扑空间.

А. А. Мальцев 撰

【补注】 关于这个拓扑空间经常出现的其他术语是密着空间(indiscrete space)和平凡拓扑空间 (trivial topological space).

方嘉琳 译

反离散拓扑 [**anti-discrete topology**; **антидискретная топология**], 集合上的

由空集和全空间组成的开基 (base) 定义的拓扑.

А. А. Мальцев 撰 方嘉琳 译

反全纯函数 [**anti-holomorphic function**; **антиголоморфная функция**], 反解析函数(anti-anti-analytic function)

一个或多个复变量 $z=(z_1,\cdots,z_n)$ 的函数 $f(z)=u+iv$, 并且是全纯函数 $\overline{f(z)}=u-iv$ 的复共轭(见**解析函数** (analytic function)).

Е. Д. Соломенцев 撰 杨维奇 译

偏序集的反同构 [**anti-isomorphism of partially ordered sets**; **антиизоморфизм частично упорядоченных множеств**]

从偏序集 A 到偏序集 B 的双射反序映射, 即一一映射 $\varphi: A \to B$, 使得由 $a < b$ $(a, b \in A)$, 可得出 B 中的 $a\varphi > b\varphi$.

О. А. Иванова 撰 戴执中 译

环的反同构 [**anti-isomorphism of rings**; **антиизоморфизм колец**]

环 A 到环 B 的一个映射 φ, 它是 A 的加法群到 B 的加法群的同构,并且满足 $(ab)\varphi = b\varphi \cdot a\varphi (a, b \in A)$.

О. А. Иванова 撰 赵春来 译

反运动 [**anti-motion**; **антидвижение**]

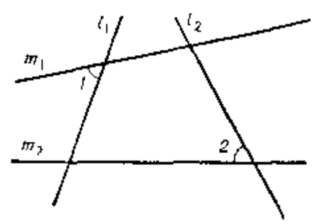
伪 Euclid 空间的一种变换, 它把彼此间实距离 a 的点变换成纯虚距离 a 的点, 伪 Euclid 空间的运动和反运动一起构成一个群.

А. Б. Иванов 撰

杨 路、张景中、侯晓荣 译

反平行线 [**anti-parallel straight lines**; **антипараллельные прямые**], 关于给定的两条直线 m_1 和 m_2 的

与 m_1 和 m_2 相交且使得 $\angle 1 = \angle 2$ 的两条直线 l_1 和 l_2 (见图).



如果 l_1 和 l_2 关于 m_1 和 m_2 是反平行的 (anti-parallel), 则 m_1 和 m_2 关于 l_1 和 l_2 也是反平行的. 在圆内接四边形中,任何两对边关于另外两边是反平行的.如果直线 m_1 和 m_2 相交于点 O, 则亦称 l_1 和 l_2 关于角 m_1Om_2 是反平行的. 如果直线 m_1 和 m_2 重合,则称 l_1 和 l_2 关于一直线是反平行的.

А. Б. Иванов 撰 张鸿林 译

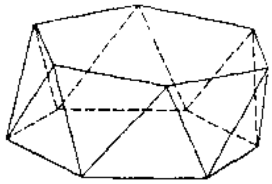
反平行四边形 [**anti-parallelogram**; **антипараллелограмм**]

一个平面四边形,其中每对对边分别等于另外两边,并且关于另外两边是反平行的(见**反平行线** (anti-parallel straight lines)).

А. Б. Иванов 撰 张鸿林 译

反棱柱 [anti-prism; антипризма]

一个半正多面体(semi-regular polyhedra),其中两个平行的面是全等的正 n 边形,其余 $2n$ 个面是正三角形(见图).



А. Б. Иванов 撰　张鸿林 译

反对称张量 [anti-symmetric tensor; антисимметричный тензор]

见**张量分析** (tensor calculus).

反对数 [antilogarithm 或 inverse logarithm; антилогарифм], 数 n 的

数 N, 记为 $\operatorname{ant}\log_a n$, 它的以 a 为底的对数等于 n. 于是,

$$\operatorname{ant}\log_a n = N = a^n,$$

即

$$\log_a N = n.$$

张鸿林 译

悖论 [antinomy, paradox; антиномия, парадокс]

这样一种情形,在其中可以证明两个互相矛盾的命题成立,而每一个推出过程的工具都是在同一个理论的观点下可信的.

通常的**诡辩** (sophism)是有意给出的一个错误结论,它含有伪装过的错误.与此不同,悖论则常常指出了所讨论理论的一种较深刻的不足.一个悖论的发现常常会导致整个理论的修正,把注意力吸引到新的研究领域上去并最终促进对该理论更深入的研究.从古代起,悖论的这种特点就引起了许多哲学家的兴趣.例如,人们可以回忆起悖论在 E. Kant 的哲学中所起的重要作用.在古代有许多悖论被研究过并称为"aporium".这里我们援引两个著名的悖论,它们都以埃利亚的 Zeno (公元前 5 世纪)命名,称为 Zeno 悖论(Zeno paradox).

"Achilles 和乌龟(Achilles and the tortoise)".这个悖论涉及到包含在运动的某些属性中的矛盾,可叙述如下:赛跑人 Achilles 站在出发点 A、乌龟处在离 A100 米远的 B 点.当 Achilles 开始从 A 点跑向 B 点的同时,乌龟朝着远离 A 点的方向离开 B 点,并且假定乌龟的速度比 Achilles 要慢 100 倍.经验告诉我们,在这种情况下,Achilles 将在很短的时间内追上乌龟.但另一方面也可得到这样的结论,即 Achilles 将永远追不上乌龟甚至将到不了 B 点.这是因为当 Achilles 到达 AB 的中点 C_1 的时候,乌龟已经离开了 B 点.虽然可能是很短的距离.下一步,Achilles 将到达 C_1B 的中点 C_2,然后是 C_2B 的中点 C_3,等等.这段时间里乌龟继续离开 B. Achilles 为了要到达 B, 他必须要在无穷点列 C_1, C_2, … 中的每一点上出现过.但是在一个有穷的时间段内不可能在无穷多个点上出现.因此, Achilles 将永远到不了 B 点,并且也永远追不上乌龟.

根据运动的现代数学理论,这类悖论是很容易解决的.仔细分析后可以看出,对这种悖论的解决实际上依赖于承认实数域的 Archimedes 公理(Archimedean axiom):对任何实数 a, $b>0$. 存在一个自然数 n 使得 $an>b$. 不过,由悖论所说明的问题也是非常实在的,这可能使得用通常的数学模型来刻画实际的运动显得不方便和不合适.为了能刻画无穷大的和无穷小的物理量这种概念.人们曾经不断地试图构造一种实数理论使得 Archimedes 公理在其中不真.总之,非 Archimedes 有序域构成了近世代数中的一个关键部分.这种非 Archimedes 有序域(即非标准实直线)在**非标准分析** (non-standard analysis)中起了决定性的作用.

"沙堆悖论(sandpile paradox)"可以叙述如下.显然,一粒沙子不能形成一个沙堆.如果 n 粒沙子仍没形成一个沙堆的话,那么,给它再加上另一粒沙子也不能形成一个沙堆.这样一来,任何数目的沙子都不能形成沙堆.

只要利用现代的术语并说完全数学归纳法不能应用到不确定体积上去,例如"沙堆"就没有确定的体积,那么,这个悖论就可解决.在近代数学中(20 世纪下半叶),不确定体积概念在数学基础中应用于建立经典理论的相容性,以及用精确的方法来研究这些概念.用数理逻辑的方法可以建立起这样一种情形,在其中尽管仍然保持了很多关于自然数的性质,但是一般形式的数学归纳法不能应用到任何自然序列上去(这就是所谓的非标准算术模型).

然而,对数学来说真正有意义的悖论是那种将一些概念以不同寻常的方式表述而成的悖论.这些悖论就是所谓的逻辑悖论(logical antinomy)和语义悖论(semantic antinomy)(也见 **Skolem 悖论** (Skolem paradox)).

下面给出三个逻辑悖论的例子.

Russell 悖论 (Russell paradox) (B. Russell, 1902),它也由 E. Zermelo 独立地发现.考虑关于集合的下列性质 D. 假定一个集合 X 具有性质 D 当且仅当它不是自身的一个元素.在数学中所讨论的绝大多数集合都具有性质 D. 例如,自然数集或所有实数的集合都不是它们自身的元素.现在考虑集合 T, 使得它的元素恰好是那些具有性质 D 的集合.现在问究竟是 $T\in T$

还是 $T \notin T$ 为真.如果 $T \in T$,则依定义,T 具有性质 D,即有 $T \notin T$.于是必须要求 $T \notin T$,但这也会产生矛盾的结果,因为如果 $T \notin T$,则 T 具有性质 D.从而 $T \in T$.

如果把上面所证明的一切看成仅仅表明了集合 T 的不存在性,即 D 根本不能刻画任何集合,那么,这个悖论就能避免.然而,这是不能被接受的.因为从"朴素"集合论的观点来看,很自然地要假定任何精确描述的关于客体的性质 B 可以定义一个集合 C,其中的元素恰是具有这个性质的客体.Russell 悖论对这个自然的观念是个很大的打击.人们必然会得到这样的结果:要么把某些非常简单的性质看成是没有精确描述的,或者承认有些精确描述的性质不能定义一个集合.这转而又出现了几个困难的问题,什么是"精确描述"的性质,而什么又不是"精确描述"的性质?哪些性质可定义集合而哪些又不能定义集合?在集合论中广泛使用的性质中间,是否还有会导致矛盾而必须抛弃的?是否可能至少确定一个可靠的领域,在其中可以排除悖论而又足以包含通常的数学内容.

随着严格的逻辑 - 数学语言的出现,关于性质的精确描述问题可以认为已经满意地解决了.可是要刻画哪些性质可以定义集合这样一种判别准则则是一个远没解决的问题.更糟的是公理集合论中新近的结果表明对这个问题没有最终的答案.Russell 悖论给他的同代人巨大的影响,因为它仅涉及到集合论中非常初步的内容.不过,有许多方法来避免悖论,虽然它们绝不是最终的或自然的方法,但在实践中它们是很方便的,并且也说明了悖论本身的性质及集合论其他各原理之间的联系.用公理的途径来处理集合论基本原理被证明是相当成功的(见**公理集合论**(axiomatic set theory)).例如到本文写作时(1970 年)为止,Zermelo - Fraenkel 的形式公理系统是一个最有用的公理理论.它对经典集合论内容中"无悖论"的部分给出了最合适的刻画.

"乡村理发师(village barber)"悖论.这是 Russell 悖论的一个变种,它的表述涂饰以日常生活的情形(与这个悖论形式稍有不同的是 Gonseth 悖论).具体情形是这样,有一个乡村理发师,他要给而且只给村上那些不是自己刮脸的村民刮脸.那么,理发师要不要给自己刮脸呢?用与 Russell 悖论类似的推理将得到,他既要给自己刮脸又不给自己刮脸.如果由此断言没有这样一个理发师,即这个理发师要满足的条件是自相矛盾的,从而不会被满足.那么这个困难便很容易就克服了.很明显,这个难题提出了如何判别一个性质是否自相矛盾的问题.但与 Russell 悖论不同,这不是一个十分紧要的难题.它涉及到一个日常生活的情形,而大多数这样的情形都不是严格表述或可靠地定义的.再说,自我相容性并不是日常生活推理中仅有的可接受性准则(甚至不是最重要的准则).这种情形与数学推理完全不同,数学推理的要求是非常精确地定义和非常可靠的.在这样的推理中,自我相容性是一个重要的部分.

Cantor 悖论(Cantor paradox)(G. Cantor, 1899).设 M 为由所有集合所组成的集合.而 $P(M)$ 为它的所有子集所组成的集合.由 M 的定义显然,$P(M)$ 是包含在 M 中的.另一方面,依 Cantor 的著名定理,$P(M)$ 的基数大于 M 的基数,由此推出 $P(M)$ 不是 M 的子集.粗略地说,由 Cantor 悖论所得到的结论与由 Russell 悖论所得到的差不多.特别是可以认为 Cantor 悖论证明了所有集合组成的集合 M 不存在.与此有关的一件很有趣的事情是有些集合论公理系统,如著名的 W. Quine 的"新基础"系统,是可以建立这种 M 的存在性的.而"新基础"系统中避开 Cantor 悖论的方法是 Cantor 的基数定理只有一种特殊的形式能在该系统中证明.而这种特殊的形式又不足以"证明"悖论.一般地说,用以构造 Cantor 悖论所需要的集合论概念要比用以构造 Russell 悖论时多一些(如子集概念、一一对应等).

与 Cantor 悖论相似的另一个悖论是 Burali - Forti 悖论(Burali - Forti paradox).它涉及到全体序数所组成的类.这个类的序型必定要比它所含的任何序数都大.

另外一些形式略为不同的悖论也是很有趣的,它们就是所谓的语义悖论(semantic antinomy).与逻辑悖论不同,语义悖论含有像"真"、"假"、"指称"、"定义"等一些术语.另一方面,这种由 Ramsey 于 1926 年所提出的这两种类型悖论的差别有很大的随意性.许多语义悖论可以表述成逻辑悖论,反之亦然.Ramsey 指出了在通常的逻辑 - 数学理论中不能构造出语义悖论,原因很简单,因为在这种理论中没有表述语义悖论所必须的语义概念.在这种意义下,语义悖论要比逻辑悖论更"安全"些.然而,必须指出的是有些现代理论中含有表述某些语义悖论所需的概念,特别是像 Richard 悖论(但这种悖论总可以用特殊的方法来避免).下面给出了两个著名的语义悖论.

Richard 悖论(Richard paradox)(G. D. W. Berry 于 1906 年所给的形式).考虑这样的一个自然数集,其中每个数都能用不超过 1000 个音节的一段有意义的文字所唯一地确定.显然,这样的文字数目有限,因为具有 1000 个音节的所有文字数目是有限的.现考虑无法用上述方法定义的最小的自然数.

上面一段是有意义的文字,它的音节不超过 1000 个,并且唯一地确定了某个自然数.依定义,该自然数是无法用这种形式刻画的.显然,只要断言这段文字不是有意义的(或者它不确定一个自然数),这个悖论就可以避免.但这样一来,同前面一样,便会出现判别一段文字是否有意义的准则这样的一些困难等.

Eubulides 悖论(Eubulides paradox)(公元前4世纪).一个人说:"我现在正说的是一句谎话."这句话是真的还是假的?如果是真的,它的真正含义表明它是假的.如果是假的又直接推出它是真的.这个悖论有许多变种,如说谎者悖论(liar parodox)、Epimenides 悖论(Epimenides paradox)等.这种悖论的思想形成了形式公理理论中著名的 **Gödel 不完全性定理**(Gödel incompleteness theorem)的证明的基础.

通常,对这种悖论进行分析,会促进关于数学基础的观点进行根本性的考察,并发展出许多现代的数理逻辑思想和方法.

参考文献

[1] Fraenkel, A. A. and Bar-Hillel, Y., Foundations of set theory, North-Holland, 1958.

[2] Kleene, S. C., Introduction to metamathematics, North-Holland, 1951(中译本: S. C. 克林,元数学导论,科学出版社,1985).

А. Г. Драгалин 撰 郑锡忠 译 莫绍揆 校

对径点[antipodes; антиподы]

球面上同一直径的两个端点.对此,有 Borsuk 对径点定理(Borsuk antipodal-point theorems)([1]): 1)对于球面 S^n 到 Euclid 空间 E^n 的任何连续映射,都存在具有公共象的对径点; 2)使对径点的象仍为对径点的、球面 S^n 到自身内的任何映射都是本质映射.

参考文献

[1] Borsuk, K., Drei Sätze über die n-dimensional euklidische Sphäre, *Fund. Math.*, **20** (1933), 177-190.

А. В. Чернавский 撰

【补注】 上面提及的第一个结果称为(关于对径点的)Borsuk-Ulam 定理.下面这一结果也称为 Borsuk 对径点定理(Borsuk antipodal-point theorem):不存在 $n+1$ 维球体 B^{n+1} 到 n 维球面 S^n 内的连续映射 f,使得 $f(x)=-f(-x)$,见[A1], p. 131.

参考文献

[A1] Istrătescu, V. I., Fixed point theory, Reidel, 1981.

张 平 译 沈信耀 校

反序映射[antitone mapping; антитонное отображение],偏序集的

从偏序集 A 到偏序集 B 内的映射 φ,使得由 $a\leqslant b$ $(a,b\in A)$ 可得出 $a\varphi\geqslant b\varphi$.反序映射的对偶概念是**保序映射**(isotone mapping).

О. А. Иванова 撰 戴执中 译

非周期自同构[aperiodic automorphism; апериодический автоморфизм],测度空间的

测度空间上满足如下性质的自同构 T: T 的周期点 x(即对某个 $k>0$, $T^kx=x$)的全体构成一个零测度集.对这种变换之所以引进这样的特殊名称,是基于以下的事实:在**遍历理论**(ergodic theory)的某些定理中,具有"太多"周期点的自同构被视为平凡的例外(见[1]).

Д. В. Аносов 撰

参考文献

[1] Рохлин, В. А., «Успехи матем. наук», 4(1949), 2, 57-128.

【补注】 周期自同构中的所谓 Rokhlin-Halmos 引理(Rokhlin-Halmos lemma)对用周期变换逼近 Lebesgue 空间的自同构是重要的(见**周期变换逼近**(approximation by periodic transformations)),参见[A1]第75页或[A2]第390页.

参考文献

[A1] Cornfel'd, I. P., Fomin, S. V. and Sinai, Ya. G., Ergodic theory, Springer, 1982.

[A2] Halmos, P. R., Lectures on ergodic theory, Math. Soc. of Japan, 1956.

王斯雷 译

从配极网[apolar nets; аполярные сети]

在二维流形的同一个区域 G 上给出的两个网,使得在每一点 $x\in G$,一个网的切方向调和分割另一网的切方向.例如,在 Euclid 空间中曲面上的**渐近网**(asymptotic net)关于**曲率线网**(curvature lines, net of)是从配极的.

В. Т. Базылев 撰 沈一兵 译

Apollonius 问题[Apollonius problem; Аполлония задача]

作图问题:在给定平面上,作一个圆与三个给定的圆相切. Apollonius 问题可用**反演**(inversion)法来解决.所作之圆称为 Apollonius 圆(Apollonius circle).这个问题因珀加的 Apollonius(公元前3世纪)而得名.

参考文献

[1] Энциклопедия элементарной математики, кн. 4, Геометрия, М., 1963.

А. Б. Иванов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Baker, H. F., Principles of geometry, 4, F, Ungar, 1963.

张鸿林 译

Apollonius 定理[Apollonius theorem; Аполлония теорема]

1)一椭圆的两共轭半径长度的平方和为常数,等于其两半轴长度的平方和.

2)外切于一椭圆的、其边处于共轭方向上的平行四边形的面积为常数,等于椭圆两直径长度之积.

А. Б. Иванов 撰

【补注】 对高维情况的推广,见[A1].

参考文献

[A1] Borsuk, A., Analytic geometry, PWN, 1969.

张鸿林 译

边心距 [apothem; апофема]，正多边形的

从正多边形的中心向它的任何一边所引的垂线段(及其长度). 正 n 边形的边心距等于它的内切圆的半径 r_n，并与多边形的边长 a_n 和面积 S_n 之间存在下列关系：

$$a_n = 2r_n \tan\frac{\pi}{n},\quad S_n = nr_n^2\tan\frac{\pi}{n}.$$

正棱锥的边心距(apothem of a regular pyramid)是它的侧面的高.

张鸿林 译

Appell 方程 [Appell equations; Аппеля уравнения]

由 P. E. Appell ([1]) 建立的描述完整系统和非完整系统运动的常微分方程. 有时 Appell 方程称为 Gibbs - Appell 方程 (Gibbs - Appell equations)，因为 J. W. Gibbs([3])首先建立了完整系统的微分方程. 在独立的 Lagrange 坐标系 $q_s(s=1,\cdots,n)$ 中，Appell 方程具有二阶微分方程形式

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_i} = Q_i^*,\quad i=1,\ldots,k\leqslant n. \tag{1}$$

其中

$$S = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu w_\nu^2$$

(m_ν 和 w_ν 是系统的 N 个点的质量和加速度)是系统加速度的能量，它这样表达使其仅含坐标 $q_i(i=1,\cdots,k)$ 的二阶导数，而其变分认为是独立的，Q_i^* 是对应于坐标 q_i 的广义力，它是给定的主动力 F_ν 在可能的位移 δr_ν 上所作基本功之和的表达式中独立变分 δq_i 前的系数：

$$\sum_{\nu=1}^{N} F_\nu \delta r_\nu = \sum_{i=1}^{k} Q_i^* \delta q_i.$$

计算 S 和 Q_i^* 时，通过求解以广义坐标 q_s 表达的 $n-k$ 个不完整约束方程(见**非完整系统**(non-holonomic systems))(亦可通过求解从 $n-k$ 个方程得到的关于 δq_s 的方程组)，将应变量 $\dot{q}_i\,(\delta q_i)\,(j=k+1,\cdots,n)$ 通过独立速度(变分)来表达. 将求得的 $\dot{q}_j$ 的表达式对时间 t 微分可得到以 $\ddot{q}_i$ 表达的 $\ddot{q}_j$ 的表达式.

方程组(1)与不可积约束的 $n-k$ 个方程一起组成含 n 个未知量 q_s 的 n 个 $(n+k$ 阶)微分方程的方程组.

在完整系统的情况下 $k=n$，所有速度 $\dot{q}_s$ 和变分 δq_s 是独立的，$Q_i^*=Q_i$，方程组(1)是第二类(**力学中的**) **Lagrange 方程组**(Lagrange equations (in mechanics)) 的另一种表示形式.

以拟坐标系(quasi-coordinates) π_r 表示的 Appell 方程具有以下形式

$$\dot{\pi}_r = \sum_{i=1}^{n} a_{ri}\dot{q}_i,\quad r=1,\ldots,k, \tag{2}$$

其中

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\pi}_r} = \Pi_r,\quad r=1,\ldots,k\leqslant n. \tag{3}$$

这里 S 是以拟坐标的对时间的二阶导数 $\ddot{\pi}_r$ 表示的加速度能量. Π_r 是相应于拟坐标的广义力. 方程(3)与 $n-k$ 个不可积约束方程以及 k 个方程(2)一起组成 $n+k$ 个未知数 $q_s(s=1,\cdots,n_1)$ 和 $\dot{\pi}_r(r=1,\cdots,k)$ 的同样数目的一阶微分方程的方程组.

Appell 方程是最一般的力学系统的运动的方程.

参考文献

[1] Appell, P. E., Sur une forme génerale des équations de la dynamique, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **129** (1899).

[2] Appell, P. E., Sur une forme générale des équations de la dynamique et sur le principe de Gauss, *J. Reine Angew. Math.*, **122** (1900), 205 – 208.

[3] Gibbs, J. W., On the fundamental formula of dynamics, *Amer. J. Math.*, **2** (1879), 49 – 64.

В. В. Румянцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Whittaker, E. T., Analytical dynamics, Cambridge Univ. Press., 1927, 258.

朱治强 译

Appell 多项式 [Appell polynomials; Аппеля многочлены]

复数域上的一类多项式，其中包括许多经典的多项式系. Appell 多项式是 P. E. Appell 引入的([1]). Appell 多项式序列 $\{A_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ 由下列形式等式来定义：

$$A(t)e^{zt} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(z)t^n, \tag{1}$$

其中 $A(t)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k t^k$ 是具有复系数 $a_k(k=0,1,\cdots$，而 $a_0\neq 0)$的形式幂级数. Appell 多项式 A_n 可以通过数 a_k 明显地表示如下：

$$A_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{(n-k)!}z^{n-k},\quad n=0,1,\ldots.$$

条件 $a_0\neq 0$，相当于说多项式 $A_n(z)$ 的次数是 n.

Appell 多项式还有另一个等价的定义. 设

$$A(D) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k D^k,\quad D = \frac{d}{dz},\quad a_0 \neq 0$$

是定义在以 $z=x+iy$ 为变量的复多项式代数 P 上的微分算子，一般为无穷阶的. 这时，有

$$A_n(z) = \frac{A(D)z^n}{n!},\quad n=0,1,\ldots,$$

即 $A_n(z)$ 是函数 $z^n/n!$ 在映射 $p=A(D)\,q\,(p,q\in P)$ 下的像.

$A^{(1)}$类的 Appell 多项式定义为所有具有形如(1)的生成函数的多项式系$\{A_n(z)\}$的集合．多项式(n次)系$\{P_n(z)\}$属于$A^{(1)}$类,相当于说关系式

$$P_n'(z)=P_{n-1}(z),\quad n=1,2,\ldots$$

成立．

$A^{(1)}$类的 Appell 多项式有时由下列关系式来定义:

$$A(t)e^{zt}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_n(z)}{n!}t^n,$$

$$A_n(z)=n\hat{A}_{n-1}(z),\quad n=1,2,\ldots,$$

除了规范化不计外,这同上面给出的定义是等价的．

$A^{(1)}$类的 Appell 多项式可以用来解形如

$$A(D)y(z)=f(z)\tag{2}$$

的方程．利用形式等式 $y(z)=f(z)/A(D)$,其中

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_kz^k}{k!},$$

可以把(2)的解写为下列形式:

$$y(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kA_k^*(z),$$

其中$\{A_k^*(z)\}$是具有生成函数 $e^{zt}/A(t)$ 的 Appell 多项式．在这方面,把解析函数展开为 Appell 多项式级数具有特殊意义．此外, Appell 多项式在研究函数方程(包括不同于(2)的微分方程)、插值问题、逼近论以及求和法等方面有着广泛的应用(见[1]－[6])．关于$A^{(1)}$类 Appell 多项式理论的更一般的考虑,以及各种应用,见[6]．

$A^{(1)}$类中包括大量的经典多项式序列作为其特殊情况．例如下列多项式(除了规范化不计外): **Bernoulli 多项式** (Bernoulli polynomials)

$$\frac{te^{zt}}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(z)}{n!}t^n;$$

Hermite 多项式 (Hermite polynomials)

$$e^{zt-t^2/2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(z)}{n!}t^n;$$

Laguerre 多项式 (Laguerre polynomials)

$$(1-t)^{\alpha}e^{zt}=\sum_{n=0}^{\infty}L^{(\alpha-n)}(z)t^n;$$

等等,许多其他例子,见[2]和[3],卷 3．

Appell 多项式具有各种推广,它们也称为 **Appell 多项式系** (systems of Appell polynomials),其中包括具有形如

$$\left.\begin{aligned}A(w)e^{zU(w)}&=\sum_{n=0}^{\infty}p_n(z)w^n,\\U(w)&=\sum_{k=1}^{\infty}c_kw^k,\quad c_1\neq0,\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

的生成函数的 Appell 多项式,以及具有更一般的生成函数

$$A(w)\psi(zU(w))=\sum_{n=0}^{\infty}q_n(z)w^n\tag{4}$$

的 Appell 多项式(例如,见[2]和[3],卷 3)．如果 $w(U)$ 是函数 $U(w)$ 的反函数,则多项式系$\{p_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$属于具有类型(3)的生成函数的 Appell 多项式序列类这一事实,等价于关系式

$$w(D)p_n(z)=p_{n-1}(z),\quad n=1,2,\ldots\quad\left(D=\frac{d}{dz}\right)$$

成立．

总共存在五个在实轴上加权正交的 Appell 多项式序列系,它们具有形式为(3)的生成函数;其中包括了唯一的一个具有形式(1)的生成函数的正交系,它是由实轴上的具有权函数 $e^{-x^2/2}$ 的 Hermite 多项式组成的(见[7])．

关于按具有形式(3)和(4)的生成函数的 Appell 多项式的级数展开,以及这些多项式通过各种函数方程的互相联系,见[2],[7],[8]．

$A^{(p)}$($p\geq1$ 是整数)类的 Appell 多项式定义如下:它是所有这种多项式系$\{A_n\}$的集合,对于其中每个$\{A_n\}$,形式表示式

$$\sum_{k=0}^{p-1}A_k(t)e^{zt\omega_p^k}=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(z)t^n$$

成立;这里 $\omega_p=e^{2\pi i/p}$, $A_k(t)$ $(k=0,1,\cdots,p-1)$是形式幂级数,它的自由项使得多项式 A_n 的次数为 n．如果说 n 次多项式序列$\{Q_n(z)\}$属于$A^{(p)}$,那么就等于说关系式

$$D^pQ_n(z)=Q_n^{(p)}(z)=Q_{n-p}(z),\quad n=p,p+1,\ldots,$$

成立．关于解析函数按$A^{(p)}$类的 Appell 多项式的级数展开问题,见[9]．它们同求形如

$$\sum_{k=0}^{p-1}A_k(D)y(z\omega_p^k)=f(z)$$

的函数方程的解析解的问题密切相关．

二元 Appell 多项式 (Appell polynomials in two variables)也是由 P. Appell 引入的([10])．它们由下列等式来定义:

$$J_{m,n}(\alpha,\gamma,\gamma',x,y)=\frac{x^{1-\gamma}y^{1-\gamma'}}{(\gamma)_m(\gamma')_n}(1-x-y)^{\gamma+\gamma'-\alpha}\times$$

$$\times\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n}[x^{\gamma+m-1}y^{\gamma'+n-1}(1-x-y)^{\alpha+m+n-\gamma-\gamma'}],$$

$$m,n=0,1,\ldots,$$

其中假设$(\gamma)_0=1,(\gamma)_n=\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1),n\geq 1$；这些 Appell 多项式同 **Jacobi 多项式**(Jacobi polynomials)是类似的. Appell多项式$J_{m,n}$在三角形域T上加权正交于任何次数低于$m+n$的二元多项式, 权函数为

$$t(x,y)=x^{\gamma-1}y^{\gamma'-1}(1-x-y)^{\alpha-\gamma-\gamma'}, \qquad (5)$$

三角形域为: $x>0,y>0,x+y<1$; 然而, 它们并不构成区域T上的以$t(x,y)$为权的正交函数系(例如, 见[3], 卷2).

参考文献

[1] Appell, P. E., *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, **9** (1880), 119–144.

[2] Boas, R. P. and Buck, R. C., Polynomial expansions of analytic functions, Springer & Acad. Press (U.S.A. & Canada), 1958.

[3] Bateman, H. and Erdélyi, A., Higher transcendental functions, Vol. 1–3, McGraw-Hill, 1953–1955.

[4] Wood, B., Generalized Szász operators for the aproximation in the complex domain, *SIAM J. Appl. Math.*, **17** (1969), 790–801.

[5] Szegö, G., Orthogonal polynomials, Amer. Math. Soc., 1975.

[6] Bourbaki, N., Elements of mathematics, Functions of a real variable, Addison-Wesley, 1976 (译自法文).

[7] Meixner, J., Orthogonale Polynomsysteme mit einer besonderen Gestalt der erzeugenden Funktion, *J. London Math. Soc.*, (1), **9** (1934), 6–13.

[8] Anderson, Ch. A., Some properties of Appell-like polynomials, *J. Math. Anal. Appl.*, **19** (1967), 475–491.

[9A] Kaz'min, Yu. A., Expansions in series of Appell polynomials, *Math. Notes*, **5** (1969), 5, 304–311 (*Mat. Zameki*, **5** (1969), 5, 509–520).

[9B] Kaz'min, Yu. A., On Appell polynomials, *Math. Notes*, **6** (1969), 2, 556–562 (*Mat. Zametki*, **6** (1969), 2, 161–172).

[10] Appell, P. E., *Arch. Math. Phys.* (1), **66** (1881), 238–245.

Ю. А. Казьмин 撰

【补注】 对于两个变量的 Appell 多项式, 已知一个明显的双正交系. 还存在一个具有权函数(5)的明显正交系, 它是由两个 Jacobi 多项式与一个幂之积组成的. 见[A1], p. 454.

参考文献

[A1] Koornwinder, T. H., Two-variable analogues of the classical orthogonal polynomials, in R. Askey (ed.), Theory and applications of special functions, Acad. Press, 1975, 435–495.

张鸿林 译 蒋正新 校

Appell 变换[Appell transformation; Аппеля преобразование]

质点在仅随其坐标x,y变化的力$F(x,y)$的作用下的平面运动方程的变换. Appell 变换是坐标x,y到坐标x_1,y_1的单应变换(homographic transformation):

$$x_1=\frac{ax+by+c}{a''x+b''y+c''},\quad y_1=\frac{a'x+b'y+c'}{a''x+b''y+c''},$$

这里, 按下列公式以时间t_1代替t:

$$k\,dt_1=\frac{dt}{(a''x+b''y+c'')^2}.$$

作为 Appell 变换的结果, 在仅依赖坐标x_1,y_1的力$F_1(x_1,y_1)$作用下点(x_1,y_1)的运动, 对应于在力$F(x,y)$作用下点(x,y)的运动. 对点(x,y)的运动方程借助于一般形式的公式

$$x_1=\varphi(x,y),\quad y_1=\psi(x,y),\quad dt_1=\lambda(x,y)dt \quad (*)$$

进行变换, 得到点(x_1,y_1)在仅依赖坐标x_1,y_1的力的作用下的运动方程, 如果(*)是单应变换的话. Appell 变换可以用来解决确定在怎样的力的作用下才可使质点运动轨道成为圆锥曲线的 Bertrand 问题(Bertrand problem). Appell 变换因 P. E. Appell 而得名.

参考文献

[1] Appell, P. E., De l'homographie en mécanique, *Amer. J. Math.*, **12** (1890), 103–114.

[2] Appell, P. E., Sur les lois de forces centrales faisant décrire à leur point d'application une conique quelles que soient les conditions initiales, *Amer. J. Math.*, **13** (1891), 153–158.

Л. Н. Сретенский 撰 张鸿林 译

竖坐标[applicate; аппликата]

三维空间中点的 Descartes 坐标(**coordinates**)之一.

张鸿林 译

逼近紧性[approximate compactness; аппроксимативная компактность]

度量空间X中集合M所具有的如下性质: 对任何$x\in X$, 每个极小化序列(minimizing sequence)$y_n\in M$(即满足$\rho(x,y_n)\to\rho(x,M)$的序列)均有一个极限点$y\in M$. 给定集合的逼近紧性保证了对任何$x\in X$最佳逼近元素的存在性. 逼近紧性这一概念是在[1]中为研究 Banach 空间中 **Чебышев 集**(Chebyshev set)时而引入的, 从而有可能描述某些空间中的凸 Чебышев 集. 事实上, 令X为一致凸的光滑的 Banach 空间. $M\subset X$

为凸 Чебышев 集的必要和充分条件是 M 为逼近紧的．由此，特别推出：分子和分母次数固定的有理分式的集合当分母次数不小于 1 时不是 $L_p\ (1<p<\infty)$ 空间中的 Чебышев 集，见 [1]．

关于这方面的进一步研究可参看 [2]．

参考文献

[1] Ефимов, Н. В., Стечкин, С. Б., 《Докл. АН СССР》, **140** (1961), 522－524.

[2] Гаркави, А. Л., Итоги науки Математический анализ., 1967, М., 1969, 75－132.

Ю. Н. Субботин 撰　王仁宏、檀结庆 译　杨应辰 校

近似连续性 [approximate continuity; аппроксимативная непрерывность]

连续性概念的一种推广，其中普通极限用**近似极限** (approximate limit) 代替．函数 $f(x)$ 称为在点 x_0 是近似连续的 (approximately continuous)，是指

$$\lim_{x\to x_0} \mathrm{ap} f(x) = f(x_0).$$

在最简单的情形，$f(x)$ 是 n 维 Euclid 空间上的实值函数 (一般地，它是向量值函数)．下面的定理成立．1) 实值函数 $f(x)$ 在集 E 上 Lebesgue 可测的充要条件是，f 在 E 上几乎处处近似连续 (见 Степанов - Denjoy 定理 (Stepanov - Denjoy theorem))．2) 对于任意的有界 Lebesgue 可测函数 $f(x)$，在它的每个近似连续点 x_0，下式成立：

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{1}{\mu(R)} \int_R f(x)\,d\mu = f(x_0),$$

其中 μ 是 n 维 Lebesgue 测度，R 是包含 x_0 的非退化的 n 维线段，而 ρ 为它的直径．

参考文献

[1] Saks, S., Theory of the integral, Hafner, 1952 (译自波兰文).

Г. П. Толстов 撰

【补注】 有关其他参考文献，见**近似极限** (approximate limit)．

王斯雷 译　郑维行 校

近似导数 [approximate derivative; аппроксимативная производная]

导数概念的一种推广，其中普通极限用**近似极限** (approximate limit) 代替．设 $f(x)$ 为单实变量 x 的函数，若极限

$$\lim_{x\to x_0} \mathrm{ap} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

存在，则称它为 $f(x)$ 在 x_0 的近似导数 (approximate derivative)，并记为 $f'_{\mathrm{ap}}(x_0)$．最简单的情形是，$f(x)$ 为实值函数，一般地，它是一个向量值函数．近似导数可以为有限或无限．关于导数的和、差、积、商的经典微分法则，对有限近似导数也成立；复合函数的求导定理，对近似导数而言，一般不成立．近似导数的概念首先由 A. Ya. Khinchin 于 1916 年引入．

对于通常的 **Dini 导数** (Dini derivative)，可以类似地定义近似 Dini 导数 (approximate Dini derivatives)：$\Lambda_d(x_0)$——右方取的 lim sup；$\lambda_d(x_0)$——右方取的 lim inf；$\Lambda_g(x_0)$——左方取的 lim sup；$\lambda_g(x_0)$——左方取的 lim inf；例如

$$\Lambda_d(x_0) = \overline{\lim_{\substack{x\to x_0,\\ x>x_0}}}\ \mathrm{ap} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

下面的 Denjoy - Хинчин 定理 (Denjoy - Khinchin theorems) 成立．设实值函数 $f(x)$ 在集合 E 上有限且 Lebesgue 可测，那么对于 E 的几乎所有的点，$f(x)$ 或者具有有限的近似导数，或者

$$\Lambda_d(x) = \Lambda_g(x) = +\infty,\ \lambda_d(x) = \lambda_g(x) = -\infty.$$

若

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

为 Denjoy - Khinchin 积分，则在所考虑的区间上，几乎处处有 $F'_{\mathrm{ap}}(x)=f(x)$ (普通导数可以在一个正测度集上不存在)．这个定理说明了近似导数在积分论中所起的作用．

在给定区间上，存在着这样的连续函数，它处处不存在普通导数或近似导数．

多元函数的近似偏导数也可以同样考虑．

参考文献

[1] Saks, S., Theory of the integral, Hafner, 1952 (译自波兰文).

Г. П. Толстов 撰

【补注】 有关其他文献，参见**近似极限** (approximate limit)．

王斯雷 译

近似可微性 [approximate differentiability; аппроксимативная дифференцируемость]

可微性概念的一种拓广，其中普通极限用**近似极限** (approximate limit) 代替．一元实值函数 $f(x)$ 在点 x_0 称为近似可微的 (approximately differentiable) 是指存在数 A，使得

$$\lim_{x\to x_0} \mathrm{ap} \frac{f(x)-f(x_0)-A(x-x_0)}{x-x_0} = 0.$$

量 $A(x-x_0)$ 称为 $f(x)$ 在 x_0 的近似微分 (approximate differential)．函数 $f(x)$ 在点 x_0 是近似可微的充要条件为 f 在该点有**近似导数** (approximate derivative) $f'_{\mathrm{ap}}(x_0)=A$．n 个实变量的实值函数的近似可微性用类似方法定义．例如，当 $n=2$ 时，$f(x, y)$ 称为在点 (x_0, y_0)

是近似可微的，是指

$$\lim_{\substack{x\to x_0,\\ y\to y_0}} \mathrm{ap}\,\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-A(x-x_0)-B(y-y_0)}{\rho}=0,$$

其中 A 和 B 是两个给定数，而 $\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ 表达式 $A(x-x_0)+B(y-y_0)$ 称为 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的近似微分.

Степанов 定理 (Stepanov theorem)：实值可测函数 $f(x,y)$ 在集合 E 上几乎处处近似可微的充要条件是，它在 E 上几乎处处关于 x 与关于 y 有有限的近似偏导数；这些偏导数在 E 上几乎处处分别等于近似微分中的系数 A 与 B.

近似可微性概念同样也可以推广到一元或多元的向量值函数.

参考文献

[1] Saks, S., Theory of the integral, Hafner, 1952 (译自波兰文).

Г. П. Толстов 撰

【补注】 关于其他参考文献，可见近似极限(approximate limit).

王斯雷 译 郑维行 校

近似极限 [approximate limit; аппроксимативный предел]

函数 $f(x)$ 当 x 在集合 E 上趋于 x_0 时的极限，其中 x_0 是 E 的稠密点(density point). 最简单的情形是，$f(x)$ 是 n 维 Euclid 空间上的实值函数；一般情况是，$f(x)$ 为向量值函数. 近似极限记为

$$\lim_{x\to x_0} \mathrm{ap}\, f(x).$$

一般地，近似极限的存在性未必蕴含普通极限的存在性. 近似极限的定义显示出极限的某些基本属性——唯一性以及有关两函数和、差、积、商的极限定理.

设 x_0 为实值函数 $f(x)$ 的定义域的一个密点. 假如普通极限 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在，那么近似极限也存在并且等于普通极限. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的近似上极限(approximate upper limit)是使 x_0 成为点集 $\{x: f(x)>y\}$ 的稀疏点的 y(包括 $y=+\infty$)的下确界. 类似地，$f(x)$ 在 x_0 的近似下极限(approximate lower limit)是使 x_0 成为点集 $\{x: f(x)<y\}$ 的疏点的 y(包括 $y=-\infty$)的上确界. 这些极限，分别记为

$$\overline{\lim_{x\to x_0}}\, \mathrm{ap}\, f(x) \quad 和 \quad \underline{\lim_{x\to x_0}}\, \mathrm{ap}\, f(x).$$

近似极限存在的充要条件是近似上极限与近似下极限相等；它们的公共值等于近似极限.

若 x 为实数，那么单边(右与左)近似上极限与下极限也会用到(此时，x_0 应当分别为函数定义域的右稠密点或左稠密点). 近似右上极限可记为

$$\overline{\lim_{\substack{x\to x_0,\\ x>x_0}}}\, \mathrm{ap}\, f(x),$$

其他情形可用类似的记号. 当近似右上极限等于近似右下极限时，我们就有右近似极限(right approximate limit)；当近似左上极限等于近似左下极限时，我们就有左近似极限(left approximate limit).

A. Denjoy 与 A. Ya. Khinchin 在研究不定积分(Lebesgue 意义以及 Denjoy - Khinchin 意义)与被积函数(见**近似连续性**(approximate continuity)及**近似导数**(approximate derivative))的微分关系时，首次利用了近似极限的概念.

参考文献

[1] Saks, S., Theory of the integral, Hafner, 1952 (译自波兰文).

Г. П. Толстов 撰

【补注】 稀疏点(point of dispersion)定义如下：设 A 为 $\mathbf{R}^n$ 中的点集. 又设 σ_A 为对可测集合 E 有定义的完全加性集函数，且 $\sigma_A(E)=\sigma_A^*(E\cap A)$，即 $E\cap A$ 的外测度. 对于 $x\in\mathbf{R}^n$，上强导数(upper strong derivative) $\overline{D}\sigma_A(x)$ 与下强导数(lower strong derivative) $\underline{D}\sigma_A(x)$，分别称为集合 A 在 x 的上外密度(upper outer density)与下外密度(lower outer density). 点 x 是集合 A 的一个稠密点(point of density)，如果 A 在 x 的外密度为 1，而称点 x 是集合 A 的一个稀疏点，如果 A 在 x 的外密度为 0. 若 A 为可测集，那么 A 的几乎所有的点均为 A 的稠密点，而 A 的余集的几乎所有点均为 A 的稀疏点，后一个条件也是 A 可测的充分条件.

参考文献

[A1] Bruckner, A. M., Differentiation of real functions, Springer, 1978.

[A2] Munroe, M. E., Introduction to measure and integration, Addison - Wesley, 1953.

[A3] Thomson, B. S., Real functions, Springer, 1985.

王斯雷 译 郑维行 校

逼近紧集 [approximately-compact set; аппроксимативно компактное множество]

具有**逼近紧性**(approximate compactness)的集合. 任何逼近紧 Чебышев 集上的度量射影都是连续的. 空间 $L_p(0<p<\infty)$ 中的有界紧集和闭凸集以及分子、分母次数皆固定的有理分式集都是逼近紧集. 在逼近论和一些不适定问题中，常用到这样的空间，其中所有闭集都是逼近紧的.

参考文献

[1] Ефимов, Н. В., Стечкин, С. Б., 《Докл. АН СССР》 **140** (1961), 3, 522 – 524.

[2] Власов, Л. П., 《Успехи матем. наук》, **28** (1973), 3 – 66.

Ю. Н. Субботин 撰 王仁宏、檀结庆 译 杨应辰 校

逼近 [approximation; аппроксимация]，亦称近似

把一些数学对象用另一些在某种意义下与其相似的对象来代替，采用这种方法，可以把研究一个数学对象的数值特征和量的性质的问题，转化为研究另一些比较简单、比较方便的对象(例如具有容易计算的特征和已知性质的对象)．在数论中，研究 Diophantus 逼近，特别是研究用有理数逼近无理数．在几何学和拓扑学中，研究曲线、曲面、空间和映射的逼近．实际上，某些数学分支几乎专门研究逼近，例如函数逼近论和数值分析方法的理论． БСЭ-3 张鸿林 译

周期变换逼近 [approximation by periodic transformations; аппроксимация периодическими преобразованиями]

遍历理论(ergodic theory)中的一种方法．具有测度 μ 的 Lebesgue 空间 X 的任意一个自同构 T，均可在自同构组成的空间 $\mathfrak{A}$ 内，以自然弱或均匀拓扑，通过一列周期自同构 T_n 的极限求得 ([1])．为了定量地刻画逼近度，不仅要考虑自同构 T_n，还要研究关于 T_n 不变的 X 的有限可测分解 (finite measurable decompositions)，即将 X 分解为有限个互不相交的可测集 $C_{n,1},\cdots,C_{n,q_n}$，它们在 T_n 的作用下，彼此互换．数

$$d(T,T_n;\xi_n)=\sum_{i=1}^{q_n}\mu(TC_{n,i}\Delta T_nC_{n,i})$$

给出了关于 ξ_n，T_n 邻近 (proximity) 于 T 的一种估计，这里 Δ 是对称差 (symmetric difference)

$$A\Delta B=(A\setminus B)\bigcup(B\setminus A).$$

假如 q_n 给定，那么可以选取 ξ_n 和 T_n (具有以上诸性质)，使得 $d(T,T_n;\xi_n)$ 为任意小 ([1])．自同构 T 的度量不变量是明显的，如果我们考虑无限序列 T_n 和 ξ_n，使得对每个可测集 A，均有一列集 A_n，这里每个 A_n 均为某些 $C_{n,i}$ 的并，在

$$\lim_{n\to\infty}\mu(A\Delta A_n)=0$$

的意义下逼近 A (分解 ξ_n 收敛于在点上的分解)．如果 $d(T,T_n;\xi_n)<f(q_n)$，其中 $f(n)$ 为单调趋于 0 的给定数列，那么称 T 为具有速率 (rate) $f(n)$ 的第一类周期变换逼近 (approximation of the first type by periodic transformations)；除此之外，假如 T_n 循环地置换集 $C_{n,i}$，则称为周期变换循环逼近 (cyclic approximation by periodic transformations)．还有其他的逼近，可见 [2]，[6]，[7]．

当 T 具有某种逼近度时，周期自同构 T_n 的某些性质影响着极限自同构 T 的一些性质．例如，若 T 具有周期变换的循环逼近，且逼近度为 c/n，则当 $c<4$ 时，T 是遍历的；当 $c<2$ 时，T 不是混合的；而当 $c<1$ 时，相应的酉位移算子的谱是单的．T 的某些性质还可以用逼近度来描述．例如，若 T 具有逼近度为 $2c/\log n$ 的第一类周期变换逼近，则这种 c 的下界正好就是 T 的熵 (entropy) ([2]，[7])．周期变换逼近被用来研究许多简单例子，包括二维曲面上的光滑流．也用于构造许多微分动力系统，有的具有某些不期望的度量性质，有的具有某种不期望的度量和微分性质的组合．

如果赋以弱拓扑，那么关于 $\mathfrak{A}$ 中周期自同构的密度的命题，还可以大大加强如下：对于任意单调数列 $f(n)>0$，具有逼近度为 $f(n)$ 的循环逼近的所有自同构，构成 $\mathfrak{A}$ 中第二范畴的集 ([2])．由此，周期变换逼近提供了所谓的范畴定理 (category theorems)，后者断言：$\mathfrak{A}$ 中具有给定性质的自同构(在弱拓扑下)，必为第一范畴或第二范畴集(例如，遍历集均为第二范畴集，而混合集则必为第一范畴集 ([1])．

设 X 为拓扑或光滑流形，又设其测度 μ 与它的拓扑或微分结构相协调．在保持 μ 的同胚或微分同胚类中，自然的拓扑并不是弱拓扑，而是其他的拓扑．此时，类似于关于 $\mathfrak{A}$ 的范畴定理对于同胚仍然成立；有关此问题的历史及其发展现状，见 [5]．

参考文献

[1] Halmos, P. R., Lectures on ergodic theory, Math. Soc. of Japan, 1956.

[2] Каток, А. Б., Стёпина, А. М., 《Успехи матем. наук》, 22 (1967), 5, 81–106.

[3] Аносов, Д. В., Каток, А. Б., 《Тр. Моск. матем. об-ва》, 23 (1970), 3–36.

[4] Каток, А. Б., 《Изв. АН СССР Сер. матем.》, 37 (1973), 3, 539–576.

[5] Каток, А. Б., Стёпин, А. М., 《Успех матем. наук》, 25 (1970), 2, 193–220.

[6] Akcoglu, M. A., Chacon, R. V. and Schwartzbauer, T., Commuting transformations and mixing, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 24, 637–642.

[7] Schwartzbauer, T., Entropy and approximation of measure preserving transformations, *Pacific J. Math.*, 43 (1972), 753–764.

[8] Кочергин, А. В., 《Матем. сб.》, 96 (1975), 3, 472–502.

Д. В. Аносов 撰

【补注】 V. A. Rokhlin 对于逼近理论的基础也做出了贡献(见 [A2])．

若在周期变换逼近中，下式关于序列 $\{\xi_n\}$，$\{T_n\}$ 成立：

$$\sum_{i=1}^{q_n}\mu(TC_{n,i}\Delta T_nC_{n,i})<f(q_n),$$

其中 T_n 具有周期阶 q_n；同时在 $L_2(x,\mu)$ 中，在算子强拓扑意义下，$U_{T_n}\to U_T$，那么称 T 为具有速率 $f(n)$ 的第二类周期变换逼近 (approximation of the second type by periodic transformations)．参考文献 [A1] 是基本的，也是众所周知的．

参考文献

[A1] Cornfel'd, I. P., Fomin, S. V. and Sinai, Ya. G., Ergodic theory, Springer, 1982, Chapt, 15; 16.

[A2] Rokhlin, V. A., Selected topics from the metric theory of dynamical systems, *Amer. Math. Soc. Transl. Series* 2, **49**, 171－240.

王斯雷 译 郑维行 校

平均逼近 [**approximation in the mean**; **приближение в среднем**]

函数 $\varphi(t)$ 对在区间 $[a,b]$ 上给定的可积函数 $f(t)$ 在度量

$$\mu(f,\varphi)=\int_a^b|f(t)-\varphi(t)|\,dt$$

下的逼近.

更一般地，在度量

$$\mu(f,\varphi)=\int_a^b|f(t)-\varphi(t)|^q\,d\sigma(t)\quad(q>0)$$

下的逼近称为关于分布 $d\sigma(t)$ 的(带指数 q 的)均幂逼近(mean-power approximation)，其中 $\sigma(t)$ 为 $[a,b]$ 上异于常数的非减函数. 如果 $\sigma(t)$ 绝对连续且 $\varphi(t)=\sigma(t)$，则可得到带权 $\varphi(t)$ 的均幂逼近，如果 $\sigma(t)$ 是在 $[a,b]$ 内在点 t_k 处具有跳跃 c_k 的阶梯函数，则得到在度量

$$\mu(f,\varphi)=\sum_k c_k\,|f(t_k)-\varphi(t_k)|^q$$

下关于点系 $\{t_k\}$ 的加权均幂逼近(weighted mean-power approximation).

以上所有概念皆可自然地推广到多变量函数的情形.

参考文献

[1] Гончаров, В. Л., Теория интерполирования и приближения функций, 2 изд., М., 1954 (中译本: В. Л. 冈察洛夫, 函数插补与逼近理论, 科学出版社, 1958).

[2] Никольский, С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, 2 изд., М., 1977 (英译本: Nikol'skiĭ, S. M., Approximation of functions of several variables and imbedding theorems, Springer, 1975).

[3] Rice, J. R., The approximation of functions, 1. Linear theory, Addison-Wesley, 1964.

Н. П. Корнейчук, В. П. Моторный 撰

【补注】

参考文献

[A1] Timan, A. F., Theory of approximation of functions of a real variable, Pergamon, 1963 (译自俄文).

[A2] Rivlin, T. J., An introduction to the approximation of functions, Dover, reprint, 1981.

[A3] Cheney, E. W., Introduction to approximation theory, Chelsea, reprint, 1982.

王仁宏、檀结庆 译 杨应辰 校

微分边值问题的差分边值问题逼近 [**approximation of a differential boundary value problem by difference boundary value problems**; **аппроксимация дифференциальной краевой задачи разностной**]

关于未知函数在网格上的值的有限(通常是代数的)方程组对微分方程及其边界条件的一种逼近. 通过使差分问题的参数(网格步长)趋于零，这种逼近会越来越准确.

考虑微分边值问题 $Lu=0$, $lu|_\Gamma=0$ 的解 u 的计算，其中 $Lu=0$ 是微分方程，$lu|_\Gamma=0$ 是一组边界条件. u 属于定义在边界为 Γ 的给定区域 D_U 上的函数所组成的线性赋范空间 U. 设 D_{hU} 是一网格(见**微分算子的差分算子逼近** (approximation of a differential operator by difference operators))，并设 U_h 是由定义在该网格上的函数 u_h 所组成的线性赋范空间. 设 $[v]_h$ 是函数 v 在 D_{hU} 的点上的值表. 在 U_h 中引进范数使得对任意的函数 $v\in U$，以下等式成立:

$$\lim_{h\to0}\|[v]_h\|_{U_h}=\|v\|_U.$$

现在用近似计算 u 在 D_{hU} 中的点上的值表 $[u]_h$ 的问题 $\mathscr{L}_h[u]_h=0$ 代替求解 u 的问题. 这里 $\mathscr{L}_h[u]_h$ 是一组关于网格函数 $u_h\in U_h$ 的值的(非微分)方程.

设 v_h 是 U_h 中的任意函数，令 $\mathscr{L}_h v_h=\varphi_h$，并设 Φ_h 是线性赋范空间，对任意的 $v_h\in U_h$，有 $\varphi_h\in\Phi_h$. 称 $\mathscr{L}_h u_h=0$ 是对微分边值问题 $Lu=0$, $lu|_\Gamma=0$ 在其解空间上的 p 阶有限差分逼近，若

$$\|\mathscr{L}_h[u]_h\|_{\Phi_h}=O(h^p).$$

方程组 $\mathscr{L}_h u_h=0$ 的实际构造涉及分别构造它的两个子方程组 $L_h u_h=0$ 和 $l_h u_h|_{\Gamma_h}=0$. 对 $L_h u_h=0$，使用**微分方程的差分方程逼近** (approximation of a differential equation by difference equations). 附加方程 $l_h u_h|_\Gamma=0$ 利用边界条件 $lu|_\Gamma=0$ 来构造.

对无论怎样选取的 U_h 与 Φ_h 的范数，上面所描述的逼近都无法保证差分问题的解 u_h 收敛到准确解 u (见[2])，即等式

$$\lim_{h\to0}\|[u]_h-u_h\|_{U_h}=0$$

成立.

保证收敛性的附加条件是稳定性(见[3], [5]－[8])，有限差分问题必须具有这一性质. 称有限差分问题 $\mathscr{L}_h u_h=0$ 是稳定的，若存在正数 $\delta>0$, $h_0>0$ 使得对任意 $\varphi_h\in\Phi_h$, $\|\varphi_h\|<\delta$, $h<h_0$，方程 $\mathscr{L}_h z_h=\varphi_h$ 有唯一解 $z_h\in U_h$，且此解满足不等式

$$\|z_h-u_h\|_{U_h}\leqslant C\|\varphi_h\|_{\Phi_h},$$

其中 C 是与 h 或右端扰动 φ_h 无关的常数，u_h 是无扰动问题 $\mathscr{L}_h u_h=0$ 的解. 如果微分问题的解 u 存在，同时差

分问题$\mathscr{L}_h u_h=0$关于解u以p阶精度逼近微分问题,而且是稳定的,则差分问题具有同样阶的收敛性,即

$$\|[u]_h-u_h\|_{U_h}=O(h^p).$$

例如,问题

$$\left.\begin{aligned}L(u)\equiv\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial x}=0,\ t>0,\ -\infty<x<\infty,\\ lu\Big|_{\Gamma}=u(0,x)-\psi(x)=0,\ -\infty<x<\infty,\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

其中$\psi(x)$是一个给定的具有有界二阶导数的函数,可被有限差分问题

$$\mathscr{L}_h u_h=\left\{\begin{aligned}L_h u_h=\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}-\frac{u_{m+1}^n-u_m^n}{h}=0\\ l_h u_h\Big|_{\Gamma_h}\equiv u_m^0-\psi(mh)=0\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

$$=0\in\Phi_h$$

按自然范数逼近.其中u_m^n是u_h在$(x_m,t_n)=(mh,n\tau)$的值,$\tau=rh$,$r=$常数.如果φ_h的范数取为方程组$\mathscr{L}_h v_h=\varphi_h\ (v_h\in U_h)$中所包含的各个方程右端项模的最大值,则问题(2)关于解u对问题(1)的逼近是一阶的.如果$r>1$,则无论取什么范数都无收敛性.如果$r\leqslant 1$,且范数为

$$\|u_h\|_{U_h}=\sup_{m,n}|u_m^n|,$$

则问题(2)是稳定的,因而有收敛性(见[2],[3]):

$$\|[u]_h-u_h\|_{U_h}=O(h).$$

差分问题代替微分问题是用计算机近似求解微分边值问题的最通用的方法之一(见[7]).

微分问题用其差分的近似代替开始于[1],[2]和[4]等著作.这一方法有时还用来证明微分问题解的存在,按下述方案进行,先证明微分边值问题的差分近似的解u_h的集合对h是紧的,然后即可证明某一子序列u_{h_k}在$h_k\to 0$时的极限是微分问题的解u.如果该解已知是唯一的,则不仅子序列,而且整个u_h集在$h\to 0$时都收敛到解u.

参考文献

[1] Люстерник, Л. А., 《Успехи матем. наук》, 8 (1940), 115-124.

[2] Courant, R., Friedriches, K. and Lewy, H., Ueber die partiellen Differenzeng leichungen der mathematischen Physik, *Math. Ann.*, 100 (1928).

[3] Годунов, С. К., Рябенький, В. С., Разностные схемы. Введение в теорию, М., 1973 (英译本: Godunov, S. K. and Ryaben'kii, V. S., The theory of difference schemes, North-Holland, 1964).

[4] Петровский, И. Г., 《Успехи матем. наук》, 8 (1940), 161-170.

[5] Рябенький. В. С., 《Докл. АН СССР》, 86 (1952), 6, 1071-1073.

[6] Рябенький В. С., Филиппов, А. Ф., Об устойчивости разностных уравнений, М., 1956.

[7] Самарский, А. А., Введение в теорию разностных схем, М., 1971.

[8] Филиппов, А. Ф., 《Докл. АН СССР》, 100 (1955), 6, 1045-1048.

В. С. Рябенький 撰

【补注】 补充的参考文献见**微分算子的差分算子逼近**(appoximation of a differential operator by difference operators)的参考文献.

金保侠 译

微分方程的差分方程逼近 [**approximation of a differential equation by difference equations**; **аппроксимация дифференциального уравнения разностным**]

微分方程用关于未知函数在某种网格上的值的代数方程组的逼近,当网格的参数(网络、步长)趋于零时可使得逼近更加精确.

设$L(Lu=f)$是某个微分算子,$L_h(L_h u_h=f_h,\ u_h\in U_h,\ f_h\in F_h)$是某个有限差分算子(见**微分算子的差分算子逼近**(approximation of a differential operator by difference operators)).如果算子L_h关于解u逼近算子L,其阶为p,即如果

$$\|L_h[u]_h\|_{F_h}=O(h^p),$$

那么有限差分式$L_h u_h=0\ (0\in F_h)$称为关于解u对微分方程$Lu=0$的p阶逼近.

构造有限差分方程$L_h u_h=0$关于解u逼近微分方程$Lu=0$的最简单例子是将Lu的表达式中每个导数用相应的有限差分来代替.

例如,方程

$$Lu\equiv\frac{d^2u}{dx^2}+p(x)\frac{du}{dx}+q(x)u=0$$

可用有限差分方程

$$L_h u_h\equiv\frac{u_{m+1}-2u_m+u_{m-1}}{h^2}+$$

$$+p(x_m)\frac{u_{m+1}-u_{m-1}}{2h}+q(x_m)u_m=0$$

作二阶精度逼近,其中网格D_{hU}和D_{hF}由点$x_m=mh$组成(m是一整数),u_m是函数u_h在点x_m的值.又,方程

$$Lu\equiv\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,$$

可用关于光滑解的两种不同的差分近似来逼近:

$$L_h^{(1)}u_h\equiv\frac{u_n^{n+1}-u_m^n}{\tau}-\frac{u_{m+1}^n-2u_m^n+u_{m-1}^n}{h^2}=0$$

（显式格式(explicit scheme)）和

$$L_h^{(2)}u_h \equiv \frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}-\frac{u_{m+1}^{n+1}-2u_m^{n+1}+u_{m-1}^{n+1}}{h^2}=0$$

（隐式格式(implicit scheme)），其中网格 D_{hU} 和 D_{hF} 由点 $(x_m, t_n)=(mh, n\tau)$ 组成，$\tau=rh^2$，$r=$常数，m 和 n 是整数，u_m^n 是函数 u_h 在网格点 (x_m, t_n) 的值．存在这样的有限差分算子 L_h，它对微分算子 L 的逼近，仅关于方程 $Lu=0$ 的解 u 特别好，而关于其他函数则差一些．例如，算子 L_h，

$$L_h u_n \equiv \frac{u_{m+1}-u_m}{h}-\varphi\left[x_m+\frac{h}{2}, \frac{u_m+\tilde{u}}{2}\right]=f_h\left[x_m+\frac{h}{2}\right]$$

（其中 $\tilde{u}=u_m+h\varphi(x_m)$）关于任意的光滑函数 $u(x)$ 是算子 L:

$$Lu \equiv \frac{du}{dx}-\varphi(x,u)=f(x)$$

的一阶逼近（关于 h），而关于方程 $Lu=0$ 的解却是二阶逼近（假定函数 u 充分光滑）．在利用有限差分方程 $L_hu_h=0$ 求微分方程 $Lu=0$ 的边值问题的数值解时，关于 $Lu=0$ 的解 u 存在算子 L_h 对算子 L 的逼近性质，而关于任意光滑函数则不存在这种逼近性质．对一大类微分方程和方程组存在构造逼近它们的差分方程的方法，同时还满足各种附加条件：解 u_h 关于计算中所允许的舍入误差的稳定性；对微分方程的解 u 成立的某些积分关系式对 u_h 的有效性；利用任意网格 D_{hU} 和 D_{hF} 的可容许性（这在连续介质运动的计算中是重要的）；为了计算解所必须的算术运算次数的限制；等等．

为了近似地求微分边值问题的一个解，微分方程的差分方程逼近是**微分边值问题的差分边值问题逼近**(approximation of a differential boundaru value problem by difference boundary value problems)的一个要素．

参考文献

[1] Годунов, С. К., Рябенький, В. С., Введение в теорию разностных схем, М., 1962.

[2] Самарский, А. А., Введение в теорию разностных схем, М., 1971.

[3] Годунов, С. К., и др., Численное решение многомерных задач газовой динамики, М., 1976.

[4] Самарский, А. А., Попов, Ю. П., Разностные схемы газовой динамики, М., 1975.

В. С. Рябенький 撰

【补注】 其他参考文献可见**微分算子的差分算子逼近**(approximation of a differential operator by difference operators)的补充参考文献．

孙和生 译 陆柱家 校

微分算子的差分算子逼近 [approximation of a differential operator by difference operators; аппроксимация дифференциального оператора разностным]

用依赖于参数的算子对微分算子的一种逼近．依赖于参数的算子对某一函数的作用结果由该函数在某离散点集——网格——上的值确定．这种逼近随着参数（网格步长）趋于零而变得越来越准确．

设 $L(Lu=f)$ 是一个将函数类 U 中任意函数 u 变换到线性赋范空间 F 中某一函数 f 的微分算子．设 D_U 是 U 中函数的定义域，并设 D_U 中有某离散子集即网格 D_{hU}，它随 $h\to 0$ 而越来越稠密．设 U_h 是所有只定义在网格（点）上的函数 $[u]_h$ 的集合，$[u]_h$ 在网格点上的值同 u 一致．将 U_h 中的网格函数变换到 F 中的函数 f_h 的任意算子 L_h 定义为差分算子．如果对任意的函数 $u\in U$，当 $h\to 0$ 时有

$$\| Lu-L_h[u]_h \|_F \to 0,$$

$$\| Lu-L_h[u]_h \|_F \leqslant ch^p,\quad c=c(u)=\text{常数},$$

则称算子 $L_h(L_h[u]_h=f_h)$ 是在 U 上对微分算子 L 的 p 阶逼近．有时也把逼近理解为某种弱收敛意义下的等式

$$\lim_{h\to 0} L_h[u]_h = Lu.$$

微分算子的差分逼近用于通过函数 u 在网格点上的值表 $[u]_h$ 来近似计算函数 Lu，也用于**微分方程的差分方程逼近**(approximation of a differential equation by difference equations)．

有两种基本方法来构造逼近 L 的算子 L_h．

在第一种方法中，$L_h[u]_h$ 定义为微分算子 L 对 U 中一个函数的作用结果，该函数是根据网格函数 $[u]_h$ 用某种插值公式求得的．

第二种方法如下，在 F 中函数 f 的定义域 D_F 中引进网格 D_{hF}，并考虑定义在 D_{hF} 上的网格函数 f_h 所组成的线性空间 F_h．算子 $L_h[u]_h$ 定义为两个算子的积，一个算子将函数 $[u]_h$ 变换成 F_h 中的网格函数 f_h，即 f 的近似值表，另一个算子将 f_h 从 D_{hF} 延拓到整个区域 D_F．例如为了逼近微分算子

$$L=\frac{d}{dx},\quad \frac{du}{dx}=f(x),\quad 0\leqslant x\leqslant 1,$$

构造由点 $x_k\ (k=0,\cdots,N)$ 组成的网格 D_{hU}

$$0=x_0<\cdots<x_k<x_{k+1}<\cdots<x_N=1,$$

$$\max_k(x_{k+1}-x_k)=h,$$

及由点

$$x_k^*=x_k+\theta(x_{k+1}-x_k),\quad k=0,\ldots,N-1,$$

$$0\leqslant\theta\leqslant 1,\quad \theta=\text{常数}$$

组成的网格 D_{hF}．算子 $L_h[u]_h$ 在点 x_k^* 的值由方程

$$L_h[u]_h\Big|_{x=x_k^*}=f_h(x_k^*)=\frac{u(x_{k+1})-u(x_k)}{x_{k+1}-x_k},$$
$$k=0,\ldots,N-1$$

来确定.然后 $L_h[u]_h$ 的定义分片线性地从 D_{hF} 中延拓出去,只在点 $x_k^*(k=1,\cdots,N-2)$ 处可能有转折.

设 F 中范数由以下公式定义:

$$\|\varphi\|_F=\sup_x|\varphi(x)|.$$

这时在三阶导数有界的函数类 U 上,对于 $\theta=0$ 与 $\theta=h/2$,算子 L_h 分别表示对 $L=d/dx$ 的一阶与二阶逼近.在二阶导数有界的函数类 U 上,对于任意的 $\theta\in[0,1]$, L_h 只表示一阶逼近.

有时如果只定义在 D_{hF} 中的点上的网格函数

$$L_h[u]_h\Big|_{D_{hF}}=f_h\in F_h$$

的构造方法已经找到,则可有条件地认为差分算子对微分算子的逼近问题已经解决,而不考虑函数 f_h 向 D_F 的延拓问题.在这种情况下,为定义逼近,可认为 F_h 是赋范的,并假设对于给定的网格和范数,在 D_{hF} 的点上同任意的函数 $f\in F$ 相等的函数 $\{f\}_h\in F_h$ 满足等式

$$\lim_{h\to0}\|(f)_h\|_{F_h}=\|f\|_F.$$

算子 L_h 可理解为从 U_h 到 F_h 的算子,如果当 $h\to0$ 时,

$$\|\{Lu\}_h-L_h[u]_h\|_{F_h}\to0,$$
$$\|\{Lu\}_h-L_h[u]_h\|_{F_h}\leqslant ch^p,$$

则称 L_h 在 U 上是 L 的 p 阶逼近.

为构造在充分光滑的函数类中以指定阶逼近 L 的算子 L_h,经常用有限差分逼近代替 L 的表达式中的每个导数.这种方法基于以下事实:对于任意整数 i,j 及任意的 $k_0(2k_0+1\geqslant i+j)$ 在方程

$$h^{-j}\sum_{k=-k_0}^{k_0}c_ku(x+kh)=$$
$$=u^{(j)}(x)+\varepsilon(x,h,c_{-k_0},\ldots,c_{k_0})$$

中,通过待定系数法及 Taylor 公式,可以选择与 h 无关的数 c_k,使对 $j+r(r\leqslant i)$ 阶导数为有界的任意函数 $u(x)$,以下形式的不等式成立:

$$|\varepsilon(x,h,c_{-k_0},\ldots,c_{k_0})|\leqslant A_{ij}\sup_t|u^{(j+r)}(t)|h^r,$$

其中 A_{ij} 只依赖于 i,j.例如,要构造 Laplace 算子 Δ 的逼近算子

$$\Delta u\equiv\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=f(x,y),$$

设 D_U 是闭正方形 $|x|\leqslant1,|y|\leqslant1$, D_F 是其内部 $|x|<1$, $|y|<1$.又设 $h=1/N$, N 是自然数,用以下点构造网格:

$$(x,y)=(mh,nh),\quad|mh|\leqslant1,\quad|nh|\leqslant1,$$

这些点属于 D_{hU}.点

$$(x,y)=(mh,nh),\quad|mh|<1,\quad|nh|<1,$$

则属于 D_{hF}(m, n 是整数).由于

$$\frac{1}{h^2}[y(x+h)-2y(x)+y(x-h)]=y''(x)+\frac{h^2}{12}y^{(4)}(\xi),$$

若在 D_{hF} 的点上令

$$L_hu_{m,n}=\frac{u_{m+1,n}-2u_{m,n}+u_{m-1,n}}{h^2}+$$
$$+\frac{u_{m,n+1}-2u_{m,n}+u_{m,n-1}}{h^2}=f_{mn},$$

其中 $u_{m,n}$ 和 $f_{m,n}$ 是函数 $[u]_h$ 及 f_h 在点 (mh,nh) 的值,则在充分光滑的函数空间中,Δ 可由有限差分算子 L_h 以二阶精度逼近.

还有其他的方法构造在微分方程 $Lu=0$ 的解空间中逼近 L 并满足附加条件的算子 L_h.

参考文献

[1] Филиппов, А. Ф., 《Докл. АН СССР》, 100(1955), 6, 1045–1048.

[2] Березин, И. С., Жидков, Н. П., Методы вычислений, 3 изд., М., 1 (1966) (英译本: Berezin, I. S. and Zhidkov, N. P., Computing methods, Pergamon Press, 1973)

B. C. Рябенький 撰

【补注】 微分算子的差分算子逼近既是**微分方程的差分方程逼近** (approximation of a differential equation by difference equations)又是**微分边值问题的差分边值问题逼近** (approximation of a differential boundary value problem by difference boundary value problems)的组成部分.因此在关于常微分方程及偏微分方程差分方法方面的文献中有广泛的论述.下面所列文献不仅介绍了微分方程及边值问题的离散化,也介绍了这些问题的求解.文献[A1]–[A3],[A5],[A6]是入门性的教科书,而[A4],[A7],[A8]及[A9]还提供了更高深的资料.

参考文献

[A1] Ames, W. F., Numerical methods for partial differential equations, Nelson, London, 1969.

[A2] Forsythe, G. E. and Wasow, W. R., Finite difference methods for partial differential equations, Wiley, 1960.

[A3] Garabedian, P. R., Partial differential equations,

Wiley, 1964.

[A4] Godunov, S. K. and Ryaben'kii, V.S., The theory of difference schemes, North-Holand, 1964 (译自俄文).

[A5] Lambert, J. D., Computational methods in ordinary differential equations, Wiley, 1973.

[A6] Mitchel, A. R. and Griffiths, D. F., The finite difference method in partial differential equations, Wiley, 1980.

[A7] Richtmeyer, R. D. and Morton, K. W., Difference methods for initial value problems, Wiley, 1967.

[A8] Samarskii, A. bA., Theorie der Differenzverfa ren, Akad. Verl. Geest u. Portig K.-D., 1984 (译自俄文).

[A9] Stetter, H. J., Analysis of discretization methods for ordinary differential equations, Springer, 1973.

金保侠 译

函数逼近 [**approximation of functions**; **приближение функций**]

按照确定的规则，函数 f 被预先给定的集合 $\mathfrak{N}$，即逼近集(approximating set)中(在某种意义下)靠近 f 的函数 φ 所取代的过程．假定 f 定义在实现逼近过程的 m 维 Euclid 空间(特例是实轴)的集合 Q 上；f 或者借助于基本函数表成显式或者是某个方程的解．如果仅仅知道有关 f 的不完全信息，则实质问题便是考虑由已知信息确定的整个函数类的逼近．

在各种实际问题中，诸如用更光滑的函数或更简单且便于计算的函数来代替给定的函数时，或基于实验数据而建立某个函数关系时等等都要涉及函数逼近．

在一般的函数逼近问题中，显得更为突出的是下述几个问题：逼近集 $\mathfrak{N}$ 的选取，逼近误差度量的选取，逼近方法的选取(例如，按照某种规则使 $\mathfrak{N}$ 中函数 φ 对应于 f)以及对逼近误差的研究和估计．

关于逼近集 $\mathfrak{N}$ 的选取，除了无条件地保证所需的逼近精度外，还须选取结构简单、计算方便的函数 φ 使之能满足事先要求的，例如与光滑性有关的条件．

经典的逼近工具是单变量或多变量的代数多项式(如果 Q 是有界闭集)以及三角多项式(在周期情形下)．代数多项式或三角多项式作为逼近集之所以得到广泛应用是因为它们能按照事先给定的精度来逼近任何连续函数．原则上可以通过增加多项式的次数来提高逼近精度，然而，这就使得逼近过程复杂化并增加了应用上的困难．实际上，可以将固定次数的代数多项式或三角多项式的子空间取作逼近集并在保证得到所需的逼近精度前提下使多项式的次数尽可能地低．考虑广义多项式

$$\varphi(t) = c_1\varphi_1(t) + \cdots + c_N\varphi_N(t),$$

便可获得更一般同时也较灵活的逼近工具，其中 $\{\varphi_1, \cdots, \varphi_N\}$ 是线性无关函数系，它们满足关于 φ 的各种条件．

在许多问题中，从计算的角度考虑，样条(spline)函数已成为较之于经典多项式更自然且更方便的逼近工具．若

$$\Delta_N = \{a=\tau_0<\tau_1<\cdots<\tau_N=b\},\quad N\geqslant 2, \tag{1}$$

为区间 $[a, b]$ 的一个剖分，那么关于 Δ_N 的 r 次亏量为 $k\,(k=1,\cdots,r)$ 的(多项式)样条(polynomial spline)是指这样的函数 s，它是由 N 个 r 次代数多项式在点 $\tau_1,\cdots,\tau_{N-1}$ 处"粘结"而成的并且 s 及其直到 $(r-k)$ 阶导数在整个区间 $[a, b]$ 上是连续的．因此，$s\in C^{r-k}[a,b]$，且在每个区间 (τ_{i-1}, τ_i) $(i=1, \cdots, N)$ 上，s 是至多 r 次的代数多项式．例如，以节点(nodes (knots, joints)) τ_i 作为顶点的折线便是次数为 1 亏量为 1 的样条；在 $[a, b]$ 上连续可微且在 $[\tau_{i-1}, \tau_i]$ $(i=1,\cdots,N)$ 上为三次多项式的函数 s 便是亏量(defect)为 2 的三次样条(cubic spline)，等等．可类似地定义两个或更多变量的样条．由于有限的光滑性质，样条函数较之于多项式便具有更大的局部灵活性；样条函数值在区间 (α, β) 内的变化很少影响(或根本不影响)它在 (α, β) 外的性质．除了在计算机上实现比较简便外，样条函数的优点还特别表现在只知道被逼近函数 f 的离散特征的时候，例如，只知道 f 或它的某些阶导数在某些点上的值．

如果 f 有奇异点或逼近是在某个无界区域上进行的，则有理函数 p/q 便成为有效的逼近工具，其中 p 与 q 均为代数多项式(有理逼近，**Padé 逼近**(Padé approximation)．定义在整个实轴上的非周期函数也可用指数型整函数来逼近．

逼近误差度量(measure of the error of approximation) $\mu(f, \varphi)$ 的选取常常要考虑到具体问题的条件以及被逼近函数的有关已知信息．绝大多数情况下，问题归结于寻求包含 f 的函数空间使得在其度量意义下便于估计逼近误差．如果

$$\mu(f,\varphi) = \sup_{t\in Q} |f(t)-\varphi(t)|,$$

则所指的是一致(uniform)或 Чебышев 逼近(Chebyshev approximation)，而当

$$\mu(f,\varphi) = \int_Q |f(t)-\varphi(t)|^p\,dt,\quad p>0,$$

时，所指的便是均幂逼近(mean-power approximation)，或 L_p 逼近(L_p-approximation)，其中当 $p=1$ 时，称为平均逼近(approximation in the mean)．$p=2$，即均方逼近(mean-square approximation)具有特别重要的意义，这时，由有限维子空间对 f 作的最佳逼近的误差可借助于行列式准确地表示出来．在

某些问题中，要求函数 f 与 φ 在不同的点有不同的逼近程度．为此，有必要引进权函数(weight function) $\rho(t)\geqslant 0$ 并考虑相应的加权逼近(weighted approximation)，这时，逼近误差的度量取为

$$\mu(f,\varphi)=\sup_{t\in Q}|f(t)-\varphi(t)|\rho(t)$$

或

$$\mu(f,\varphi)=\int_Q|f(t)-\varphi(t)|^p\rho(t)dt,\ \ p>0.$$

权函数的引入还保证了即使 f 为无界函数时，误差仍是有限的．若只须考虑函数 f 与 φ 在 Q 中某些个别点 $t_k(k=1,\cdots,N)$ 处的逼近误差，则可将 $\mu(f,\varphi)$ 取成

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N}|f(t_k)-\varphi(t_k)|$$

或

$$\sum_{k=1}^{N}|f(t_k)-\varphi(t_k)|^p,\ \ p>0,$$

并且在上述两式中均可配上加权系数．

当要决定按何规则从集合 $\mathfrak{N}$ 中选取逼近函数 $\varphi(t)=\varphi(f,t)$ 时，亦即，选择逼近方法时，显然应力图获取最高的逼近精度同时在兼顾有关 f 的信息的前提下使 $\varphi(f,t)$ 的结构尽可能地简便．前者要求 $\mathfrak{N}$ 中的函数 φ_f"最接近"f，即 φ_f 满足

$$\mu(f,\varphi_f)=\inf_{\phi\in\mathfrak{N}}\mu(f,\varphi).$$

此时，自然产生了有关函数 φ_f(即，最佳逼近函数(function of best approximation))的存在性、唯一性及特征性质等问题(见[5])．如果 $\mathfrak{N}$ 是闭局部紧集，特别地，如果 $\mathfrak{N}$ 是有限维子空间，则存在性将能得到保证．唯一性不仅与逼近集 $\mathfrak{N}$ 的性质有关(见 **Haar条件**(Haar condition)；**Чебышев系**(Chebyshev system))，而且也依赖于用以定义 $\mu(f,\varphi)$ 的度量．最佳逼近函数 φ_f 在众多场合下满足许多著名的充分必要条件(见**最佳逼近多项式**(polynomial of best approximation)；**Чебышев定理**(Chebyshev theorem)；**Марков准则**(Markov criterion))．然而，仅依据这些准则还不能获得构造函数 $\varphi_f(t)$ 的有效方法．因此，基于被逼近函数 f 的有关信息，找出能行之有效地构造在 $\mathfrak{N}$ 中进行逼近的函数 $\varphi(f,t)$ 的方法便显得非常重要．应当首先提及的是线性方法(linear methods)(它们满足 $\varphi(\alpha_1f_1+\alpha_2f_2,t)=\alpha_1\varphi(f_1,t)+\alpha_2\varphi(f_2,t)$)，插值方法自然应属此列：选定 Q 中的点 $t_1,\cdots,t_N$，就可以从 $\mathfrak{N}$ 的满足插值条件

$$\varphi(t_k)=f(t_k),\ \ k=1,\ldots,N\qquad(2)$$

的函数 φ 中选取 $\varphi(f,t)$．如果 $\mathfrak{N}$ 是某个线性流形并且包含具有性质 $\varphi_i(t_i)=1$，$\varphi_i(t_k)=0\,(k\neq i)$ 的函数系 $\varphi_1,\cdots,\varphi_N$，则函数

$$\varphi(f,t)=\sum_{k=1}^{N}f(t_k)\varphi_k(t)$$

属于 $\mathfrak{N}$ 且满足(2)；这样也就得到了一种线性插值逼近方法(interpolation method of approximation)．有时需要选取这样的函数 $\varphi(f,t)$ 使得 $\varphi(f,t)$ 与 f 在点 t_K 处不仅函数值相等而且某些阶导数值也相等；此时的插值即称为重结点插值(interpolation with multiple nodes)．如果 $Q=[a,b]$ 及 $a\leqslant t_1<\cdots<t_N\leqslant b$，则存在唯一的 $(N-1)$ 次代数多项式［相应地在周期情形 $(b-a=2\pi$，$t_N=t_{2n-1}<b)$ 下，存在唯一的 $n-1$ 次三角多项式］，其在点 t_K 处的值与 f 的值相等．重结点插值可借助于Hermite多项式来实现，Taglor 多项式便是它的一个特例；此时，n 次代数多项式在给定的点处插值给定的函数及其前 n 阶导数．

样条插值有其独特之处，它不仅与插值节点的选取有关而且也依赖于保证插值样条的存在性与唯一性的边界条件．例如，若边界条件是以 m_a 个条件 $S^{(v)}(a)(0\leqslant v\leqslant r-1)$ 及 m_b 个条件 $S^{(\mu)}(b)$ $(0\leqslant\mu\leqslant r-1$，$m_a+m_b=r)$ 给出，则在区间 (a,b) 内 N 个不同的点 $t_i(\tau_{i-1}\leqslant t_i\leqslant\tau_i$，$i=1,\cdots,N)$ 处取给定值的关于分法(1)的亏量为1的 r 次 $(r\geqslant 2)$ 样条 S 存在且唯一．如果令 $S^{(v)}(f,\tau_i)=f^{(v)}(\tau_i)(v=0,\cdots,k-1;\ i=1,\cdots,N)$ 而且当 $k<r$ 时再施加某些边界条件，则函数 $f\in G^{2r-k-1}[a,b]$ 与亏量为 $k(1\leqslant k\leqslant r)$ 的关于分法(1)的 $2r-1$ 次样条 $S(f,t)$ 之间可以建立一一对应．当 $k=r$ 时，此样条即称作 Hermite 样条(Hermite spline)或局部样条(local spline)，这是因为此样条在区间 (τ_{i-1},τ_i) 内的性质由 f 及其导数 $f^{(v)}(v=1,\cdots,k-1)$ 在点 τ_{i-1} 与 τ_i 处的值决定．

在函数逼近中，基于将函数按某个正交系展成 Fourier 级数的线性方法也起着重要的作用．特别是在周期情形下，按三角函数系展开的 Fourier 和及其各种平均已成为广泛使用的逼近工具(见**函数逼近，线性方法**(approximation of functions, linear methods))．

从实用的观点考虑，对逼近误差的研究和估计是一个很重要的课题，同时也是函数逼近的一个内涵丰富的分支．更确切地说，正是对误差估计的研究，对误差与被逼近函数的光滑性之间关系的研究以及对各种逼近方法性质的分析与比较才导致了函数逼近论这个在数学分析中发展得最为迅速的分支的形成．

P. L. Chebyshev 1854－1859 年间关于用多项式和有理分式对连续函数进行最佳一致逼近的著述(见[1])以及 K. Weierstrass 的工作(见[2])为函数逼近理论奠定了基础．K. Weierstrass 1885 年证明，区间 $[a,b]$ 上(或整个实轴上以 2π 为周期)的任何连续函数均可用 $n(n=1,2,\cdots)$ 次代数(或三角)多项式序列 $P_n(f,t)$ 进行逼近，即当 $n\to\infty$ 时有

$$\mu(f,P_n(f))=\max_{t\in Q}|f(t)-P_n(f,t)|\to 0,$$

其中 Q 是$[a, b]$(或整个实轴). 当逼近误差度量以积分形式定义或所讨论的是多变量函数时均有类似的结论成立. 数列 $\mu(f, P_n(f))$ 随着被逼近函数 f 性质的变化以及逼近多项式 $P_n(f, t)$ 的选取而减小的速度的研究特别重要. 关于最佳逼近以及对给定的 f 有效地构造多项式 $P_n(f, t)$ 的线性逼近方法等问题也已成为研究的重点. 函数逼近论发展中的一个重要阶段是与 Ch. J. de la Vallée-Poussin, D. Jackson 以及 С. Н. Бернштейн (S. N. Bernshtein) 的名字联系在一起的. 他们开创了当利用适当选取的 n 次多项式 $P_n(f, t)$ $(n\to\infty)$ 来逼近函数 f 时, 逼近误差的递减速度与 f 的差分微分性质之间的关系方面的研究. 他们发现, 在许多场合下, 有关 f 的导数的存在性、光滑性等特征可借助于逼近多项式序列及相应的逼近误差的性质来刻画(见**函数逼近, 正定理和逆定理**(approximation of functions, direct and inverse theorems)). 这就有可能以新的构造性的方式来描述连续可微函数. 20 世纪初期, 对这种问题的研究曾经是逼近论的主流; 因此, 这一领域也被人们看成是**函数构造论**(constructive theory of functions).

20 世纪三、四十年代, А. Н. Колмогоров, J. Favard 以及 С. М. Никольский 等发表的论文开创了一个新的研究方向, 旨在用有限维子空间逼近某些函数类并借助于已知函数类的差分微分性质而获取精确误差估计. 其目标是为了得到

$$\sup_{f\in\mathfrak{M}} \mu(f, P_N(f)),$$

其中 $\mu(g, \varphi)$ 是所选定的逼近误差度量, $\mathfrak{M}$ 是某个函数类, $P_n(f, t)$ 是(广义)逼近多项式, 其系数由逼近方法确定. 这些研究成果使得有可能从逼近可行性的角度对各种逼近方法进行比较并有利于阐述一个重要的实际问题, 即, 对给定的函数类, 寻求(维数为 N 的)最优(最佳)逼近工具. 基于具体逼近方法的一些性质以及泛函分析的最一般原理, 这个方向的研究在思想方面也变得十分丰富. 正是在这种研究的过程中发现了各种极值问题之间的相互关系并使人们能获得函数论中许多深入而精妙的结果. 从而, 有可能最终解决一些重要函数类最佳逼近的极值问题(见[5], [7], 亦见**函数逼近, 函数类的极值问题**(approximation of functions, extremal problems in function classes)).

关于函数逼近的一些其他方面. 对 $\mathfrak{M}$ 中的逼近函数 $\varphi(t)=\varphi(f, t)$ 可附加一些约束条件. 如果函数 f 与约束条件没有什么关系(例如, 逼近多项式系数之间的关系或约束), 那么问题实际上便归结于确定更精确的集合 $\mathfrak{M}$. 如果被逼近函数 f 与附加在 $\varphi(f, t)$ 上的约束条件之间存在某种联系的话, 情况就有所不同了; 其中一个有趣的情形就是单侧逼近(one-sided approximation), 此时要求 $\varphi(f, t)$ 满足不等式 $\varphi(f, t)\leqslant$(或 $\geqslant$)$f(t)$ 并且在积分度量下估计误差(见[19]).

在实际问题中, 除了逼近显式函数外, 还要考虑以参数形式给出的曲线与曲面的逼近; 这时, 例如, 参数样条就可以作为逼近工具. 由于 Hausdorff 距离合理地反映了数学对象之间的几何近似关系, 因此, 用它来刻画逼近误差程度是最自然不过的了. 例如, 两条曲线 l_1 与 l_2 的 Hausdorff 距离定义为

$$r(l_1, l_2) = \max\left\{\max_{P\in l_1}\min_{Q\in l_2}\rho(P, Q), \max_{P\in l_2}\min_{Q\in l_1}\rho(P, Q)\right\},$$

其中 $\rho(P, Q)$ 是点 P 与 Q 之间的 Euclid(或任何其它意义下的)距离. 在寻求用来衡量逼近误差的工具时, 人们总是偏爱 Hausdorff 距离; 即使在某些函数逼近的场合下, 例如, 当利用光滑函数来逼近不连续函数时也是如此(见[16]).

函数逼近论中许多问题的解与按某个函数系展开的多项式的极值性质(例如, 多项式导数不等式, 最小零偏差多项式, 等等)之间有着密切的联系. 函数逼近论中逆定理的证明在很大程度上依赖于由代数或三角多项式本身的性质给出其某些阶导数的范数(或在某固定点上的值)的不等式. 在这方面已得到了许多精确的结果并将它们推广到了整函数的情形(见[6] - [10]).

关于区间 $[a, b]$ 上按 C 或 L_p 度量(首项系数固定的)的 n 次代数多项式的最小零偏差问题, 或等价地, 关于用至多 $n-1$ 次多项式对函数 t^n 进行最佳逼近的问题已由 Чебышев (对 C 空间)及其学生(对 L_1 空间)相继进行了研究. 在 C 空间、L_1 空间及 L_2 空间度量下, 最小零偏差多项式分别为第一类 Чебышев 多项式、第二类 Чебышев 多项式以及 Legendre 多项式, 它们在理论与实际问题中均有广泛的应用. 在更一般的情形下, 即当多项式的所有系数均服从某些约束条件时, 也得到了许多的结果(见[6]). 鉴于在许多场合下, 获取最佳求积公式的问题等价于寻求最小范数的单项样条问题, 因此, 寻求对函数 t^n 进行最佳逼近的带自由结点的 $n-1$ 次样条就显得特别重要.

关于复平面中的函数逼近, 见**复变函数逼近**(approximation of functions of a complex variable).

参考文献

[1] Чебышев, П. Л., Вопросы о наименьших величинах, связанные с приближенным представлением функций (1859), 《Полн. собр. соч.》, М.-Л., 2 (1947), 151 - 235.

[2A] Weierstrass, K., Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen einer reellen Veränderlichen, *Sitzungsberichte Akad. Berlin* (1885), 633 - 639.

[2B] Weierstrass, K., Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen einer reellen Veränderlichen, *Sitzungsberichte Akad. Berlin* (1885), 789 – 805.

[3] Гончаров, В. Л., Теория интерполирования и приближения функций. 2 изд., М., 1954 (中译本: В. Л. 冈察洛夫, 函数插补与逼近理论, 科学出版社, 1958).

[4] Натансон, И. П., Конструктивная теория функций. М.-Л., 1949 (中译本: И. П. 那唐松, 函数构造论, 科学出版社).

[5] Корнейчук, Н. П., Экстремальные задачи теории приближения. М., 1976 (中译本: Н. П. 考涅楚克, 逼近论的极值问题, 上海科学技术出版社, 1982).

[6] Дзядык, В. К., Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами, М., 1977.

[7] Тихомиров, В. М., Некоторые вопросы теории приближений. М., 1976.

[8] Никольский, С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. 2 изд., М., 1977 (英译本: Nikol'skiĭ, S. M., Approximation of functions of several variables and imbedding theorems. Springer, 1975).

[9] Ахиезер, Н. И., Лекции по теории аппроксимации, 2 изд., М., 1965 (中译本: Н. И. 阿赫叶惹尔, 逼近论讲义, 科学出版社, 1957).

[10] Тиман, А. Ф., Теория приближения функций действительного переменного, М., 1960 (英译本: Timan, A. F., Theory of approximation of functions of a real variable, Pergamon, 1963).

[11] Коровкин, П. П., Линейные операторы и теория приближений. М., 1959 (中译本: П. П. 柯罗夫金, 线性算子与逼近论, 高等教育出版社, 1960).

[12] Ahlberg, J. H., Nilson, E. N. and Walsh, J. F., The theory of splines and their applications, Acad. Press, 1967.

[13] Стечкин, С. Б., Субботин, Ю. Н., Сплайны в вычислительной математике. М., 1976.

[14] Laurent, P. J., Approximation et optimisation, Herman, 1972.

[15] Collatz, L. and Krabs, W., Approximations theorie: Tschebyscheffsche Approximationen mit Anwendungen, Teubner, 1973.

[16] Sendov, B., Hausdorff approximations, Sofia, 1979.

[17] Никольский, С. М., Квадратурные формулы, 3 изд., М., 1979.

[18] Завьялов, Ю. С., Квасов, Б. И., Мирошниченко, В. Л., Методы сплайн-функций, М., 1980.

[19] Корнейчук, Н. Л., Лигун, А. А., Доронин, В. Г., Аппроксимация с ограничениями, К., 1982.

[20] Davis, P. J., Interpolation and approximation, Dover, reprint, 1963.

[21] Lorentz, G. G., Approximation of functions, Holt, Rinehart and Winston, 1966 (中译本: G. G. 洛伦茨, 函数逼近论, 上海科学技术出版社, 1981).

[22] Корнейчук, Н. П., Сплайны в теории аппроксимации, М., 1984.

Н. П. Корнейчук 撰

【补注】

参考文献

[A1] Todd, J., Applications of transformation theory; a legacy from zolotarev (1847 – 1878), in S. P. Singh, J. H. W. Burry and B. Watson (eds.): Approximation theory and spline functions, Reidel, 1984, 207 – 245.

[A2] Szegö, G., The contributions of L. Fejér to the constructive function theory, in G. Alexits and S. B. Stechkin (eds.): Constructive theory of functions, Akad. Kiadnó, Budapest, 1972, 19 – 26.

[A3] Ibragimov, I. I., On S. N. Bernstein's publications in the constructive theory of functions, in G. Alexits and S. B. Stechkin (eds.): Constructive theory of functions, Akad. Kiadnó, Budapest, 1972, 27 – 40 (俄文).

[A4] Michelli, C. A., Pai, D. V. and Limaye, B. V. (eds.), Methods of functional analysis in approximation theory Birkhäuser, 1986.

[A5] Cheney, E. W., Introduction to approximation theory, Chelsea, reprint, 1982.

[A6] Schumaker, L. L., Spline functions, basic theory, Wiley, 1981.

[A7] Rivlin, T. J., The Chebyschev palynomials, Wiley, 1974.

[A8] Devore, R. A., Freud's work in constructive function theory, *J. Approximation theory*, **46** (1986), 32 – 37.

[A9] Turán, P., On some open problems of approximation theory, *J. Approximation theory*, **29** (1980), 23 – 85. (*Mat. Lapok*, **25** (1974), 21 – 75).

[A10] Braess, D., Nonlinear approximation theory, Springer, 1986.

王仁宏、檀结庆 译 杨应辰 校

函数逼近,正定理和逆定理[approximation of functions, direct and inverse theorems; приближение функций, прямые и обратные теоремы]

描述被逼近函数的差分微分性质与各种方法产生的逼近误差量(及其特征)之间关系的定理和不等式. 正定理借助于函数f的光滑性质(具有给定的各阶导数, f或其某些导数的连续模等), 给出f的逼近误差估计. 利用多项式进行最佳逼近时, Jackson 型定理及其多种推广均是众所周知的正定理, 见 **Jackson 不等式**(Jackson inequality)和 **Jackson 定理**(Jackson theorem). 逆定理则是根据最佳逼近或任何其他类型逼近的误差趋于零的速度来刻画函数的微分差分性质. S. N. Bernstern 首次提出并在某些场合下解决了函数逼近中的逆定理问题, 见[2]. 比较正逆定理, 有时就可以利用, 例如, 最佳逼近序列来完全刻画具有某种光滑性质的函数类.

周期情形下正逆定理之间的关系最为明显. 令$\widetilde{C}$为整个实轴上周期为2π的连续函数空间, 其范数定义为

$$\|f\|_{\tilde{C}} = \max_t |f(t)|;$$

令

$$E(f, T_n) = \inf_{\varphi \in T_n} \|f-\varphi\|_{\tilde{C}}$$

为至多 n 次的三角多项式子空间 T_n 对 $\widetilde{C}$ 中函数 f 的最佳逼近，$\omega(f, \delta)$ 是 f 的连续模，$\widetilde{C}^r(r=1, 2, \cdots)$ 是 $\widetilde{C}$ 中于整个实轴上 r 次连续可微的函数集($\widetilde{C}^0=\widetilde{C}$)．正定理(direst theorem)指出：如果 $f\in\widetilde{C}^r$，则

$$E(f, T_{n-1}) \leqslant \frac{M}{n^r}\omega\left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right), \quad n = 1, 2, \ldots, \quad r = 0, 1, \ldots, \tag{1}$$

其中常数 M 与 n 无关．可以构造出与 $\widetilde{C}$ 中函数 $f(t)$ 相关的多项式序列 $U_n(f, t)\in T_n$ 使得对 $f\in\widetilde{C}^r$，(1)的右端可作为误差 $\| f-U_n(f)\|$ 的上界，这是较(1)更强的结果．逆定理(inverse theorem)指出：对 $f\in\widetilde{C}$，如果

$$\omega(f, \delta) \leqslant M\delta\sum_{n=1}^{[1/\delta]} E(f, T_{n-1}), \quad \delta>0, \tag{2}$$

(其中 M 是绝对常数，$[1/\delta]$ 是 $1/\delta$ 的整数部分)且对某个正整数 r，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1}E(f, T_{n-1})$$

收敛，则可推得 $f\in\widetilde{C}^r$，类似(2)，$\omega(f^{(r)}, 1/n)$ 也可借助于 $E(f, T_{n-1})$ $(n=1, 2, \cdots)$ 进行估计(见[4], [8] 及 [12])．特别地，如果有

$$E(f, T_{n-1}) = O(n^{-r-\alpha}), \quad r=0, 1, \ldots, \quad 0<\alpha<1,$$

则 $f\in\widetilde{C}^r$ 且对 $0<\alpha<1$，$f^{(r)}(t)$ 满足 Hölder 不等式(Hölder inequality)

$$|f^{(r)}(t')-f^{(r)}(t'')| \leqslant K|t'-t''|^{\alpha}, \tag{3}$$

而当 $\alpha=1$ 时，满足 Zygmund 不等式(Zygmund inequality)

$$\left|f^{(r)}(t')-2f^{(r)}\left(\frac{t'+t''}{2}\right)+f^{(r)}(t'')\right| \leqslant K|t'-t''|. \tag{4}$$

若用 $K\widetilde{H}^{r+\alpha}$ 表示上述函数类，则可得到其结构特征如下：$f\in K\widetilde{H}^{r+\alpha}$，当且仅当

$$E(f, T_{n-1}) = O(n^{-r-\alpha}).$$

周期为 2π 的函数在整个实轴上无穷可微当且仅当对所有 $r=1, 2, \cdots$，有

$$\lim_{n\to\infty} n^r E(f, T_{n-1}) = 0.$$

在 $L_p(0, 2\pi)$ $(1\leqslant p<\infty)$ 度量下关于周期函数的逼近以及用有限阶整函数逼近于整个实轴上定义的(不必是周期的)函数时均有与上述类似的性质成立(见[7], [8])．如果把 f (或 f 的某阶导数)的 k 阶光滑模 $\omega_k(f, \delta)$ $(k=1, 2, \cdots)$ 看作是差分微分特征的话，那么关于 $f\in\widetilde{C}^r$ 的正逆定理就是众所周知的(见[4], [8])．

在有限区间上考虑函数逼近时，情况有所不同．令 $C=C[a, b]$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数空间；其范数定义为

$$\|f\|_C = \max_{a\leqslant t\leqslant b} |f(t)|.$$

令 $C^r=C^r[a, b]$ 为 $[a,b]$ 上 r 次连续可微的函数集，$C^0=C$，$KH^{r+\alpha}[a,b]$ 为当 $t', t''\in[a,b]$ 时由不等式(3)和(4)所定义的函数类．用至多 $n-1$ 次代数多项式子空间 A_{n-1}，对 $f\in C^r$ 的最佳逼近

$$E(f, A_{n-1}; a, b) = \inf_{p\in A_{n-1}} \|f-p\|_C, \quad n=1, 2, \ldots,$$

可借助于 $f^{(r)}$ 在 $[a, b]$ 上的连续模得出形如(1)的估计．然而，与具有不等式(2)的周期情形类似，相反的结论，只对 (a, b) 内的某个区间成立．例如，若

$$E(f, A_{n-1}; a, b) \leqslant Mn^{-r-\alpha}, \quad r = 0, 1, \ldots, \quad 0<\alpha<1, \tag{5}$$

则只能断言 $f\in KH^{r+\alpha}[a_1, b_1]$，这里 $KH^{r+\alpha}[a, b]$ 由不等式(3)定义且 $0<\alpha<1$，$[a_1, b_1]\subset(a, b)$；常数 K 依赖于 a, a_1, b_1, b 且随着 $a_1\to a$ 和 $b_1\to b$ 而无限增大．实际上存在函数 f，尽管有

$$E(f, A_{n-1}; a, b) = O(n^{-r-\alpha}).$$

但 $f\notin KH^{r+\alpha}[a, b]$．例如，尽管有

$$E(\sqrt{1-t^2}, A_{n-1}; -1, 1) < \frac{2}{\pi n}, \quad n=1, 2, \ldots,$$

但在 $[-1, 1]$ 上对每个 $\alpha>\frac{1}{2}$ 均有 $\sqrt{1-t^2}\notin KH^{\alpha}$．因而在整个区间 $[a,b]$ 上保证函数 $f\in C$ 具有最佳逼近阶的代数多项式在此区间的两个端点处将产生更好的逼近，这一现象是由 С. М. Никальский 首先发现的(见[3])．特别地，如果 $f\in KH^{r+\alpha}[a,b]$，则对任何 $n>r$，存在多项式 $p_n(t)\in A_{n-1}$ 使得

$$|f(t)-p_n(t)| \leqslant M\left[\frac{1}{n}\sqrt{(t-a)(b-t)}+\frac{1}{n^2}\right]^{r+\alpha}, \quad a\leqslant t\leqslant b, \tag{6}$$

其中常数 M 与 n 和 t 均无关．与(5)不同的是，这个结论的逆也成立：如果对 $f\in C$，存在多项式序列 $p_n(t)\in A_{n-1}$，使得对某个 r $(r=0, 1, \cdots)$ 以及 $0<\alpha<1$，(6)式成立，则有 $f\in KH^{r+\alpha}[a, b]$．借助于光滑模与连续模便可得到 $f\in C^r[a, b]$ 的正逆定理(见[4], [8])．

就许多具体逼近方法而言(见[6],[8]和[9]),特别对(最佳逼近与插值)**样条**(spline)(见[10]),已借助于被逼近函数的差分微分性质建立了关于逼近误差阶估计的正定理.

在 Hausdorff 度量下函数逼近的正逆定理已为人知晓(见[13]). 这时也会产生一些特殊情形;尤其是利用最佳 Hausdorff 逼近刻画函数类时不仅要涉及逼近阶而且也牵涉到相应不等式中的常量. 关于多维正逆定理,见**多实变函数逼近**(approximation of functions of several real variables).

参考文献

[1] Jackson, D., Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung, Göttingen, 1911. Thesis.

[2] Бернштейн, С. Н., О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени (1912), Собр. соч., М., 1(1952), 11 – 104.

[3] Никольский, С. М., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, 10 (1946), 4, 295 – 317.

[4] Дзядык, В. К., Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами, М., 1977.

[5] Корнейчук, Н. П., Экстремальные задачи теории приближения, М., 1976 (中译本:Н. П. 考涅楚克,逼近论的极值问题,上海科学技术出版社,1982).

[6] Тихомиров, В. М., Некоторые вопросы теории приближений, М., 1976.

[7] Ахиезер, Н. И., Лекции по теории аппроксимации, 2 изд., М., 1965 (中译本:Н. И. 阿赫叶惹尔,逼近论讲义,科学出版社,1957).

[8] Тиман, А. Ф., Теория приближения функций действительного переменного, М., 1960 (英译本:Timan, A. F., Theory of approximation of functions of a real variable, Pergamon, 1963).

[9] Коровкин, П. П., Линейные операторы и теория приближений, М., 1959 (中译本:П. П. 柯罗夫金,线性算子与逼近论,高等教育出版社,1960).

[10] Стечкин, С. Б., Субботин, Ю. Н., Сплайны в вычислительной математике, М., 1976.

[11] Даугавет, И. К., Введение в теорию приближения функций, Л., 1977.

[12] Стечкин, С. Б., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, 15 (1951), 3, 219 – 242.

[13] Sendov, B., Hausdorff approximations, Sofia, 1979.

[14] Lorentz, G. G., Approximation of functions, Holt, Rinehart and Winston, 1966 (中译本:G. G. 洛伦茨,函数逼近论,上海科学技术出版社,1981).

Н. П. Корнейчук 撰

【补注】

参考文献

[A1] Natanson, I. P., Constructive theory of functions, 1 – 3, F. Ungar, 1964 – 1965 (译自俄文).

[A2] DeVore, R. A., The approximation of continuous functions by positive linear operators, Springer, 1972.

王仁宏、檀结庆 译 杨应辰 校

函数逼近,函数类的极值问题 [approximation of functions, extremal problems in function classes; приближение функций, экстремальные задачи на классах функций]

研究函数类逼近误差的上界并选取某种意义下的最佳逼近工具. А. Н. Колмогоров(见[1],[2]),J. Favard(见[3],[4])以及 С. М. Никольский(见[5],[6])为这类问题的研究奠定了基础. 20 世纪 50 年代,对这些问题的研究方兴未艾,愈来愈深入到问题的优化方面,从而促进了计算数学的进一步发展.

如果在赋范空间 X 中考虑固定集合 $\mathfrak{N} \subset X$ 中的函数对函数类 $\mathfrak{M}$ 的逼近,那么有意义的工作是寻求

$$E(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})_X = \sup_{f \in \mathfrak{M}} E(f, \mathfrak{N})_X, \tag{1}$$

以及

$$\mathscr{E}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, U)_X = \sup_{f \in \mathfrak{M}} \| f - Uf \|_X, \tag{2}$$

其中

$$E(f, \mathfrak{N})_X = \inf_{\varphi \in \mathfrak{N}} \| f - \varphi \|_X$$

是 $\mathfrak{N}$ 对函数 $f(t)$ 的最佳逼近,U 是由 X 到 $\mathfrak{N}$ 的某个算子定义的具体逼近方法. 从几何上看,(1)中的上确界描述了在 X 的度量下集合 $\mathfrak{M}$ 对 $\mathfrak{N}$ 的偏差. 实际上,$E(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})_X$ 的意义在于:首先,它给出了用仅知属于 $\mathfrak{M}$ 的函数对 $\mathfrak{N}$ 进行最佳逼近时的最小可能上界;其次,可借助于它对 $\mathfrak{M}$ 上具体逼近方法的近似性质进行分析和比较. (2)中的一个重要情形是当 $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_N$ 为 N 维空间且 U 为线性逼近方法的时候. 关于具体的线性方法(特别是多项式或样条方法)对函数类的逼近已得到了一系列精确的及渐近精确的结果(见[1] – [12],[19]). 然而,在所有从 X 到 $\mathfrak{N}_X$ 的线性有界算子 U 中获取下确界

$$\mathscr{E}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}_N)_X = \inf_{UX \subset \mathfrak{N}_N} \mathscr{E}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}_N, U)_X \tag{3}$$

的问题,亦即,寻求所有关于 $\mathfrak{M}$ 的最优线性方法问题却引起了人们的极大兴趣. 显然,

$$E(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}_N)_X \leqslant \mathscr{E}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}_N)_X,$$

由此自然产生了上述等号是否成立的问题. 除了当 X 是 Hilbert 函数空间且单个函数的最佳逼近由关于 $\mathfrak{N}_X$ 的某个正交基展开的 Fourier 和给定这种平凡情形外,在非 Hilbert 空间中也得到了一些关于整个函数类 $\mathfrak{M}$ 上最佳逼近的结果.

因此,如果 X 是周期 2π 的函数空间 $\widetilde{L} = \widetilde{L}_p[0, 2\pi]$

$(1\leqslant p\leqslant\infty)$, $\mathfrak{N}_{2n-1}^T$ 是 $n-1$ 阶三角多项式子空间 $(\dim\mathfrak{N}_{2n-1}^T=2n-1)$, $M\widetilde{W}_p^r(r=1,2,\cdots)$ 是由 $f^{(r-1)}(t)$ 于 $[0,2\pi]$ 上绝对连续且 $\|f^{(r)}\|_{\widetilde{L}_p}\leqslant M$ 的函数 $f\in\widetilde{L}_p$ 构成的函数类，则有

$$E(M\tilde{W}_p^r,\mathfrak{N}_{2n-1}^T)_{\tilde{L}_p}=\mathscr{E}(M\tilde{W}_p^r,\mathfrak{N}_{2n-1}^T)_{\tilde{L}_p}=MK_rn^{-r},$$
$$p=1,\infty;\ n,r=1,2,\ldots.$$

其中 K_r 是 Favard 常数．此外，通过在 Fourier 和的基础上建立的线性方法 U_{n-1}^{λ}(见**函数逼近，线性方法**(approximation of functions, linear methods) 中的公式(3))，可得到关于 $M\widetilde{W}_1^r$ 及 $M\widetilde{W}_\infty^r$ 的最佳逼近，为此只须适当选取因子 $\lambda_k^{(n-1)}=\lambda_k^{(n-1)}(r)$. 在文献[10]，[11]中已建立了这样一类线性算子，它们在 $\mathfrak{N}_{2n-1}^T$ 中取值并在卷积函数类(特别包括 $M\widetilde{W}_\infty^r$ 和 $M\widetilde{W}_1^r$，这里 $r>0$ 为有理数)及共轭函数类上产生最佳逼近的上确界．

对于以 2π 为周期，$k\pi/n$ 为结点且亏数为 1 的 m 阶样条子空间 $S_{2n}^m(\dim S_{2n}^m=2n)$ 所作的逼近来说，下述等式成立：

$$E(M\tilde{W}_p^r,S_{2n}^{r-1})_{\tilde{L}_p}=\mathscr{E}(M\tilde{W}_p^r,S_{2n}^{r-1})_{\tilde{L}_p}=MK_rn^{-r}.$$
$$p=1,\infty;\ n,r=1,2,\ldots.$$

这时，根据 r 的奇偶性而分别在 $(2k+1)\pi/2n$ 和 $k\pi/n$ 对函数 f 进行插值的样条，$\sigma_{r-1}(f,t)\in S_{2n}^{r-1}$ 提供了两种最佳线性方法．这些样条关于函数类 $M\widetilde{W}_\infty^r$ 具有特殊的逼近性质，因为它们在任何 $\widetilde{L}_p$ 空间中都可以对函数 $f\in M\widetilde{W}_\infty^r$ 进行最佳逼近(见[7]，[15])．

当(1)与(3)等价且可以构造具体的线性方法来解决这两类问题时，所考虑的情形在熟知意义下是最优的．鉴于一般的对偶定理反映了几何凸分析中的基本关系，事实证明，在其他场合下，采用基于这些定理的方法求解(1)是富有成效的(见[7]，[8])．例如，若 X 是任一赋范线性空间，X^* 是其对偶空间，$\mathfrak{N}$ 是 X 中的凸集，则对任何 $x\in X$ 有

$$\inf_{u\in\mathfrak{N}}\|x-u\|=\sup_{\substack{F\in X^*\\ \|F\|\leqslant 1}}\left[F(x)-\sup_{u\in\mathfrak{N}}F(u)\right];\qquad(4)$$

特别地，若 $\mathfrak{N}$ 是子空间，则有

$$\inf_{u\in\mathfrak{N}}\|x-u\|=\sup\{F(x):F\in X^*,\ \|F\|\leqslant 1,\ F(u)=0,\ 对一切\ u\in\mathfrak{N}\}.\qquad(5)$$

在某些场合下，借助于(4)或(5)，就可将上确界(1)的计算与估计问题转化为更明显的寻求定义在某个函数集上显式泛函的极值问题，其中，若 $\mathfrak{N}$ 为子空间，还得考虑此函数集的正交性条件．例如，利用(5)和已知的不等式，就可将 $E(\widetilde{W}_q^r,\mathfrak{N}_{2n-1}^T)_{\widetilde{L}_p}$ $(1\leqslant p,q\leqslant\infty)$ 的估计问题转化为在满足条件

$$\int_0^{2\pi}g(t)\begin{matrix}\cos kt\\ \sin kt\end{matrix}dt=0,\ k=0,\ldots,n-1,$$

的函数 $g\in W_{p'}^r$，$p'=p/(p-1)$ 所组成的集合上计算范数 $\|g\|_{q'}(q'=q/(q-1))$ 的上确界问题．当函数类的约束条件不是由 r 阶导数 $f^{(r)}(t)$ 的范数而是由其连续模 $\omega(f^{(r)},\delta)_X$ 给定时，则在此函数类上求解问题(1)就会得出更精确的结果．特别有趣的是当 $\mathfrak{M}=\widetilde{W}^rH^\omega(r=0,1,\cdots;\ \widetilde{W}^0H^\omega=\widetilde{H}^\omega)$ 为满足条件

$$\omega(f^{(r)},\delta)_C=\omega(f^{(r)},\delta)\leqslant\omega(\delta)$$

的周期为 2π 的函数 $f\in\widetilde{C}^r(\widetilde{C}^0=\widetilde{C})$ 所形成的函数类时，其中 $\omega(\delta)$ 是给定的连续模，例如，$\omega(\delta)=M\delta^\alpha(0<\alpha\leqslant 1,0\leqslant\delta\leqslant\pi)$．应用(5)式需要借助于形如关于导数模的比较定理和 **Колмогоров 不等式** (Kolmogorov inequality) 中的关于可微周期函数方面的精致结果，这里的定理及不等式是利用(等可测函数的)重排方法进行描述的．若 $\omega(\delta)$ 是上凸的，则下述等式(见[7]、[15])成立：

$$E(\tilde{W}^rH^\omega,\mathfrak{N}_{2n-1}^T)_X=E(\tilde{W}^rH^\omega,S_{2n}^r)_X=\|f_{nr}(\omega)\|_X,$$
$$n=1,2,\ldots;\ r=0,1,\ldots.$$

其中 $X=\widetilde{C}$ 或 $\widetilde{L}_1$，$f_{nr}(\omega,t)$ 是 $\widetilde{W}^rH^\omega$ 中周期为 $2\pi/n$ 且在周期上的平均值为 0 的函数，它使 $f_{nr}^{(r)}$ 为在 $[0,\pi/2n]$ 上等于 $[\omega(\pi/n-2t)]/2$，在 $[\pi/2n,\pi/n]$ 上等于 $-[\omega(2t-\pi/n)]/2$ 的偶函数．范数 $\|f_{nr}(\omega)\|_X$ 具有显式表示，例如，

$$\|f_{n0}(\omega)\|_{\tilde{C}}=\frac{1}{2}\omega\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

$$\|f_{nr}(\omega)\|_{\tilde{C}}=\frac{1}{2n^r}\int_0^\pi\Phi_r(\pi-t)\omega\left(\frac{t}{n}\right)dt,\quad r=1,2,\ldots,$$

其中函数 $\Phi_k(t)$ 在 $[0,\pi]$ 上由下述递推关系式给出：

$$\Phi_1(t)=\frac{1}{2},\ \Phi_k(t)=\frac{1}{2}\int_0^{\pi-t}\Phi_{k-1}(u)du.$$

关于函数类 $\widetilde{W}H^\omega$ 的从 $\widetilde{C}$ 到 $\mathfrak{N}_{2n-1}^T$ 或 S_{2n}^r 的最佳线性方法当 $\omega(\delta)=m\delta(0\leqslant\delta\leqslant\pi)$ 亦即当 $\widetilde{W}^rH^\omega=M\widetilde{W}_\infty^{r+1}$ 时是已知的．S_{2n}^r 中的插值样条 $\sigma_r(f,t)$(对任何凸 $\omega(\delta)$) 只有当 $r=1$ 时才达到上确界 $E(\widetilde{W}^rH^\omega,S_{2n}^r)_{\tilde{C}}$．

关于有穷区间上没有刚性的边界约束条件的函数类极值问题的解，不可能得到像周期情形下那样完美的结果，因区间的端点对极值函数具有扰动影响，因此需要增加函数的可微阶．关于这方面已得到了一些较精确的渐近结果．若 MW^rH^α $(r=0,1,\cdots,\ 0<\alpha<1,\ MW^0H^\alpha=MH^\alpha)$ 是由满足

$$|f^{(r)}(t')-f^{(r)}(t'')| \leq M\,|t'-t''|^{\alpha} \quad (t',t''\in[-1,1])$$

的$f\in C^r[-1,1]$组成的函数类，则对于$n-1$次代数多项式子空间$\mathfrak{N}_n^A$在$[-1,1]$上所作的最佳一致逼近，下列关系式成立：

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha}E(MH^{\alpha},\mathfrak{N}_n^A)_C = \frac{M\pi^{\alpha}}{2}, \qquad (6)$$

$$\lim_{n\to\infty} n^{r+\alpha}E(MW^rH^{\alpha},\mathfrak{N}_n^A)_C = \frac{M}{2}\int_0^{\pi}\Phi_r(\pi-t)t^{\alpha}\,dt, \qquad (7)$$

$$r=1,2,\ldots,$$

将这些结果与周期情形下的相应结果进行比较是有所裨益的．当$\alpha=1$时，(6)，(7)的右端分别等于MK_1和MK_{r+1}．如果放弃对最佳逼近多项式的要求，那么就可以获得较强的结果，这些结果实质上改善了在$[-1,1]$端点处的逼近并保持了整个区间上的最佳渐近特征．例如，对任何$f\in MH^{\alpha}$，存在代数多项式序列$p_n(f,t)\in\mathfrak{N}_n^A$，使得当$n\to\infty$时，下列关系式在$t\in[-1,1]$上一致成立：

$$|f(t)-p_n(f,t)| \leq \frac{M}{2}\left[\left[\frac{\pi}{n}\sqrt{1-t^2}\right]^{\alpha}+o(n^{-\alpha})\right] =$$
$$= E(MH^{\alpha},\mathfrak{N}_n^A)_C[(1-t^2)^{\alpha/2}+o(1)].$$

对$MW^rH^1(r=1,2,\cdots)$也有类似的结果(见[11])．关于(最佳及插值型)样条逼近给定在区间上函数类的问题，若干精确及渐近精确的结果(主要是对于低阶样条)已公诸于世(见[15])．

就(积分度量下的)单边逼近而言，关于上述函数类用多项式和样条进行最佳逼近的误差估计也已得到了一系列精确的结果(见[14])．在推导这些结果的过程中，实质上利用了最佳逼近在锥约束下的对偶关系．

对给定的函数类$\mathfrak{M}$，寻求其(固定维数的)最佳逼近工具将导致确定所谓的**宽度**(width)问题，亦即确定(参考(1)，(3))

$$d_N(\mathfrak{M},X) = \inf_{\mathfrak{N}_N} E(\mathfrak{M},\mathfrak{N}_N)_X,$$

$$d'_N(\mathfrak{M},X) = \inf_{\mathfrak{N}_N} \mathscr{E}(\mathfrak{M},\mathfrak{N}_N)_X,$$

(其中下确界取自X的所有N维子空间$\mathfrak{N}_N$(及其平移))，以及确定实现这些下确界的(最佳)极子空间问题．d_N与d'_N的上界可由$E(\mathfrak{M},\mathfrak{N})_X$和$\mathscr{E}(\mathfrak{M},\mathfrak{N}_N)_X$分别给出，对于具体的子空间$\mathfrak{N}_N$来说，$E(\mathfrak{M},\mathfrak{N})_X$和$\mathscr{E}(\mathfrak{M},\mathfrak{N}_N)_X$是已知的．宽度问题中的主要困难是获取下确界．在某些场合下，可借助于拓扑中的Borsuk对映定理(见[8])而得到这些下确界．在用($n-1$阶三角多项式)子空间$\mathfrak{N}_{2n-1}^T$或(关于节点$k\pi/n$亏数为1的m阶样条)子空间S_{2n}^m解决函数类$M\widetilde{W}_p^r$及周期函数类W^rH^{ω}的最佳逼近问题时，已知的上确界$E(\mathfrak{M},\mathfrak{N}_N)_X$几乎在所有的情况下同时也就是这些函数类的$d_N$值．此外，对周期函数类还有$d_{2n-1}=d_{2n}$．特别有(见[7]，[8]，[15]，[16])

$$d_{2n-1}(\widetilde{W}_{\infty}^r,\widetilde{C}) = d_{2n}(\widetilde{W}_{\infty}^r,\widetilde{C}) = d_{2n-1}(\widetilde{W}_1^r,\widetilde{L}_1) =$$
$$= d_{2n}(\widetilde{W}_1^r,\widetilde{L}_1) = K_r n^{-r},\quad n,r=1,2,\ldots,$$

且对上凸的$\omega(\delta)$和$\widetilde{X}=\widetilde{C}$或$\widetilde{L}_1$有

$$d_{2n-1}(\widetilde{W}^rH^{\omega},X) = d_{2n}(\widetilde{W}^rH^{\omega},X) = \|f_{nr}(\omega)\|_X,$$
$$n=1,2,\ldots;\ r=0,1,\ldots.$$

应当注意到，就所考虑的函数类而言，对所有的r，$\mathfrak{N}_{2n-1}^T$是最佳的，并且对这些函数类来说，没有任何$2n$维子空间能产生比($2n-1$维的)$\mathfrak{N}_{2n-1}^T$更好的逼近．样条子空间S_{2n}^m在$\widetilde{C}$中当$m=r$时对$\widetilde{W}_{\infty}^{r+1}$和$\widetilde{W}^rH^{\omega}$在$\widetilde{L}_1$中当$m\geq r$时对$\widetilde{W}_p^{r+1}$均是最佳的．$\widetilde{C}$中$\widetilde{W}_{\infty}^r$以及$\widetilde{L}_1$中$\widetilde{W}_1^r$的线性宽度均为$d_N$，它们是由以上提及的最佳线性方法在$\mathfrak{N}_{2n-1}^T$与$S_{2n}^{r-1}$上实现的．当$N=2n-1$时，$\widetilde{W}_2^r$在$\widetilde{L}_2$中的宽度$d_N$与当$N=2n$时的宽度$d'_N$相等且由Fourier三角和实现．在某些场合下，关于区间上函数类的宽度已得到了若干精确的渐近结果．例如，在$C[-1,1]$中，W_{∞}^r的宽度d_N与d'_N相等并由关于非均匀剖分下的$r-1$阶插值样条实现(见[8])．

若X^r是由X中函数的r重积分组成的(非局部紧)集，则在X^r上估计逼近误差的问题就可以合理地转化为对$f\in X^r$和固定的$\gamma>0$估计

$$\frac{E(f,\mathfrak{N}_N)_X}{\omega(f^{(r)},\gamma)_X}$$

($\omega(g,\delta)_X$是g在X中的连续模)或者(在具体的逼近方法下)估计

$$\frac{\|f-U_Nf\|_X}{\omega(f^{(r)},\gamma)_X}$$

的问题．确定上述两式在X^r中的上确界等价于寻求相应于**Jackson不等式**(Jackson inequality)中的最小常数；从而就可以讨论所有N维子空间的极小化问题．在许多场合下，这些问题已得到了解决．例如，在不等式

$$E(f,S_{2n}^r)_{\widetilde{C}} \leq M_r n^{-r}\omega\left(f^{(r)},\frac{\pi}{n}\right)_{\widetilde{C}},\quad f\in\widetilde{C}^r,$$

中，最小常数为$M_r=K_r/2$，并且用任何同样维数的其它子空间来代替S_{2n}^r都不可能改善这个常数(见[15])．在关于三角逼近的Jackson不等式中，已得到了一致度量和积分度量下的准确常数(见[7])．在非周期情形下，也已得到一些渐近结果．

当逼近集不是线性流形而是某个凸集时，用某种意义下具有最佳光滑性质的函数类 $\mathfrak{M}_1$ 逼近另一函数类 $\mathfrak{M}$ 的问题引起了人们的兴趣．这个问题最初只是发生于寻求上确界

$$E(\tilde{H}^{\omega}, \mathfrak{N}_{2n-1}^{r})_{\tilde{C}} \quad (\mathfrak{M} = \tilde{H}^{\omega}、\mathfrak{M}_1 = M\tilde{W}_{\infty}^{1})$$

过程中的一个中间环节(见[7])；后来被看成是一个独立的问题而对其进行研究．在某些场合下，可利用(4)获得其精确结果．

对于

$$\mathfrak{M} = M_1 W_p^r,$$

$$\mathfrak{M}_1 = M_2 W_q^k \quad (0<r<k)$$

人们发现有界线性算子对可微算子的最佳逼近与有关导数范数的不等式之间存在着某些联系(见[13])．

函数逼近中的许多极值问题皆可解释成最优恢复问题(见[15], [17], [18])．假定函数 $f \in X$ 的信息由向量 $T(f,\Lambda)=\{\lambda_1(f),\cdots,\lambda_n(f)\}$ 给出，其中 λ_k 是 X 上给定的泛函(例如，f 或它的某阶导数在固定点的值)．已知 f 属于某个函数类 $\mathfrak{M}$，需要根据信息 $T(f,\Lambda)$ 以最小的误差恢复 f 或 f 的某个线性泛函 $L(f)$(例如，$L(f)=f(\bar{t})$，$L(f)=\int_a^b f(t)dt$，等等)．极小化问题不仅要考虑将向量 $T(f,\Lambda)$ 与函数 $\varphi(t) \approx f(t)$（或泛函 $l(f) \approx L(f)$）进行对应的方法 S，而且也要涉及泛函 λ_k $(k=1,\cdots,N)$ 的选取．根据误差度量及方法 S 类的选取，函数的最优恢复问题有时可转化为确定宽度 d_N, d_N'，Чебышев 中心或 $\mathfrak{M}$ 的其他特征问题．根据形如 $\{f(t_k)\}$ 或 $\{f^{(\nu)}(t_k)\}$ 的有关信息，对 $\int_a^b f(t)dt$ 进行最优恢复的问题将导致关于 $\mathfrak{M}$ 的最佳求积公式问题．在某些场合下，样条可以充当最优恢复工具；例如，S_{2n}^{r-1} 中在等距节点 t_k 处插值 f 的样条 $\sigma_{r-1}(f,t)$ 就可以根据信息 $\lambda_k(f)=f(t_k)$ 在每个 $t \neq t_k$ 点处恢复 $f \in \tilde{W}_{\infty}^{r}$ 并在整个函数类 $\tilde{W}_{\infty}^{r}$ 上具有最小误差．

在多元函数空间中，除了有关 Hilbert 空间中的平凡逼近外，(至1983年)还没有得到任何极值问题的精确解．在少数场合下，关于 Fourier 和或其某个平均对函数类进行一致逼近的误差已获得了某种渐近关系(见[12])．

参考文献

[1] Kolmogorov, A. N., *Ann. Math.*, **36** (1935), 2, 521–526.

[2] Kolmogorov, A. N., *Ann. Math.*, **37** (1936), 1, 107–110.

[3] Favard, J., *C. R. Acad. Sci.*, **203** (1936), 1122–1124.

[4A] Favard, J., Sur les meilleurs procédés d'approximation de certaines classes de fonctions par des polynômes trigonométriques, *Bull. Sci. Math.*, **61** (1937), 209–224.

[4B] Favard, J., Sur les meilleurs procédés d'approximation de certaines classes de fonctions par des polynômes trigonométriques, *Bull. Sci. Math.*, **61** (1937), 243–256.

[5] Никольский, С. М., 《Тр. Миан СССР》, **15** (1945), 1–76.

[6] Никольский, С. М., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **10** (1946), 207–256.

[7] Корнейчук, Н. П., Экстремальные задачи теории приближения, М., 1976（中译本：Н. П. 考涅楚克，逼近论的极值问题，上海科学技术出版社，1982）.

[8] Тихомиров, В. М., Некоторые вопросы теории приближений, М., 1976.

[9] Дзядык, В. К., Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами, М., 1977.

[10] Ахиезер, Н. И., Лекции по теории аппроксимации, 2 изд., М., 1965（中译本：Н. И. 阿赫叶惹尔，逼近论讲义，科学出版社，1957）.

[11] Тиман, А. Ф., Теория приближения функций действительного переменного, М., 1960（英译本：Timan, A. F., Theory of approximation of functions of a real variable, Pergamon Press, 1963）.

[12] Степанец, А. И., Равномерные приближения тригонометрическими полиномами, Линейные методы, К., 1981.

[13] Корнейчук, Н. П., 《Матем. заметки》, **20** (1976), 5, 655–664.

[14] Корнейчук, Н. П., 《Укр. матем. журн.》, **31** (1979), 4, 380–388.

[15] Корнейчук, Н. П., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **45** (1981), 2, 266–290.

[16] Арестов, В. В., 《Тр. матем. ин-та АН СССР.》, **138** (1975), 3–28.

[17] Великин, В. Л., 《Матем. заметки》, **22** (1977), 5, 663–670.

[18] Лигун, А. А., 《Anal. Math.》, **5** (1979), 4, 269–286.

[19] Корнейчук, Н. П., Лигун, А. А., Доронин, В. Г., Аппроксимация с ограничениями, К., 1982.

Н. П. Корнейчук 撰

【补注】A. Pinkus 的近作[A1]中列出了一份详尽而有价值的参考书目．

参考文献

[A1] Pinkus, A., n-widths in approximation theory, Springer, 1985.

[A2] Micchelli, C. A. and Rivlin, T. J., A survey of optimal recovery, in C. A. Micchelli and T. J. Rivlin (eds.): Optimal estimation in approximation theory, Plenum Press, 1977, 1–54.

王仁宏、檀结庆 译　杨应辰 校

函数逼近，线性方法[approximation of functions, linear methods; приближение функций линейные методы приближения]

由线性算子所定义的逼近方法．如果在赋范线性空间 X 中将线性流形(线性子空间)选作逼近集，则任何将函数 $f\in X$ 变换成函数 $U(f,t)=(Uf)(t)\in\mathfrak{N}$ 且满足

$$U(\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2,t)=\alpha_1 U(f_1,t)+\alpha_2 U(f_2,t)$$

(其中 α_1 和 α_2 为任意数)的线性算子 U 均定义了 $\mathfrak{N}$ 中函数对 X 中函数的一种线性逼近方法(linear approximation method)．一个线性逼近方法称为是射影的(projective)如果对所有 $f\in\mathfrak{N}$，$U(f,t)=f(t)$；称为是正的(positive)，如果对非负函数 f 有 $U(f,t)\geqslant 0$．

最有意思的是有限维数的情形．此时，若 $\mathfrak{N}=\mathfrak{N}_N$ 是 N 维子空间，则有

$$U(f,t)=U_N(f,t)=\sum_{k=1}^{N}c_k(f)\varphi_k(t), \qquad (1)$$

其中 $\{\varphi_k(t)\}_1^N$ 是 $\mathfrak{N}_N$ 的基底，c_k 为定义在 X 上的线性泛函．线性无关系 $\{\varphi_k(t)\}_1^N$ 和泛函集 $\{c_k\}_1^N$ 的选取依赖于构造线性方法时所用函数的有关信息．如果 $c_k(f)=f(t_k)$ (这里 $\{t_k\}_1^N$ 是 f 的定义域中的固定点组)，且 $\varphi_k(t_i)=0$，$(i\neq k)$，$\varphi_k(t_k)=1$，则 $U_N(f,t_k)=f(t_k)$ $(k=1,\cdots,N)$，此时得到一种插值方法(interpolation method) (如，Lagrange 插值多项式或插值样条(interpolation spline))．如果 $X=H$ 是Hilbert 空间，$c_k(f)$ 为函数 f 关于标准正交系 $\{\varphi_k(t)\}$ 的 Fourier 系数，则(1)的右端的和式导致了 X 到 $\mathfrak{N}_N$ 上的正交投影线性方法(linear method of orthogonal projection)；此时，

$$\|f-U_N(f)\|_H=\inf_{\alpha_k}\left\|f-\sum_{k=1}^{N}\alpha_k\varphi_k\right\|_H.$$

因此，可用函数 φ_k 的线性组合对 f 作最佳逼近．

线性逼近方法的理论中最引人注目的是收敛问题．令 X 为一 Banach 空间，$\{\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots\}$ 是 X 上某个线性无关函数系，令 $\mathfrak{N}_N$ 为这个系的前 $N(N=1,2,\cdots)$ 个元素形成的子空间，U_N 为 X 到 $\mathfrak{N}_N(N=1,2,\cdots)$ 上的有界线性算子．对任何 $f\in X$，收敛关系式 $U_N(f,t)\to f(t)$ (在 $\|U_N-f\|_X\to 0(N\to\infty)$ 的意义下)成立，当且仅当：1) U_N 的范数列 $\|U_N\|$ 有界，见 **Banach-Steinhaus 定理** (Banach-Steinhaus theorem)；2) 对于 X 中处处稠密的集合 A 上的所有函数 f 有 $U_N(f,t)\to f(t)$．特别地，在周期为 2π 的函数空间 $\widetilde{L}_p=\widetilde{L}_p[0,2\pi]$ $(1<p<\infty)$ 中，当算子 S_n 由 f 的三角 Fourier 和

$$S_n(f,t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kt+b_k\sin kt), \qquad (2)$$
$$n=1,2,\ldots,$$

定义时，上述两个条件可得到满足．故可以将所有三角多项式集合取作使 2)满足的集合 A．若 X 是(全实轴上周期 2π 的连续函数)空间 $\widetilde{C}=\widetilde{C}[0,2\pi]$ 或 X 为 $\widetilde{L}_1$，则 $\|S_n\|\sim\ln n$，$n\to\infty$ (见 **Lebesgue 常数** (Lebesgue constants))．从而，在空间 $\widetilde{C}$ 及 $\widetilde{L}_1$ 中存在有使序列 $\{S_n(f,t)\}$ 在适当度量下不收敛的函数 f．因为在范数具有平移不变性的 Banach 空间 X 中，将 X 投影到最多 n 次三角多项式子空间 T_n 上的线性算子 $U_n^{\perp}$ 满足不等式 $\|U_n^{\perp}\|\geqslant\|S_n\|$ (见[3])，于是序列 $\{U_n^{\perp}\}$ 在空间 $\widetilde{C}$ 与 $\widetilde{L}_1$ 中也是发散的．特别地，这个结论对于 $\widetilde{C}$ 中任何三角点阵上的 Lagrange 插值算子列为真．即使在非周期情形下，对于从空间 $C[a,b]$ 和 $L_1[a,b]$ 到至多 n 次代数多项式子空间 $A_n(n=1,2,\cdots)$ 上的线性投影算子来说，类似的反面结论仍然成立．

对于 $\widetilde{C}$ 中某些函数，序列(2)是发散的，因此有必要考察各种平均 Fourier 和以弥补这一不足．**Fejér 求和法** (Fejér summation method) 和 **Бернштейн-Rogosinski 求和法** (Bernshtein-Rogosinski summation method)皆为Fourier 和的平均的特例，它们都是形如

$$U_n^{\lambda}(f,t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{(n)}(a_k\cos kt+b_k\sin kt), \qquad (3)$$
$$n=1,2,\ldots$$

的多项式(只不过数值系数 $\lambda_k^{(n)}$ 不同而已)．因为

$$U_n^{\lambda}(f,t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{(n)}\cos k(t-u)\right]f(u)\,du, \qquad (4)$$

故平均和式(3)属于一类很广的线性逼近方法，这类方法可以表成 f 与某个(奇异)核的卷积形式，而奇异核的性质(此时即为三角数阵 $\{\lambda_k^{(n)}\}$ 的性质)直接决定了收敛问题的结论．如果

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_k^{(n)}=1,\quad k=1,2,\ldots,$$

则当 f 为三角多项式时，和式(3)一致收敛，从而条件 2)得到满足．为使从 $\widetilde{C}$ 到 $\widetilde{C}$ 的算子 U_n^{λ} 的范数是有界的，必须对 n 及 $k(k=1,\cdots,n)$ 一致地有

$$\frac{\lambda_1^{(n)}}{n}+\cdots+\frac{\lambda_n^{(n)}}{1}=O(1)$$

及

$$\lambda_k^{(n)}=O(1).$$

如果对矩阵 $\{\lambda_k^{(n)}\}$ 施以一些附加条件(例如，行或列的凸性或凹性)，则上述条件对序列 $\{\|U_N^{\lambda}\|\}$ 的有界性也是充分的．类似(3)，利用系数矩阵 $\{\lambda_k^{(n)}\}$，我们还可以通过 Fourier-Чебышев 和式(对 $f\in C[-1,1]$)以及 $[-1,1]$ 上结点为 $2k\pi/(2n+1)$ (周期情形)或 $\cos[(2k-1)\pi/(2n+2)]$ 的 Lagrange 插值多项式构造其他各种平均(见[6])．

从 $C[a,b]$ 到 A_n 或从 $\widetilde{C}$ 到 T_n 的线性正算子 U_n^{+} (特别是形如(4)的带正核的算子)的收敛性问题已通过三个

测试函数而得到解决(见[1]):算子列 $U_n^+(f,t)$一致收敛于 $f(t)\in C[a,b]$ 或 $f(t)\in\widetilde{C}$ 的充分必要条件是对 $g(t)=1$, t, t^2或 $g(t)=1$, $\sin t$, $\cos t$, $U_n^+(g,t)$ 一致收敛于 $g(t)$.

研究线性方法产生的逼近误差大多归结为研究 $U_N(f,t)$收敛于$f(t)$的速度，根据被逼近函数的微分差分性质去估计误差以及随着(被逼近函数的)光滑性质的改善而考察线性方法引起的反应等问题.

在讨论线性逼近方法(1)的逼近性质时，子空间 $\mathfrak{N}_N$ 的元素对f的最佳逼近 $E(f,\mathfrak{N}_N)$ 自然起一定的作用. **Lebesgue 不等式**(Lebesgue inequality)

$$\| f-S_n(f)\|_{\widetilde{C}} \leqslant E(f,T_n)_{\widetilde{C}}(\ln n+3) \qquad (5)$$

以及 **Jackson 不等式**(Jackson inequality)

$$E(f,T_n)_{\widetilde{C}} \leqslant Mn\omega\left(f^{(r)},\frac{1}{n}\right)$$

(其中 $\omega(g,\delta)$是函数 $g\in\widetilde{C}$ 的连续模)表明: 尽管 Fourier 和的逼近阶较之于最佳逼近略为逊色((5)中的 $\ln n$ 不能用常数取代)，但这些和式将随着被逼近函数可微阶数的增高而受到影响. 对于某些线性逼近方法来说，无论函数f的可微性如何好，都不能使逼近阶高于某个定量(饱和现象(phenomenon of saturation)). 这样，正线性多项式算子 U_n^+ 的逼近阶不可能高于$O(n^{-2})$; 对 Féjer 和来说，其饱和阶为 $O(n^{-1})$; 对 Бернштейн-Rogosinski 和而言，饱和阶为 $O(n^{-2})$. 适当选取插值样条的结点不仅能保证对于函数本身有最好的逼近阶，而且还能保证对于它的某些导数(依赖于组成此样条的多项式次数)具有最好的逼近阶(见[7], [8]).

在一些特殊场合下，对于具体的线性逼近方法，已得到了对于某些函数类逼近误差的准确或渐近准确的估计. 严格地说，这类问题的非平凡结果最先是由 А. Н. Колмогоров 得到的，他于 1935 年证明了

$$\sup_{f\in W^rK}\| f-S_n(f)\|_{\widetilde{C}} = \frac{4K}{\pi^2}\frac{\ln n}{n^r}+O(n^{-r}),$$

其中 $W^rK(r=1,2,\cdots)$是由$[0,2\pi]$上$f^{(r-1)}(t)$绝对连续，且几乎处处满足 $|f^{(r)}(t)|\leqslant K$的函数 $f\in\widetilde{C}$ 所组成的函数类. 随后，关于其他重要函数类的 Fourier 和(及其某些平均)也得到了一些具有类似特征的结果，例如，借助于r阶导数连续模的上界来估计误差(见[2],[6],[9]). 特别有趣的是，对于某些用子空间 $\mathfrak{N}_N$ 进行逼近的函数类，线性逼近方法(1)能产生最佳逼近的上确界. 对于函数类 $W^rK(r=1,2,\cdots)$, 适当选取 $\lambda_k^{(n)}$ 后这种性质对形如(3)的和式也成立. 例如，当 $r=1$ 时就应取

$$\lambda_k^{(n)} = \frac{k\pi}{2n+2}\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{2n+2};$$

这个性质还适用于以 $k\pi/n(k=0,1,\cdots)$ 作为结点的 $r-1$ 阶亏数为 1 的插值样条(见[4]，亦见**函数逼近**，**函数类的极值问题**(approximation of functions, extremal problems in function classes); **最佳线性方法**(best linear method)).

参考文献

[1] Коровкин, П. П., Линейные операторы и теория приближений, М., 1959 (中译本: П. П. Коровкин, 线性算子与逼近论，高等教育出版社，1960).

[2] Дзядык, В. К., Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами, М., 1977.

[3] Тихомиров, В. М., Некоторые вопросы теории приближений, М., 1976.

[4] Корнейчук, Н. П., Экстремальные задачи теории приближения, М., 1976 (中译本: Н. П. 考涅楚克，逼近论的极值问题，上海科学技术出版社，1982).

[5] Гончаров, В. Л., Теория интерполирования и приближения функций, 2 изд., М., 1954 (中译本: В. Л. 冈察洛夫，函数插补与逼近理论，科学出版社，1958).

[6] Тиман, А. Ф., Теория приближения функций действительного переменного, М., 1960 (英译本: Timan, A. F., Theory of approximation of functions of a real variable, pergamon, 1963).

[7] Ahlberg, J. H., Nilson, E. and Walsh, J. L., The theory of splines and their applications, Acad. Press, 1967.

[8] Стечкин, С. Б., Суботин, Ю. Н., Сплайны в вычислительной математике, М., 1976.

[9] Степанец, А. И., Равномерные приближения тригонометрическими полиномами, Линейные методы, К., 1981.

[10] Корнейчук, Н. П., Сплайны в теории приближения, М., 1976.

[11] Rice, J. R., The approximation of functions 1, linear theory, Addison-Wesley, 1964.

[12] Schumaker, L. L., Spline functions, basic theory, Wilty, 1981.

[13] Davis, P. J., Interpolation and approximation, Dover, reprint, 1963.

Н. П. Корнейчук 撰

【补注】 三个测试函数足以检验从 $C[a,b]$ 到 A_n(或从 $\widetilde{C}$ 到 T_n)的线性正算子列的一致收敛性这一事实是由 H. Bohman (见[A2])得到的，它可视为 **Bernshtein 定理**(Bernshtein theorem)的一种推广(见[A1]第3章第3节). 关于积分算子，P. P. Korovkin 得到了类似的结果.

参考文献

[A1] Cheney, E. W., Introduction to approximation theory, Chelsea, reprint, 1982.

[A2] Bohman, H., On approximation of continuous and of analytic functions, *Arkiv Mat.* **2** (1952), 43–56.

[A3] Kiesewetter, H., Vorcesungen über lineare Approximation Deutsch, Verlag Wissenschaft., 1973.

[A4] DeVore, R. A., The approximation of continuous fun-

ctions by positive linear operators, Springer, 1972.

[A5] Cheney, E. W., Hobby, G. R., Morris, P. D., Schurer, F. and Wubert, D. E., *On the minimal property of the Fourier projection*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **143** (1969), 249 – 258.

王仁宏，檀结庆 译 杨应辰 校

函数逼近度 [approximation of functions, measure of; приближения функций мера]

逼近误差的定量表示．当考虑用函数 φ 逼近函数 f 时，常用包含 f 和 φ 的函数空间中的度量来定义逼近度 $\mu(f,\varphi)$．例如，若 f 和 φ 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数，则通常使用 $C[a,b]$ 的一致度量作为逼近度，即

$$\mu(f,\varphi)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|f(t)-\varphi(t)|.$$

如果不能保证被逼近函数是连续的或问题的条件暗示了 f 和 φ 在 $[a,b]$ 上平均意义下接近的重要性，则可采用空间 $L_p[a,b]$ 中的积分度量作为逼近度，即

$$\mu(f,\varphi)=\int_a^b q(t)|f(t)-\varphi(t)|^p\,dt,\quad p>0,$$

其中 $q(t)$ 是权函数．就实际问题而言，$p=2$ 的情形是最常用也是最方便的．见**函数的均方逼近**(mean square approximation of a function)．

逼近度可以只涉及到 f 和 φ 在 $[a,b]$ 上某些离散点 $t_k(k=1,\cdots,n)$ 的值，例如：

$$\mu(f,\varphi)=\max_{1\leqslant k\leqslant n}|f(t_k)-\varphi(t_k)|,$$

$$\mu(f,\varphi)=\sum_{k=1}^{n}q_k|f(t_k)-\varphi(t_k)|^p,$$

其中 q_k 是正系数．

用类似方式可定义两个或更多个变量的函数逼近度．

函数族 F 对函数 f 的逼近度通常定义为**最佳逼近**(best approximation)

$$E(f,F)=\mu(f,F)=\inf_{\varphi\in F}\mu(f,\varphi).$$

而

$$E(\mathfrak{M},F)=\mu(\mathfrak{M},F)=\sup_{f\in\mathfrak{M}}\inf_{\varphi\in F}\mu(f,\varphi)$$

常被看作是某个固定集 F 中的函数 φ 对 f 所在的函数族 $\mathfrak{M}$ 的逼近度．它刻画了 $\mathfrak{M}$ 中的函数与最靠近它们的 F 中的函数之间的最大偏差．

在任一度量空间 X 中考虑函数逼近时，一般将 x 和 u（或集 F）之间的度量距离 $\rho(x,u)$（或 $\rho(x,F)$）视作元素 u（或集 F）对元素 x 的逼近度 $\mu(x,u)$．

参考文献

[1] Гончаров, В. Л., Теория интерполирования и приближения функций, 2 изд., М., 1954（中译本：В. Л. 冈察洛夫，函数插补与逼近理论，科学出版社 1958）.

[2] Никольский, С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, 2 изд., М., 1977（英译本：Nikol'skiĭ, S. M., Approximation of functions of several variables and imbedding theorems, Springer, 1975）.

[3] Rice, J. R., The approximation of functions, 1 – 2, Addison - Wesley, 1964 – 1968.

Н. П. Корнейчук В. П. Моторный 撰

【补注】 逼近度也称作误差度(error measure)．

参考文献

[A1] Lorentz, G. G., Approximation of functions, Holt, Rinehart and Winston, 1966.

[A2] Pinkus, A., *n* - widths in approximation theory, Springer, 1985（译自俄文）.

王仁宏，檀结庆 译

复变函数逼近 [approximation of functions of a complex variable; приближение функций комплексного переменного]

复分析的一个分支，旨在研究借助于特殊的解析函数近似表示（逼近）复变函数的问题．关于逼近的可能性，逼近速度以及各种函数表示方法（插值序列和级数，正交多项式与 Faber 多项式级数，连分式与 Padé 逼近，指数多项式序列与 Dirichlet 级数，等等）的逼近性质等问题构成了复变函数逼近理论的基本问题．复变函数逼近论与复分析的其他分支乃至与整个数学均有着密切的关系；在逼近论中，保角映射、积分表示、势理论及泛函代数理论等方面的方法和结果均起着重要的作用．

复变函数逼近论的中心问题涉及到：借助于多项式和有理函数的逼近，特别是最佳逼近多项式和有理函数（存在性、唯一性、特征性质）以及关于多项式与有理函数的极值问题和各种估计（增长估计，关于多项式与有理函数的导数不等式，最小零偏差，等等）．

А. А. Гончар 撰

复变函数借助于多项式和有理函数的逼近．复变函数逼近论的这个分支可分成以下几个方面：

1) 根据 $f(z)$ 有定义的集 E 的性质、偏差 ρ 的度量性质以及函数 $f(z)$ 本身的性质，研究多项式和有理函数在任意给定精度下对复变函数 $f(z)$ 进行逼近的可能性(possibility of approximation)．

2) 研究最佳逼近多项式(polynomials of best approximation)和最佳逼近有理函数(rational functions of best approximation)的性质．所谓最佳逼近多项式和最佳逼近有理函数分别是指次数不高于 n $(n=0,1,\cdots)$ 的多项式 $P_n(z;f,E,\rho)$ 和有理函数 $R_n(z;f,E,\rho)$，它们满足

$$\rho(f,P_n(z;f,E,\rho))=$$

$$= E_n(f, E, \rho) \overset{\text{def}}{=} \inf\{\rho(f, P): \deg P \leqslant n\},$$

$$\rho(f, R_n(z; f, E, \rho)) =$$

$$= R_n(f, E, \rho) \overset{\text{def}}{=} \inf\{\rho(f, R): \deg R \leqslant n\},$$

其中下确界分别取自所有次数$\deg P \leqslant n$的多项式和所有次数$\deg R \leqslant n$的有理函数(或者取自从属于任何附加条件的这些多项式或有理函数的子集).事实上,这里所讨论的正是有关某类极值问题解的性质.其他的有关对多项式集、有理函数集和某些解析函数类的极值问题的研究以及对多项式和有理函数解析性质的研究(特别是这些函数及其导数的不同范数间的不等式)均属此列.

3) 研究当$n \to \infty$时,$E_n(f, E, \rho)$和$R_n(f, E, \rho)$趋于零的速度对f, E和ρ的性质的依赖关系(即逼近论中所谓的正定理(direct theorems)),以及研究f对$n \to \infty$时,$E_n(f, E, \rho)$或$R_n(f, E, \rho)$趋于零的速度与E, ρ的性质的依赖关系(即逆定理(inverse theorems)).研究已知的复变函数逼近方法(例如,**Faber多项式**(Faber polynomials)级数,各种**插值过程**(inter-polation process))的逼近性态以及寻求新的有效逼近方法与上述诸方面均有着不可分割的联系.

4) 多复变函数逼近.这里基本上要解决与单复变函数同样的问题,然而所采用的方法和得到的结果与单复变情形通常是大相径庭的.

下面列出的是某些基本结果.

1) 关于用多项式任意精确地进行一致逼近的可能性问题已由下述诸定理解决:**Runge定理**(Runge theorem)(若f在E上解析),**Лаврентьев定理**(Lavrent'ev theorem)(若f在E上连续),**Келдыш定理**(Keldysh theorem)(若E是闭域,f在E上连续且在E内解析),**Мергелян定理**(Mergelyan theorem)(一般情况下,E是紧集,f在E上连续且在E的内点上解析).

2) Runge定理解决了扩充复平面$\overline{\mathbf{C}}$的闭子集E上全纯函数的逼近可能性问题.研究对各种空间中函数f按这些空间中的度量用有理函数逼近的可能性时,集合$e \subset \mathbf{C}$的类似于**解析容量**(analytic capacity)$\gamma(e)$的数量特征起着重要作用.借助于$\gamma(e)$,有理函数在紧集E上以任意精度逼近任何连续函数的充分必要条件为:对任何圆$\sigma(r, a) = \{z : |z-a| < r\}$, $a \in \mathbf{C}$, $r > 0$,有

$$a)\ \gamma(\sigma(r, a) \setminus E) = \gamma(\sigma(r, a)) = r$$

或对任何$a \in E$,有

$$b)\ \overline{\lim_{r \to 0}} \frac{\gamma(\sigma(r, a) \setminus E)}{r^2} = \infty$$

(条件(a)与(b)的等价性表明了解析容量的"不稳定性").

3) 如果E有界且Lebesgue可测及$1 \leqslant p < 2$,则所有有理函数集在空间$L^p(E)$中稠密.

4) 如果$p > 0$,G为具有Jordan可求长边界的单连通区域,则所有关于z的多项式组成的类在**Смирнов类**(Smirnov class)$E_p(G)$中稠密,当且仅当G是**Смирнов域**(Smirnov domain).

5) 设复值函数$\varphi_1(z), \cdots, \varphi_n(z)$, $f(z)$在紧集$E \subset \mathbf{C}$上连续,$n \geqslant 1$.在所有形如

$$P(z) = c_1\varphi_1(z) + \cdots + c_n\varphi_n(z)$$

($c_1, \cdots, c_n$为任意复数)的广义多项式中,广义多项式$P_0(z)$在度量

$$\rho_C(f, P) = \max\{|f(z) - P(z)| : z \in E\}$$

的意义下与f偏差最小,当且仅当对每个$P(z)$下式成立:

$$\min\{\mathrm{Re}[P(z)(P_0(z) - f(z))]:$$
$$z \in E,\ |f(z) - P_0(z)| = \rho_C(f, P_0)\} \leqslant 0.$$

6) 如果E是具有连通补集G的紧集并在G内存在极点为∞的(Laplace方程第一边值问题的)**Green函数**(Green function)$g(z, \infty)$,则对于任意的$z \in G$及任何n次多项式$P(z)$下列不等式皆成立:

$$|P(z)| \leqslant M \exp\{ng(z, \infty)\}$$

其中$M = \max\{|P(z)| : z \in E\}$.

7) 如果E是具有连通补集G的有界非退化连续统,$f(z)$在E上连续(连续模为$\omega(\delta)$)且在E的内点解析,则有

$$E_n(f, E, \rho_C) \leqslant C(f)\omega\left[d\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right],$$

其中

$$d(t) = \max\{\min\{|\xi - z| : \xi \in G, g(\xi, \infty) =$$
$$= \ln(1+t)\} : z \in \partial G\}.$$

如果闭域$\overline{G}$囿于解析曲线Γ内,则条件

$$E_n(f, E, \rho_C) = O(n^{-p-\alpha})$$

等价于$f^{(p)}(z)$在G内满足α阶$(0 < \alpha < 1)$ Hölder条件.关于Γ为逐段光滑的具有角点的曲线人们也进行了研究.

8) 在许多场合下,各种插值过程,包括**Padé逼近**(Padé approximation)及其推广,均是逼近解析函数的有效工具.

9) 当 $n\geqslant 2$ 时，在 $\mathbf{C}^n$ 中既存在非闭 Jordan 曲线，在此曲线上，不是每一个连续函数都可用关于 $(z_1, \cdots, z_n)$ 的多项式任意精确地进行一致逼近，也存在闭 Jordan 曲线，在此曲线上可借助于多项式一致逼近任何连续函数．在 $\mathbf{C}$ 中这是不可能的．

10) 关于用带自由极点(即对逼近函数的极点的位置不附加任何条件)的有理函数进行逼近方面，迄今(1983)为止，只获得了为数较少的正定理，然而逆定理的数量却相当可观．

参考文献

[1] Гончаров, В. Л., Теория интерполирования и приближения функций, М., 1954 (中译本: В. Л. 冈察洛夫，函数插补与逼近理论，科学出版社，1958).

[2] Walsh, J. L., Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain, Amer. Math. Soc., 1969.

[3] Смирнов, В. И., Лебедев, Н. А., Конструктивная теория функций комплексного переменого, М. - Л., 1964 (英译本: Smirnov, V. I. and Lebedev, N. A., Functions of a complex variable, constructive theory, M. I. T., 1968).

[4] Дзядык, В. К., Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами, М., 1977.

[5] Русак, В. Н., Рациональные функции как аппарат приближения, Минск, 1979.

[6] Gamelin, T. W., Uniform algebras, Prentice-Hall, 1969.

[7] Леонтьев, А. Ф., Ряды экспонент, М., 1976.

[8] Некоторые вопросы теории приближений, М., 1963 (译自英文).

[9] Келдыш, М. В., 《Докл. АН СССР》, 4 (1936), 163 – 166.

[10] Лаврентьев, М. А., 《Тр. физ. - матем. ин-та АН СССР》, 5 (1934), 159 – 245.

[11] Колмогоров, А. Н., 《Успехи матем. наук》, 3 (1948), 216 221.

[12] Мергелян, С. Н., 《Успехи матем. наук》, 7 (1952), 31 – 122.

[13] Витушкин, А. Г., 《Успехи матем. наук》, 22 (1967), 141 – 199.

[14] Джрбашян, М. М., 《Матем. сб.》, 36 (1955), 353 – 440.

[15] Гончар, А. А., в кн.: Тр. Международного конгресса математиков, Москва, 1966, М., 1968, 329 – 356.

[16] Долженко, Е. П., Ульянов, П. Л., 《Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем. Мех.》, 1980, 1, 3 – 13.

[17] Мергелян, С. Н., в кн.: Математика в СССР за сорок лет, I (1959), М., 383 – 398.

[18] Гончар, А. А., Мергелян, С. Н., в кн.: История отечественной математики, т. 4, кн. 1, К., 1970, 112 – 193.

[19] Тамразов, П. М., Гладкости и полиномиальные приближения, К., 1975.

[20] Мельников, М. С., Синанян, С. О., в кн.: Современные проблемы математики, М., 4 (1975), 143 – 250

Е. П. Долженко 撰

【补注】 令 $E\subset\mathbf{C}$ 为一紧集．用 $A(E)$ 表示在 E 上连续且在 E 的内点(如果有的话)解析的函数 f 所组成的集合．用 $P(E)$ 和 $R(E)$ 分别表示在 E 上能用多项式和有理函数进行一致逼近的函数 $f\in A(E)$ 的集合．Мергелян 定理指出: 1) $A(E)=P(E)$ 当且仅当 E 的补集 CE 是连通的; 2) $A(E)=R(E)$ 如果 CE 是有限连通的．已经知道说明 $A(E)\neq R(E)$ 的紧集 E 的例子，(如 A. Roth 的瑞士乾酪，见[A1])．由此也就产生刻画满足 $A(E)=R(E)$ 的那些集合 E 的问题．E. Bishop 和 A. Г. Витушкин 就没有内点的紧集合各自独立地解决了这个问题，Витушкин 还就一般的紧集 E 解决了这个问题．Витушкин 定理(Vitushkin theorem)可在[A1]中找到．

集合 $A(E)$, $P(E)$ 和 $R(E)$ 均为**一致代数**(uniform algebra)，例如，具有上范数的**函数代数**(algebra of functions)；关于这方面的详细内容见[6]和[A4]．

另一个研究方向就是考虑用幂函数 z^{λ_n} 或指数函数 $e^{i\lambda_n z}$(其中 $\{\lambda_n\}\subset\mathbf{R}$)的线性组合在集合 $E\subset\mathbf{C}$，大多在满足某个"振荡条件"的曲线上进行逼近而不是用 $1, z, z^2, \cdots$，或 $\cdots, z^{-1}, 1, z, \cdots$ 的线性组合(即，多项式或有理函数)来进行逼近．**Müntz 定理**(Müntz theorem)；**缺项幂级数**(lacunary power series)；**Paley - Wiener 定理**(Paley - Wiener theorem)，解析函数的零点集等等均与这方面有关(见[A5])．

在 $\mathbf{C}^n$ 中，逼近问题实质上依赖于所考虑的区域的几何性质(刻画全纯区域的 **Levi 问题**(Levi problem)就与这方面有关)．Hörmander $\bar\partial$ 技巧(Hörmander $\bar\partial$ mechanism)为解决这种逼近问题提供了一种途径(见[A6])．Kerzman 定理(Kerzman theorem)即为一例: 令 $\Omega\subset\mathbf{C}^2$ 为具有充分光滑边界(c^5 足够)的强伪凸区域，则可用函数 f_j 在 $\bar\Omega$ 上一致逼近任一在 Ω 上全纯在 $\bar\Omega$ 上连续的函数 $f(z)$，这里 f_j 在包含 $\bar\Omega$ 的某个(强伪凸)区域 $\hat\Omega$ 上是全纯的(见[A7])．

参考文献

[A1] Gaier, D., Vorlesungen über Approximation im Komplexen, Birkhäuser, 1980.

[A2] Buck, R. C., Survey of recent Russian literature on approximation, in R. E. Langer (ed.), On numerical approximation, Univ. of Wisconsin Press, 1959, 341 – 359.

[A3] Korevaar, J., Polgnomial and rational approximation in the complex domain, in J. G. Clunie (ed.), Aspects of contemporary complex analysis, Acad. Press, 1980, 251 – 292.

[A4] Stout, E. L., The theory of uniform algebras, Bogden & Quigley, 1971.

[A5] Redheffer, R. M., Completeness of sets of complex exponentials, *Adv. in Math.*, 24 (1977), 1 – 62

[A6] Hörmander, L., An introduction to complex analysis in several variables, North-Holland, 1973.

[A7] Kerzman, N., Hölder and L^p estimates for solutions of $\bar{\partial}u=f$ on strongly pseudo-convex domains, Commun. *Pure Appl. Math.*, **24** (1971), 301–380.

王仁宏、檀结庆 译 杨应辰 校

多实变函数逼近 [approximation of functions of several real variables; приближение функций многих действительных переменных]

依赖于两个或更多变量的函数

$$f(t)=f(t_1,\ldots,t_m),\quad m\geqslant 2$$

的逼近，见**函数逼近** (approximation of functions)．与一元情形相比较，研究 m ($m\geqslant 2$) 个变量的函数逼近要复杂得多，这是因为将要产生一些新的与维数相关的问题．首先，多元逼近与所考虑的区域有关．在一元情形下，单连通紧集即为区间．然而，$\mathbf{R}^m$ (即使是平面) 中的单连通紧集可能有许多不同的形状；因此，有必要按照，例如，区域边界的光滑性质将它进行分类．描述 m 元函数的微分差分性质也显得较繁琐．一般地说，不同的方向有不同的性质，刻画它们不仅要考虑区域的几何形状而且要兼顾边界附近函数的性态，从而，研究函数的边界性质十分重要．如果试图通过过渡到具有更简单结构的区域上来简化逼近问题的解，那么就会产生将函数 f 从一个区域 $Q\subset\mathbf{R}^m$ 延拓到另一包含 Q 的标准域 Q_1 (例如，平行六面体或整个空间 $\mathbf{R}^m$) 并保持某些光滑性质的问题 (见**扩张定理** (extension theorems))．这类问题与**嵌入定理** (imbedding theorems) 及数学物理中边值问题的解有着密切的联系．

独立变量数目的增加无疑会使逼近工具复杂化，因为随着维数的增加，多项式的次数也跟着增加．关于变量 $t_1,\cdots,t_m$ 的次数分别为 $n_1,\cdots,n_m$ 的代数多项式可写成如下形式：

$$P_{n_1,\ldots,n_m}(t_1,\ldots,t_m)=\sum a_{k_1,\ldots,k_m}t_1^{k_1}\cdots t_m^{k_m},\quad (1)$$

其中 $a_{k_1,\ldots,k_m}$ 为实系数．求和是关于 k_ν ($\nu=1,\cdots,m$) 从 0 到 n_ν 进行的．这样，每个变量次数均为 3 的 m 元多项式子空间的维数就是 4^m．有时候，多项式的整体次数 n 是固定的；此时 (1) 的求和就要针对所有满足不等式 $0\leqslant k_1+\cdots+k_n\leqslant n$ 的指标进行．关于变量 $t_1,\cdots,t_m$ 次数分别为 $n_1,\cdots,n_m$ 的实三角多项式可写成如下形式：

$$T_{n_1,\ldots,n_m}(t_1,\ldots,t_m)=\sum a_{k_1,\ldots,k_m}\exp\left[i\sum_{\nu=1}^{m}k_\nu t_\nu\right],$$

其中指标符号相反的系数 $a_{k_1,\ldots,k_m}$ 互为复共轭，并且求和是关于 k_ν ($\nu=1,\cdots,m$) 从 $-n_\nu$ 到 n_ν 进行的．这样的多项式也可表为形如 $\varphi_{k_1}(t_1)\cdots\varphi_{k_m}(t_m)$ 的所有可能乘积的线性组合形式，其中 $\varphi_{k_\nu}(t_\nu)$ 为 $\sin k_\nu t_\nu$ ($0\leqslant k_\nu\leqslant n_\nu$) 或 $\cos k_\nu t_\nu$ ($0\leqslant k_\nu\leqslant n_\nu$)．多元样条是由 m 个变量的代数多项式"片"按照确定的光滑条件"粘结"在一起而形成的，它有着广泛的应用领域．当 $m=2$ 时，最简单的多元样条是由多项式片按照与坐标轴平行的直线拼接而成的．作为逼近的工具，$g(t_1,\cdots,t_m)$ 也可是关于其中某几个变量的多项式或样条函数．对于整个空间 $\mathbf{R}^m$ (或 $\mathbf{R}^m$ 的某个无界子集) 上给定的非周期函数的逼近，可借助于指数型整函数来实现．指数型整函数可以表成绝对收敛的幂级数和的形式

$$G_{n_1,\ldots,n_m}(t_1,\ldots,t_m)=\sum_{\substack{k_\nu\geqslant 0,\\ \nu=1,\ldots,m}}a_{k_1,\ldots,k_m}t_1^{k_1}\cdots t_m^{k_m}\quad (2)$$

这里要对任何 $\varepsilon>0$ 和所有复变量 $t_1,\cdots,t_m$ 有

$$|G_{n_1,\ldots,n_m}(t_1,\ldots,t_m)|\leqslant M_\varepsilon\exp\sum_{\nu=1}^{m}(n_\nu+\varepsilon)|t_\nu|,$$

其中 M_ε 是一个仅与 ε 有关的常数 (见[1])．应该注意到，与多项式不同，函数 (2) 由无穷多个参数确定．

在多元场合，Weierstrass 定理 (Weierstrass theorem) 也成立．它阐明了利用代数 (或三角) 多项式以任意精度逼近某个有界闭集 $Q\subset\mathbf{R}^m$ 上连续的函数 $f\in C(Q)$ (或于整个空间 $\mathbf{R}^m$ 上连续且按每个变量周期均为 2π 的函数 $f\in\widetilde{C}(\mathbf{R}^m)$) 的可能性．在空间 $L_p(Q)$ 及 (周期情形下的) 空间 $\widetilde{L}_p(\mathbf{R}^m)$ ($1\leqslant p<\infty$) 中类似的结论也成立．关于最佳逼近的存在性、唯一性、最佳逼近函数的特征性质等方面的一般结果和定理以及借助于函数的凸集，特别是子空间，进行逼近时的一般对偶关系等均可以推广到 m 元赋范线性函数空间中去 (见[3]，[4])．然而，要想在多元情形下通过考虑具体的度量和逼近子空间的特定性质而获得这些定理的明确阐述，困难是很大的．

人们已对多变量函数的光滑性与用代数多项式、三角多项式以及整函数对其所作的最佳逼近的递减速度之间的关系问题进行了较透彻的研究．

令 Q 为 $\mathbf{R}^m$ 中的任一开集 (特别地，$Q=\mathbf{R}^m$)，$\mathbf{e}$ 为 $\mathbf{R}^m$ 中的单位向量，$h>0$ 并令 Q_{he} 是由满足 $[t,t+he]\in Q$ 的点 $t\in Q$ 组成的集合．若 $f\in L_p(Q)$ 且 $1\leqslant p<\infty$，则称

$$\omega_e(f;\delta)_{L_p(Q)}=\sup_{h<\delta}\|f(t+he)-f(t)\|_{L_p(Q_{he})}$$

为函数 $f(t_1,\cdots,t_m)$ 沿方向 $\mathbf{e}$ 关于 $L_p(Q)$ 度量的**连续模** (modulus of continuity)．称

$$\omega(f;\delta)_{L_p(Q)}=\sup_{e}\omega_e(f;\delta)_{L_p(Q)}$$

为 f 在 $L_p(Q)$ 中的**连续模**．

在周期情形下，三角多项式 $T_{n_1,\ldots,n_m}$ 对具有 (Sobolev 广义) 偏导数

$$D_{\nu}^{r_{\nu}} f = \frac{\partial^{r_{\nu}}}{\partial t_{\nu}^{r_{\nu}}} f \in \tilde{L}_p(\mathbf{R}^m)$$

(其中 $r_\nu \geqslant 0$ 为整数，$D_\nu^0 f = f$, $\nu = 1, \cdots, m$) 的函数 $f \in \widetilde{L}_p(\mathbf{R}^m)$ 的最佳逼近 $\widetilde{E}_{n_1,\cdots,n_m}(f)_{\widetilde{L}_p}(\mathbf{R}^m)$ 满足不等式

$$\tilde{E}_{n_1,\cdots,n_m}(f)_{\tilde{L}_p(\mathbf{R}^m)} \leqslant M \sum_{\nu=1}^{m} n_\nu^{-r_\nu} \omega_{\mathbf{e}_\nu}(D_\nu^{r_\nu} f; n_\nu^{-1})_{\tilde{L}_p(\mathbf{R}^m)}, \quad (3)$$

其中 $\mathbf{e}_\nu$ 是沿 t_ν 方向的单位向量，常数 M 与 f 及 n_ν 均无关。对于有 $r = r_1 + \cdots + r_m$ (这里 $\mathbf{r} = (r_1, \cdots, r_m)$) 阶广义偏导数

$$D^{\mathbf{r}} f = \frac{\partial^r}{\partial t_1^{r_1} \cdots \partial t_m^{r_m}} f \in \tilde{L}_p(\mathbf{R}^m)$$

的函数 $f \in \widetilde{L}_p(\mathbf{R}^m)$，下述不等式成立：

$$\tilde{E}_{n,\cdots,n}(f)_{\tilde{L}_p(\mathbf{R}^m)} \leqslant \frac{M}{n^r} \sum_{r_1+\cdots+r_m=r} \omega(D^{\mathbf{r}} f; n^{-1})_{\tilde{L}_p(\mathbf{R}^m)}, \quad (4)$$

如果

$$\omega(D^{\mathbf{r}} f; \delta)_{\tilde{L}_p(\mathbf{R}^m)} \leqslant K \delta^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1,$$

即函数 $D^{\mathbf{r}} f$ 满足 **Hölder 条件**(Hölder condition)，则有

$$\tilde{E}_{n,\cdots,n}(f)_{\tilde{L}_p(\mathbf{R}^m)} \leqslant \frac{M}{n^{r+\alpha}}, \quad r = 0, 1, \cdots; \ 0 < \alpha \leqslant 1. \quad (5)$$

当 $D^{\mathbf{r}} f$ 满足 Hölder 条件时，(5) 的逆也成立，亦即，如果对函数 $f \in \widetilde{L}_p(\mathbf{R}^m)$，不等式 (5) 对所有 $n = 1, 2, \cdots$ 均成立，则导数 $D^{\mathbf{r}} f \in \widetilde{L}_p(\mathbf{R}^m)$ 存在并且对任何 $\mathbf{h} \in \mathbf{R}^m$，当 $0 < \alpha < 1$ 时，满足不等式

$$\| D^{\mathbf{r}} f(\mathbf{t} + \mathbf{h}) - D^{\mathbf{r}} f(\mathbf{t}) \|_{\tilde{L}_p(\mathbf{R}^m)} \leqslant K |\mathbf{h}|^\alpha \quad (6)$$

当 $\alpha = 1$ 时，满足不等式

$$\| D^{\mathbf{r}} f(\mathbf{t} + \mathbf{h}) - 2D^{\mathbf{r}} f(\mathbf{t}) - D^{\mathbf{r}} f(\mathbf{t} - \mathbf{h}) \|_{\tilde{L}_p(\mathbf{R}^m)} \leqslant K |\mathbf{h}| \quad (7)$$

这里，K 与向量 $\mathbf{h} = (h_1, \cdots, h_m)$ 的长度 $|\mathbf{h}| = (h_1^2 + \cdots + h_m^2)^{1/2}$ 无关。

对于非周期函数 $f \in L_p(\mathbf{R}^m)$，如果利用指数型整函数作为逼近工具，则也有类似的结论。若函数的光滑性是借助于更高阶的连续模（光滑模）来描述的，则以上的结果也可以推广到这样的函数类中去（见[1]）。

当利用代数多项式 $p_{n_1,\cdots,n_m}$ 在某个有界平行多面体（或某些其他的有界集）上逼近函数 $f \in L_p(Q)$ 时，类似 (3)，(4) 和 (5) 的正定理已得到了证明。这些定理的逆，如对定义于有穷区间上的函数那样，只可能在 Q 的某个紧子集 Q_1 上成立。如果假定在 Q 的边界邻域内有更好的逼近阶（有关正定理指出：有角点的某个邻域内改善逼近阶是有可能的，见[14]），则这些逆定理均成立（见[13]），即使（像一元情形那样）在边界的某个邻域内提高逼近阶，函数 f 属于 $H_C^{r+\alpha}(Q)$（函数类 $H_C^{r+\alpha}(Q)$ 由类似于 (6) 和 (7) 的条件在 $C(Q)$ 的度量下定义）的充分必要条件仍然是未知的（至 1983 年）。

然而，下述否定命题是成立的（见[13]）。令 $Q = \{\mathbf{t} : \mathbf{t} \in R^2, |\mathbf{t}| \leqslant 1\}$，则在 Q 中不存在任何函数列 $\lambda_n^{(\alpha)}(|\mathbf{t}|)$ $(n = 1, 2, \cdots; 0 < \alpha < 1)$ 具有下述两个性质：

1) 对任何函数 $f \in H_C^\alpha(Q)$，存在常数 M 和多项式列

$$P_n(\mathbf{t}) = \sum_{0 \leqslant k_1 + k_2 \leqslant n} a_{k_1, k_2}^{(n)} t_1^{k_1} t_2^{k_2}, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

使得

$$|f(\mathbf{t}) - P_n(\mathbf{t})| \leqslant M \lambda_n^{(\alpha)}(|\mathbf{t}|), \quad \mathbf{t} \in Q. \quad (8)$$

2) 满足 (8) 式的常数 $M > 0$ 及多项式列 $P_n(\mathbf{t})$ 的存在性蕴含了对任何定义于 Q 上的函数 f 皆有 $f \in H_C^\alpha(Q)$.

为阐明多元函数逼近的特定性质，下述结果值得一提。

令 $\widetilde{E}_{n_1,n_2}(f)_{\widetilde{X}}$ 为三角多项式 T_{n_1,n_2} 在 $\widetilde{X}$ ($\widetilde{X} = \widetilde{C}(\mathbf{R}^2)$，或 $\widetilde{X} = \widetilde{L}_p(\mathbf{R}^2)$) 的度量下对周期 2π 的二元函数 f 的最佳逼近，$\widetilde{E}_{n_1,\infty}(f)_{\widetilde{X}}$ 为函数 $T_{n_1,\infty}$（此处 $T_{n_1,\infty}$ 是一个三角多项式，它关于变量 t_1 的次数至多为 n_1 且关于 t_1 的系数是 t_2 的函数）在 $\widetilde{X}$ 中对 f 的最佳逼近。可类似地定义 $\widetilde{E}_{\infty,n_2}(f)_{\widetilde{X}}$.

如果 $1 < p < \infty$，则有不等式

$$\tilde{E}_{n_1,n_2}(f)_{\tilde{L}_p(\mathbf{R}^2)} \leqslant A_p \{ \tilde{E}_{n_1,\infty}(f)_{\tilde{L}_p(\mathbf{R}^2)} + E_{\infty,n_2}(f)_{\tilde{L}_p(\mathbf{R}^2)} \},$$

其中 A_p 仅与 p 有关。

若 $\widetilde{X} = \widetilde{L}_1(\mathbf{R}^2)$ 或 $\widetilde{X} = \widetilde{C}(\mathbf{R}^2)$，则有

$$\tilde{E}_{n_1,n_2}(f)_{\tilde{X}} \leqslant \quad (9)$$

$$\leqslant A \ln(2 + \min\{n_1, n_2\}) (\tilde{E}_{n_1,\infty}(f)_{\tilde{X}} + \tilde{E}_{\infty,n_2}(f)_{\tilde{X}}),$$

其中 A 是绝对常数，且当 $\min\{n_1, n_2\} \to \infty$ 时，(9) 中的因子 $\ln(2 + \min\{n_1, n_2\})$ 不能被以更慢速度趋于无穷的任何其他因子所代替（见[15]）。

多元函数插值有其独特的性质。例如，与一元情形不同，多元代数插值多项式的存在性实质上取决于插值节点的分布。然而，人们已经建立了一些有效方法旨在于特定的节点网上构造插值函数 $f(t_1, \cdots, t_m)$ 的多项式及样条，见**插值**(interpolation)。关于多元样条插值，在某些场合下已得到了函数 f 及其偏导数的逼近误差阶的估计；在这方面，对低次二元样条以及任意次局部 (Hermit) 样条的研究是比较透彻的（见[7]，[10]－[12]）。在关于多元函数逼近的其他线性方法中，对多重 Fourier 和及其各种平均的研究最为细致。这方面已得到关于函数类逼近误差阶的估计，在某些场合下还得到了渐近的精确结果（见[5]，[6]，[8]）。

参考文献

[1] Никольский, С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, 2 изд., М., 1977（英

译本：Nikol'skii, S. M., Approximation of functions of several variables and imbedding theorem, Springer, 1975).

[2] Гутер, Р. С., Кудрявцев, Л. Д., Левитан, Б. М., Элементы теории функций, М., 1963, 106－198.

[3] Корнейчук, Н. П., Экстремальные задачи теории приближения, М., 1976 (中译本：Н. П. 考涅楚克，逼近论的极值问题，上海科学技术出版社，1982).

[4] Тихомиров, В. М., Некоторые вопросы теории приближений, М., 1976.

[5] Дзядык, В. К., Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами, М. 1977.

[6] Тиман, А. Ф., Теория приближения функций действительного переменного, М., 1960 (英译本：Timan, A. F., Theory of approximation of functions of a real variable, Pergamon, 1963).

[7] Стечкин, С. Б., Субботин, Ю. Н., Сплайны в вычислительной математике, М., 1976.

[8] Степанец, А. И., Равномерное приближение тригонометрическими полиномами. Линейные методы, К., 1981.

[9] Laurent, P. J., Approximation et optimisation, Hermann, 1972.

[10] Ahlberg, J. H., Nilson, E. N. and Walsh, J. F., Theory of splines and their applications, Acad. Press, 1967.

[11] Завьялов, Ю. С., Квасо, Б. И., Мирошниченко, В. Л., Методы сплайн-функций, М., 1980.

[12] Varga, R. S., Functional analysis and approximation theory in numerical analysis, Reg. Conf. Series in Appl. Math., 3, SIAM, 1971.

[13] Никольский, С. М., 《Сиб. матем. ж.》, 10 (1969), 5, 1075－1083.

[14] Брудный, Ю. А., 《Докл. АН СССР》, 195 (1970), 5, 1007－1009.

[15] Темляков, В. Н., 《Докл. АН СССР》, 223 (1975), 1079－1082.

В. Н. Коновалов, Н. П. Корнейчук 撰

【补注】

参考文献

[A1] Cheney, E. W., Four lectures on multivariate approximation, in S. P. Singh, J. H. W. Burry and B. Watson (eds.): Approximation theory and spline functions, Reidel, 1984, pp. 65－87.

[A2] Schempp, W. and Zeller, K. (eds.): Multivariate approximation theory, Birkhäuser, 1979.

[A3] Schempp, W. and Zeller, K. (eds.): Multivariate approximation theory Ⅱ, Birkhäuser, 1982.

[A4] Schempp, W. and Zeller, K. (eds.): Multivariate approximation theory Ⅲ, Birkhäuser, 1985.

[A5] Schempp, W. and Zeller, K. (eds.): Constructive theory of functions of several variables, Springer, 1977.

[A6] Lorentz, G. G., Approximation of functions, Holt, Rinehart and Winston, 1966 (中译本：G. G. 洛伦茨，函数逼近论，上海科学技术出版社，1981).

[A7] Golomb, M., Approximation by functions of fewer variables, in R. E. Langer (ed.): On numerical approximation, Univ. of Wisconsin Press, 1959, pp. 275－327.

[A8] Schumaker, L. L., Spline functions. Basic theory, Wiley, 1981.

王仁宏、檀结庆 译　杨应辰 校

逼近阶 [approximation order; приближения порядок]

逼近误差的阶，它作为一个变量依赖于某个连续的或离散的变量 τ，而 τ 又与另一变量 $\varphi(\tau)$ 相关，$\varphi(\tau)$ 的性态通常假定是已知的．一般地，τ 是一个参量，它表示逼近集的数值特征(如集合的大小)或逼近方法的数值特征(如插值步骤)．此外，τ 值所组成的集可能有一个有穷或无限的极限点．函数 $\varphi(\tau)$ 常常是一个幂函数，指数函数或对数函数．被逼近函数(或它的某个导数)的**连续模**(modulus of continuity)或其控制函数可看作 $\varphi(\tau)$.

逼近方法的性质及被逼近对象的性质(例如，被逼近函数的差分微分性质)确定了逼近阶，见**函数逼近，正定理和逆定理**(approximation of functions, direct and inverse theorems)．

在数值分析中，如果某个数值方法产生的误差为 $O(h^m)$，则称指数 m 为其逼近阶，其中 h 为此方法所采用的步长．

参考文献

[1] Гончаров, В. Л., Теория интерполирования и приближения функций, 2 изд., М., 1954 (中译本：В. Л. 冈察洛夫，函数插补与逼近理论，科学出版社，1958).

[2] Тиман, А. Ф., Теория приближения функций действительного переменного, М., 1960 (英译本：Timan, A. F., Theory of approximation of functions of a real variable, Pergamon, 1963).

[3] Бахвалов, Н. С., Численные методы, т. 1, М., 1975 (英译本：Bakhvalov, N. S., Numerical methods, analysis, algebra, ordinary differential equations, Mir, 1977).

Н. П. Корнейчук, В. П. Моторный 撰

【补注】

参考文献

[A1] Müller, M. W., Approximations theorie, Akad. Verlagsgesellschaft, Wiesbaden, 1978.

[A2] Lorentz, G. G., Approximation of functions, Holt, Rinehart and Winston, 1966.

【译注】

参考文献

[B1] Lorentz, G. G., Jetter, K. and Riemenschneider, S. D., Birkhoff interpolation, Addison-Wesley, 1983.

[B2] Nürnberger, G., Approximation by spline functions, Springer, 1989.

王仁宏、檀结庆 译　杨应辰 校

逼近论 [approximation theory; приближений теория]

数学分析的一个分支，它研究用一些数学对象逼近另一些数学对象的方法以及由此产生的误差估计问题.

函数逼近 (approximation of functions) 是逼近论的主要内容. П. Л. Чебышев 在 1854 -1859 年间所作的关于用多项式对函数进行最佳一致逼近方面的工作以及 K. Weierstrass 1885 年建立的原则上可用多项式按任意事先给定的误差逼近有限区间上的连续函数的理论为函数逼近奠定了基础. H. Lebesgue, Ch. J. de la Vallée-Poussin, С. Н. Бернштейн, D. Jackson, J. Favard, А. Н. Колмогоров 以及 С. М. Никольский 等关于函数和函数类逼近的一系列基础性工作在很大程度上决定了逼近论的发展.

随着泛函分析内容的不断丰富，逼近论中的许多问题皆可在最一般的提法下进行考虑，例如考虑任意赋范线性空间 X 中元素的逼近问题. 这样就相继产生了三类问题，它们大致上反映了逼近论发展中的三个主要历史阶段.

1. 固定集合 $\mathfrak{N}\subset X$ 的元素对固定元素 $x\in X$ 的逼近. 如果将

$$E(x, \mathfrak{N}) = \inf_{u\in\mathfrak{N}} \| x-u \|$$

(即 $\mathfrak{N}$ 对 x 的**最佳逼近** (best approximation)) 取作逼近度，则除了研究和估计 $E(x, \mathfrak{N})$ 外，还产生了最佳逼近元素 $u_0\in\mathfrak{N}$ (即, u_0 满足 $\| x-u_0 \| = E(x, \mathfrak{N})$) 的存在性、唯一性及其特征性质等问题. 任何将 X 映射到 $\mathfrak{N}$ 的算子 A 均给出了一种具有误差 $\| x-Ax \|$ 的逼近方法. 如果 $\mathfrak{N}$ 是线性流形，则线性算子格外重要. 关于这样的算子列 $\{A_n\}$，产生了对任意 $x\in X$, $A_n x \to x$ 的收敛条件问题.

2. 一个固定集合 $\mathfrak{N}\subset X$ 对另一固定集合 $\mathfrak{M}\subset X$ 的逼近. 此时，最佳逼近由下式给定:

$$E(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) = \sup_{x\in\mathfrak{M}} E(x, \mathfrak{N}),$$

上式给出了用 $\mathfrak{N}$ 的元素逼近任意的 $x\in X$ 时的最小可能误差估计. 就具体情形而言，问题便在于通过给定集合 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{N}$ 的特征性质来估计或精确地表示 $E(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$. 若逼近是借助于算子 A 实现的，则要对上确界

$$\sup_{x\in\mathfrak{M}} \| x-Ax \|$$

以及 (如果 $\mathfrak{N}$ 是线性流形)

$$\mathscr{E}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) = \inf_{A X\subset\mathfrak{N}} \sup_{x\in\mathfrak{M}} \| x-Ax \|$$

进行研究，其中下确界取自所有将 X 映到 $\mathfrak{N}$ 的线性算子. 达到下确界的线性算子(如果存在的话)便给出了一个逼近的**最佳线性方法** (best linear method). 特别有兴趣的是 $\mathscr{E}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) = E(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ 的情形.

3. X 中逼近集所组成的类 $\{\mathfrak{N}\}$ 对固定集 $\mathfrak{M}\subset X$ 的最佳逼近. 假定在确定意义下，$\{\mathfrak{N}\}$ 中存在一些"等价"类，例如，包含同样多元素的集类或具有相同维数的集类. 第一种情形导致了 $\mathfrak{M}$ (关于 X) 的 ε 熵的诞生，第二种情形则产生了计算空间 X 中 $\mathfrak{M}$ 的**宽度** (width) 问题，即

$$d_N(\mathfrak{M}, X) = \inf_{\mathfrak{N}_N} E(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}_N), \qquad (1)$$

$$d'_N(\mathfrak{M}, X) = \inf_{\mathfrak{N}_N} \mathscr{E}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}_N), \qquad (2)$$

其中下确界取自 X 中所有 N 维子空间 $\mathfrak{N}_N$ (或 $\mathfrak{N}_N$ 的所有可能的平移 $\mathfrak{N}_N+a$). 这样，(1) 和 (2) 中的问题就是要分别确定关于 $\mathfrak{M}$ 的 N 维最佳及最佳线性逼近工具.

参考文献

[1] Ахиезер, Н. И., Лекции по теории аппроксимации, 2 изд., М., 1965 (中译本: Н. И. 阿赫叶惹尔, 逼近论讲义. 科学出版社, 1957).

[2] Гончаров, В. Л., Теория интерполирования и приближения функций, 2 изд., М., 1954 (中译本: В. Л. 冈察落夫, 函数插补与逼近理论, 科学出版社, 1958).

[3] Дзядык, В. К., Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами, М., 1977.

[4] Никольский, С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, 2 изд., М., 1977 (英译本: Nikol'skiĭ, S. M., Approximation of functions of several variables and imbedding theorems, Springer, 1975).

[5] Корнейчук, Н. П., Экстремальные задачи теории приближения, М., 1976 (中译本: Н. П. 考涅楚克, 逼近论的极值问题, 上海科学技术出版社, 1982).

[6] Тихомиров, В. М., Некоторые вопросы теории приближений, М., 1976.

[7] Тиман, А. Ф., Теория приближения функций действительного переменного, М., 1960 (英译本: Timan, A. F., Theory of approximation of functions of a real variable, Pergamon, 1963).

[8] Rice, J. R., The approximation of functions, 1-2, Addison-Wesley, 1964-1968.

[9] Davis, P. J., Interpolation and approximation, Blaisdell, 1965.

[10] Lorentz, G. G., Approximation of functions, Holt, Rinehart and Winston, 1966 (中译本: G. G. 洛伦茨, 函数逼近论, 上海科学技术出版社, 1981).

Н. П. Корнейчук, В. П. Моторный 撰

【补注】 有许多关于逼近(及插值)理论方面的好书. 下面的参考文献列出了其中的一些. [A1] (对定理和方法的历史) 作了大量评注并提供了一批有用的书目. 新近的书 [A2] 也提供了大量的参考文献.

参考文献

[A1] Cheney, E. W., Introduction to approximation theory, Chelsea, reprint, 1982.

[A2] Holland, A. S. B. and Sahney, B. N., The general problem of approximation and spline functions, R. E. Krieger, 1979.

[A3] Natanson, I. P., Constructive theory of functions, F. Ungar, 1964 －1965(译自俄文).

[A4] Singer, I., Best approximation in normed linear spaces by elements of linear subspaces, Springer, 1970 (译自罗马尼亚文).

[A5] Pinkus, A., n - widths in approximation theory, Springer, 1985 (译自俄文).

王仁宏、檀结庆 译 杨应辰 校

阿拉伯数字 [Arabic numerals; Арабские цифры]

数学符号 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 的惯用名称. 在 10 进制中, 每个数字都能用这些符号来表示(见数的表示法(numbers, representations of)). 这些数字产生于印度(不迟于公元 5 世纪),欧洲人是在 10 至 13 世纪通过阿拉伯著作而得知的(因此, 称为阿拉伯数字).

БСЭ-3 张鸿林 译

裁决方案 [arbitration scheme; арбитражная схема]

使每个有分配的对策(见合作对策 (cooperative game))对应唯一的称为裁决解 (arbitration solution) 的该对策的分配的一种规则. 第一个裁决方案是 J. Nash ([1]) 对于二人对策情形考虑的. 设 $R=\{u=(u_1,\cdots,u_n)\}$ 是分配集, $d=(d_1,\cdots,d_n)$ 是原状点, 即对应于不实现任何分配情形的点, 设 $[R,d]$ 是相应的裁决对策, $\bar{u}$ 是它的裁决解. 分配 u^* 称为 Nash 解 (Nash solution), 如果

$$\prod_i(u_i^*-d_i)=\max_{u\in R}\prod_i(u_i-d_i).$$

只有 Nash 解满足下列公理: 1) 如果 f 是线性不减映射, 那么 $f\bar{u}$ 是对策 $[fR,fd]$ 的裁决解(关于效用变换的不变性); 2) $\bar{u}\geqslant d$, $\bar{u}\in R$, 且不存在 $u\in R$, 使得 $u\geqslant\bar{u}$ (Pareto 最优性); 3) 如果 $R'\subset R$, $d'=d$, $\bar{u}\in R'$, 那么 $\bar{u}'=\bar{u}$ (无关交替的独立性); 4) 如果 $d_i=d_j\ (i,j=1,\cdots,n)$, 且 R 是对称的, 那么 $\bar{u}_i=\bar{u}_j\ (i,j=1,\cdots,n)$ (对称性).

对于特征函数为 v、局中人集为 $N=\{1,\cdots,n\}$ 的 n 人对策的另一种裁决方案是由 L. S. Shapley ([2]) 给出的. 设

$$\varphi_i(v)=\sum_{S\subset N}\gamma_n(s)[v(S)-v(S\setminus\{i\})],$$

$\gamma_n(s)=(s-1)!(n-s)!/n!$, s 是集合 S 的元素个数, 那么 $\varphi(v)=(\varphi_1(v),\cdots,\varphi_n(v))$, 即所谓 Shapley 解 (Shapley solution), 也满足对称性公理, 但此外还有 $\sum_i\varphi_i(v)=v(N)$, 以及对于任何两个对策 u 和 v, 等式 $\varphi(u+v)=\varphi(u)+\varphi(v)$ 成立. 对于可比较的人际效用的裁决方案也已经研究过([3]).

Nash 和 Shapley 的裁决方案曾被 J. S. Harsanyi ([4]) 推广. Harsanyi 解 (Harsanyi solution) 除满足四条 Nash 公理外, 还满足以下两条公理: 1) 解单调依赖于局中人的初始需求; 2) 如果 u^* 和 u^{**} 是两个解, 那么满足

$$u\geqslant\min_{i\in N}(u_i^*,u_i^{**})$$

的 $\bar{u}$ 也是解, 当且仅当 $\bar{u}$ 属于集合 R 的边界.

在适当的条件下, 裁决方案连续依赖于对策的参数.

参考文献

[1] Nash, J., The bargaining problem, *Econometrica*, **18** (1950), 2, 155－162.

[2] Shapley, L. S., A value for n - person games, in H. W. Kuhn, A. W. Tucker and M. Dresher (eds.), Contributions to the theory of games, Vol. 2, Princeton Univ. Press, 1953, 307－317.

[3] Raiffa, H., Arbitration schemes for generalized two - person games, in H. W. Kuhn, A. W. Tucker and M. Dresher (eds.), Contributions to the theory of games, Vol. 2, Princeton Univ. Press, 1953, 361－387.

[4] Harsanyi, J. C., A bargaining model for the cooperative n - person game, in H. W. Kuhn, A. W. Tucker and M. Dresher (eds.), Contributions to the theory of games, Vol. 4, Princeton Univ. Press, 1959, 325－355.

Э. И. Вилкас 撰

【补注】 裁决方案也称谈判方案 (bargaining schemes), Nash 解也称为谈判解 (bargaining solution). Shapley 解向量 φ 也称为 Shapley 值 (Shapley value). 对于其他更加新的谈判方案, 诸如 Kalai - Smorodinsky 解 (Kalai - Smorodinsky solution) 以及 Nash 解概念的 Szidarovsky 推广, 读者可相应地参看 [A1], [A2] 或 [A6]. 有关 Harsanyi 解的进一步发展, 见 [A3]. 有些作者把谈判方案与裁决方案区别开来. 于是 Nash 方案是谈判方案, 而 Shapley 方案则是裁决方案 ([A5]).

参考文献

[A1] Kalai, E. and Smorodinsky, M., Other solutions to Nash's bargaining problems, *Econometrica*, **43** (1975), 513－518.

[A2] Roth, A. E., Axiomatic models of bargining, Lect. Notes in Econom. and Math. Systems, 170, Springer, 1979.

[A3] Harsanyi, J. C., Papers in game theory, Reidel, 1982.

[A4] Aumann, R. J. and Shapley, L. S., Values of non-atomic games, Princeton Univ. Press, 1974.

[A5] Rapoport, A., N - person game theory: Concepts and applications, Univ. of Michigan Press, 1970, 168.

[A6] Szép, J. and Forgó, F., Introduction to the theory of games, Reidel, 1985.

[A7] Vorob'ev, N. N., Game theory, Springer, 1977 (译自俄文). 史树中 译

弧 [arc; дуга], 简单弧 (simple arc), Jordan 弧 (Jordan arc)

曲线上界于两点之间的(不包含多重点的)部分. 平面上的弧往往通过指定其各点的坐标, 即通过某一参数 $t\,(a\leqslant t\leqslant b)$ 的连续函数 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ 来定义. 这时, 假设参数 t 的不同值对应于曲线上的不同点.

【补注】 一般地说, 任何单位区间的同胚象都称为弧, 但不要同道路(path) 即以单位区间作为定义域的连续函数相混淆.

一个有关的概念是 Hausdorff 弧(Hausdorff arc)(有时也称为弧): 一个连续统(连通紧拓扑空间), 在其两点之间是不可约连通的(包含这两点的任何连通闭子集必定等于整个空间).

参考文献

[A1] Kuratowcki, K., Topology, 2, Acad. Press, 1968(译自法文). 张鸿林 译

无接触弧 [arc, contactless (free); дуга без контакта]

在微分方程二维自治系统 (autonomous system)

$$\dot{x} = P(x,y),\ \dot{y} = Q(x,y), \qquad (*)$$

的相平面中无自相交的光滑曲线, 在它的每一点系统的相位速度向量(见**相位速度向量**(phase velocity vector))有定义, 非零且不是曲线的切线向量. 此概念由 H. Poincaré([1])提出, 并被广泛地应用于微分方程的定性理论中([2]). 因此, 可以通过系统 (*) 的轨道的任意正常点引出一个长度足够小的无接触线段 (contactless segment). 无接触弧的特征是, 与此曲线相交的系统(*)的所有轨道在相同方向上与它相交. 如果沿着系统(*)流的导数(见**沿动力系统的流的微分法** (differentiation along the flow of a dynamical system))在光滑曲线的每一点上不等于零, 那么此曲线为一无接触弧. 封闭的无接触弧称为无接触圈(contactless cycle).

参考文献

[1] Poincaré, H., Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle I – IV, in Oeuvres de H. Poincaré, Vol. 1, Gauthier-Villars, 1916, 3 – 222.

[2] Lefschetz, S., Differential equations: geometric theory, Interscience, 1962 (中译本: S. 莱夫谢茨, 微分方程几何理论, 上海科学技术出版社, 1965).

H. X. Розов 撰 周芝英 译

弧函数 [arc function 或 arcus function; арофункция]

三角函数的反函数, 即下列函数之一: 反正弦、反余弦、反正切、反余切、反正割、反余割. 见**反三角函数** (inverse trigonometric functions).

【补注】

参考文献

[A1] Abramowitz, M. and Stegun, J. A., Handbook of mathematical functions, National Bureau of Standards, 1964; Dover reprint, 1972. 张鸿林 译

Archimedes 公理 [Archimedean axiom; Архимеда аксиома]

原来针对线段提出的一个公理, 如下所述: 将两给定线段中较短线段延长足够多倍, 总可得到超过两给定线段中较长线段的一个线段. 对于面积、体积、正数等, 可以类似地叙述这个公理. 一般地说, Archimedes 公理适用于一个给定的量, 如果对于这个量的任何两个值 A 和 B, $A<B$, 总可找到一个整数 m, 使得 $Am>B$. 这个公理是算术和几何中的辗转相除法的依据 (见 **Euclid 算法**(Euclidean algorithm)). Archimedes 公理的重要性, 只是在 19 世纪发现不适用这个公理的量即所谓非 Archimedes 量之后才充分显示出来(见**量** (quantity); 亦见 **Archimedes 群** (Archimedean group); **Archimedes 环** (Archimedean ring); **Archimedes 类** (Archimedean class)).

Archimedes (公元前 3 世纪) 在他的《球与圆柱》(The sphere and the cylinder)一书中明确地叙述了这个公理, 但是以前克尼多斯的 Eudoxus 已经利用过, 因此这个公理也称为 Eudoxus 公理 (Eudoxus axiom).

БСЭ-3 张鸿林 译

Archimedes 体 [Archimedean bodies; Архимеда тела]

同**半正多面体** (semi-regular polyhedra).

Archimedes 类 [Archimedean class; Архимедов класс]

全序半群(ordered semi-group) 上由 Archimedes 等价关系 (Archimedean equivalence relation) 诱导出的划分而得出的类. 这个等价性定义如下: 半群 S 的两个元素 a 与 b, 若满足四个关系

$$a\leqslant b\leqslant a^n,\quad b\leqslant a\leqslant b^n,$$
$$a^n\leqslant b\leqslant a,\quad b^n\leqslant a\leqslant b$$

之一, 就称作 Archimedes 等价的 (Archimedean equivalent); 这等于说, a 与 b 在 S 中生成同一个凸子半群. 因此, 分成 Archimedes 类的划分就是分成两两互不相交的凸子半群的划分. 此外, 每个分成两两互不相交的凸子半群的划分, 都能扩大成为一个分成 Archimedes 类的划分.

全序群 (totally ordered group)上的 Archimedes 等价性可由它的正锥的 Archimedes 等价性导出：若存在正整数 m 和 n，使得

$$|a| < |b|^m \quad 和 \quad |b| < |a|^n$$

成立，其中 $|x| = \max\{x, x^{-1}\}$，就规定 $a \sim b$. **Archimedes 群** (Archimedean group)的正锥只含一个 Archimedes 类.

О. А. Иванова 撰 戴执中 译

Archimedes 群 [Archimedean group; Архимедов группа]

偏序群 (ordered group)，在其中 Archimedes 公理 (Archimedean axiom)成立，即如果对所有的整数 n 都有 $a^n<b$ (a，b 是 Archimedes 群中的元素)，则 a 是群中的幺元(用加法符号：若 $na<b$ 对所有的整数 n 成立，则 $a=0$). 全序 Archimedes 群可描述如下(**Hölder 定理** (Hölder theorem))：一个全序群，当且仅当同构于带有通常序的实数加法群的某个子群时，才是 Archimedes 群. 因此，全体实数所成的加法群，在某种意义上是最大的全序 Archimedes 群. 所有的格序 Archimedes 群都是交换的. 不含非平凡凸子群 (convex-subgroup) 的全序群是 Archimedes 群.

参考文献

[1] Birkhoff, G., Lattice theory, Amer. Math. Soc., 1967.
[2] Кокорин, А. И., Копытов, В. М., Линейно упорядоченные группы, М. 1972 (英译本：Kokorin, A. I. and Kopytov, A. M., Fully ordered groups, Israel Progr. Sci. Transl., 1974).
[3] Fuchs, L., Partially ordered algebraic systems, Pergamon, 1963.

А. И. Кокорин, В. М. Копытов 撰 戴执中 译

Archimedes 环 [Archimedean ring; Архимедово кольцо]

偏序环 (ordered ring)，其加法群关于所给的序是一个 **Archimedes 群** (Archimedean group). 一个 Archimedes 全序环 R，或者同构于实数群的某个子群的加法群上的乘积为零的环(即对于 $\mathbf{R}$ 中所有的 x 与 y，皆有 $xy=0$)，或者同构于实数域中按通常序的唯一子环. Archimedes 全序环总是结合的和交换的.

参考文献

[1] Fuchs, L., Partially ordered algebraic systems, Pergamon Press, 1963.

О. А. Иванова 撰 戴执中 译

Archimedes 半群 [Archimedean semi-group; Архимедова полугруппа]

1) **全序半群** (ordered semi-group)，其中所有的严格正(严格负)元都属于同一 **Archimedes 类** (Archimedean class). 所有的自然序 Archimedes 半群(见**自然序广群** (naturally ordered groupoid)都同构于下列每个半群的某一子半群：由所有非负实数所成的加法半群；区间 (0, 1) 中所有的实数，按通常的序以及运算 $ab=\min\{a+b, 1\}$ 而成的半群；区间 (0, 1) 中所有的实数以及符号 ∞，按通常的序以及运算

$$ab = \begin{cases} a+b & 若\ a+b \leq 1, \\ \infty & 若\ a+b>1 \end{cases}$$

而成的半群. 第一种情形，当且仅当 S 是一个有消去律的半群时才出现.

参考文献

[1] Fuchs, L., Partially ordered algebraic systems, Pergamon, 1963.

О. А. Иванова 撰

2) 满足下列条件的半群 S：对于任何 $a, b \in S$，存在一个自然数 n，使得 $a^n \in SbS$. 若 $a^n \in Sb$ ($a^n \in bS$)，则称半群 S 为左(右) Archimedes 半群 (left (right) Archimedean semi-group). 对于交换的半群，所有这些概念都等价. 任何交换半群 S 都唯一地分解成由 Archimedes 半群所成的带(这种分解与把 S 表作半群带的最优分解是一致的). 这个结论可按别的方式推广到非交换半群([1]). 具有幂等元的半群 S 是 Archimedes 半群(右 Archimedes 半群)，当且仅当它有一个核 K，K 有一幂等元(K 是**右群** (right group)，亦见**半群的核** (kernel of a semi-group))，同时 Rees 商半群 (semi-group) 是**诣零半群** (nil semi-group). 研究无幂等元的 Archimedes 半群要困难得多. 以某些构造来给半群一种完全的描绘，只在交换的情形下才能得到，对于那些满足消去律的半群，这种描绘更为清楚.

参考文献

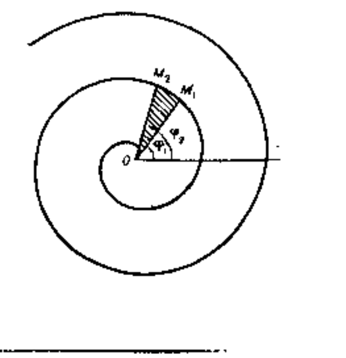
[1] Putcha, M. S., Band of t-Archimedean semigroups, *Semigroup Forum*, **6** (1973), 232–239.
[2] Clifford, A. H. and Preston, G. B., The algebraic theory of semigroups, 1–2, Amer. Math. Soc. 1961–1967.
[3] Tamura, T., Construction of trees and commutative Archimedean semigroups, *Math. Nachr.*, **36** (1968), 255–287.

Л. Н. Шеврин 撰 戴执中 译

Archimedes 螺线 [Archimedean spiral; Архимедова спираль]

平面超越曲线之一，它在极坐标中的方程具有下列形式：

$$\rho = a\varphi.$$



设点 M 沿直线 d 匀速移动，直线 d 绕本身上的一点 O 匀速转动，运动开始时点 M 与直线 d 的转动中心 O 重合，这时点 M 描绘的轨迹就是 Archimedes 螺线(见图)．两点 $M_1(\rho_1,\varphi_1)$ 和 $M_2(\rho_2,\varphi_2)$ 之间的弧长是

$$l = \frac{a}{2}\left[\varphi\sqrt{1+\varphi^2}+\ln(\varphi+\sqrt{1+\varphi^2})\right]_{\varphi_1}^{\varphi_2}.$$

由 Archimedes 螺线的一段弧和对应于角 φ_1，φ_2 的两个向径 ρ_1，ρ_2 所围成的扇形的面积是

$$S = \frac{\rho_2^3-\rho_1^3}{a}.$$

Archimedes 螺线是一种所谓代数螺线(见**螺线**(spirals))．Archimedes 螺线的推广是所谓放射螺线(neoid)，它在极坐标中的方程是

$$\rho = a\varphi + l.$$

Archimedes 螺线因 Archimedes(公元前 3 世纪)而得名，他曾研究过这种曲线的性质．

参考文献

[1] Савелов, А. А., Плоские кривые. Систематика, свойства, применения, М., 1960.

Д. Д. Соколов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Lookwood, E. H. A. book of curves, Cambridge Univ. Press, 1961.

张鸿林 译

反正弦分布 [arcsine distribution; арксинуса распределение]

实轴上的一个**概率测度**(probability measure)．它的密度在区间(0, 1)之外为零，而在区间(0, 1)之内为$(\sqrt{x(1-x)})^{-1}/\pi$. 对于 $0\leqslant x\leqslant 1$，相应的分布函数为 $(2/\pi)\arcsin\sqrt{x}$．

除反正弦分布外还用到广义反正弦分布(generalized arcsine distribution)．对 $0<\alpha<1$，广义反正弦分布对应的分布函数 $F_\alpha(x)$ 具有密度

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin\pi\alpha}{\pi}x^{-\alpha}(1-x)^{\alpha-1} & 若\ 0<x<1, \\ 0 & 若\ x\leqslant 0,\ x\geqslant 1, \end{cases}$$

密度 $f_{1/2}(x)$ 与反正弦分布的密度相同．广义反正弦分布是 B 分布 (beta-distribution)的特殊情形．广义反正弦分布的一阶矩是 $1-\alpha$，其方差是 $(1-\alpha)\alpha/2$．反正弦分布和广义反正弦分布出现在随机游动的起伏和更新理论的研究中(见**反正弦律** (arcsine law))．在数理统计中，它们作为 B 分布的特殊情形来使用．

参考文献

[1] Feller, W., An introduction to probability theory and its applications 1–2, Wiley, 1957–1971 (卷一的中译本: W. 费勒，概率论及其应用，科学出版社，上册，1964; 下册，1979).

[2] Kendall, M. G. and Stuart, A., The advanced theory of statistics. Distribution theory, Griffin, 1969.

Б. А. Рогозин 撰　刘秀芳 译

反正弦律 [arcsine law; арксинуса закон]

描述在实轴上随机游动起伏的，归结为一个**反正弦分布**(arcsine distribution)或广义反正弦分布的极限定理．1939年，P. Lévy 注意到 Brown 运动$\{\xi_t: t\geqslant 0, \xi_0=0\}$的下述特征．设 τ_t 是集合$\{u:\xi_u>0, 0\leqslant u\leqslant t\}$的 Lebesgue 测度，或者换言之，是 Brown 粒子在时间间隔 $[0, t]$ 内处在正半轴上的时间．比率 τ_t/t 具有反正弦分布:

$$\mathsf{P}\left\{\frac{\tau_t}{t}<x\right\} = F_{1/2}(x) = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x},\quad 0\leqslant x\leqslant 1,\quad t>0.$$

接着又注意到([2])，具离散时间的随机游动服从下述反正弦律：设 $S_0=0$，$S_1, \cdots, S_n, \cdots$ 是随机游动的相继位置，

$$S_n = \sum_{u=1}^{n}\xi_u,$$

其中 $\xi_1, \xi_2, \cdots$ 是独立同分布的，设 T_n 表示在 $0, \cdots, n$ 中使 $S_k>0$ 的指标 k 的个数，且令

$$K_n = \min\left\{k: S_k = \max_{0\leqslant m\leqslant n} S_m\right\},$$

则关系式

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\left\{\frac{T_n}{n}<x\right\} = \lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\left\{\frac{K_n}{n}<x\right\} = F_\alpha(x),$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathsf{P}\{S_1<0\}+\cdots+\mathsf{P}\{S_n<0\}}{n} = \alpha\ ,$$

或者同时都满足或者同时都不满足．此处，对 $0<\alpha<1$，$F_\alpha(x)$ 是广义反正弦分布，而

$$F_1(x) = \mathrm{E}(x) \quad 和 \quad F_0(x) = \mathrm{E}(x-1),$$

其中 $E(x)=0$，如果 $x\leqslant 0$；$E(x)=1$，如果 $x>0$．

在更新理论中反正弦律叙述为：对 $0<\alpha<1$，以下等式成立：

$$\mathsf{P}\{\xi_1\geqslant 0\} = 1\ ,$$

而对 $y_t=t-S_{\eta_t}$，下式成立：

$$\lim\mathsf{P}\left\{\frac{y_t}{t}<x\right\} = F_\alpha(x)$$

当且仅当

$$\mathsf{P}\{\xi_1>x\} = x^{-\alpha}L(x)$$

对 $x>0$ 成立，其中 η_t 用关系式 $S_{\eta_t}<t\leqslant S_{\eta_t+1}$ 定义，而 $L(x)$ 是对 $x>0$ 定义的具有性质

$$\lim_{x\to\infty}\frac{L(xy)}{L(x)}=1\text{，对 }0<y<\infty$$

的函数．更新理论中的反正弦律同随机游动的反正弦律有着紧密的联系（[3]）．

参考文献

[1] Feller, W., An introduction to probability theory and its applications, 2. Wiley, 1957 – 1971.

[2] Spitzer, F., Principles of random walk, Springer, 1976.

[3] Рогозин, Б. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 16 (1971), 4, 593 – 613.

Б. А. Рогозин 撰

【补注】 文中的函数 L 称为缓变函数 (slowly varying function)，见 [1]，p. 276．

刘秀芳 译

面积 [area ; площадь]

为某类平面图形（如多边形）指定的数值特征，它具有如下性质：1）面积非负；2）面积可加（对于多边形，这意味着若图形 $P\cup Q$ 由两个没有公共内点的图形 P 和 Q 组成，则面积 $(P\cup Q)=$ 面积 $P+$ 面积 Q）；3）面积在位移下保持不变；4）单位正方形的面积为 1．术语"面积"也在更一般的意义下用作三维空间中二维曲面的数值特征、n 维 Euclid 空间或 Riemann 空间中 $k\,(2\leqslant k\leqslant n)$ 维曲面的数值特征以及集合的边界及其他对象的数值特征，见下述．

平面图形的面积 (area of a planar figure)．历史上最先被确定面积的是多边形类（即可分解为有限多个无公共内点的三角形的图形）．重要的是在多边形类中具有性质 1) – 4) 的面积是存在的并且唯一的（[1]，[2]）．性质 1) – 4) 的一个直接推论是，整个图形的面积不小于它的部分的面积．

在古代假定了具有性质 1) – 4) 的面积是存在且唯一的，但没有对该类图形作明确的描述；注意力集中在计算面积的方法上．矩形（包括边长为无理数的矩形）的面积公式是基于穷竭法 (exhaustion, method of)．三角形或多边形的面积是化为矩形面积来计算的，使这个矩形与给定的三角形或多边形是由同样的全等图形组成的．可以证明（[2]），任何面积相等的多边形可分解成相同的若干全等图形．

后来，一类可求方（Jordan 可测）的图形被区分了出来．若平面上一图形 M，对任何 $\varepsilon>0$，总存在多边形 P 和 Q，使 $P\subset M\subset Q$，且（面积 $Q-$ 面积 P）$<\varepsilon$，则称 M 为可求方的 (squarable)．可求方图形的范围非常广．特别是包括了平面上一切具有逐段光滑边界的有界区域，也存在不可求方的平面图形．在可求方的图形类中，具有性质 1) – 4) 的面积是存在且唯一的（[2]）．

历史上，在考虑一类可求方图形之前，人们已知道如何计算其中某些图形的面积：圆盘，圆扇形与圆弓形，各种合成的图形和曲边四边形．这些计算都基于多边形的穷竭法．在某些场合，**Cavalieri 原理** (Cavalieri principle) 可作为这种计算的基础．这个原理是，若两个这种平面图形用平行于给定直线的每条直线截出的线段相等，则这两图形的面积相等．积分法（例如，见[3]）给出了计算任何具有逐段光滑边界之平面区域面积的方便方法．积分学证实了 Cavalieri 原理．

设法把面积概念推广到更一般的平面集合且保留性质 1) – 4)，导致了测度论的出现和区分出一类平面 Lebesgue 可测集．进而对平面上更一般集合的推广产生了具有性质 1) – 4) 的非唯一的测度．

定向面积 (oriented area)．若在定向平面上有一条有向闭曲线 l，它可能有自交点和重叠部分，则对于平面中不在 l 上的每点，有一个整数值函数（正、负或零），称为该点关于 l 的次数．它表示曲线 l 环绕该点的次数和环绕的方向．这个函数在全平面上的积分（如果存在）称为由 l 围成的平面区域的定向面积．后者与通常面积的差别在于带有符号．定向面积的简单性质可见 [4]．

曲面面积 (area of surface)．多面体表面积是最先和最简单定义的曲面面积，即各个面的平面面积之和．对于弯曲的曲面，试图以内接多面体表面面积的极限（类似于曲线的长度定义为内接多边形边长之极限）来引进面积的概念是有困难的．即使对于非常简单的弯曲曲面，各个面的面积逐次变小的内接多面体表面的面积可以有不同的极限，它与多面体序列的选择有关．Schwartz 的例子清楚地证实了这一点，即对于正圆柱面的侧面，可构造出有不同极限面积的内接多面体序列（[2]）．

最经常的办法是对具有逐段光滑边界（或无边界）的分片光滑曲面，定义其曲面面积．通常这是基于下述构想．把曲面剖分成许多具有分段光滑边界的小片．在每片上选取一点，使得在该点曲面的切平面存在，并作这小片曲面在该切平面上的正交投影；再把这些平面投影象的面积相加，最后通过加细剖分（使剖分的小片的最大直径趋向零）取极限．对于这类曲面，这个极限总是存在的，并且若曲面的参数化是由分段 C^1 阶光滑函数 $\mathbf{r}(u,v)$ 给出的，其中参数 u 和 v 在 (u,v) 平面的区域 D 中变化，则它的面积 F 可表示为二重积分

$$F=\int_D\sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}\,du\,dv, \tag{1}$$

其中 $g_{11}=\mathbf{r}_u^2$，$g_{12}=\mathbf{r}_u\mathbf{r}_v$，$g_{22}=\mathbf{r}_v^2$，而 $\mathbf{r}_u$ 和 $\mathbf{r}_v$ 表示关于 u 和 v 的偏导数．例如，在[3]，[5] 中给出此证明．特别

地，若曲面是定义在(x, y)平面的区域D上的C^1阶光滑函数$z=f(x, y)$的图，则

$$F = \int_D \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\, dx\, dy. \tag{2}$$

这里$(1+f_x^2+f_y^2)^{1/2}=\cos\alpha$，其中$\alpha$是曲面法线与$z$轴所成的(锐)角．由(1)和(2)可得球面或部分球面的面积标准公式，也可得计算旋转曲面等曲面面积的方法．

对于 Riemann 流形中的二维分片光滑曲面([6])，公式(1)可用作其面积的定义，其中g_{11}，g_{12}和g_{22}的角色由限制在曲面上度量张量的分量来充当．

很重要的一点是，即使在二维曲面的场合，面积也不是对点集指定的，而是对于表示二维流形到空间之映射的等价类指定的，因此它不同于测度．

k 维面积(k-dimensional area)．对于一个k维流形(带或不带边界)到n维 Euclid 空间$(2\leqslant k\leqslant n)$的分片光滑浸入$f: M\to \mathbf{R}^n$，其面积是利用完全类似于分片光滑曲面的上述构想来定义的．差别仅在于现在的投影是到k维切平面上，并且对k维投影的体积作和．若在区域$D\subset M$上引入坐标$u^1,\cdots,u^k$，则浸入$(D, f|_D)$的面积F可表示为积分

$$F = \int_D \sqrt{\det(g_{ij})}\, du^1 \cdots du^k, \tag{3}$$

其中g_{ij}是数量积$(\partial f/\partial u^i,\ \partial f/\partial u^j)$．若$k=n-1$且$D$是坐标超平面$(x_1,\cdots,x_{n-1})$的一个区域，$f$具有显式表示$x_n=z(x_1,\cdots,x_{n-1})$，则(3)变成

$$F = \int_D \sqrt{1+\sum_{i=1}^{n-1}\left[\frac{\partial z}{\partial x_i}\right]^2}\, dx_1\cdots dx_{n-1}. \tag{4}$$

若f是光滑映射，则g_{ij}就是由浸入所诱导的度量张量的系数，并且从(3)得知，由外在构想所定义的面积实属浸入流形的内蕴几何．一般地，不仅对于浸入到$\mathbf{R}^n$，而且对于浸入到 Riemann 流形的情况，都取(3)作为面积的定义．

关于分片光滑浸入的流形，面积是：a)非负的；b)对于$\mathbf{R}^n$中的k维单位立方体，等于 1；c)在正交变换下保持不变；d)可加的；e)下半连续的，即若$f_i\to f$一致收敛，则$F(f)\leqslant \liminf_{i\to\infty} F(f_i)$．此外还有：f)若$\varphi: \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$是非伸长映射，则$F(\varphi\circ f)\leqslant F(f)$；及 g)若$\{P_i\}$是$\binom{n}{k}$个两两正交的$k$维平面的集合，$p_i$是到$P_i$上的投影，则

$$F(p_i\circ f) \leqslant F(f) \leqslant \sum_{i=1}^{\binom{n}{k}} F(p_i\circ f). \tag{5}$$

进一步推广，面积论(theory of area)．把F推广到更一般的对象且保留 a)－g)的某些性质，可能有各种推广方式，导致各种结果．面积论处理的就是这些推广．要了解各种面积概念之间的关系可见[10]．

面积论与测度论之间的界限并不是很清楚的．从传统上讲，面积论主要研究连续映射的面积，其中考虑到映射的重复度，而保持可加性却不太重要．关于n维空间的k维测度，例如，见 **Hausdorff 测度**(Hausdorff measure)；**Favard 测度**(Favard measure)．

面积概念的引进建立在逼近论、积分几何、泛函分析，或其他公理化的基础上．最通常的一些面积概念如下．

Lebesgue 面积(Lebesgue area)．它定义为(见[7]，[9])

$$L(M, f) = \varliminf_{i\to\infty} F(f_i), \tag{6}$$

其中M是可有限单纯剖分的k维流形，$f_i: M\to\mathbf{R}^n$是一切可能的分段线性映射的序列，使得$f_i\to f$，$F(f_i)$是相应的多面体表面的k维面积．Lebesgue 面积对于 Fréchet 等价映射是相同的，所以它是 **Fréchet 曲面**(Fréchet surface)的一种特征．

若$k=2$，则条件$L(M, f)<\infty$蕴含着曲面的许多有用性质(如引入等温参数的可能性等)；这时 Lebesgue 面积是解 **Plateau 问题**(Plateau problem)乃至解更一般二维变分问题的极为方便的工具．对于$k>2$的连续映射类的变分问题(紧性问题)的研究尚有困难．这已导致寻找其他几何对象(泛流和泛簇)及有关的面积型特征，建立 Lebesgue 面积与其他面积概念的关系以及它的某些性质(如(5)式右边的不等式)方面的复杂性限制了 Lebesgue 面积的应用．$L(M, f)$有两个值得注意的特性：首先，对于$L(M, f)=0$可能有体积$V(f(M))>0$；其次，即使对于$k=2$，当M被一曲线形状的公共边界分成M_1和M_2时，可能有

$$L(M, f) > L(M_1, f|_{M_1}) + L(M_2, f|_{M_2}). \tag{7}$$

已有研究考虑，当可加性用半可加性代替时，性质 a)－g)中哪一些仍然成立，例如，假定有(7)型的不等式，则仍得 Lebesgue 面积．这一类课题至今(1983年)尚未被完全考察过([7])．

积分几何面积(integral-geometric area)(见[9])．设$N(M, \varphi, y)$是关于映射$\varphi: M\to\mathbf{R}^k$在点$y\in\mathbf{R}^k$的某重复度函数，例如，$N=\operatorname{card}\varphi^{-1}(y)$．于是，对于$f: M\to\mathbf{R}^n$，可定义积分几何面积为

$$\int_{G(n,k)}\int_{\mathbf{R}^k} N(M, p_\sigma\circ f, y)\, dV(y)\, d\nu(\sigma), \tag{8}$$

其中$G(n, k)$是k维子空间$\mathbf{R}^k\subset\mathbf{R}^n$的 **Grassmann 流形**(Grassmann manifold)，ν是$G(n, k)$上的规范 **Haar 测度**(Haar measure)，p_σ是在$\sigma\in G(n, k)$上的正交投影．对于重复度不同的函数，面积(8)会有差异．对于$k=2$和M可单纯剖分的情形，可以非常特殊地选取$N(M, \varphi, y)$使(8)与 Lebesgue 面积重合，如同$k>0$且

Hausdorff 测度 $H_{k+1}(f(M))$ 完全消失时那样([9]).对于 $k=2$ 的情况,各种积分几何面积也曾被 G. Peano, Hetz 和 S. Banach 所引入([7]).

集合边界的面积(area of the boundary of a set). Minkowski 面积的引入与证明 Brun - Minkowski 不等式和经典的等周不等式有关. 这是对集合 $A\subset\mathbf{R}^n$ 指定的、用来刻画其边界面积的量, 它定义为

$$F(a)=\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}(V(A+hB)-V(A)), \qquad (9)$$

其中 B 是 $\mathbf{R}^n$ 的单位球面, V 表示体积. 对于具有分片光滑边界的集合 A 与凸集 A、式(9)的普通极限是存在的; 它与边界的 $n-1$ 维面积一致, 定义(9)还适用于有限维赋范空间的集合, 其中面积(9)可能不同于 Hausdorff 测度 $H_{n-1}(\partial A)$, 即使对凸集 A 也如此.

另有一种类似于面积的有用特征量, 它与集合相对应, 但主要表征其边界, 即可测集的**周长**(perimeter). 这是泛流质量概念的特殊情况.

内蕴面积(intrinsic area). 若 M 是可度量化的, 且 $f: M\to\mathbf{R}^n$ 是局部等距映射, 则应考虑 $L(M,f)$ 与 Hausdorff 测度 $H_k(M)$ 之间的关系. 当 M 是**有界曲率的二维流形**(two - dimensional manifold of bounded curvature)时, 有 $L(M,f)=H_2(M)$. 另一方面, 一个连续映射 $f: M\to\mathbf{R}^n$ 一般诱导出一个广义度量 ρ 它在连通分支 $f^{-1}(u)(u\in\mathbf{R}^n)$ 上可能有 $\rho(x,y)=\infty$. 对 ρ 应用 k 维 Hausdorff 测度的构造, 便得出一个特征量,它可取作一个浸入的内蕴面积. 对于 Lipschitz 类中的 f, 这个内蕴面积与 $L(M,f)$ 一致([11]).

泛流质量(current masses)与**泛簇**(varifolds). 设 M 是嵌入 $\mathbf{R}^n$ 中的分片光滑的 k 维定向流形, k 形式在 M 上的积分给出泛流 $T_M\varphi=\int_M\langle\varphi(x),\nu(x)\rangle dF(x)$,它是 $\mathbf{R}^n$ 上 k 形式 φ 的线性泛函, 这里 ν 是与 M 相切的单位 k 向量. 线性泛函 T_M 本质上刻画了 M. 也可定义一个非线性泛函(对非定向的 M, 可用同法): 泛簇 $V_M\varphi=\int_M|\langle\varphi,\nu\rangle|dF$. 积分范数(质量) $\|T_M\|$ 和 $\|V_M\|$ 都与面积, 即 $F(M)$ 相一致. 把 $\mathbf{R}^n$ 中分片光滑子流形包括在更一般的泛流和泛簇之内, 它们在变分学中所起的作用相当于广义解在偏微分方程理论中的作用.

此外还有整数泛流和泛簇的拓广类,它们保留了子流形的许多几何性质. 例如,一个整数值泛流是可表为 $T=\sum_{i=1}^{\infty}n_iT_{M_i}$ 的泛流, 其中 n_i 是整数, M_i 是 C^1 阶光滑子流形,并且使得由 $dT(\varphi)=T(d\varphi)$ 定义的 $k-1$ 维泛流 dT 的质量是有限的. 整数值泛流和泛簇的质量可看作曲面面积概念的推广. 这里还有一个与 Lebesgue 面积的关系. 设分段光滑映射 $f_i: M\to\mathbf{R}^n$ 一致收敛, $f_i\to f$, 且令 $L(M,f)=\lim_{i\to\infty}L(M,f_i)$. 那么, 对应的泛簇 V_{f_i} 弱收敛于某个整数值泛簇 V_f, 其中 $\|V_f\|=L(M,f)$, 因此, 满足 $L(M,f)<\infty$ 的每个 $f: M\to\mathbf{R}^n$ 自然地与质量为 $L(M,f)$ 的泛簇 V_f 相对应; 关于用泛流的语言的叙述见[13].

参考文献

[1] Lebesgue, H., Sur la mesure des grandeurs, *Monogr. de l'Enseign. Math.*, 1 (1935).

[2] Энциклопедия элементарной математики. т 5, М., 1966.

[3] Ильин, В А., Позняк Э Г, Основы математического анализа, 3 изд., ч. 1, М., 1971.

[4] Лопшиц, А М., Вычисление площадей ориентированных фигур, М., 1956.

[5] Погорелов, А В., Дифференциальная геометрия, 5 изд., М., 1969 (英译本: Pogorelov, A.V., Differential geometry, Noordhoff, 1959).

[6] Рашевский, П К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967 (中译本: П. К. 洛薛夫斯基, 黎曼几何与张量解析, 高等教育出版社, 1955).

[7] Cesari, L., Surface area, Princeton Univ. Press, 1956.

[8] Federer, H., Geometric measure theory, Springer, 1969.

[9] Federer, H., Measure and area, *Bull. A. M. S.*, **58** (1952), 3, 306 – 378.

[10] Бураго, Ю Д., Залгаллер, В А., Геометрические неравенства, Л., 1980.

[11] Busemann, H., Intrinsic area, *Ann. of Math. Ser.* 2, **48** (1947), 234 – 267.

[12] Almgren, F. J., The theory of varifolds, Princeton Univ. Press, 1965.

[13] Federer, H., Currents and area, *Trans. A. M. S.*, **98** (1961), 2, 204 – 233.

Ю. Д. Бураго, В. А. Залгаллер, Л. Д. Кудрявцев 撰

【译注】 Cavalieri 原理是 17 世纪意大利数学家 B. Cavalieri 发现的. 中国南北朝时期的杰出数学家祖冲之和祖暅父子,在解决计算球体积的方法时, 已明确提出了同样的原理:"幂势既同、则积不容异", 后称之为"祖氏原理"或"祖暅原理"、这比 Cavalieri 早 1100 年以上.

参考文献

[B1] 中国大百科全书·数学卷、中国大百科全书出版社, 1988, p.867.

沈一兵 译 陈维桓 校

面积函数 [area function; поверхностная функция]

球面 Ω 上的集函数, 它等于凸曲面 F 上有球面象 $E\subset\Omega$ 的那部分的面积 $S(E)$. 这个定义对一般的凸曲面仍有意义, 它给出了一个定义在 Borel 集的环上的全可加集函数.

参考文献

[1] Александров, А Д., 《Матем. сб.》, 3 (1938), 1, 27 – 44.

[2] Buseman, H., Convex surfaces, Interscience, 1958.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 在文献中，Ω 是 $\mathbf{R}^3$ 中以原点为中心的单位球面．若在每点 $x\in F$ 作 F 的单位法向量 n_x 并把它平移到原点，则 n_x 的端点是 Ω 上的一点 x^*．点 x^* 称为 x 的**球面象**(spherical image)．得到一点的球面象的过程称为**球面映射** (spherical map)．

【译注】

参考文献

[B1] Александров, А. Д., Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, Л., 1948 (中译本: А. Д. 亚历山大洛夫，凸曲面的内蕴几何学，第五章，§2，科学出版社，1962)．

沈一兵 译

面积函数 [**area - function**; **ареа- функция**]

双曲函数的反函数，即下列函数之一：反双曲正弦、反双曲余弦、反双曲正切、反双曲余切等．亦见**反双曲函数**(inverse hyperbolic functions)．

【补注】

参考文献

[1] Abramowitz, M. and Stegun, J. A., Handbook of mathematical functions, National Bureau of Standards, 1964; Dover reprint, 1972.

张鸿林 译

面积法 [**area method**; **площадей метод**]

借助于面积定理(见**面积原理**(area - principle))解决单叶函数论中的问题的一种方法．

【补注】

参考文献

[A1] Duren, P. L., Univalent functions, Springer, 1983, Chapt, 4.

杨维奇 译

面积原理 [**area principle**; **площадей принцип**]

区域在正则函数映射下其象域余集的面积非负．T. H. Gronwall ([1])于1914年首先使用了这一面积原理，用这种方法他证明了关于 Σ 族函数——环 $\Delta'=\{z: 1<|z|<\infty\}$ 内正则单叶函数

$$F(z)=z+\alpha_0+\frac{\alpha_1}{z}+\cdots$$

的所谓外部面积定理(exterior area theorem)(见**单叶函数** (univalent function))．Δ' 在 $w=F(z)\in\Sigma$ 映射下其象域 $F(\Delta')$ 的余集的面积 $\sigma(CF(\Delta'))$ 可由公式

$$\sigma(CF(\Delta'))=\pi\left\{1-\sum_{k=1}^{\infty}k\,|\alpha_k|^2\right\}\geqslant 0$$

确定，因而有

$$\sum_{k=1}^{\infty}k\,|\alpha_k|^2\leqslant 1. \tag{1}$$

借助于式(1)，得到了关于 Σ 族和 S 族函数的一些最初的结果，此处 S 是圆盘 $\Delta=\{z:|z|<1\}$ 内正则单叶函数 $f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}a_kz^k$ 所组成的函数族(见 **Bieberbach 猜想** (Bieberbach conjecture)；**畸变定理** (distortion theorem))．文[2]证明了一个更一般的面积定理．Г. М. Голузин [3]把面积定理推广到单位圆盘中的 p 叶函数(见**多叶函数** (multivalent function))．

文[4]证明了如下的面积定理：设 $F\in\Sigma$，$\overline{B}=CF(\Delta')$，$Q(w)$ 是 $\overline{B}$ 内的正则函数．若

$$Q(F(z))=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\alpha_kz^k\not\equiv\text{常数};$$

则

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}k\,|\alpha_k|^2\leqslant 0, \tag{2}$$

且仅当 $\overline{B}$ 的面积 $\sigma(\overline{B})$ 为零时等号成立．

所谓关于某族单叶函数 $f(z)$($z\in B$, B 是区域)的面积定理 (area theorem)，常常被理解为具有如下性质的任一不等式：等号成立，当且仅当 $f(B)$ 的余集 $\overline{G}$ 的面积为零；这同样适用于单叶函数系 $\{f_k(z): z\in B_k\}_{k=0}^{n}(n=1,2,\cdots)$ 所成的族，此处 B_k 是区域，$\overline{G}$ 是 $\bigcup_{k=0}^{n}f_k(B_k)$ 的余集．通常，这种定理是用面积原理证明的，即考虑 $\overline{G}$ 上的任一正则函数 $Q(w)$，或更一般地，考虑具有正则导数的 $Q(w)$，并计算 $\overline{G}$ 在函数 Q 映射下的象域的面积 $\sigma(Q(\overline{G}))$．因此，式(2)是关于 Σ 族的某种极为一般的面积定理．

设 $F\in\Sigma$，且设

$$\ln\frac{F(t)-F(z)}{t-z}=\sum_{p,q=1}^{\infty}\omega_{p,q}t^{-p}z^{-q},\quad t,z\in\Delta'.$$

选取 $CF(\Delta')$ 内适当的正则函数，可把式(2)写成

$$\sum_{q=1}^{\infty}q\left|\sum_{p=1}^{\infty}\omega_{p,q}x_p\right|^2\leqslant\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p}\,|x_p|^2, \tag{3}$$

其中 x_p 是任何不全为零的数值，使得

$$\overline{\lim_{p\to\infty}}\,|x_p|^{1/p}<1.$$

关于 Σ 族的一些更一般的面积定理也已得到([5])．

关于下列函数族的面积定理已被证明：由函数系 $\{f_k(z): f_k(0)=a_k, z\in\Delta\}_{k=1}^{n}$ 组成的族 $\mathfrak{M}(a_1,\cdots,a_n)$，诸函数 f_k 把圆盘 Δ 保形且单叶地映射成两两无公共点的一组区域，即一组不相接的区域([6])；$\Sigma(B)$族($\Sigma(B)$，$B\ni\infty$，是在 $B\setminus\{\infty\}$ 内正则单叶且使得 $F(\infty)=\infty$，$\lim_{z\to\infty}F(z)/z=1$ 的函数 F 所组成的函数族，[7])；以及一组不相交迭的多连通区域(见[6]，亦见[8]和[9])．所有关于多连通区域的面积定理均可用**围道积分法** (contour integration, method of)来证明．

所谓面积法(area method)，是指应用面积定理解决单叶函数理论中各种问题的方法．

例如，从式(3)可借助于 Cauchy 不等式得到

$$\left|\sum_{p,q=1}^{\infty}\omega_{p,q}x_p x_q'\right|^2 \leqslant \sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p}|x_p|^2\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q}|x_q'|^2, \quad (4)$$

其中 x_p 和 x_q 使得右端的级数收敛．作为特例，若在(4)式中取 $x_p=t^{-p}$，$x_q'=z^{-q}$，$|t|>1$，$|z|>1$，便得到弦畸变定理

$$\left|\ln\frac{F(t)-F(z)}{t-z}\right|^2 \leqslant \ln\frac{|t|^2}{|t|^2-1}\ln\frac{|z|^2}{|z|^2-1}.$$

例如关于类 $\mathfrak{M}(a_1,\cdots,a_n)$ 的面积定理给出了由亚纯函数 f_k 所组成的函数系 $\{f_k(z):f_k(0)=a_k, z\in\Delta\}_{k=1}^n$ 属于 $\mathfrak{M}(a_1,\cdots,a_n)$ 的必要充分条件(见[6]，179页)．

参考文献

[1] Gronwall, T. H., Some remarks on conformal representation, *Ann. of Math. Ser.* 2, **16** (1914－1915), 72－76.

[2] Prawitz, H., Ueber Mittelwerte analytischer Funktionen, *Arkiv, Mat. Astron., Fysik*, **20A** (1927), 6, 1－12.

[3] Голузин, Г. М., 《Матем. сб.》, **8** (1940), 2, 277－284.

[4] Лебедев, Н. А., Милин, И. М., 《Матем. сб.》, **28** (1951), 2, 359－400.

[5] Nehari, Z., Inequalities for the coefficients of univalent functions, *Arch. Rational Mech. and Anal.*, **34** (1969), 4, 301－330.

[6] Лебедев, Н. А., Принцип площадей в теории однолистных функций, М., 1975.

[7] Милин, И. М., Однолистные функции и ортонормированные системы, М., 1971 (英译本: Milin, I. M., Univalent functions and orthonormal systems, Transl. Math. Monographs, 49, Amer. Math. Soc., 1977).

[8] Аленицын, Ю. Е., 《Изв. АН СССР Сер. матем.》, **37** (1973), 5, 1132－1154.

[9] Гутлянский, В. Я., Щепетов, В. А., 《Докл. АН СССР》, **218** (1974), 3, 509－512.

[10] Grunsky, H., Koeffizientenbedingungen für schlichtabbildender meromorphe Funktionen, *Math. Z.* **45** (1939), 1, 29－61.

Н. А. Лебедев 撰

【补注】 不等式(3)和(4)是 Grunsky 不等式(Grunsky inequalities)的一种形式．

参考文献

[A1] Duren, P. L., Univalent functions, Springer, 1983.

杨维奇 译

Arf 不变量 [Arf-invariant, invariant of Arf; Arf-инвариант]

在具有双线性斜对称型的整格上给出的、以 2 为模的二次型的不变量．令 Π 是维数为 $k=2m$ 的整格，$\psi(x,y)$ 为满足 $\psi(x,y)=-\psi(y,x)$ 的型．存在所谓的辛基 $\{e_1, f_1, \cdots, e_m, f_m\}$，在此基底下 $\psi(x,y)$ 的矩阵化为这样的分块对角型：对角线上含有块

$$\left\|\begin{matrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{matrix}\right\|,$$

即

$$\psi(e_i,f_i) = -\psi(f_i,e_i) = 1,$$

而其他的元素皆为 0．

设映射

$$\psi_0:\Pi\to\mathbf{Z}_2$$

定义在 Π 上，使得

$$\psi_0(x+y) = \psi_0(x)+\psi_0(y)+\psi(x,y) \bmod 2$$

("以 2 为模的二次型")．表达式

$$\sum_{i=1}^{m}\psi_0(e_i)\psi_0(f_i)$$

称为 Arf 不变量 (Arf-invariant) ([1])．如果这个表达式等于 0，则存在一组辛基，使得型 ψ_0 在这组基的所有元素上取值为 0；如果表达式等于 1，则存在一组辛基，使得型 ψ_0 在这组基除去 e_1 及 f_1 的所有元素上皆为 0，而

$$\psi_0(e_1) = \psi_0(f_1) = 1.$$

参考文献

[1] Arf, C., Untersuchungen über quadratischen Formen in Körpern der Charakteristik 2, I, *J. Reine Angew. Math.*, **183** (1941), 148－167.

А. В. Чернавский 撰

【补注】 关于特征为 2 的域 F 上的内积空间 (inner product space) 之 Arf 不变量的材料，见[A1]附录 1，它与 F 上二次内积空间 (quadratic inner product space) 的 Witt 代数 (Witt algebra) 有关．

参考文献

[A1] Milnor, J. and Husemoller, D., Symmetric bilinear forms, Springer, 1973.

张明尧 译 潘承彪 校

自变量 [argument; аргумент]

函数的自变量，即函数值所依赖的变量(亦称独立变量)．

杨维奇 译

辐角 [argument; аргумент]

平面上具有坐标 x 和 y 的点所表示的复数 $z=x+iy=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ 的辐角 (argument of a complex number)，即该点的向量径与 x 轴的夹角 φ．杨维奇 译

辐角原理 [argument, principle of the; аргумента принцип]

单复变量函数论中的一条几何原理，可表述如下：设 D 是复平面 $\mathbf{C}$ 内的有界域，且其边界 ∂D 是一连续曲线，取向为使得 D 在其左侧．如果函数 $w=f(z)$ 在

$\bar{D}$ 的某邻域内亚纯且在 ∂D 上没有零点和极点，则它在 D 内的零点数 N 与极点数 P（均按其重数计算）之差等于 f 的辐角沿 ∂D 一周的增量除以 2π，即

$$N-P=\frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial D}\arg f,$$

其中 $\arg f$ 表示 $\mathrm{Arg} f$ 在曲线 ∂D 上的任一连续分支．上式右端的表示式等于曲线 $f(\partial D)$ 关于点 $w=0$ 的指标 $\mathrm{ind}_0 f(\partial D)$．

辐角原理已被应用到关于全纯函数零点的各种论断（例如关于多项式的代数基本定理，关于零点的 Hurwitz 定理等）的证明中．由辐角原理可导出函数论中其他许多重要几何原理，例如**保域原理**（invariance of domain, principle of），**最大模原理**（maximum-modulus principle）以及关于全纯函数的局部反函数定理．在许多问题中，辐角原理是以其推论——**Rouché 定理**（Rouché theorem）的形式得到隐含的应用的．

辐角原理有各种推广．f 在 $\bar{D}$ 的某邻域内亚纯的条件可代之以 f 在 D 内只有有限个极点和零点且可连续开拓到 ∂D 上．也可以代替复平面而考虑任意的 Riemann 曲面，此时 D 的有界性代之以 $\bar{D}$ 的紧性．由关于紧 Riemann 曲面的辐角原理可推出任一不恒等零的亚纯函数的零点个数等于极点个数．对于 $\mathbf{C}$ 中的区域的辐角原理等价于关于对数残数之和的定理（见**对数残数**（logarithmic residue））．基于这一点，下述论断有时称为广义辐角原理（generalized principle of the argument）：设 D 是由有限条连续曲线围成的区域，f 在 $\bar{D}$ 的某邻域内亚纯且在 ∂D 上没有零点和极点，则对任一在 $\bar{D}$ 的某邻域内全纯的函数 φ，等式

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_{k=1}^{N}\varphi(a_k)-\sum_{k=1}^{P}\varphi(b_k)$$

成立，式中右边第一项对 f 在 D 内的所有零点求和，而第二项对所有极点求和．同时还有拓扑广义辐角原理（topological generalized principle of the argument）：辐角原理对任一满足下列条件的开映射 $f:D\to\bar{\mathbf{C}}$ 成立：f 为局部有限对一，且可连续开拓到 ∂D 上，而 $0,\infty\notin f(\partial D)$．

类似于关于多复变量函数的辐角原理的是，例如，下述定理：设 D 是 $\mathbf{C}^n$ 中具有 Jordan 边界 ∂D 的有界域，$f:\bar{D}\to\mathbf{C}^n$ 是 $\bar{D}$ 的某邻域内的全纯映射，$0\notin f(\partial D)$，则 0 在 D 中的前象数（按其重数计算）等于 $\mathrm{ind}_0 f(\partial D)$．

参考文献

[1] Лаврентьев, М. А., Шабат, Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, 3 изд., М. 1965 (中译本：М. А. 拉甫伦捷夫，Б. В. 沙巴特，复变函数论方法，高等教育出版社，上册 1956，下册 1957）．

[2] Шабат, Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 2, М., 1976.

Е. М. Чирка 撰　沈永欢 译

算术［arithmetic；арифметика］

数及数集上的运算的科学．算术的内容包括**数**（number）的概念的起源和发展、数的运算的方法和手段、各种不同类型数的运算的研究、数集的公理结构和数的性质的分析．当考虑到数的概念的逻辑分析时，有时使用术语理论算术（theoretical arithmatic）．算术与**代数学**（algbra）密切相关，后者指研究实施于数的运算的科学．整数的性质构成数论的主题（见**初等数论**（elementary number theory）；**数论**（number theory））．

"算术"一词有时也指实施于极不同性质的对象的运算："矩阵算术"、"二次型算术"等．

远在最早的文字记载出现以前，计算的技术就已产生和发展起来．最早的数学文献是 Cahoon 纸草书和著名的 Rind 纸草书．一般认为它们是公元前 2000 年的文献．关于**数的表示法**（numbers, representation of），古埃及人使用一种加性象形文字记数系统，他们以一种较简单的方式来实施自然数的加法和减法运算．乘法借助于二倍的方法来完成，即将一个乘数分解成 2 的乘幂之和，用另一个乘数依次乘每一个被加数，然后将诸结果相加．关于**分数**（fraction）运算，在古埃及，把分数化为单分数（aliquot fractions），即形如 $1/n$ 的分数来进行运算．较复杂的分数运算要借助一种数表，其中把某些分数表示成单分子分数之和．除法化为减法，即用被除数减去逐次加倍的除数之和，商则是所能减掉的除数的倍数．古代巴比伦人的六十进位记数系统对于算术运算很不方便，我们已经得到巴比伦人进行乘法和除法的许多数表．

古希腊人把算术理解为数的性质的研究，并不包含实际的计算．数的运算的技巧问题，即运算的方法被认为是一门单独的科学——计算术（logistics）．这种差别后来由中世纪的欧洲人从希腊人那里继承下来．随着文艺复兴时期的到来、数论的初步知识和实际运算才开始统一于算术的概念之中．在希腊数学中严格区别"数"与"量"这两个概念．对于希腊数学家来说，数仅仅表示现在所谓的**自然数**（natural number）；他们还把不同类型的概念区别开来，如"数"与"几何量"．现存古希腊的文献中，没有对计算术研究的记载．但是众所周知，希腊人的乘法很接近于现代的方法．他们的字母记数系统使数的运算非常复杂．古希腊人在实际计算中使用了普通分数，然而分数并不作为数被研究，它只被视为自然数的比．

Euclid《原本》（Elements，公元前 3 世纪）的第 7—9 卷完全按照算术的古代意义来处理问题．首先处理了初等数论问题，如**最大公因数**（greatest common divisor）的算法（见 **Euclid 算法**（Euclidean algorithm））和有关**素数**（prime number）的定理．Euclid 证明了乘法的交换律及其对加法的分配律．他还研究了比例论即分数

理论.在其他各卷中,他讨论了两个量之间关系的一般理论,这些工作可以认为是**实数**(real number)理论的开端.

在 Diophantus(约公元3世纪)留给我们的手稿中似乎发现了关于乘方(不超过6次)的运算,还有一些减法运算的例子.这些运算都没有明显地排斥负数. Diophantus 仅仅把他的法则运用于**有理数**(rational number).

在公元2世纪,中国数学家掌握了分数和负数的运算.稍后,他们得到了平方根和立方根的求法,其近似值用十进制小数(decimal fraction)来表示.中国数学家解算术问题所使用的方法,特别是双设法首先传入阿拉伯国家,然后传到欧洲,被收录在许多算术指南中.人们现在对印度算术的早期发展情况还知道得很少.远在纪元前很长时间内印度人就会使用最简单的分数.现在的**十进制计算系统**(decimal computation system)产生于印度.现存印度数学的最早文献是在公元5世纪编纂的,它表明当时印度算术已有较高的水平.印度数学家实施于整数和分数的运算已接近现代的方法.他们解决了很多关于比例、三率法方面的问题,并引用了百分率.7世纪时印度人开始研究负数.在 Bhaskara Ⅱ 的著作《科学花冠》(The wreath of science,12世纪)中建立了负数的乘除法法则.

印度数学对阿拉伯人的算术知识产生了决定性的影响.9世纪的 Al-Khwarizmi 所写的算术论文对传播印度人的十进位记数法,加、减、乘、除运算和求平方根等方法有重要贡献.

许多古代的民族用**算盘**(abacus)代替原始的指算进行计算.这些算盘的样式各有不同,但其使用原理相同:拨弄一列筹码或其他一些代表数的小物品.在纪元前很久,希腊人就使用过某种算盘.中国人的算盘和俄罗斯算盘在样式上很相似,后来又都有改进.

欧洲人在数论领域中的研究基于希腊数学,特别是 Euclid 和 Diphantus 的著作,同样也不涉及计算技术.算术在欧洲的发展与印度十进位值制记数系统和**阿拉伯数字**(Arabic numerals)在欧洲的传播密切相关.算术运算的技能,不是直接从印度人那里得到的,而是通过 Al-Khwarzmi 和其他阿拉伯数学家的著作得到的.

中世纪时期已广泛使用算盘.它还成为算术的同义词,因为 Leonardo da Pisa(13世纪)把自己的算术著作称为《算盘书》(The book of abacus).此书引用了来自阿拉伯的计算方法,同时也包括作者许多独创性的工作.例如,分数的加法采用求分母的最小公倍数的方法,而且运算结果的验算方法不是唯一的,除了像印度人那样采用基数9验算(即弃九法)外,还用其他基数进行验算.书中所处理的问题包括三率法、混合法以及递归序列、**等差数列**(arithmetic progression)和**等比数列**(geometric progression)等.在欧洲,小数的使用开始于15世纪,但广泛传播是在16世纪 S. Stevin 的著作问世之后.

在15世纪、16世纪以及以后的几个世纪中,出现了多位数的乘、除法的各种图式.这些图式仅在中间计算步骤的记法上有所不同.在新的计算方法(用笔和阿拉伯数字)代替旧的计算方式(通过计数器和罗马数字)的变革中,A. Riese 的一些教科书影响最大.

在欧洲,负数首先由 Leonardo da Pisa 使用.他把负数作为借贷.负数的运算法则由16世纪的 M. Stiefel 建立,他认为这些数是"虚构的".负数运算法则的证明直到18世纪才完成,而只有19世纪后半叶的批判思维才结束对这些工作的过激认识.

在欧洲,在15和16世纪之前,无理数的算术运算还只停留在求平方根上.Leonardo da Pisa 像考虑平方根一样研究了立方根的近似计算. S. dal Ferro(约1500年)和 N. Tartaglia(16世纪)用立方根来求解三次方程.当时还没有出现对实数运算的一般处理.实数的概念是随着解析几何与微积分的建立而逐步引入数学的.直到18世纪,无理数的运算还限于用根式可表达的量.

复数在各时期都出现过,最早出现在印度数学中——为解二次方程.然而虚根因为其不存在而被摒弃.**复数**(complex number)的算术开始于 R. Bombelli(16世纪),他建立了复数的某些算术运算的形式法则.然而,甚至到17世纪,复数的运算还是依据实数的运算类推,以致时常发生错误.只有到了18世纪,A. de Moivre 和 L. Euler 的公式才得到了复数算术的清晰涵义.

对数的思想可以追溯到 Archimedes(公元前3世纪),他比较了算术级数和几何级数的项.Stiefel(16世纪)加进负指数而把这种级数向左延伸.他证明了上述两种级数的运算间有某种关系,从而阐发了对数的原始思想.对数作为一种运算程序,是由 J. Napier 和 J. Burgi 在17世纪上半叶引进的.

在17世纪,W. Schickard 和 B. Pascal 彼此独立地制造了最早的计算器,它们是现代计算机的原型.然而,只有到了19世纪,计算器才广泛应用于实际工作之中.在20世纪中叶,快速电子计算机开始普及.因此,寻求以最少次数的初等运算以完成算术运算的方法成为迫切的任务.

从 Euclid 时代起就普遍认为,为了阐明某种理论,只需从中提出少数最简单最清晰的公设,使该理论的一切基本命题都可以从这些公设逻辑地推导出来.这就是说,这些基本原理与现实世界的关系是一目了然的.

在19世纪,为建立数学理论的基础创立了模型法.使用这种方法是必要的,因为数学中所研究的某些

对象和理论在现实生活中不能找到合理的解释.这首先指复数、理想、非欧几何和 n 维几何.模型法可以使人们把一种数学理论的**相容性**(consistency)归结为另一种理论的相容性.比如,以 Euclid 几何的相容性为依据,可以证明Лобачевский几何是相容的.而 Euclid 几何的相容性又可归结为算术和实数的相容性.

在 19 世纪末期,算术的基础趋于完善.R.Dedekind 和 G.Peano 彼此独立地建立了自然数的公理体系,算术中全部已有的命题都可由此演绎地推导出来.K.Weierstrass 提出以自然数偶作为整数和正有理数的模型.由 J.Argand, C.Wessel 和 C.F.Gauss 发现的复数的几何解释本质上是复数理论在实数理论框架中的一个模型.最后,Dedekind,G.Cantor 和 Weierstrass 从集合论的途径建立了实数理论.

然而,随着集合论悖论的出现又产生了一个如何建立自然数算术和实数算术的基础的问题.有没有使在这一数学分支中不产生悖论的保证?直观不能告诉人们宇宙是无限的或物质是无限可分的.因此,关于自然数集合的无限性和数轴的连续性的认识可以考虑为不直接与物理世界相关.另一方面,没有比自然数理论本身更简单的自然数算术的模型,而实数理论的模型本质上是利用集合论的工具建立的,其可靠性似乎是值得怀疑的.

论证的方法和工具应该是怎样的,才能在不建立模型的情况下直接表明,在已给的理论中不会产生不相容性?换句话说,根据该理论中的公理借助一系列逻辑推理永远不能得到彼此矛盾的结论?

D.Hilbert 认为,在集合论中之所以产生悖论,是因为在有限对象系统中无庸置疑的论证方法被不恰当地运用于无限集合中.但是,如果研究用于某些新理论的对象的符号,并且借助于形式过程来表示逻辑推理,是能够避免出现悖论的.在上述情形下,一种理论中的任何一个说法都可写成有限个符号的一个**公式**(formula),而**证明**(proof)则是一些公式的有限组合,它依据一定的规则由称为**公理**(axiom)的公式构成.那么,在 Hilbert 的意义下,以无穷运算代替有穷运算,以及获得使任何一种理论无矛盾的可靠方法都是能作到的.Hilbert 希望,用这种方法首先得到自然数算术的相容性问题的正确答案,然后证明若将任何一个不加证明的数论公式并入自然数的公式中,都会使一个公理系统变为一个不相容的系统.

但是这种希望没有得到证实.1931 年,K.Gödel 证明了**形式算术**(arithmetic, formal)的不完全性.不仅如此,他还指出,对于任何一个包含 术公理的相容的**形式系统**(formal system)来说,都能给出某个封闭公式 u 的清楚描写,无论公式 u 本身还是 u 的否定,都不能从这个形式系统中推出.

利用这些结果可以证明形式算术非同构模型的存在性.同时,**Peano 公理**(Peano axioms)系统是范畴的.怎样解释这句话? Peano 公理系统包含着归纳法公理:如果 1 具有某一性质 P 并且从自然数 n 具有性质 P 可知自然数 $n+1$ 也具有性质 P,则每个自然数都具有性质 P.在这个公理中,P 可以是自然数的任何可能的性质.在形式算术的相应公理中,P 只能是自然数的某些只能用已知**形式主义**(formalism)的方法表示的性质.这两个公理之间的区别,当考虑初等数论的定理时是不明显的,而当解释形式理论的性质时则是重大的.

K.Gödel 还指出,包含在形式算术中的一个无矛盾的形式系统,含有表示它相容性的公式,而这个公式在此系统中不能证明.这个形式系统的相容性只能凭借更强的在系统内不能表述的方法才能证明.在 1936 年,G.Gentzen 证明了适于超限数 E_0 的超限归纳法的形式算术的相容性.当然,人们还必须研究在证明过程中所用方法的相容性.在这个意义上,人们又研究了自然数算术的相容性问题的其他途径.

试图克服实数理论基础中的困难的工作对数学领域中构造性方法的发展起了一定的作用.

参考文献

[1] История математики, т. 1–3, М., 1970–1972.
[2] Waerden, B. L. van der, Ontwakende wetenschap, Noordhoff, 1957.
[3] Kleene, S. C., Mathematical logic, Wiley, 1967.
[4] Hilbert, D., Grundlagen der Geometrie, Springer, 1913 (中译本: D.希尔伯特,几何基础,科学出版社,1987).
[5] Энциклопедия элементарной математики, кн. 1 – Арифметика, М.-Л., 1951 (中译本:初等数学全书,第一卷—— 算术,高等教育出版社,1959).
[6] Молодший, В. Н., Основы учения о числе в XVIII и начале XIX века, М., 1963.
[7] Нечаев, В. И., Числовые системы, М., 1975.
[8] Struik, D. J., A concise history of mathematics, Dover, reprint, 1967 (中译本: D.J.斯特洛伊克,数学简史,科学出版社, 1956).
[9] Thurston, H. A., The number-system, Blackie. 1956.

A. A. Бухштаб, В. И. Нечаев 撰

【补注】

[A1] Waerden, B. L. van der, Geometry and algebra in ancient civilisations, Springer, 1983.

杜瑞芝 译

算术连续统 [arithmetic continuum; арифметический континуум]

数轴.

算术分布 [arithmetic distribution; арифметическое распределение]

一类离散型的概率分布，其负荷集中在形如 $\pm nh$ 的点所构成的集合上，其中 $h>0$, $n=0, 1, 2, \cdots$. 它是**格点分布** (lattice distribution) 的特例.

А. В. Прохоров 撰　陈培德 译

形式算术 [**arithmetic, formal**; **арифметика формальная**], 算术演算 (arithmetical calculus)

使初等数论形式化的一种逻辑-数学演算. 最普通的形式算术语言包含常数 0, 变元, 等号, 函数符号 +, ·, ′ (后续)和逻辑符号. 由常数 0 和变元通过函数符号构造成项; 特别地, 自然数可用形如 $0'\cdots'$ 的项表示. 原子公式是项的等式, 其他公式是由原子公式通过逻辑连接词 &, ∨, →, ¬, ∀, ∃ 生成的. 形式算术语言中的公式称为算术公式 (arithmetical formulas). 形式算术的公设是**谓词演算** (predicate calculus) (古典或直觉主义的, 取决于所讨论的形式算术)的公设和 Peano 公理(Peano axioms)

$$a'=b' \to a=b, \ \neg(a'=0), \ (a=b \,\&\, a=c) \to b=c,$$
$$a=b \to a'=b', \ a+0=a, \ a+b'=(a+b)',$$
$$a\cdot 0=0, \ a\cdot b'=(a\cdot b)+a,$$

及归纳公理模式:

$$A(0) \,\&\, \forall x(A(x) \to A(x')) \to A(x),$$

其中 A 是任意公式, 称为归纳公式(induction formula).

形式算术适合于推出初等数论中许多定理. 到目前(1980)为止, 还没有迹象表明存在某个不依赖于分析便可证明的重要数论定理在形式算术中不可证明. 为在形式算术中表示和证明这样的定理, 必须考虑形式算术的表示潜力, 特别重要的是许多数论函数在形式算术中的可表示性. 特别地, 关于原始(甚至部分)**递归函数** (recursive functions)的命题也能用形式算术语言来表示, 这样, 有可能证明表示部分递归函数重要性质的一些公式, 特别是它们的定义方程. 因此方程 $f(x')=g(x, f(x))$ 由下列公式表示

$$\forall a \forall b \forall c(F(x', a) \,\&\, F(x, b) \,\&\, G(x, b, c) \to a=c),$$

其中, F, G 分别是表示函数 f, g 的图形的公式. 在形式算术语言中也能表示关于有限集的命题. 此外, 古典形式算术等价于不带无限公理的 Zermelo-Fraenkel 公**理集合论** (axiomatic set theory): 在这些系统中, 任何一个系统的模型可以在另一系统中构造出来.

形式算术系统的推导能力由序数(ordinal) ε_0 (方程 $\omega^\varepsilon=\varepsilon$ 的最小解)来刻画: 在形式算术中可以推出**超限归纳法** (transfinite induction)的模式直到任意序数 $\alpha<\varepsilon_0$, 但不能推出到达 ε_0 的归纳模式. 形式算术系统的可证递归函数(provably-recursive function)类(即部分递归函数类, 其一般递归性可由形式算术来确立)等同于序数 $<\varepsilon_0$ 的序数递归函数类. 这就有可能在某些方面扩展形式算术, 例如, 可以考虑带有表示所有本原递归函数的符号以及相应的附加公设的形式算术. 形式算术满足两个 **Gödel 不完全性定理** (Gödel incompleteness theorem)的条件. 特别地, 存在多变元的多项式 P, Q, 使得尽管 $\forall X(P(X)) \neq Q(X)$ 表示一个真命题——形式算术系统的相容性, 但是这个公式不可证明. 已经构造了一个独立于形式算术的(Ramsey 型的)组合定理([6]).

在研究系统的结构(特别是相容性问题)时, 形式算术的表述不含量词, 但带有 Hillert 的 ε 符号. 这个系统的公式是不带量词的, 但允许用形如 $\varepsilon_x A(x)$ 的项(如果 x 存在, 则产生某个 x 满足条件 A; 否则为 0). ε 系统的公设是: 命题演算的公设, 等号规则, 自由数值变元的代换规则以及函数, =, ·, ′, pd (前驱)的公设, 以及下面的 ε 公理:

$$A(a) \to A(\varepsilon_x A(x)); \ A(a) \to \varepsilon_x A(x) \neq a';$$
$$\neg A(\varepsilon_x A(x)) \to \varepsilon_x A(x)=0.$$

量词可由下列公式导出:

$$\exists x A(x) \rightleftharpoons A(\varepsilon_x A(x)); \ \forall x A \rightleftharpoons \neg\exists x \neg A.$$

归约公理也是可推导的.

含自由变量的形式算术公式可定义数论谓词, 不含自由变元的公式(闭公式(closed formulas))表示命题. 关于自然数的 k 元谓词 $\mathscr{P}$ 称为算术的(arithmetic), 如果存在算术公式 $P(x_1, \cdots, x_k)$ 使得对任何自然数 $n_1, \cdots, n_k$, 关系式

$$P(n_1, \ldots, n_k) \Leftrightarrow \langle n_1, \ldots, n_k \rangle \in \mathscr{P}$$

成立. 这就由相应公式的前束范式的前束词的类型确定了算术谓词的一个分类. 类 Σ_n (类 Π_n)是由形如

$$Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n (f(x_1, \ldots, x_n, \alpha)=0)$$

的公式可表示的谓词 $P(\alpha)$ 组成的, 其中, f 为原始递归函数, Q_1 为 ∃ (或∀), 且 Q_i 是交错量词(即 Q_{i+1} 是 $\overline{Q}_i$, 其中 $\overline{\forall}$ 是 ∃, $\overline{\exists}$ 是 ∀). 每一类包含一个通用谓词(universal predicate), 即谓词 $T(e, a)$ 使得对这一类中的每个一元谓词 P 存在数 e_P, 使得恒等式 $\forall x(T(e_P, x) \equiv P(x))$ 成立. 多变元谓词可由配对函数化归为一元谓词. 对每个 $n>0$, 不等式 $\Sigma_n \neq \Pi_n$ 成立, 小下标的类严格包含在任何大下标的类之中. 根据函数的图, 谓词分类也产生了函数的一个分类. 并不是所有数论谓词都是算术的. 例如, 对任意闭算术公式 A, 等式 $T(\ulcorner A \urcorner) \equiv A$ 成立的谓词 $T(x)$ 是非算术的, 其中 $[A]$ 是 A 在某固定的、满足某些自然条件的编码下的编码. 谓词 T 在研究形式算术的结构中, 特别是

在公理的独立性问题中,起很重要的作用.在含符号 T 的形式算术中加上表示 T 和逻辑连接词的可换性的公理 $T(\ulcorner A\&B\urcorner)=T(\ulcorner A\urcorner)\&T(\ulcorner B\urcorner)$,可以证明形式算术是相容的.在形式算术中,同样的构造在子系统 $A_{\ulcorner n\urcorner}$ 中也成立,其中归纳公理限制在 $\leqslant n$ 的公式中,即 $\Pi_n\cup\Sigma_n$ 中的公式.也可由 Σ_{n+1} 的通用谓词代替 T,且相应的证明在子系统 $A_{\ulcorner n+1\urcorner}$ 中成立.由第二 Gödel 不完全性定理,$A_{\ulcorner n+1\urcorner}$ 比 $A_{\ulcorner n\urcorner}$ 更强.因此形式算术不等于任意子系统 $A_{\ulcorner n\urcorner}$,归纳模式不能由任意有限公理集代替.形式算术关于 Σ_1 的公式是完全的: Σ_1 的闭公式在形式算术中可证,当且仅当它为真.由于类 Σ_1 已含一个算术不可解谓词,因此形式算术中的可证性问题是算术不可解的.

如果形式算术定义为通常的 **Gentzen 形式系统** (Gentzen formal system),则截(类似于 Gentzen 系统中的假言推理)不能消除.如果归纳模式换为**无限归纳** (infinite induction) ω 规则 (ω-rule):

$$\frac{A(0)\cdots A(N)\cdots}{\forall x\,A(x)},$$

则截可以消除,这样得到了形式算术协调性的证明.ω 规则的另一种易处理的形式是:数 e 是描述 ω 规则中长度 $<\varepsilon_0$ 的推导(ω 证明 (ω-proof))的一般递归函数的编码,这个谓词是 Π_2 的,所得到的系统不是形式的,只是半形式的.对形式算术中每个公式 A 的推导,可指定一数 e 使得命题"e 是 A 的不带截的 ω 证明"为真,且在形式算术中可证.由于一无量词闭公式的不含截的 ω 证明不含量词,因而形式算术是协调的.如果使用第二 Gödel 不完全性定理,则形式算术中任意证明的截消定理是不能用形式算术方法证明的;因此,对任何给定的 N,在形式算术中可能存在归纳复杂性 $\leqslant N$ 的推导证明.借助于 ω 证明可以证明许多形式算术系统的元数学定理,特别是关于 Σ_1 公式的完全性以及可证递归函数的序数特征.

参考文献

[1] Kleene, S. C., Introduction to metamathematics, North-Holland, 1951 (中译本: S. C. 克林, 元数学导论, 科学出版社, 上册 1984, 下册 1985).

[2] Hilbert, D. and Bernays, P., Grundlagen der Mathematik, 1-2, Springer, 1968-1970.

[3] Новиков, П. С., Элементы математической логики, 2 изд., М., 1973 (英译本: Novikov, P. S., Elements of mathematical logic, Edinburgh, 1964).

[4] Kreisel, G., A survey of proof theory, *J. Symbolic Logic*, 33 (1968), 3, 321-388.

[5] Gödel, K., Ueber eine bisher nicht benutzte Erweiterung des finiten Standpunktes, *Dialectica*, 12 (1958), 280-287.

[6] Paris, J. and Harrington, L., A mathematical incompleteness in Peano arithmetic, in J. Barwise (ed.): Handbook of mathematical logic, North-Holland, 1977, 1133-1142.

Г. Е. Минц 撰 胜跃飞 译

算术函数 [**arithmetic function**; **арифметическая функция**], 数论函数 [number-theoretic function]

定义域为下列集合之一的复值函数: 自然数集合,有理整数集合,一个给定的代数数域中的整理想集合,多维坐标空间中的格等.它们是广义的算术函数.然而,通常这一术语是用来指具有特殊算术性质的上述类型的函数.最常遇到的算术函数有惯用的符号表示: $\varphi(n)$ 是 **Euler 函数** (Euler function); $d(n)$ 或 $\tau(n)$ 是**除数的个数** (number of divisors); $\mu(n)$ 是 **Möbius 函数** (Möbius function); $\Lambda(n)$ 是 **Mangoldt 函数** (Mangoldt function); $\sigma(n)$ 是 n 的除数的和.一个实数 x 的整数部分 $[x]$ 及分数部分 $\{x\}$ 也算作是算术函数.也研究由一个方程的解的个数所给出的算术函数,例如,$r(n)$ 表示方程 $x^2+y^2=n$ 的整数解 x,y 的个数;在 **Goldbach 问题** (Goldbach problem) 中,$J(N)$ 表示方程 $N=p_1+p_2+p_3$ 在素数中的解的个数.另有一些算术函数表示满足某些条件的数的个数,例如,函数 $\pi(x)$——不超过 x 的素数个数——用于描述素数的分布状况;$\pi(x,q,l)$ 表示算术数列 $n\equiv l\pmod q$ 中不超过 x 的素数个数.Чебышев 函数也用于讨论素数的性质: $\theta(x)$ 是所有不超过 x 的素数的自然对数之和,而 $\psi(x)=\sum_{n\leq x}\Lambda(n)$ (见 **Чебышев 函数** (Chebyshev function)).

在代数数论中,讨论上述算术函数的自然推广.例如在 n 次代数数域 K 中,对于整理想 $\mathfrak{U}$ 可以引进 Euler 函数 $\varphi(\mathfrak{U})$——所有和 $\mathfrak{U}$ 互素的理想 $\mathfrak{U}$ 的剩余类的个数.

算术函数出现并被应用于数的性质的研究之中.然而,算术函数理论也有其自身的研究兴趣.算术函数的变化规律通常不能用简单的公式来描述,即找不到它的渐近数值函数.因为许多算术函数不是单调的,所以研究它们的均值具有极其重要的意义.一类重要的算术函数是由所谓**乘性算术函数** (multiplicative arithmetic function) 和**加性算术函数** (additive arithmetic function) 组成;它们的值的分布问题是概率数论的研究课题([5]).

参考文献

[1] Виноградов, И. М., Основы теории чисел, 8 изд., М., 1972 (中译本: 维诺格拉陀夫, 数论基础, 商务印书馆, 1952).

[2] Виноградов, И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М., 1971.

[3] Hua, L.-K., Abschätzungen von Exponentialsummen und ihre Anwendung in der Zahlentheorie, *Enzyklopaedie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, Vol. 1, 1959, Heft 13, Teil 1. (中译本:

华罗庚，指数和的估计及其在数论中的应用，科学出版社，1963）

[4] Chandrasekharan, K., Arithmetical functions, Springer, 1970.

[5] Кубилюс, И., Вероятностные методы в теории чисел, 2 изд., Вильнюс, 1962（英译本：Kubilyus, I., Probabilistic methods in the theory of numbers, Amer. Math. Soc., 1964）.

Н. И Климов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hardy, G. H. and Wright, E. M., An introduction to the theory of numbers, Oxford Univ Press, 1979, Chapt. 16.

【译注】

参考文献

[B1] 华罗庚，数论导引，科学出版社，1975.

[B2] Elliott, P. D. T. A., Probabilistic number theory, Ⅰ, Ⅱ, Springer-Verlag, 1979, 1980.

潘承彪 译 戚鸣皋 校

算术亏格 [**arithmetic genus**；**арифметический род**]

代数簇（algebraic variety）的一个数值不变量．对于（域 k 上的）任意一个射影簇 X，如果它的不可约分支都是 n 维的，并且由环 $k[T_0,\cdots,T_N]$ 的齐次理想 I 定义，则算术亏格（arithmetic genus）$p_a(X)$ 通过 I 的 **Hilbert 多项式**（Hilbert polynomial）$\varphi(I, m)$ 的常数项 $\varphi(I,0)$，用下列公式表示：

$$p_a(X) = (-1)^n(\varphi(I,0)-1).$$

这个古典定义归功于 F. Severi（[1]）．在一般情形下它等价于以下定义：

$$p_a(X) = (-1)^n(\chi(X, \mathcal{O}_X)-1),$$

这里

$$\chi(X, \mathcal{O}_X) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \dim_k H^i(X, \mathcal{O}_X)$$

是簇 X 的系数在结构层 $\mathcal{O}_X$ 内的 Euler 特征标．在这种形式下算术亏格的定义可应用到任何完全代数簇，并且这个定义也表明 $p_a(X)$ 相对于双正则映射的不变性．若 X 是非奇异连通簇，并且 $k=\mathbf{C}$ 是复数域，则

$$p_a(X) = \sum_{i=0}^{n-1} g_{n-i}(X),$$

这里 $g_k(X)$ 是 X 上正则微分 k 形式的空间的维数．当 $n=1$，2 时，这样的定义是由意大利几何学派给出的．例如，若 $n=1$，则 $p_a(X)$ 是曲线 X 的亏格；若 $n=2$，

$$p_a(X) = -q+p_g,$$

这里 q 是曲面 X 的非正则性，p_g 是 X 的**几何亏格**（geometric genus）．

对于正规簇 X 上的除子 D，O. Zariski（见[1]）定义虚算术亏格（virtual arithmetic genus）$p_a(D)$ 为 D 所对应的凝聚层 $\mathcal{O}_X(D)$ 的 Hilbert 多项式的常数项．若除子 D 与 D' 代数等价，则有

$$p_a(D) = p_a(D').$$

当域 k 的特征为零时，算术亏格是双有理不变量；在一般的情形下，目前（1977）仅对维数 $n\leqslant 3$ 的情形得到了证明．

参考文献

[1] Baldassarri, M., Algebraic varieties, Springer, 1956.

[2] Hirzebruch, F., Topological methods in algebraic geometry, Springer, 1978.

И. В. Долгачев 撰 陈志杰 译

算术群 [**arithmetic group**；**арифметическая группа**]

定义在有理数域 $\mathbf{Q}$ 上的**线性代数群**（linear algebraic group）G 的满足下列条件的子群 H：存在 $\mathbf{Q}$ 上的有理忠实表示 $\rho: G \to \mathrm{GL}_n$（见**表示论**（representation theory）），使得 $\rho(H)$ 与 $\rho(G)\cap\mathrm{GL}(n,\mathbf{Z})$ 可公度，其中 $\mathbf{Z}$ 是整数环（群 C 的两个子群 A，B 称为可公度的，如果 $A\cap B$ 在 A，B 中皆为有限指数）．于是这个条件对 $\mathbf{Q}$ 上任何别的忠实表示也满足．更一般地，算术群是定义在**整体域**（global field）k 上的代数群 G 的子群，它同群 G 的 O 点的群 G_O 是可公度的，其中 O 是 k 的整数环．算术群 $H\cap G_R$ 是 G_R 的**离散子群**（discrete subgroup）．

设 $\varphi: G \to G_1$ 是代数群的 k 满同态，则任何算术群 $H\subset G$ 的象 $\varphi(H)$ 是 G_1 的算术群（[1]）．算术群这名称有时也可对抽象群定义，它是与某个代数群的算术子群同构的群．例如，设 k 是代数数域，则群 $G_O \cong G'_Z$ 称为算术群，其中 G' 是将 G 从定义域 k 限制到 $\mathbf{Q}$ 而得到的群．在 Lie 群论中，G_R 的实点群的算术子群在 G_R 模紧的正规子群所成商群中的象，也称为算术群．

参考文献

[1] Borel, A., Ensembles fundamentaux pour les groups arithmétiques et formes automorphes, Fac. Sc. Paris, 1967.

[2] Borel, A and Harish-Chandra, Arithmetic subgroups of algebraic groups, *Ann. of Math.*, 75 (1962), 485–535.

[3] Arithmetic groups and discontinuous subgroups, Proc. Symp. Pure Math., 9, Amer. Math. Soc., 1966.

В. П. Платонов 撰

【补注】 [A1]－[A3] 是有用的附加文献．[A2] 是算术群论的初等引论．

A. Selberg 和 I. I. Pyatetskiĭ-Shapiro 的猜想粗略地说是，对于多数半单 Lie 群，有有限余体积的离散子群必然是算术子群．G. A. Margulis 完全解决了这

一问题，特别地，他证实了问题中的猜想．至于细节可参见**离散子群** (discrete subgroup)．

参考文献

[A1] Borel, A., Arithmetic properties of linear algebraic groups, in Proc. Internat. Congress Mathematicians Stockholm, 1962, Uppsala, 1963, 10－22.

[A2] Borel, A., Introduction aux groupes arithmétiques, Hermann, 1969.

[A3] Humphreys, J. E., Arithmetic groups, Springer, 1980.

石生明 译　许以超 校

算术平均值 [arithmetic mean；арифметическое среднее]，亦称算术平均或算术中项

若干数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 之和除以它们的个数 n 所得之数 a：

$$a = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

张鸿林 译

(一阶)等差数列 [arithmetic progression；арифметическая прогрессия]，亦称算术数列，一阶等差数列 (arithmetic series of the first order)

一个数列，其中每一项都可由相邻的前一项加上某个固定的数 d 而得到；数 d 称为这个数列的**公差** (common difference)．因而，每个(一阶)等差数列具有下列形式：

$$a, a+d, a+2d, \ldots,$$

其中一般项是

$$a_n = a + (n-1)d.$$

刻画等差数列的一个性质是

$$a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}.$$

如果 $d>0$，则数列是递增的；如果 $d<0$，则数列是递减的．最简单的等差数列是自然数序列 1, 2, ⋯．等差数列的项数可以是有限的，也可以是无限的．如果一个等差数列具有 n 项，则它的和可按下列公式来计算：

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

【补注】 有关等差数列中的素数的一些结果，见**素数分布** (distribution of prime numbers)．

张鸿林 译

算术比 [arithmetic proportion；арифметическая пропорция]

形式为

$$a - b = c - d$$

的等式，其中 a, b, c, d 是给定的数．算术比亦称差比 (difference proportion)．

张鸿林 译

算术根 [arithmetic root；арифметический корень]，n 次方根的算术值 (arithmetical value of the n-th root)，实数 a 的

一个非负数，它的 n 次方等于 a．如果考虑一个非负数的偶次方根的两个实数值，则指的是实数域中根的代数值 (algebraic values of the root in the domain of the real numbers)；另一方面，如果考虑 n 次方根的所有 n 个值，则指的是复数域中根的值 (values of the root in the domain of the complex numbers)．

张鸿林 译

等差数列 [arithmetic series；арифметический ряд]，m 阶的

由 m 次多项式

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m,$$

当变量 x 相继取非负整数 ($x=0, 1, 2, \cdots$) 时所得之值构成的数列．如果 $m=1$，即 $p(x)=a_0+a_1x$，则得到首项为 a_0、公差为 a_1 的等差数列．如果 $p(x)=x^2$ 或 $p(x)=x^3$，则得到整数的平方或立方的数列，即二阶或三阶等差数列的特殊情况．如果求出等差数列相邻两项之差(一阶差)的数列，然后再由所得数列求出相邻两项之差(二阶差)的数列，再由二阶差的数列求出三阶差的数列，如此等等，直到第 m 步，则可看到所有 m 阶差彼此相等．反之，如果对某个数列来说，它的 m 阶差都相等，则这个数列是 m 阶数列．利用这个性质，可以由各阶差的数列来构造相应的等差数列．例如，可以把数列 1, 1, 1, ⋯，看成自然数数列 1, 2, 3, ⋯ 的一阶差；看成三角形数 (triangular numbers) 数列 1, 3, 6, 10, ⋯ 的二阶差；看成四面体数 (tetrahedral numbers) 数列 1, 4, 10, 20, ⋯ 的三阶差，等等．这些数之所以这样称呼，是由于三角形数表示排成三角形形式的小球的个数(图 1)，四面体数表示排成四面体形形式的小球的个数(图 2)．三角形数由公式

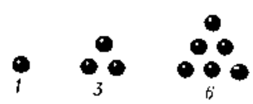


图 1

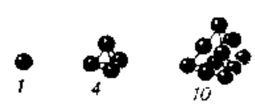


图 2

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

来表示，而四面体数则由公式

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

来表示．k 角形数 (k-gonal numbers) 或形数 (figura-

te numbers)是三角形数的推广，它们在算术发展的各阶段起着重要作用．k 角形数由下列公式来表示：

$$n+(k-2)\frac{n(n-1)}{2},\quad n=1,2,\ \ldots$$

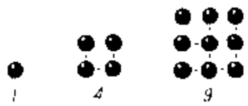


图 3

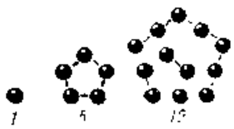


图 4

它们构成一个二阶等差数列，首项为 1，第二项为 k，二阶差为 $k-2$．如果 $k=3$，则得到三角形数；如果 $k=4$，则得到正方形数(n^2)；如果 $k=5$，则得到五角形数 $(3n^2-n)/2$，等等．这些名称的由来可以从图 3 和图 4 看清，其中排成正方形和五角形形式的小球的个数由相应的正方形数和五角形数来表示．形数满足 P. Fermat 提出、A. L. Cauchy 首先证明的下述定理：任何自然数都能表示为不多于 k 个 k 角形数之和．

参考文献

[1] Waerden, B. L. van der, Algebra, 1－2, Springer, 1967～1971(中译本：B. L. 范德瓦尔登，代数学，Ⅰ 1963，Ⅱ 1976)．

[2] Арнольд, И. В., Теоретическая арифметика, 2 изд., М., 1939．

БСЭ-2　张鸿林 译

算术空间 [**arithetic space**; **арифметическое пространство**]，数空间(number space)，坐标空间(coordinate space)，实 n 空间(real n-space)

实数集 $\mathbf{R}$ 的 Descartes 幂 $\mathbf{R}^n$，具有线性拓扑空间的结构．这里，加法运算定义为：

$$(x_1,\ldots,x_n)+(x_1',\ldots,x_n')=(x_1+x_1',\ldots,x_n+x_n');$$

与数 $\lambda\in\mathbf{R}$ 的乘法定义为：

$$\lambda(x_1,\ldots,x_n)=(\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n).$$

$\mathbf{R}^n$ 中的拓扑是 $\mathbf{R}$ 的 n 数组的直积的拓扑；它的基是由开 n 维平行六面体(n-dimensional parallelepipeda)

$$I=\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbf{R}^n:\ a_i<x_i<b_i,\ i=1,\ldots,n\},$$

构成的，其中数 $a_1,\ \cdots,\ a_n$ 和 $b_1,\ \cdots,\ b_n$ 是给定的．

实 n 空间 $\mathbf{R}^n$ 也是一个赋范空间，其范数是

$$\|x\|=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2},$$

其中 $x=(x_1,\ \cdots,\ x_n)\in\mathbf{R}^n$．同时也是一个 Euclid 空间，其内积是

$$\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i,$$

其中 $x=(x_1,\ \cdots,\ x_n)$，$y=(y_1,\ \cdots,\ y_n)\in\mathbf{R}^n$．

И. В. Долгачев 撰　张鸿林 译

算术三角形 [**arithmetic triangle**; **арифметический треугольник**]

同 **Pascal 三角形** (Pascal triangle)．

算术平均求和法 [**arithmetical averages, summation method of**; **средних арифметических метод суммирования**]

级数和数列的求和法之一．级数

$$\sum_{k=0}^{\infty}u_k$$

按算术平均法是可和的(summable by the method of arithmetical averages)，其和为 s，如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s_0+\cdots+s_n}{n+1}=s,$$

其中 $s_n=\sum_{k=0}^{n}u_k$．在这种情况下，亦称序列 $\{s_n\}$ 可用算术平均法求和而得到极限 s．算术平均求和法亦称一阶 **Cesàro 求和法** (Cesàro summation methods)．算术平均求和法是完全正则的(见**正则求和法**(regular summation methods))和迁移的(见**求和法的迁移性**(translativity of a summation method))．

参考文献

[1] Hardy, G. H., Divergent series, Clarendon, 1949.

И. И. Волков 撰

【补注】 在英文文献中有时用"arithmetical means"一词代替"arithmetical averages"(见([A1])，用"summability"一词代替"summation"：summability method．

参考文献

[A1] Cooke, R. G., Infinite matrices and sequence spaces, Macmillan, 1950.

张鸿林 译

算术化 [**arithmetization**; **арифметизация**]

用于数理逻辑的一个方法，它以关于自然数的推导过程代替关于某个逻辑数学语言的表达式的推导过程．为此这个代替要用某一充分简单的(所考虑的语言的字母表上)一切字的集合到自然数序列内的一一映射来构造．一个字的象称为它的配数(number)．字之间的诸关系和字上定义的诸运算用此映射被转换为自然数间的关系和自然数上定义的运算．一"充分简单"映射之必要是因为要得出以下事实：某些基本关系(例如把一个字嵌入(imbedding)另一个字的关系等等)和某些运算(像字的联接运算等等)被转换为有一简单算法特征(例如原始递归)的关系和运算．特别地，若在所考虑的语言的表达式里有某个可计算函数族的程序(见**可计算函数**(computable function))，算术化可自然地引出此族的枚举(在其中可以取每个函数的程序的配数

为该函数的配数).

第一个算术化是 K. Gödel 在形式算术不完全性证明中构造的(见 **Gödel 不完全性定理**(Gödel incompleteness theorem)). 更确切地说, Gödel 把字母表的字母对应上某些两两不同的自然数, 然后对字 $\tau_1\cdots\tau_n$ 对应配数 $2^{t_1}\cdots p_n^{t_n}$, 其中 t_i 为字母 τ_i 对应的配数, 且 p_i 是自然数序列中第 i 个素数. 如此枚举称为 Gödel 枚举(Gödel enumeration). 在一广泛意义下每个由算术化产生的字的枚举称为 Gödel 枚举且对应于一字的配数称为它的 Gödel 配数(Gödel number).

1936 年, A. Church 用算术化得到算术的不可解算法问题的第一个例子.

(在短语"分析的算术化"中)"算术化"一词在关于数学基础的文献中也用来表示 19 世纪实数理论的产生, 这一理论是用集合论的构造法从自然数开始逐步建立起来的.

参考文献

[1] Gödel, K., Ueber formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter System I, *Monatsh. Math. Physik*, **38** (1931), 178－198.

[2] Church, A., An unsolvable problem of elementary number theory, *Amer. J. Math.*, **58** (1936), 345－363.

[3] Kleene, S. C., Introduction to metamathematics, North-Holland, 1951 (中译本: S. C. 克林, 元数学导论, 科学出版社, 上册 1984, 下册 1985).

B. A. Успенский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Smorinsky, C., The incompleteness theorem, in J. Barwise (ed.): Handbook of mathematical logic, North-Holland, 1977, 821－866.

杨东屏 译

排列 [arrangement 或 permutation; размещение]

从 m 个元素中取 n 个元素的可重复(with repetitions)排列是某个集合 $A=\{a_1,\cdots,a_m\}$ 中元素的一个有限序列 $\overline{a}=(a_{i_1},\cdots,a_{i_n})$. 如果 $\overline{a}$ 的各项互不相同, 则 $\overline{a}$ 称为一个不重复排列(without repetitions). 从 m 个元中取 n 个元素的可重复排列数是 m^n, 而不重复排列数是 $(m)_n=m(m-1)\cdots(m-n+1)$.

一个排列可以看作定义在 $Z_n=\{1,\cdots,n\}$ 上并在 A 中取值的一个函数 $\varphi:\varphi(k)=a_{i_k}(k=1,\cdots,n)$. A 的元素通常称作方格(cell)(或瓮(urns)), 而 Z_n 的元素则称为粒子(particles)(或球(balls)); φ 规定了各粒子放入各方格的放法, 如果说到不可辨的粒子或方格, 则意味着考虑的是排列的类(classes of arrangements). 这样一来, 如果所有粒子都不可辨, 则分别由函数 φ 和 ψ 定义的两个排列属于同一类, 当且仅当有 Z_n 的一个置换 σ, 使得 $\varphi(\sigma(k))=\psi(k)$ 对每个 $k\in Z_n$ 成立. 在这种情形下,这种类的个数, 或者所谓把 n 个不可辨粒子放入 m 个可辨方格的排列数, 就是从 m 个元素中取 n 个元素并允许重复的组合数(见**组合**(combination)).

如果说所有方格都不可辨, 则意味着排列的分类使分别由函数 φ 和 ψ 定义的两个排列属于同一类, 当且仅当有 A 的一个置换 τ, 使得 $\tau(\varphi(k))=\psi(k)$ 对每个 $k\in Z_n$ 成立. 在这种情形下,把 n 个不同粒子放入 m 个不可辨方格的排列数即类数是 $\sum_{k=1}^{m}S(n,k)$, 这里的 $S(n,k)$ 是第二类 Stirling 数(Stirling number of the second kind):

$$S(n,k)=S(n-1,k-1)+kS(n-1,k),\quad S(0,0)=1,$$

$$S(n,k)=0, \text{对 } k>n \text{ 和 } k=0,\ n>0.$$

如果粒子和方格都不可辨, 则得到把 n 个同样粒子放入 m 个同样方格的排列; 这样的排列数是 $\sum_{k=1}^{n}p_n(k)$, 这里 $p_n(k)$ 是把 n 分拆成 k 个自然数之和的分拆个数, 还可以考虑排列的其他分类, 例如当上述置换 σ 和 τ、分别取自 n 次与 m 次对称群的子群时,就能给出排列的一种分类.(这种以及其他推广可在[1],[2]中找到.) "排列"的同义词有"n 排列(n-permutation)"和"总体的有序 n 样本(ordered n-sample of a population)".

参考文献

[1] Сачков, В. Н., Комбинаторные методы дискретный математики, М., 1977.

[2] Riordan, J., An introduction to combinatorial analysis, Wiley, 1958.

В. М. Михеев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Comtet, L., Advanced combinatorics, Reidel, 1977 (中译本: L. Comtet, 高等组合分析, 大连理工大学出版社, 1991).

李 乔 译 钟 集 校

Artin 群 [Artinian group; Артинова группа]

子群有极小条件的群(group with the minimum condition for subgroups), 有降链条件的群(group with the descending chain condition)

各子群的任何降链必在有限步后终止的群. Artin 群是周期群,它的结构问题着重在具有有限真子群的无限群的 Schmidt 问题([3])和极小性问题(minimality problem): Artin 群是否为 Abel 群的有限扩张? 对于局部可解群([1])和局部有限群([3],[4]), 这两个问题都已解决.

参考文献

[1] Черников, С. Н., «Матем. сб.», 7(1940), 1, 35－64.

[2] Черников, С. Н., «Успехи матем. наук», **14** (1959), 5, 45－96.

[3] Каргаполов, М. И., 《Сиб. матем. ж.》, 4 (1963), 1, 232－235.

[4] Шунков, В. П., 《Алгебра и логика》, 9 (1970), 2, 220－248 (英译本: Shunkov, V. P., On the minimality property for locally finite groups, *Algebra and Logic*, 9 (1970), 2, 137－151). В. П. Шунков 撰

【补注】 Schmidt 问题 (Schmidt problem) 实际上叙述为:在什么条件下,一个无限群有真无限子群?

参考文献

[A1] Kegel, O. H. and Wehrfritz, B. V., Locally finite groups, North - Holland, 1973.

石生明译. 许以超校

Artin 模 [Artinian module; Артинов модуль]

满足子模降链条件的模. Artin 模的类在取子模、商模、有限直和及扩张下都是封闭的. 所谓在扩张下封闭的含意是:如果 B 和 A/B 都是 Artin 模,则 A 也是 Artin 模. 每个 Artin 模都可以分解为一些子模的直和,而这些子模不能再进行直和分解了. 一个模具有合成模列,当且仅当它是 Artin 模同时又是 Noether 模. 亦见 **Artin 环** (Artinian ring). Л. А. Скорняков 撰

【补注】

参考文献

[A1] Faith, C., Algebra: rings modules and categories, 1, Springer, 1973.

[A2] Faith, C., Algebra II: ring theory, Springer, 1976.

赵春来 译

Artin 环 [Artinian ring; артиново кольцо], 右 Artin 环 (right Artinian ring)

满足右理想极小条件的环,即任意右理想的非空集合 M 在包含关系给出的偏序之下总有极小元素([1])——M 中的不严格包含 M 中任何右理想的右理想. 换句话说,Artin 环是这样的环:它作为自身上的模是右 **Artin 模** (Artinian module). 一个环 A 是 Artin 环当且仅当它满足右理想降链条件,即对任意的右理想的下降序列 $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \cdots$, 存在自然数 m, 使得 $B_m = B_{m+1} = \cdots$. 类似地可以定义左 Artin 环 (left Artinian ring).

每个有单位元的结合的 Artin 环都是 **Noether 环** (Noetherian ring). 域上的任何有限维代数都是 Artin 环. 对于交错环类中的 Artin 环,特别是结合环类中的 Artin 环的性质进行过最充分的研究 (见**交错环与交错代数** (alternative rings and algebras); **结合环与结合代数** (associative rings and algebras)). 结合的 Artin 环的 **Jacobson 根** (Jacobson radical) 是幂零的并且包含每个单边幂零理想. 环 A 是单的结合的 Artin 环,当且仅当它同构于某个结合的体上的阶为某有限数的所有矩阵构成的环. 在交错环类中,任何单的 Artin 环或是结合的,或是它的中心上的 **Cayley - Dickson 代数** (Cayley - Dickson algebra), 此时,这个中心是一个域. 对 Jacobson 根为零的结合的 Artin 环的结构已有刻画定理 (见**半单环** (semi - simple ring)). 此定理在交错环的情形有其衍化形式. 对于具有非零的 Jacobson 根的结合环已经发展了相当先进的结构理论 ([1], [2]). 若干类型的 Artin 环——**拟 Frobenius 环** (quasi - Frobenius ring), **单列环** (uniserial ring), **平衡环** (balanced ring)——正在深入研究之中.

参考文献

[1] Artin, E., Nesbitt, C. J. and Thrall, R. M., Rings with minimum condition, Univ. Michigan Press, Ann. Arbor, 1946.

[2] Jacobson, N., Structure of rings, Amer. Math. Soc., 1956.

[3] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1965, М., 1967, 133－180.

[4] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1968, М., 1970, 9－56.

К. А. Жевлаков 撰

【补注】

参考文献

[A1] Faith, C., Algebra: rings, modules and categories, 1, Springer, 1973.

[A2] Faith, C., Algebra II: ring theory, Springer, 1976.

赵春来 译

Arzelà - Ascoli 定理 [Arzelà - Ascoli theorem; Арцела-Асколи теорема]

一些定理的名称,这些定理说明一个连续函数列的极限是连续函数的条件. 一个这样的条件是该序列的**拟一致收敛性** (quasi - uniform convergence).

参考文献

[1] Arzelà, C., *Mem. Accad. Sci. Bologna* (5), 5 (1893), 225－244.

[2] Ascoli, G., *Rend. Accad. Lincei*, 18 (1883), 521－586.

П. С. Александров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Dunford, N. and Schwartz, J. T., Linear operators, General theory, 1, Interscience, 1958.

李炳仁 译

Arzelà 变差 [Arzelà variation; Арцела вариация]

多元函数的一种数值特征,可以被看成一元函数的**变差** (variation of a function) 在多维情形的相应推广. 设 $f(x)=f(x_1, \cdots, x_n)$ 是定义在 n 维平行多面体 $D_n=[a_1, b_1]\times\cdots\times[a_n, b_n]$ ($n=2, 3, \cdots$) 上的实值函数, G_n 为所有连续的向量函数 $\bar{x}(t)=(x_1(t), \cdots, x_n(t))$ ($0\leqslant t\leqslant 1$) 的全体,其中每个函数 x_k 在 $[0, 1]$ 上非减且 $x_k(0)=a_k$, $x_k(1)=b_k$ ($k=1, 2, \cdots, n$). 令

$$A(f, D_n) = \sup_{x(t)\in D_n} \sup_{\Pi} \sum_{i=1}^{m} | f(\bar{x}(t_i)) - f(\bar{x}(t_{i-1})) |,$$

其中$\Pi=\{0=t_0<t_1<\cdots<t_m=1\}$为$[0,1]$的任意一个分划．此定义的$n=2$的情形由 C. Arzelà（[1]，也见[2]，p.543）提出．若$A(f, D_n)<\infty$，则称f在D_n上具有有界（有限）的 Arzelà 变差，并记所有这种函数组成的类为$A(D_n)$．函数$f(x_1, \cdots, x_n)$属于$A(D_n)$的充要条件是存在着一种分解$f=f_1-f_2$，其中f_1与f_2都是D_n上的有限非减函数．函数f称为在D_n上是非减的，是指

$$f(x_1', \ldots, x_n') \geqslant f(x_1, \ldots, x_n)$$

对$a_k \leqslant x_k < x_k' \leqslant b_k$ $(k=1, \cdots, n)$成立．函数类$A(D_n)$包含D_n上具有有界 **Hardy 变差**（Hardy variation）的函数类．

参考文献

[1] Arzelà, C., *Rend. Acad. Sci. Bologna*. 9 (1905), 2, 100－107.

[2] Hahn, H., Theorie der reellen Funktionen, 1, Springer, 1921.

Б. И. Голубов 撰　王斯雷 译

断言［**assertion**；**суждение**］，命题（proposition 或 statement），（断言）语句（（assertive）sentence）

一个由其意义可断定其真假的陈述语句．在狭义下，数理逻辑中把它理解为逻辑－数学语言的一个闭公式，并且由其语言的**语义**（semantics）可以断定其真假．

于是公理集合论中的各种数学命题，例如选择公理（axiom of choice），连续统假设（continuum hypothesis）等都能写成公式的形式；根据通常的语义法则，这个公式就表示了命题所包含的内容．但这决不意味着存在一个识别语言中命题的真假的方法．而且，语义学本身并未充分发展，或可以提供在解决某些断言真假的问题时会遇到的基本困难．在一个理论的框架内，某些断言的不可解性是由**形式化方法**（formalization method）阐明的（例如见**公理集合论**（axiomatic set theory））．

А. Г. Драгалин 撰　卢景波 译　王世强 校

连带函数［**associated function**；**ассоциированная функция**］，复变量的

由给定的函数$f(z)$借助于一个固定函数$F(z)$按某种方式得到的函数．例如，如果

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

是一个整函数，而

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$$

是固定的整函数，其中$b_k \neq 0$ $(k \geqslant 0)$，则

$$\gamma(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{b_k} z^{-(k+1)}$$

是借助函数$F(z)$连带于$f(z)$的函数；这里假设右边的级数在某个邻域$|z|>R$中收敛．因此，函数$f(z)$可以通过$\gamma(z)$由公式

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=R_1>R} \gamma(t) F(zt)\, dt$$

来表示．特别是，如果

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} z^k$$

是指数型的整函数，而$F(z)=e^z$，则

$$\gamma(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-(k+1)}$$

是$f(z)$的 Borel 连带函数（Borel-associated function）（见 **Borel 变换**（Borel transform））．

А. Ф. Леонтьев 撰　张鸿林 译

结合演算［**associative calculus**；**ассоциативное исчисление**］

一个赋与一非常确定的类型的，特别是适合详细说明的有穷表示的结合系统（**半群**（semi-group））的**演算**（calculus）的名称．结合演算一词是由 А. А. Марков 引进的，他也发展了结合演算的理论（[2]）．

任何结合演算$\mathfrak{A}$可藉详细说明某个**字母表**（alphabet）A及A上关系——字母表A中的**字**（word）对的有穷表σ来定义．组成关系的字通常称为它的部分——左部分和右部分．A中字上的σ允许运算（σ-permissible operation）是σ中任何关系的一部分的代入，其中用同在关系的其他部分来嵌入$\mathfrak{A}$中的一个字（见**嵌入字**（imbedded word））．一个结合演算$\mathfrak{A}$是由A中任意字P开始，实行一系列σ允许运算的过程．称一切如此得来的字Q（包括初始字P本身）在结合演算$\mathfrak{A}$中等价于P（记为$\mathfrak{A}:P\bigcup Q$）．对任意结合演算$\mathfrak{A}$，关系$\bigcup$是自反，对称和传递的．此外，由$\mathfrak{A}:P\bigcup Q$及$\mathfrak{A}:R\bigcup S$可导出$\mathfrak{A}:PR\bigcup QS$．这样，就可能以一种自然的方式对每个结合演算$\mathfrak{A}$指定一有穷表示结合系统$K_{\mathfrak{A}}$，$K_{\mathfrak{A}}$的元素是$A$中字的等价类，$K_{\mathfrak{A}}$的乘法运算是由$A$中字的联接运算导出的．这样构造的结合系统$K_{\mathfrak{A}}$将有一单位元（由空字表示的元素）；$K_{\mathfrak{A}}$的由字母表$A$的字母表示的元素将组成$K_{\mathfrak{A}}$的生成元系，其中关系$\sigma$的表在如下意义下表示$K_{\mathfrak{A}}$的这些生成元间的关系的一个完全系，被二字$P$和$Q$表示的$K_{\mathfrak{A}}$的元素在$K_{\mathfrak{A}}$中等同，当且仅当$P$和$Q$在$\mathfrak{A}$中等价．所以$K_{\mathfrak{A}}$中元素是否等同归约为$\mathfrak{A}$中字是否等价的问题．由此可知研究任意结

合演算 $\mathfrak{A}$ 中判定字的等价问题的算法问题(algorithmic problem)的可能性的重要性．这个问题首先是由 A. Thue 陈述的([1])：对任意结合演算 $\mathfrak{A}$ 构造一个算法，它对此结合演算字母表的任何字对可在有穷步内决定这两个字在 $\mathfrak{A}$ 中是否等价．在代数解释中这问题是结合系统 $K_{\mathfrak{A}}$ 的等同问题．Thue 只对少数特例成功地解决了这个问题．(30 年代及其后)在这个问题的现代解释中它的算法是在某种确切的字的意义下来寻求的，如一个**部分递归函数**(partial recursive function)，一个 **Turing 机**(Turing machine)或一个**正规算法**(normal algorithm)．若将一问题按现代方式陈述，那么寻找不存在如此算法的特定结合演算就变成有意义的了．Марков ([3]) 和 E. L. Post ([4])各自独立地构造了不可解的结合运算(unsolvable associative calculi)，即认知其字的等价问题不可解的结合演算．这些结果给出现代形式下 Thue 问题的否定解．于是人们接受 **Church 论题**(Church thesis)或对其他与递归函数等价的算法概念更精确定义的论题，那么他们就必须承认原来形式的 Thue 问题对某些具体的结合演算有否定解．

Марков 和 Post 最初构造的例子非常复杂．其后给出了更简单的不可解结合演算的例子．例如，它们之中包括一个有七个非常简单关系的结合演算([5])，以及只有三个如此关系的结合演算([6])，对只有一个关系的结合演算的情况，Thue 问题几乎完全被解决([7])．

人们用自然的方式定义了一结合演算到另一结合演算内或到另一结合演算上的同构(isomorphism)([2])．在代数观点下，具有特殊兴趣的是在同构变换下不变的结合演算的性质的研究；它们是抽象结合系统的性质．Марков 在自己关于判定结合演算字的等价问题研究的基础上在 [2] 中得到一个非常一般的结果，它差不多对当时研究的结合演算基本分类的一切算法问题给出了否定解．特别地，他证明了：若 I 是一个结合演算的同构不变性质，存在唯一的有性质 I 的结合演算，且也存在一结合演算不包含在任何有性质 I 的结合演算之中，那么对任何有多于三个字母的字母表，在结合演算中判定哪个具有性质 I 的算法问题不可解．由此立即可知对任何多于三个字母的字母表，判定结合演算唯一性，判定一结合算法有穷性，判定一结合演算的半群的特征标，判定群 - 结合演算中的包含，判定一对结合演算是否同构等问题是不可解的．由此证明了同构结合演算对集是递归可枚举的([8])．这里用的方法也可以证明一系列结合演算不变性质的递归可枚举性．

参考文献

[1A] Thue, A., Probleme über Veränderungen von Zeichenreihen nach gegebener Regeln, *Kra. Vidensk. Selsk. Skrifter. I. Mat. Nat. Kl.*, 1914, 10.

[1B] Thue, A., Probleme über Veränderungen von Zeichenreihen nach gegebener Regeln, in Selected Math. Paper, Univ. Forlagot, Oslo, 1977, 493 – 524.

[2] Марков, А. А., Теория алгорифмов, М., 1954 (中译本：A. A. 马尔科夫，算法论，科学出版社，上册 1959，下册 1960).

[3] Марков, А. А., 《Докл. АН СССР》, **55** (1947), 7, 587 – 590.

[4] Post, E. L., Recursive unsolvability of a problem of Thue, *J. Symbolic Logic*, **12** (1947), 1, 1 – 11.

[5] Цейтин, Г. С., 《Докл. АН СССР》, **107** (1956), 3, 370 – 371.

[6] Матиясевич, Ю. В., 《Докл. АН СССР》, **173** (1967), 6, 1264 – 1266.

[7] Адян, С. И., 《Тр. Матем. ин-та АН СССР》, **85** (1966), 1 – 123.

[8] Нагорный, Н. М., *Z. Math. Logik und Grundl Math.*, **6** (1960), 319 – 324.

Н. М. Нагорный 撰

【补注】 "结合演算"(associative calculus)一词似乎只限于在俄文文献中使用；西方常用"Thue 系统"(Thue system)一词，Thue 系统及有关组合判定问题的说明，见[A1]，第 6 章；或[A2]．

参考文献

[A1] Davis, M., Computability and unsolvability, McGraw-Hill, 1958 (中译本：M. 戴维斯，可计算性与不可解性，北京大学出版社，1984).

[A2] Davis, M., Unsolvable problems, in J. Barwise (ed.), Handbook of Mathematical logic, North - Holland, 1977, 567 – 594.

杨东屏 译

结合环与结合代数 [**associative rings and algebras**；**ассоциативные кольца и алгебры**]

有适合结合律的乘法的环与代数，即有两个二元运算：加法"+"与乘法"·"的集合，关于加法作成 Abel 群，关于乘法作成半群，其中乘法对加法有(左、右)分配律．进一步地，一个结合代数应当是一个固定域 F 上的向量空间，而且乘法与由域中元素相乘在下述意义下是相容的：对任意 $\alpha\in F$ 及代数中所有元素 a, b, $\alpha(ab)=(\alpha a)b=a(\alpha b)$.

结合环与结合代数的首要例子是数环与数域(复数域及其子环)，多项式代数，域上矩阵代数与函数域．结合环与结合代数的理论在二十世纪初已发展成为代数学的一个独立分支．这一理论与数学的许多领域相关，特别是代数几何与代数数论(交换环)、泛函分析(交换赋范环、算子环与函数环)、拓扑(拓扑空间上的连续函数环)．域论、交换环理论(见**域**(field)，**交换环**(commutative ring)，亦见**交换代数**(commutative algebra))，以及结合代数的表示理论已经成为结合环与结合代数理论的独立

分支、拓扑环与除环理论形成了**拓扑代数**(topological algebra)的一部分.

结合环与结合代数理论的经典部分由有限维结合代数的理论([2])构成. 该理论的主要结果是: 域 F 上有限维单结合代数(即, 无真理想)是一个在 F 上是有限维的除环上的全矩阵代数, (Wedderburn 定理(Wedderburn theorem)); 特征为零的域上的有限维结合代数(甚至更一般地, 可分的有限维结合代数)是其根 I(即极大幂零理想)与一个半单(即根为零)子代数 S 的(作为线性空间的)直和. 任意两个补半单子代数 S 与 S_1 是共轭的(见 **Wedderburn-Мальцев定理**(Wedderburn-Mal'tsev theorem)).

除环是最重要的结合代数类之一, 见**除环**(skew-field) (即对环中任意元素 $a, b, a\neq 0$, 方程 $ax=b$ 与 $ya=b$ 都可解的结合环). 成为某一域上的代数的除环, 称为**可除代数**(division algebra). 有限维可除代数理论是域论的经典内容. 实数域上全部有限维可除代数已经被刻画: 它们是实数域、复数域及四元数除环, (见 **Frobenius 定理**(Frobenius theorem)). 所有有限除环是交换的(除环的 Wedderburn 定理(Wedderburn theorem on skew field)). 除环的 Galois 理论已经建立起来([5]).

结合环的结构理论中的关键概念是 **Jacobson 根**(Jacobson radical)、半单性与本原性. 一个结合环称为(在 Jacobson 意义下)半单的, 如果其 Jacobson 根为零. 一个环称为(右)本原的, 如果它有不可约忠实右模. 所有半单结合环均为本原环的次直和. 任意本原结合环 R 是除环上某一向量空间 V 的一个稠密线性变换环(Jacobson 稠密性定理(Jacobson density theorem)); 此处稠密的意义是: 对 V 中任意一组线性无关元素 $v_1,\cdots,v_k$ 及 V 中任意元素 $u_1,\cdots,u_k$, 都有变换 $r\in R$, 使得 $v_ir=u_i(1\leqslant i\leqslant k)$. 根的一般理论在环的结构理论中占有重要地位, 见**环与代数的根**(radical of rings and algebras).

(右)Artin 环(见 **Artin 环**(Artinian ring)), 即对右理想有降链条件(极小条件)的环, 其理论构成结合环理论的经典部分. 这一理论的主要结果是: 一个结合环是半单 Artin 环, 当且仅当它是有限多个除环上全矩阵环的直和(**Wedderburn-Artin 定理**(Wedderburn-Artinian theorem)).

(经典)分式环是结合环结构理论中的重要概念. 环 $Q(R)$ 称为其子环 R 的(右)分式环, 如果 R 的每个正则元(即非零因子)在 $Q(R)$ 中有逆元, 而且 $Q(R)$ 的任意元素都有形式: ab^{-1}, $a,b\in R$. 结合环 R 有分式环, 当且仅当对所有 $a,b\in R$, b 是正则元, 存在元素 $a_1, b_1\in R$, 使得 $ab_1=ba_1$, 而 b_1 是正则元. (Ore 定理(Ore theorem)). 环 R 有半单 Artin 分式环当且仅当它是半素环(即, 对任意非零理想 $I\subseteq R$, $I^2\neq 0$), 而且对形如

$$r(S)=\{x\in R, Sx=0\},$$

的右零化理想满足极小条件, 这里 S 是 R 的一个子集, 同时不包含右理想的无限直和 (Goldie 定理(Goldie theorem)). 除经典分式环外, 对其他意义的分式环——主要是极大或全分式环也有研究, 见[8].

应当特别注意的是**自由结合代数**(free associative algebra) 的研究. 设 F 是域, X 是一集合. F 上有单位元且基为 X 的自由结合代数 $F\langle X\rangle$ 是系数在 F 中, 自由项在变量集 X 中的非交换多项式作成的代数. 代数 $F\langle X\rangle$ 的刻画是: 它是由 X 生成的有单位元代数, 并且 X 到有单位元的结合代数 R 的任意映射都能被扩充(还是唯一地)为 $F\langle X\rangle$ 到 R 的同态. 自由结合代数是有自由理想(free ideal)的环, 即环 $F\langle X\rangle$ 的右(左)理想是自由右(左) $F\langle X\rangle$ 模, 并且自由有限生成 $F\langle X\rangle$ 模的所有基包含的元素个数相同(Cohn 定理(Cohn theorem)). 有自由理想的环的另外例子有: 自由群的群代数、结合可除代数的自由积. 自由结合代数 $F\langle X\rangle$ 也是唯一因式分解整环: 任何非可逆元 $a\in F\langle X\rangle$ 有一表示 $a=p_1\cdots p_n$, 其中 p_i 是既约元, 并且除因子的顺序与相似性外, 这个表示是唯一的(环 R 的两个元 a 与 b 称为相似的(similar), 如果 R/aR 与 R/bR 作为右 R 模同构). 代数 $F\langle X\rangle$ 的每个非纯量元的**中心化子**(centralizer)同构于单变量 t 的多项式代数 $F[t]$ (Bergman 定理(Bergman theorem)).

群代数与 PI 代数是两类重要的结合代数, 见**群代数**(group algebra); **PI 代数**(PI-algebra). 环的簇理论正在发展中.

随着**同调代数**(homological algebra)的发展, 环论在数学中的作用更大了. 许多熟知的环类可以用这些环上的模范畴的性质来刻画, **模范畴**(modules, category of). 例如, 环 R 是半单 Artin 环当且仅当 R 上的所有右(左)模是投射模(内射模). 环 R 为正则环(在 von Neumann 意义下), 当且仅当 R 上所有右(左)模都是平坦的. 亦见**正则环**(regular ring); **环的同调分类**(homological classification of rings); **拟 Frobenius 环**(quasi-Frobenius ring).

参考文献

[1] Waerden, B. L., van der, Algebra, 1-2, Springer, 1967-1971 (译自德文) (中译本: B. L. 范德瓦尔登, 代数学, 科学出版社, I, 1964, II, 1976).

[2] Albert, A. A., Structure of algebras, Amer. Math. Soc., 1939 (中译本: A. A. 阿尔伯特, 代数结构, 科学出版社, 1963).

[3] Artin, E., Nesbitt, C. J., and Thrall, R. M., Rings with minimum condition, Univ. Michigan Press, Ann. Arbor,

1946.

[4] Jacobson, N., The theory of rings, Amer. Math. Soc., 1943.

[5] Jacobson, N., Structure of rings, Amer. Math. Soc., 1956.

[6] Курош, А. Г., Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973 (中译本: А. Г. 库洛什, 一般代数学讲义, 上海科学技术出版社, 1964).

[7] Herstein, I., Noncommutative rings, Math. Assoc. Amer., 1968.

[8] Lembek, J., Lectures on rings and modules, Blaisdell, 1966.

[9] Curtis, C. W. and Reiner, I., Representation theory of finite groups and associative algebras, Interscience, 1962.

[10] Понтрягин, Л. С., непрерывные группы, 3 изд., М., 1973 (中译本: Л. С. 邦德列雅金, 连续群, 科学出版社, 1978).

[11] Cohn, P. M., Free rings and their relations, Academic Press, 1971.

[12] Zariski, O. and Samuel, P., Commutative algebra, 1-2, van Nostrand, 1960 (reprinted: Springer, 1975).

[13] Cartan, H. and Eilenberg, S., Homological algebra, Princeton Univ. Press, 1956.

[14] Итоги науки. Алгебра. Топология 1962, М., 1963, 59-79.

[15] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1965, М., 1967, 133-180.

[16] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1968, М., 1970, 9-56.

[17] Бокуть, Л. А., Кузьмин, Е. Н., Ширшов, А. И., Кольца, т. 1-3, Новосибирск. 1973.

[18] Divinsky, N. J., Rings and radicals, Allen and Unwin, 1965.

[19] Passman, D. S., Infinite group rings, New York, 1971.

[20] Procesi, C., Rings with polynomial identities, New York, 1973.

Л. А. Бокуть 撰

【补注】

参考文献

[A1] Faith, C., Algebra Ⅰ: Rings modules and categories, Springer, 1973.

[A2] Faith, C., Algebra Ⅱ: Ring theory, Springer, 1976.

[A3] Gilmore, R., Multiplicative ideal theory, M. Dekker, 1972.

[A4] McDonald, B. R., Finite rings with identity, M. Dekker, 1974.

【译注】

参考文献

[B1] 刘绍学, 环与代数, 科学出版社, 1983.

[B2] 熊全淹, 环构造, 湖北教育出版社, 1985.

王志玺 译

结合性 [**associativity; ассоциативность**] 结合律 (law of associativity)

代数运算 (algebraic operation) 的一种性质. 对于数的加法和乘法, 结合性由下列恒等式来表示:

$$(a+b)+c = a+(b+c) \text{ and } (ab)c = a(bc).$$

二元代数运算 * 是结合的 (associative) (或者换句话说, 满足结合律 (law of associativity)), 如果在给定的代数系中恒等式

$$(x^*y)^*z = x^*(y^*z)$$

成立. 类似地, n 元运算 ω 的结合性由下列恒等式来定义:

$$(x_1\cdots x_n\omega)x_{n+1}\cdots x_{2n-1}\omega =$$
$$= x_1\cdots x_i(x_{i+1}\cdots x_{i+n}\omega)x_{i+n+1}\cdots x_{2n-1}\omega,$$

其中 $i=1, \cdots, n$.

О. А. Иванова, Д. М. Смирнов 撰　张鸿林 译

结合子 [**associator; ассоциатор**]

环 R 中三个元 a, b, c 的结合子等于

$$(ab)c-a(bc).$$

记为 (a, b, c).

К. А. Жевлаков 撰　王志玺 译

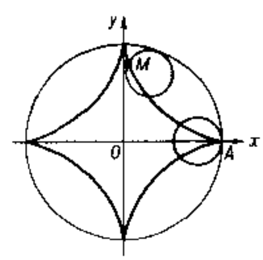
星形线 [**astroid; астроида**]

当一个半径为 r 的圆沿另一个半径为 $R=4r$ 的圆的内侧滚动时, 动圆上的一点 M 所描绘的六次平面代数曲线; 模数 $m=4$ 的**内摆线** (hypocycloid), 它在 Discartes 直角坐标系中的方程是

$$x^{2/3}+y^{2/3} = R^{2/3};$$

参数表示是

$$X = R\cos^3\frac{t}{4},\ y = R\sin^3\frac{t}{4}.$$



存在 4 个尖点 (见图). 从点 A 算起的弧长是

$$l = \frac{3}{2}R\sin^2\frac{t}{4}.$$

整条曲线的长度是 $6R$. 曲率半径是

$$r_k = \frac{3}{2}R\sin\frac{t}{2}.$$

星形线围成的面积是

$$S = \frac{3}{8}\pi R^2.$$

星形线是两端分别处于两条相互垂直的直线上的定常线段族的包络．星形线的一个推广——所谓斜星形线(oblique astroid)与这个性质有关，它是两端分别处于两条以任意角相斜交的直线上的定常线段族的包络．

参考文献

[1] Савелов, А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Lawrence, J. D., A catalog of special plane curves, Dover, reprint, 1972.

[A2] Lockwood, E. A., A book of curves, Cambridge Univ. Press, 1961.

张鸿林 译

天体测量学的数学问题 [astrometry, mathematical problems of ; астрометрии математические задачи]

天文学中与下列任务有关的问题：通过确定天体坐标和研究地球自转来建立空间中的一个惯性参考坐标系和统一全部天文基本常数．天体测量学中的方法以天球上的几何测量和恒星距离的确定这两方面的理论与实践为基础．

天体测量学研究中的一个重要组成部分是能最准确地确定在观测时刻"观测者－恒星"直线的方向．因为各点之间相互位置的研究，比方向之间相互位置的研究更方便和更直观，在处理中引进一个辅助球面(所谓天球)，而假设所有观测对象处于离观测者同等距离，并定位于这个天球上．球面三角学使得可能在天球上应用各种坐标系，并确定天体构形角和弧之间的许多关系．这些关系确定大部分天体测量观测方法和天体测量望远镜的几何基础．

天体测量学中研究的现象，一方面与地球自转的种种不规则性(地球不规则自转、极移、进动和章动引起的自转轴变化等等)有关，另一方面与天体的自行有关．这些情况确定了所完成的一系列观测的时间和定性结构，以及使得对观测的分析必须要应用特殊的数学方法．因此，重要和迫切的任务归结为具有几百未知数、几千方程的大规模线性方程组的求解和研究，而由于其中一些仅能不充分地确定的事实甚至进一步复杂化．产生这类问题的一个典型例子是，为了确定基本坐标系的原点而对太阳系天体(主要是小行星)所作观测的处理过程．另一个例子是，根据由世界范围的观测站网络所实现的人造卫星对地球所作观测推导地球引力场的要素．

地球自转的复杂性，粘弹性体的实在地球与当作绝对刚体的模型之间的差异，使得必须通过诸如相关谱分析方法和各种修匀方法去探索其间的潜在关系．这类研究包括经纬度变化及结果产生的极移的研究，以及地球自转速率的细微和复杂的起伏的评估．

由于所观测现象的性质，通常不可能在单个循环中完成观测，于是必须依靠具有变化原点的部分重叠观测段来解决．这种观测是通过求解有限差分方程的方法进行处理的．这是天体测量学中用仪器进行研究，以及天体测量学中问题的典型特点，涉及天体坐标误差的某些线性组合的测量．

为了考虑到天体测量观测误差，广泛采用数理统计学方法(大部分是线性方法)．

В. В. Нестеров, В. В. Подобед 撰　徐锡申 译

天文学的数学问题 [astronomy, mathematical problems of ; астрономии математические задачи]

天体研究中的数学问题．为解决若干这类问题，发展了一些特殊方法．这些方法在科学的其他分支中也得到应用．另一方面，专门打算用于地球范围问题的数学技巧，根据需要可加以修改，也被广泛应用于天文学．

天文学是一门复杂科学，它论述天体及天体系统的各个方面，有时相互关系很少．这就是为什么天文学中数学问题很多的原因．

天文学中一个很重要的分支学科是天体测量学，其中主要问题之一是确定空间中的惯性参考坐标系．天文学、测地学和其他科学领域传统采用的坐标系，是与地球赤道面和指向春分点的方向(即地球赤道面与黄道面的交线)相联系的．它们不是惯性系，不能严格固定于空间，因为这两个平面连续地完成复杂运动(由于进动、章动和极移的结果)．为比较起见，恒星坐标通常是以某个固定时期(历元)赤道面和春分点的位置为参考的，而这样方式固定的坐标系本身，是以记录于专门星表(基本星表)的许多恒星坐标的仔细确定为基础的．然而，仍有一个实质性困难：为了在与星表历元不同的时刻再现这种坐标系，必须知道基本星由于自行引起的其位置相对于坐标系的变化．为了克服这个困难，自 20 世纪中期以来，曾经试图对于其自行可忽略的遥远星系来确定惯性坐标系．因此，对于依赖反复观测确定天体方向的某些参量，计算其最概然值，以及估计这些值的概率特性，这样一些问题在天体测量学中具有特殊重要性．这个问题的解决，在天文学的大多数其他分支中也是重要的，因为天文学在很大程度上是一门观测科学．

理论天体物理学根据天体的观测来研究这些天体的结构、天体中发生着的物理过程，以及天体的演化，必须解决各种数学问题．天体物理学的主要问题之一是恒星的结构和演化．恒星内部结构的理论导致描述恒星的力学平衡和能量平衡的条件的微分方程．这些方程的解有时可以利用初等函数来表达，但更经常的是它们如此复杂而必须利用数值方法求解．

恒星大气的研究和星云中与星际空间中发生的过程的研究,是以辐射转移的数学理论为基础的,这一理论在天体物理学中得到极重要的发展.在某些情况,例如辐射通过平面物质层的研究中,转移方程归结为积分方程,其解可用来确定恒星内部辐射场的特性,以及确定由(星际)介质发射出并可予以测量的辐射的特性.

研究恒星和星云中气体团的运动,研究气体云范围内所涉及的过程,包括它们互相之间的碰撞以及与星际介质的碰撞,在这些情况下广泛使用气体动力学和电动力学的数学工具.

恒星天文学,论及支配恒星系统的结构、动力学和演化的定律,使用恒星系统某些真正特性的分布(所谓分布函数)与所观测到的特性的分布之间的数学关系.例如,给定立体角中恒星距离的分布函数与其绝对和视(观测)值之间(在某些补充假设下的)联系的研究给出一个积分方程,其解对于该立体角中恒星密度分布所遵循的定律提供一种解释.将所探索恒星的空间速度分布函数与观测到的径向速度分布函数进行比较,结果得到类似方程.

恒星运动学中,根据对坐标、自行和视向速度的统计研究,确定太阳速度的分量和银河系的自转特性的问题,导致对某些个别恒星(或天空某些个别区域)汇编的超定约束方程组.力学中的数学技巧用于求解与星团、星系和星系团相联系的恒星动力学问题.考虑到天体的特性,构成系统的个别天体被认为是根据万有引力互相作用的质点.解决与引力场中天体的运动有关的天体力学问题,导致运动的微分方程组.按照引力定律互相吸引的 n 体运动的最普遍问题,在任意初始条件下的求解采用数值积分方法.然而,这种方法所给出的解仅在有限期间是令人满意的,不可能作出关于天体系统演化的结论.三体运动的部分问题,较满意地采用时间的幂级数解;然而,这些级数收敛很慢,因而不适合于应用到实际天体运动的观测.特殊问题 —— 三体问题,十体问题(太阳和九大行星)等等 —— 也曾经研究过.

关于具体天体的运动的问题,在简化计算的某些假设条件下,利用小参数的幂级数展开法求解.

天文动力学,研究人造天体的运动,使用特定的运动微分方程.解决人造卫星运动的问题时,必须考虑到地球的非球形、大气阻力、太阳辐射压(气球卫星的情况)以及某些其他因素等所引起的摄动力.

关于更详细的情况,见**天体测量学的数学问题**(astrometry, mathematical problems of);**天体物理学的数学问题**(astrophysics, mathematical problems of);**恒星天文学的数学问题**(stellar astronomy, mathematical problems of);**经典天体力学中的数学问题**(classical celestial mechanics, mathematical problems in).

Н. П. Ерпылев 撰 徐锡申 译

天体物理学的数学问题 [astrophysics, mathematical problems of; астрофизики математические задачи]

理论天体物理学中的一类问题,其中广泛采用数学研究方法.理论天体物理学的主要任务是阐明观测结果,目的是研究宇宙中观测到的天体的结构,并研究其中所发生的物理过程.此外,还有具有一般性质的某些数学问题,它们不仅在天体物理学中是重要的,而且在物理学其他分支学科中和在数学中也是重要的.天体物理学中的数学问题对数学发展的影响,最明显的例子是所谓**不变性原理**(invariance, principle of)([1]),它是天体物理学中首先考虑的,以后被用于解决数学物理中广泛的一类问题和概率论中的某些问题.

天体物理学中主要问题之一是恒星结构和演化的研究,因为存在于宇宙中的大部分物质集中于恒星.通常把恒星内部结构与恒星大气结构分开来进行研究.内部结构理论中的问题,根据恒星的力学和能量平衡条件表述为微分方程([2]).恒星的力学平衡条件表达为指向星体内部的吸引力与气体和光产生的指向外面的压力相等.能量平衡条件是恒星给定体积中所产生的能量与此体积中所发射出的能量相等的表达式.除平衡条件外,恒星物质的物态方程,辐射吸收系数以及热核反应能量释放率,它们在给定化学成分下作为物质的密度和温度的函数均假定为已知.由于方程的复杂性,它们通常用数值方法求解.有时采用恒星大气的理论结果作为边界条件,这使结论更加可靠.恒星平衡的这些方程在很多情况下可化为 **Emden 方程**(Emden equation):

$$\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left[x^2\frac{dy}{dx}\right]+y^n=0 \qquad (1)$$

具有边界条件:当 $x=0$ 时,$y=1$ 和 $y'=0$.若 n 为 0, 1, 5 中的一个值时,方程(1)的解可用初等函数表达.例如,在能量转移的发生主要靠对流,而辐射能量转移比较小时,方程(1)是适用的.发展恒星内部结构理论中的另一困难是恒星内部不能进行观测.观测数据通常仅能与所计算的恒星的积分特征,例如其质量、半径和单位时间内恒星所发射的积分能量加以比较.关于这些特征的统计资料的应用使得有可能提出关于恒星可能演化的假说.

恒星大气的理论是以辐射转移过程的研究(见**辐射转移理论**(radiative transfer theory))为基础的.恒星内部产生的能量经历通过大气转移的复杂过程,以后传播到外面.在这个情况下,转移方程是在辐射平衡条件下求解的,后者表达了大气各体积元辐射和吸收的能量相等.经常还假设存在局部热动平衡.在上述条件下转移方程的解允许在理论上建立恒星光谱,它与观测结果的比较提供关于恒星大气的结构和其中发生的过程的信息.特别是,恒星大气化学成分的确定是以恒星线状

谱的研究为基础的.

星云中和星际空间中也发生辐射转移过程，辐射转移过程经常是当光通过物质时反复的光散射. 太阳光，经过行星大气色散后，提供了其结构和其物理性质的信息. 行星大气层中和尘埃星云中发生各向异性光散射.

辐射转移理论是理论天体物理学的最重要分支之一. 这个理论的给人深刻印象的发展([3], [4])应归功于上述天体物理学问题的解决. 物理学的其他分支也广泛采用该方法，例如地球物理学(见**地球物理学中的数学问题** (geophysics, mathematical problems in))中，中子输运理论中和等离子体发光的计算中. 最经常发生的情况是辐射通过物质平面层传播. 一个例子是恒星和行星的大气层，因为通常其厚度与其半径比较起来要小得多. 这个情况下，对于各向同性散射，辐射转移方程化为积分方程

$$y(x) = \frac{\lambda}{2}\int_0^{x_0} K(|x-x'|)y(x')dx' + f(x), \qquad (2)$$

其中 $f(x)$ 规定大气层中辐射源的分布，而 $y(x)$ 是未知辐射场. 积分方程的核函数 $K(x)$ 和参数 λ 包括辐射与物质的相互作用定律，而 x_0 是大气层的厚度，以辐射自由程为单位表达. 类型(2)的积分方程的研究是辐射理论的主要数学问题之一. 天体物理学的数学问题包括寻找这类方程的精确解析解([4]). 特别是，若 $x_0=\infty$, $\lambda=1$ 和 $f(x)\equiv 0$，以及 $K(x)=E_1(x)$，其中 $E_1(x)$ 是第一指数积分函数，方程(2)通称 Milne 方程. 在某些补充条件的假设下，Milne 方程的解(见 **Milne 问题** (Milne problem))给出恒星内部的温度分布. 在更复杂的问题中(各向异性散射，偏振光的散射，任意形状介质中的散射等等)，结局未知函数不是函数 $y(x)$，而是不仅依赖于坐标而且依赖于方向和依赖于描述该给定点辐射场特性的其他量的函数. 这些函数借助于适当的积分方程组(为方程(2)的一种推广)来确定.

这些方法用于求问题的全解，该解有可能用来求介质内部的辐射场，以及介质所发射辐射的特性. 在理论的应用中，通常仅需知道所发射的辐射. 已经证明，有可能直接确定介质所发射的辐射的特性而无需预先求其全解. 这经常使任务相当简化，这可以或者通过应用积分方程(2)或者通过应用不变性原理来实现. 另一处理方法是把给定层表示为两层之和，并确立介质整体所发射辐射的特性与两层边界处辐射特性之间的关系. 这些技术也应用于中子输运理论中，并被称为**反照率方法** (albedo method).

天体物理学中另一重要主题是将气体动力学([5])和电动力学([6])的方法应用于恒星和星际空间的研究. 在恒星和星云中气体团运动的研究中，这些方法是必需的. 所研究的一些问题有：太阳和其他恒星大气中的流体动力学效应(见**流体力学中的数学问题** (hydrodynamics, mathematical problems in))，气体云的膨胀和它们之间的相互碰撞及与更稀薄星际介质的碰撞，以及所形成的激波和湍流运动.

星际气体动力学的一个较重要特性是必须考虑电离气体与磁场的相互作用. 这种相互作用既影响气体的运动，也影响磁场的位形和能量密度的变化. 当气体运动时，其粒子仿佛始终"粘附"于磁力线，沿力线运动或当它们横越磁场时拖曳力线使之跟随运动. 可以说磁力线"冻结"于物质(见**冻结积分** (frozen - in integral)). 星际磁性气体动力学运动方程包括：连续性方程(质量守恒定律)；表达冻结原理的磁场感应方程；星际辐射能的流入量方程(能量守恒定律)；以及表达动量守恒定律的方程. 方程组的建立利用电动力学方程(**Maxwell 方程** (Maxwell equations))和流体动力学方程. 这个方程组的求解非常复杂，因为方程是非线性的. 通常存在有简化的变型，例如，一维运动和自型运动(见**磁流体动力学中的数学问题** (magneto - hydrodynamics, mathematical problems in)).

射电天文学方法获得的结果在天体物理学的发展中是非常重要的. 因为射电波的辐射通常发生在电离气体(等离子体)中，于是引起确定恒星或星际空间条件下等离子体的性质的问题([7]). 等离子体的行为可利用**动理论方程** (kinetic equation)予以最充分的描述. 等离子体的动理论方程与普通气体的动理论 **Boltzmann 方程** (Boltzmann equation)之间的差别在于，等离子体带电粒子的 Coulomb 相互作用扩展至相当大距离，而中性原子和分子组成的气体中仅当直接碰撞期间相互作用才显著.

银河系中物质分布的研究，由于星际尘埃粒子对光的吸收而变得更加困难. 这个效应在接近银河的方向尤其显著，因为星际尘埃层集中于银道面附近. 视线方向接近银道面时，光吸收效应还造成所观测星系数目减少. 然而，吸收物质不是均匀分布的；而是形成无规分布子空间具有不同大小的离散云. 于是引起银河亮度视分布和星系视分布的统计研究这样的问题. 在银河亮度起伏理论中详细研究了这些问题([1]). 有关方程应用不变性原理予以推导. 亮度起伏理论的数学问题接近于某些类型随机过程的理论. 在其最简单变型中，假定银河系的整个赤道面由恒星和吸光云以均匀密度无限地填满. 若假设透射光的比例 q 对所有云都相同，并假设 $g(u)du$ 为包含在 u 和 $u+du$ 区间内无量纲亮度 u 的概率，函数 $g(u)$ 将由下列方程

$$g(u)+g'(u) = \frac{1}{q}g\left(\frac{u}{q}\right) \qquad (3)$$

给出. 考虑更普遍模型时，也得到相似类型的方程. 为了

分析观测结果，经常利用所研究量的矩量；因此，复杂的原始方程的求解不总是必需的．由原始方程推导得的矩量之间的关系是十分简单的，并能迅速得出所需结果．

恒星系统的结构、动力学和演化的研究是恒星系统统计力学的课题．这里，天体系统经常被认为是根据相互吸引定律发生相互作用的质点．最重要的恒星系统是星团、星系和星系团．上述题目导致物理动理论中研究的问题．然而，与普通气体的研究不同，恒星气体的研究包括一些显著特性．首先，恒星气体不是处于完全统计平衡．其次，重要的是要注意到气体处于自身的引力场中，它需与其他未知量一起予以确定．最后，恒星之间的相互作用不同于气体分子之间的相互作用，它属于远程作用，类似作用于等离子体中带电粒子之间的 Coulomb 力．这些特性使得理论考虑变得非常复杂．然而，研究星系中恒星的运动时，一级近似下允许忽略相互作用，因为弛豫时间原来远大于确定宇宙演化期间的时间（[1]、[8]）．

对于星团，弛豫时间比较短，于是必须考虑恒星之间的相互作用．这里通常的实践是利用 Coulomb 力与引力之间的类似，并应用 Ландау 动理论方程．这个方程是对于等离子体应用Fokker - Planck 近似（见 **Fokker - Planck 方程**（Fokker - Planck equation））描述速度空间的扩散过程而获得的．对于恒星系统的演化过程，Ландау 方程不能给出充分精确的描述，因为恒星系统中的恒星损失是不可避免的．因此，研究星团演化时采用更普遍的动理论方程．

天体物理学研究的一个最重要阶段，是通过将观测结果与理论结果进行比较，以获得关于所研究天体尽可能最完全和可靠的信息．通常的实践是研究计算好的理论模型和检验构造模型所根据的假设的有效性．在某些情况下，可以无需模型概念而将观测得的特征性质与理论直接联系起来，而使合理初始假设的数目减至最少．这种方法的一个经典例子是根据投影中恒星的分布求得恒星空间密度分布的问题（[8]）．可以获得观测到的分布与空间密度分布之间的关系，形式为 Abel 积分方程，其解给出所需结果．许多其他问题中也获得同一方程，例如，色球中原子按高度的分布的研究中和日冕中电子的研究中．所有这些情况中，所作唯一假设是球对称性．根据观测得的恒星视向速度分布推导恒星空间速度分布函数时得到一个更加复杂的积分方程．这里，根据其在所有可能平面中的积分值描绘了三维空间中函数的图象．这里所考虑的例子指所谓反问题．天体物理学中的反问题，数学性质上和在获得必需的观测结果上这两方面，都带有相当大的困难和不确定性．特别是，数学方面与问题的可能的不适定性有关，不适定问题解的正则化方法，在求解许多天体物理学问题时证明是有用的．

天体物理学中的不适定数学反问题的一个例子是通过测量光度学特性而求得行星大气的光学性质．光在大气中的反复散射和在行星表面的反射，结果造成对于确定行星大气未知光学性质的量的信息丢失．为获得单值解，必须作出辅助简化假设，它强烈限制了研究的可能性．天体物理学中的数学反问题通常包含第一类积分方程

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(x-y)f(y)\,dy \tag{4}$$

的求解，它确定从函数 $F(x)$ 到未知函数 $f(x)$ 的转换，其中 $F(x)$ 代表关于某个量的观测所得已知数据，而 $f(x)$ 给出该量的真值．观测结果可能由于各种原因发生畸变——由方程(4)中函数 $A(x)$ 定量描述的事实，函数 $A(x)$ 通常对给定问题是已知的．例如，函数 $F(x)$ 和 $f(x)$ 确定谱线的实验轮廓和真正轮廓，而函数 $A(x)$ 相应于由摄谱仪性质所引起的观测到的理想单色谱线的增宽轮廓．

射电天文学中，处理观测结果时和解释由此获得的数据时，都引起许多反问题．从观测的温度分布转换到一维情况的真正分布时受到应用方程(4)的影响，其中 $A(x)$ 确定射电望远镜天线的性质，并被称为它的图．射电天文学研究的一个重要特性是应用 21cm 射电波长，它是由氢原子超精细结构次能级之间的跃迁所产生的．这个波长的星际射电型辐射的研究，给出关于银河系结构及其自转，关于银河系中星际气体的分布，和关于银河系中心部分的结构的有价值的信息，这是光学方法所不能得到的．各个方向上观测到的谱线轮廓由于各种因素（原子的热运动、星际气体的混沌运动、银河系的自转等等），而具有复杂的形状．因此，当从所测特性转换到所求特性时引起许多反问题．为了从观测的轮廓消去气体的热的和混沌的宏观运动的模糊效应，要采用方程(4)，其中 $A(x)$ 是速度分布的描述．这个常规手续，系统地给出气体速度和其他量．

参考文献

[1] Амбарцумян, В. А., Научные труды, т. 1, Ер., 1960.

[2] Schwarzschild, M., Structure and evolution of stars, Princeton Univ. Press, 1958.

[3] Соболев, В. В., Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, М., 1956 (英译本: Sobolev, V. V., A treatise on radiative transfer, v. Norstrand 1960).

[4] Соболев, В. В., Курс теоретической астрофизики, М., 1967 (英译本: Sobolev, V. V., Course in theoretical astrophysics, NASA, Washington, D. C., 1969).

[5] Каплан, С. А., Межзвездная газодинамика, М., 1958.

[6] Пикельнер, С. Б., Основы космической электродина-

мики, 2 изд., М., 1966.
[7] Spitzer, L., jr., Physics of fully ionized gases, Interscience, New York, 1962 (中译本: L. 斯必泽,完全电离气体的物理学,科学出版社, 1959).
[8] Chandrasekhar, S., Principles of stellar dynamics, Univ. of Chicago Press, 1942.
И. Н. Минин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Ehlers, J. (ed.), Relativity theory and astrophysics, 1-3, Amer. Math. Soc., 1967.
[A2] Kurt, R., Introduction to stellar statistics, Pergamon Press, 1967.
[A3] Landsberg, P. T. and Evano, D. A., Mathematical cosmology, Clarendon Press, 1977.
[A4] Chandrasekhar, S., Radiative transfer, Dover, reprint, 1960.
[A5] Chandrasekhar, S., Stellar structure, Dover, reprint, 1957.
[A6] Hawking, S. W. and Ellis, G. F. R., The large scale structure of space-time, Cambridge Univ. Press, 1973.
徐锡申 译

非对称簇 [asymmetric variety; асимметричное многообразие]

没有反转定向同胚的有向簇 M. 例如,复射影平面是一个非对称簇,因为复直线的自交数依赖于其定向是 $+1$ 或 -1. 某些纽结可能与它们的镜象不同,原因是它们的分支覆叠是非对称簇. А. В. Чернавский 撰

【补注】 这个概念可以找到,例如在[A1] 的第 5 章.

参考文献

[A1] Hirsch, M. W., Differential topology, Springer, 1976.
徐森林 译

非对称系数 [asymmetry coefficient; асимметрии коэффициент]

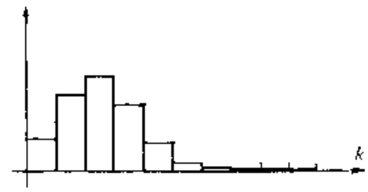
分布的非对称性(asymmetry of a distribution) 的最常使用的度量,由下列关系式来定义:

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}},$$

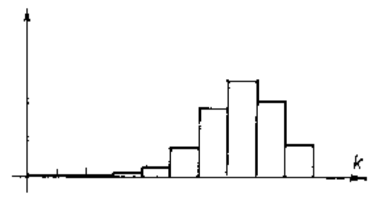
其中u_2 和u_3 分别是分布的二阶和三阶中心矩. 在关于数学期望为对称的分布中, $\gamma_1=0$; 根据γ_1 的符号, 可以定义正非对称性(positive asymmetry) $(\gamma_1>0)$ 和负非对称性(negative asymmetry) $(\gamma_1<0)$. 在对应于 n 个成功概率为 p 的 **Bernoulli 试验**(Bernoulli trials)的**二项分布**(binomial distribution)的情况下,

$$\gamma_1 = \frac{1-2p}{\sqrt{np(1-p)}}, \qquad (*)$$

这时, 如果 $p=1/2$ $(\gamma_1=0)$, 则分布是对称的; 如果 $p<1/2$ 或 $p>1/2$, 则得到典型的具有正非对称性和负非对称性的分布图 (见图 a 和图 b).



a) $P(k, 10, 1/5)$



b) $P(k, 10, 4/5)$

a) $P(k, 10, 1/5)$, b) $P(k, 10, 4/5)$

Bernoulli 试验次数 $n=10$ 的二项分布 $P(k, n, p)$ 的分布图: a) 具有正非对称性 $(p=1/5)$; b) 具有负非对称性 $(p=4/5)$.

当 $n\to\infty$ 时, 非对称系数 (*) 趋向于零, 这与下述事实是一致的: 正规化二项分布收敛于标准正态分布.

非对称系数与**超出系数**(excess coefficient)是使用最广的精确度的指标, 它们表示正规化和

$$\frac{(X_1+\cdots+X_n)-n\mu_1}{\sqrt{n\mu_2}}$$

的分布函数 $F_n(x)$ 可用正态分布函数

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-z^2/2}\,dz$$

逼近的程度, 其中 $x_1, \cdots, x_n$ 被恒等地分配且与非对称系数 γ_1 相互独立. 在相当一般的条件下, **Edgeworth 级数**(Edgeworth series)给出

$$F_n(x) = \Phi(x) - \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\gamma_1}{6}\Phi^{(3)}(x) + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

其中 $\Phi^{(3)}(x)$ 是三阶导数.

参考文献

[1] Cramér, H., Mathematical methods of statistics, Princeton Univ. Press, 1946.
[2] Wilks, S. S., Mathematical statistics, Wiley, 1962.
А. В. Прохоров 撰

【补注】 非对称系数通常称为偏斜系数(coefficient of skewness). 相应地, 分布的偏斜度可区分为正偏斜度(positive skewness)和负偏斜度(negative skewness).

张鸿林 译 蒋正新 校

分布的非对称性 [asymmetry of a distribution; асимметрия распределения]

分布曲线的一个定性性质，它说明该分布与对称分布的偏离. 如果**非对称系数**(asymmetry coefficient)是正的(负的)，则分布的非对称性是正的(负的). 如果分布的非对称性是正的(负的)，则分布的密度曲线的"较长"部分处于**众数**(mode)的右边(左边).

К. П. Латышев 撰

【补注】 在西方的文献中，通常把这个概念称为分布的偏斜度(skewness of a distribution)，相应地把非对称系数称为偏斜系数(skewness coefficient).

张鸿林 译

渐近线 [asymptote; асимптота]，具有无限分支的曲线 $y=f(x)$ 的

一条直线，使得当曲线上的点 $(x, f(x))$ 沿曲线的分支趋向于无穷远时，点 $(x, f(x))$ 与该直线的距离趋向零. 渐近线可以是竖直的或斜的. 竖直渐近线的方程是 $x=a$，其中 $x\to a$ (从单侧)时，有 $f(x)\to+\infty(-\infty)$. 方程为 $y=kx+l$ 的斜渐近线存在的充分必要条件是：当 $x\to+\infty$ (或 $-\infty$)时下列极限存在：

$$k=\lim\frac{f(x)}{x},\quad l=\lim[f(x)-kx].$$

对于用一般参数表示的参数化(无界)曲线，也可得类似公式. 在极坐标下，曲线 $r=r(\varphi)$ $(r>0)$ 的具斜率角 α 的渐近线由下列条件定义：当 $\varphi\to\alpha$ 时，$r\to+\infty$. 坐标原点与这条渐近线的距离 p 由下式计算

$$p=\lim|t|r(\alpha+t)\ \text{当}\ t\to+0\ (\text{或}\ t\to-0)\text{时}.$$

若曲线的无限分支的切线存在极限位置，则此位置就是渐近线. 反之不一定正确. 例如，对于曲线 $y=(\sin x^2)/x$，虽然它的切线没有极限位置，但当 $x\to\pm\infty$ 时，却有渐近线 $y=0$. 双曲线是具有渐近线的仅有的二阶曲线. 双曲线 $(x^2/a^2)-(y^2/b^2)=1$ 的渐近线由方程 $(x/a)\pm(y/b)=0$ 给出. 一条斜渐近线给出了函数的简单(关于 x 为线性)渐近逼近

$$f(x)=kx+l+o(1)$$

当 $x\to+\infty$(或 $x\to-\infty$)时.

参考文献

[1] Рашевский, П. К., Курс дифференциальной геометрии, 4 изд., М., 1956.

[2] Кудрявцев, Л. Д., Математический анализ, т 1, 2 изд., М., 1973.

Л. П. Купцов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Pogorelov, A. V., Differential geometry, Noordhoff, 1959 (译自俄文).

沈一兵 译

渐近基 [asymptotic basis; асимптотический базис]，k 阶渐近基 (asymptotic basis of order k)

自然数和零组成的一个序列，由它重复 k 次求和可产生所有充分大的自然数. 数 k 称为渐近基的阶 (order of the asymptotic basis). 因此，素数序列是 4 阶渐近基 (И. М. Виноградов, 1937)；自然数的立方序列是 7 阶渐近基 (Ю. В. Линник, 1942).

Б. М. Бредихин 撰

【补注】 亦见 **Waring 问题** (Waring problem)；**Goldbach 问题** (Goldbach problem).

戚鸣皋 译 张明尧 校

渐近密度 [asymptotic density; асимптотическая плотность]

自然数的**数列的密度** (density of a sequence) 这一普遍概念的一种变形，用以度量全体自然数序列中有多大的部分属于给定的包含零在内的自然数序列 A. 序列 A 的渐近密度 (asymptotic density) 用实数 α 表示，由公式

$$\alpha=\liminf_{x\to+\infty}\frac{A(x)}{x}$$

定义，这里

$$A(x)=\sum_{\substack{a\in A,\\ 0<a\leq x}}1,\quad x\geq1.$$

数

$$\beta=\limsup_{x\to\infty}\frac{A(x)}{x}$$

通常称为上渐近密度 (upper asymptotic density). 如果数 α 和 β 重合，那么它们的共同值称为自然密度 (natural density). 例如，无平方因子数的序列具有自然密度 $\delta=6/\pi^2$. 渐近密度的概念被用来寻找判别某序列是**渐近基** (asymptotic basis)的准则.

Б. М. Бредихин 撰

【补注】 上面定义的数 α 也称为下渐近密度 (lower asymptotic density).

参考文献

[A1] Halberstam, H. and Roth, K. F., Sequences, 1, Clarendon Press, 1966.

戚鸣皋 译 张明尧 校

渐近导数 [asymptotic derivative; асимптотическая производная]

同**近似导数** (approximate derivative).

渐近方向 [asymptotic direction; асимптотическое направление]

正则曲面上使曲面法截线的曲率为零的方向. 要使点 P 处的方向 $du:dv$ 为渐近方向，下列条件是充分必要的：

$$L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2=0.$$

其中u和v是曲面的内蕴坐标，L, M和N是曲面的**第二基本形式**(second fundamental form)在点P计算的系数．在曲面的椭圆点，渐近方向是虚的；在双曲点，有两个实渐近方向；在抛物点，只有一个实渐近方向；在平坦点，任何方向都是渐近方向．渐近方向是自共轭方向(见**共轭方向**(conjugate directions))．

参考文献

[1] Рашевский, П. К., Курс дифференциальной геометрии, 4 изд., М., 1956.

Е. В. Шикин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hsiung, C. C., A first course in differential geometry, Wiley, 1981.

[A2] Struik, D. J., Lectures on classical differential geometry, Addison-Wesley, 1950.

沈一兵 译

渐近等式 [**asymptotic equality**; **асимптотическое равенство**]

两函数$f(x)$与$g(x)$称为当$x\to x_0$时渐近相等(asymptotically equal)，是指在点x_0的某邻域内(可能除去x_0自身以外)，

$$f(x)=\varepsilon(x)g(x),$$

其中

$$\lim_{x\to x_0}\varepsilon(x)=1,$$

即当$x\to x_0$时，

$$f(x)=g(x)[1+o(1)],$$

(x_0是所考虑函数定义集的有限点或无限点)．假如$g(x)$在x_0的某邻域内不为0，上述条件等价于

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1.$$

换言之，在这种情形，两函数$f(x)$与$g(x)$当$x\to x_0$时渐近相等，意味着，$f(x)$与$g(x)$的近似相等的相对误差，即量$[f(x)-g(x)]/g(x)\,(g(x)\neq0)$，当$x\to x_0$时为无穷小．对于无穷小或无穷大的函数而言，函数的渐近等式是有意义的．两函数$f(x)$与$g(x)$的渐近等式记为：当$x\to x_0$时，$f(x)\sim g(x)$．渐近相等具有自反性、对称性与传递性．因此，当$x\to x_0$时无穷小(无穷大)函数组成的类被划分为一些等价类．例如，若$\lim_{x\to x_0}u(x)=0$，则$u(x)$, $\sin u(x)$, $\ln[1+u(x)]$, $e^{u(x)}-1$都是当$x\to x_0$时渐近相等的函数(也称它们为等价函数)．

若$x\to x_0$时，$f\sim f_1$与$g\sim g_1$，则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{g_1(x)},$$

其中任何一个极限的存在性可以导致另外一个极限的存在性．亦见函数的**渐近展开**(asymptotic expansion)；**渐近公式**(asymptotic formula)．

М. И. Шабунин 撰

【补注】 有时也把渐近相等说成f和g在x_0具有相同的阶．

参考文献

[A1] Courant, R., Differential and integral calculus, 1, Blackie and Son, 1948, Chapt. 3, Sect 9 (中译本：R. 柯朗，柯氏微积分学，上册，中华书局)．

王斯雷 译

渐近展开 [**asymptotic expansion**; **асимптотическое разложение**]，函数$f(x)$的

一个级数：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\psi_n(x)$$

对于任何整数$N\geqslant0$，都有

$$f(x)=\sum_{n=0}^{N}\psi_n(x)+o(\varphi_N(x))\quad(x\to x_0),\tag{1}$$

其中$\{\varphi_n(x)\}$是某一给定的(当$x\to x_0$时的)**渐近序列**(asymptotic sequence)．在这种情况下，还可表示为

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\psi_n(x),\ \{\varphi_n(x)\},\ (x\to x_0).\tag{2}$$

如果由上下文显然可知$\{\varphi_n(x)\}$指的是什么序列，则在式(2)中可以省去这个序列．

渐近展开(2)称为Erdélyi意义下的渐近展开(asymptotic expansion in the sense of Erdélyi)([3])．形如

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varphi_n(x)\quad(x\to x_0)\tag{3}$$

的展开(其中a_n都是常数)，称为Poincaré意义下的渐近展开(asymptotic expansion in the sense of Poincaré)．当给定渐近函数序列$\{\varphi_n(x)\}$时，则与渐近展开(2)不同，渐近展开(3)可由函数$f(x)$本身唯一确定．如果对于有限个值$N=0,\cdots,N_0<\infty$，式(1)都成立，则这个展开称为精确到$o(\varphi_{N_0}(x))$的渐近展开．级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\psi_n(x),\quad\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varphi_n(x)$$

称为渐近级数(asymptotic series)．这样的级数通常是发散的．其中最常应用的是**渐近幂级数**(asymptotic power series)；对应的渐近展开是Poincaré意义下的渐近展开．

下面是Erdélyi意义下的渐近展开的一个例子：

$$J_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\cos\left\{x-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right\}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_{2n}x^{-2n}-\right.$$
$$\left.-\sin\left\{x-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right\}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_{2n+1}x^{-2n-1}\right]$$

($x\to+\infty$)，其中 J_ν 是 Bessel 函数，而

$$a_n = \frac{\Gamma(\nu+n+1/2)}{2^n n!\Gamma(\nu-n+1/2)}.$$

函数的渐近展开和渐近级数的概念，是 H. Poincaré ([1])在研究天体力学问题时引入的．渐近展开的一些特例早在 18 世纪时就已被发现和使用([2])．渐近展开在许多数学、力学和物理学问题中起着重要作用．这是因为许多问题不能精确求解，但是它们的解可以作为渐近近似而得到．此外，在渐近展开比较容易求得时，往往可以不必采用数值方法．

参考文献

[1] Poincaré, H., Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires, *Acta Math.*, **8** (1886), 295－344.

[2] Whittaker, E. T. and Watson, G. N., A course of modern analysis, Cambridge Univ. Press, 1952.

[3] Erdélyi, A. and Wyman, M., The asymptotic evaluation of certain integrals, *Arch Rational Mech. Anal.*, **14** (1963), 217－260.

М. В. Федорюк 撰

【补注】

参考文献

[A1] Bruijn, N. G. de, Asymptotic methods in analysis, Dover, reprint, 1981.

[A2] Erdélyi, A., Asymptotic expansions, Dover, reprint, 1956.

[A3] Copson, E. T., Asymptotic expansions, Cambridge Univ. Press, 1965.

[A4] Murray, J. P., Asymptotic analysis, Springer, 1984.

[A5] Bleisfein, N. and Handelsman, R. A., Asymptotic expansions of integrals, Dover, reprint, 1986.

张鸿林 译

渐近式 [asymptotic expression; асимптотическое выражение]

同**渐近公式** (asymptotic formula).

渐近公式 [asymptotic formula; асимптотическая формула]

包含符号 o, O 或等价记号 ～ (函数的**渐近相等** (asymptotic equality))的公式．

渐近公式的例子

$$\sin x = x+o(x^2),\quad x\to 0;$$
$$\cos x = 1+O(x^2),\quad x\to 0;$$
$$x^3+x+1 \sim x^3,\quad x\to\infty;$$
$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x},\quad x\to\infty$$

($\pi(x)$ 是不超过 x 的素数的个数)．

Б. М. Бредихин 撰

【补注】 关于符号 o, O 和～的意义，例如见[A1]或[A2].

参考文献

[A1] Bruijn, N. G. de, Asymptotic methods in analysis, Dover, reprint, 1981.

[A2] Erdélyi, A., Asymptotic expansion, Dover, reprint, 1956.

张鸿林 译

渐近极限 [asymptotic limit; асимптотический предел]

同**近似极限** (approximate limit).

渐近线 [asymptotic line; асимптотическая линия]

正则曲面 F 上的一条曲线 Γ，使得沿 Γ 的法曲率为零．渐近线由下列微分方程给出：

$$\mathrm{II} = L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2 = 0,$$

其中 II 是曲面的第二基本形式．

渐近线 Γ 上各点的密切平面(如果存在)，重合于 F(在 Γ 的点)的切平面，并且渐近线的挠率平方等于曲面 F 的 Gauss 曲率 K 的模(Beltrami - Enneper 定理(Beltrami-Enneper theorem))．直线 $l\in F$ (例如直纹面的母线)总是渐近线．若 Γ 是抛物曲线(例如，标准圆环面上 Gauss 曲率取不同符号的两个区域的分界圆周)，则它是渐近线．

通过抛物区域(其上 $K=0$，但 $\mathrm{II}\neq 0$)的每点有唯一的一条渐近线，它重合于过该点的直母线．通过双曲区域(其上 $K<0$)的每点恰有两条渐近线，它们构成所谓的**渐近网**(asymptotic net)，在研究**负曲率曲面**(negative curvature, surface of)的空间形式时起着重要作用．例如，在完全曲面上，若

$$\mathrm{grad}\left|\frac{1}{\sqrt{-K}}\right| \leqslant q,\quad q=常数.$$

则此渐近网同胚于平面上的 Descartes 网．负常曲率曲面上的渐近网是 **Чебышев 网**(Chebyshev net)，并且由渐近线围成的四边形曲面面积与 2π 减去它的内角 α_i 之和成比例：

$$|K|S = 2\pi-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4$$

(Hazzidakis 公式 (Hazzidakis formula))．

在空间射影变换 π 下，曲面 F 的渐近线变成变换后曲面 $\pi(F)$ 的渐近线．

在三维 Riemann 空间中曲面上的渐近线可类似地定义．在嵌入高维空间的流形上，已有渐近线概念的各种推广；其中最经常用到的是与给定法向量有关的第二基本形式的概念．

参考文献

[1] Погорелов, А. В., Дифференциальная геометрия, 5 изд., М., 1969 (英译本: Pogorelov, A. V., Differential geometry, Noordhoff, 1959).

[2] Рашевский, П. К., Курс дифференциальной геометрии, 4 изд., М., 1956.　　　М. И. Войцеховский 撰

【补注】 Hazzidakis 公式可在[A1]和[A2](p.204)中找到．

参考文献

[A1] Hazzidakis, J. N., Über einige Eigenschaften der Flächen mit konstanten krümmungsmasz, *Crelle's J. Math.*, **88** (1880), 68－73.

[A2] Struik, D. J., Lectures on classical differential geometry, Addison - Wesley, 1950.

[A3] Hsiung, C. C., A first course in differential geometry, Wiley, 1981.

[A4] Spivak, M., Differential geometry, 3, Publish or Perish, 1975.

[A5] Hicks, N. J., Notes on differential geometry, v. Nostrand, 1965.

[A6] Blaschke, W. and Leichtweiss, K., Elementare Differentialgeometrie, Springer, 1973.　　　沈一兵 译

渐近可忽略性 [asymptotic negligibility; асимптотическая пренебрегаемость]

随机变量的一种性质，表示它们作为一个和式中的成分，其单独的贡献是小的．这一概念在所谓**三角阵列** (triangular array)等方面是重要的．设随机变量 X_{nk} $(n=1, 2, \cdots; k=1, 2, \cdots, k_n)$ 对每个 n 是相互独立的，并令

$$S_n = X_{n1} + \cdots + X_{nk_n}.$$

如果对一切 $\varepsilon>0$ 和 $\delta>0$，对充分大的 n 值，不等式

$$\max_{1\leqslant k\leqslant k_n} \mathrm{P}(|X_{nk}|>\varepsilon) < \delta \tag{1}$$

成立，那么单个的项 X_{nk} 便称为渐近可忽略的(这时随机变量 X_{nk} 形成一个所谓的零三角阵列(zero triangular array))．如果条件(1)成立，便得到下列重要结果：$S_n - A_n$ (A_n是适当的中心化常数)的极限分布的类与**无穷可分分布** (infinitely - divisible distribution)的类重合．如果当 $k_n \to \infty$ 时，S_n 的分布收敛到一个极限分布，且诸项是同分布的，那么条件(1)自动地成立．如果把渐近可忽略性的要求加强，假设对一切 $\varepsilon>0$ 和 $\delta>0$，以及对一切充分大的 n，总有

$$\mathrm{P}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant k_n} |X_{nk}|>\varepsilon\right\} < \delta, \tag{2}$$

那么下列的命题成立：如果(2)满足，则 $S_n - A_n$ 的极限分布只能是**正态分布** (normal distribution)(特别是方差等于 0 的分布，即退化分布(degenerate distribution))．　　　А. В. Прохоров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Feller, W., An introduction to probability theory and its applications, 2, Wiley, 1966.　　　陈培德 译

渐近网 [asymptotic net; асимптотическая сеть]

曲面上由两族渐近线构成的参数曲线网(见**渐近线** (asymptotic line))．渐近网仅在非正曲率的非可展曲面上存在．渐近网的正交性是**极小曲面** (minimal surface) 的特征．　　　В. Т. Базылев 撰　沈一兵 译

渐近点 [asymptotic point; асимптотическая точка]

曲线的奇点(singular point)，曲线围绕它旋转无限多次，并且无限地趋近于它．例如，**对数螺线** (logarithmic spiral) 的渐近点．　　　张鸿林 译

渐近幂级数 [asymptotic power series; асимптотический степенной ряд]

关于序列

$$\{x^{-n}\} \quad (x\to\infty)$$

或者序列

$$\{(x-x_0)^n\} \quad (x\to x_0)$$

的渐近级数(见函数的**渐近展开** (asymptotic expansion))．渐近幂级数可以象收敛幂级数那样进行加、乘、除和积分运算．

设两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 当 $x\to\infty$ 时具有下列渐近展开

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}, \quad g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{x^n}.$$

这时，有

1) $Af(x)+Bg(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Aa_n+Bb_n}{x^n}$

(A, B 为常数)；

2) $f(x)g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{x^n}$；

3) $\frac{1}{f(x)} \sim \frac{1}{a_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{x^n}$, $a_0 \neq 0$

(c_n, d_n 可象对收敛幂级数那样来计算)；

4) 如果函数 $f(x)$ 当 $x>a>0$ 时是连续的，则

$$\int_x^{\infty} \left[f(t)-a_0-\frac{a_1}{t}\right] dt \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{nx^n};$$

(5) 渐近幂级数并不总能进行微分，但是如果 $f(x)$ 具有能够展开为渐近幂级数的连续导数，则

$$f'(x) \sim -\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n-1)a_{n-1}}{x^n}.$$

渐近幂级数的例子：

$$\int_x^{\infty}\frac{e^{x-t}}{t}dt \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n};$$

$$\sqrt{x}e^{-ix}H_0^{(1)}(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-i\pi/4}(-i)^n[\Gamma(n+1/2)]^2}{2^{n-1/2}\pi^{3/2}n!x^n},$$

其中 $H_0^{(1)}(x)$ 是零阶 **Hankel 函数**(Hankel functions)(上面的渐近幂级数对于一切 x 发散).

对于复变量 z 的函数，在无穷远点的邻域内或者在一个角内，当 $z\to\infty$ 时，类似的结论也成立．在复变量的情况下，5) 具有下列形式：如果函数 $f(z)$ 在区域 $D=\{|z|>a,\ \alpha<|\arg z|<\beta\}$ 中是正则的，并且在包含于 D 中的任何闭角内，当 $|z|\to\infty$ 时，依 $\arg z$ 一致地有

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{z^n},$$

则在包含于 D 中任何闭角内，当 $|z|\to\infty$ 时，依 $\arg z$ 一致地有

$$f'(z) \sim -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{na_n}{z^{n+1}}.$$

参考文献

[1] Copson, E. T., Asymptotic expansions, Cambridge Univ. Press, 1965.

[2] Erdélyi, A., Asymptotic expansions, Dover, reprint, 1956.

[3] Whittaker, E. T. and Watson, G. N., A course of modern analysis, Cambridge Univ. Press, 1952.

М. И. Шабунин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Bruijn, N. G. de, Asymptotic metheds in analysis, Dover, reprint, 1981.

张鸿林 译

渐近表示 [asymptotic representation ; асимптотическое представление]

同**渐近公式** (asymptotic formula).

渐近序列 [asymptotic sequence ; асимптотическая последовательность]

函数序列 $\{\varphi_n(x)\}$，满足条件

$$\varphi_{n+1}(x)=o(\varphi_n(x)),\ x\to x_0,\ x\in M,$$

其中 x_0 是(有限的或无限的)集合 M 的极限点．如果由上下文显然可知 M 是怎样的集合，则可仅写出 $x\to x_0$．如果 $\{\varphi_n(x)\}$ 是渐近序列，$\psi(x)$ 是在 M 上定义的函数，则 $\{\psi(x)\varphi_n(x)\}$ 也是渐近序列．

渐近序列的例子

1) $\{(x-x_0)^n\}$, $x\to x_0$;

2) $\{x^{-n}\}$, $x\to\infty$;

3) $\{e^x x^{-n}\}$, $x\to\infty$;

4) $\{z^{-n}\}$, $z\to\infty$, $z\in D$，其中 D 是复平面上的无界区域．象 1), 2) 和 4) 这样的渐近序列，称为渐近幂序列．

М. И. Шабунин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Bruijn, N. G. de, Asymptotic methods in analysis, Dover, reprint, 1981.

[A2] Erdélyi, A., Asymptotic expansions, Dover, reprint, 1956.

张鸿林 译

渐近级数 [asymptotic series ; асимптотический ряд]

见(函数的)**渐近展开** (asymptotic expansion).

渐近值 [asymptotic value ; асимптотическое значение]

沿某个路径的极限值，更确切地说，对于复变量 z 的函数 $f(z)$，复数 α 或 $\alpha=\infty$ 称为 $f(z)$ 在其定义域 D 的闭包 $\bar{D}$ 上一点 a 的渐近值，如果存在一路径 $L: z=z(t)$, $0\leqslant t<1$, $L\subset D$ 且终结于 a，即使得

$$\lim_{t\to 1-0} z(t)=a,$$

沿此路径

$$\lim_{z\to a} f(z)=\alpha,\ z\in L.$$

例如，函数 $f(z)=e^z$ 沿着路径 $L_1: z=-t\ (0\leqslant t<+\infty)$ 和 $L_2: z=t\ (0\leqslant t<+\infty)$，在点 $a=\infty$ 分别有渐近值 $\alpha_1=0$ 和 $\alpha_2=\infty$．渐近值集合在极限集理论中起重要的作用(见**极限集** (limit set)).

若 $f(z)$ 在点 a 有两个(或两个以上)不同的渐近值，则称 a 为 $f(z)$ 的不定点(point of indeterminacy)．对于定义在单连通平面域的任意函数 $f(z)$，不定点集至多是可数的．

上述渐近值的定义源于渐近点值(asymptotic point values)．若曲线 L 的极限集是一集合 $E\subset\partial D$ 而不是单个点 $a\in\partial D$，也称它为相联于 E 的渐近值 $A(f, E)$.

参考文献

[1] Collingwood, E. F. and Lohwater, A. J., The theory of cluster sets, Cambridge Univ. Press, 1966, Chapt. 1; 6.

[2] MacLane, G. R., Asymptotic values of holomorphic functions, Rice Univ. Studies, Math. Monographs, 49, Rice Univ., Houston, 1963.

В. И. Гаврилов Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 关于渐近值的最著名的结果是 Denjoy - Carleman - Ahlfors 定理 (Denjoy - Carleman - Ahlfors

theorem)．设 $f(z)$ 为一整函数，它在无穷远点 ∞ 具有 n 个不同的(有穷)渐近值，则 $f(z)$ 的阶 $\geqslant n/2$．这个结论是 A. Denjoy 提出的猜想(1907)．L. Ahlfors 首先给出一个完整的证明(1929)，他是在 T. Carleman 获得一个不很精确的结果以后给出的．例如见[A1]，第 60 段．

参考文献

[A1] Dinghas, A., Vorlesungen über Funktionentheorie, Springer, 1961.　　何育赞 译　容尔谦 校

渐近有效估计量 [asymptotically - efficient estimator; асимптотически эффективная оценка]

将有效估计量概念推广到大样本情况的一个概念(见**有效估计量**(effective estimator))．渐近有效估计量并无唯一的定义方式．例如在经典形式中，它涉及在一适当限制的估计族 $\mathfrak{K}$ 中的一估计量的渐近效率．事实上，设 θ 为一维参数，而 T_n 是由一大小为 n 的随机样本所构造的 θ 的**相合估计量**(consistent estimator)．这时，若 $\sigma^2(\sqrt{n}\ T_n)$ 存在，且当 $n\to\infty$ 时以一个观察值的 **Fisher 信息量**(Fisher amount of information)的倒数为下界，则称 $T_n\in\mathfrak{K}$．如果一估计量 $T_n^*\in\mathfrak{K}$ 达到刚才提到的下界，则它是渐近有效的．在某些条件下，θ 的最大似然估计量满足此性质，这使这个经典定义有意义．若存在渐近有效估计量 T_n^*，则量

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sigma^2(\sqrt{n}\,T_n^*)}{\sigma^2(\sqrt{n}\,T_n)}$$

称为 T_n 的渐近相对效率．R. A. Fisher 和 C. R. Rao 等人还提出渐近有效估计量概念的若干变形．

参考文献

[1] Rao, C. R., Linear statistical inference and its applications, Wiley, 1965(中译本：C. R. 劳，线性统计推断及其应用，科学出版社，1985)．　O. В. Шалаевский 撰

【补注】 J. Hajek, L. Lecam 和其他人给出了这个概念的更现代化的定义．

参考文献

[A1] Ibragimov, J. A. and Has'minskii, R. Z. [R. Z. Khasmiskii], Statistical estimation, Asymptotic theory, Springer, 1981(译自俄文)．　陈希孺 译

渐近稳定解 [asymptotically - stable solution; асимптотически устойчивое решение]

一个微分方程组的解，它在 Ляпунов 意义下是稳定的(见 **Ляпунов** 稳定性(Lyapunov stability))，并且吸引具有足够接近的初始值的一切其他解．例如，考虑方程组

$$\frac{dx}{d\tau}=f(\tau,x)\qquad(*)$$

右边的函数 $f(\tau,\xi)$ 对于一切 $\tau\geqslant\alpha$，$\xi\in R^n$ 有定义，并使得方程组(*)的解存在而且是唯一的．这时，方程组(*)的解

$$x(\tau,\xi_0),\ x(\alpha,\xi_0)=\xi_0$$

是渐近稳定解，如果这个解同一切与其足够接近的解

$$x(\tau,\xi),\quad|\xi-\xi_0|<h,\ h>0,$$

一起对于一切 $\tau\geqslant\alpha$ 有定义，并且对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 δ，$0<\delta<h$，使得由 $|\xi-\xi_0|<\delta$ 可以推出：对于一切 $\tau\geqslant\alpha$，有

$$\|x(\tau,\xi)-x(\tau,\xi_0)\|<\varepsilon,$$

且当 $\tau\to\infty$ 时，有

$$\|x(\tau,\xi)-x(\tau,\xi_0)\|\to 0.$$

渐近稳定解的概念是 A. M. Ляпунов 引入的([1])；这个概念和各种特殊类型的一致渐近稳定性一起，在稳定性理论中有着广泛的应用([2]，[3]，[4])．

参考文献

[1] Ляпунов, А. М., Собр. соч., т. 2, М. - Л., 1956(英译本：Lyapunov, A. M., Problème général de la stabilité du mouvement, in *Ann. of Math. Studies*, Vol. 17, Princeton Univ. Press, 1947)．

[2] Красовский, Н. Н., Некоторые задачи теории устойчивости движения, М., 1959(英译本：Krasovskii, N. N., Stability of motion. Applications of Lyapunov's second method to differential systems and equations with delay, Stanford Univ. Press, 1963)．

[3] Hahn, W., Theorie und Anwendung der direkten Methode von Ljapunov, Springer, 1959.

[4] Rouche, N., Habets, P. and Laloy, M., Stability theory by Liapunov's direct method, Springer, 1977.

Ю. С. Богданов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hahn, W., Stability of motion, Springer, 1967.

张鸿林 译

渐近无偏估计量 [asymptotically - unbiased estimator; асимптотически несмещенная оценка]

估计量的一个概念，它指明该估计量在极限情况下是无偏的(见**无偏估计量**(unbiased estimator))．设 X_1，X_2，… 为概率空间 (Ω,S,P) 上的一串随机变量，其中 P 是族 $\mathscr{P}$ 中的一个概率测度．设 $g(P)$ 为定义在族 $\mathscr{P}$ 上的一个函数，而 $T_n(X_1,\cdots,X_n)$ $(n=1,2,\cdots)$ 为一串 S 可测函数，具有给定数学期望 $\mathsf{E}_P T_n(X_1,\cdots,X_n)$．这时，如果当 $n\to\infty$ 时有

$$\mathsf{E}_P T_n(X_1,\ldots,X_n)\to g(P),\quad P\in\mathscr{P},$$

则称 T_n 为函数 g 的渐近无偏函数(asymptotically unbiased function)．若称 X_1，X_2，… 为"观察值"而 T_n 为

"估计量",则得到渐近无偏估计量的定义．在从一总体中无限次重复抽样这种最简单情况,且该总体的分布依赖一个一维参数 $\theta \in \Theta$ 时,为 $g(\theta)$ 而构造的样本大小为 n 的渐近无偏估计量 T_n 对任何 $\theta \in \Theta$,当 $n \to \infty$ 时,满足条件

$$\mathrm{E}_\theta T_n(X_1, \ldots, X_n) \to g(\theta).$$

О. В. Шалаевский 撰 陈希孺 译

渐近无偏检验 [**asymptotically - unbiased test ; асимптотически несмещенный критерий**]

检验的一个概念,它指明该检验在极限情况下为无偏的．例如,在从依赖于参数 $\theta \in \Omega$ 的一维分布中抽出的 n 个独立样本的情形,设 H 为原假设: $\theta \in \Omega_H$,而 K 为对立假设:

$$\theta \in \Omega_K,\ \ \Omega_H \bigcup \Omega_K = \Omega,\ \ \Omega_H \bigcap \Omega_K = \varnothing.$$

称 n 维 Euclid 空间中的临界域 $R_n(n=1,2,\cdots)$ 为假设 H 的具有水平 α 的渐近无偏检验,若

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(R_n \mid \theta) \leqslant \alpha,\ \ \theta \in \Omega_H,$$

$$\alpha \leqslant \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(R_n \mid \theta),\ \ \theta \in \Omega_K,$$

函数

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(R_n \mid \theta)$$

称为检验 R_n 的渐近功效函数(asymptotic power function).

О. В. Шалаевский 撰 陈希孺 译

算术函数的渐近式 [**asymptotics of arithmetic functions ; асимптотика арифметических функций**],数论函数的渐近式(asymptotics of number - theoretical functions)

用带有任意小误差项的比较简单的表示式给出的算术函数(定义在全体自然数变数上的函数)的近似表达式．确切地说,称算术函数 $f(x)$ 存在渐近式(asymptotic),如果有渐近等式

$$f(x)=\varphi(x)+R(x),$$

其中 $\varphi(x)$ 是近似函数,$R(x)$ 是误差项,关于它们一般只知道有

$$\lim_{x\to\infty} \frac{R(x)}{\varphi(x)} = 0.$$

简记为:$f(x)=\varphi(x)+o(\varphi(x))$ 或 $f(x) \sim \varphi(x)$ (见**渐近公式**(asymptotic formula)).

求算术函数的渐近式是解析数论中最重要的问题之一．这可由以下事实来说明:几乎所有具有有趣的算术性质的算术函数都有这样的特征——当自变数增长时它们的变化是十分不规则的．如果代替算术函数 $f(x)$ 而考虑它的均值 $(\sum_{n\leqslant x} f(n))/x$ (n 是自然数),那么 $f(x)$ 的"不规则性"就被消除了．因此,关于算术函数的一个典型问题就是去寻求它的均值函数的渐近式．例如,函数 $\tau(n)$ (n 的除数个数)的均值等于

$$\frac{1}{n} \sum_{m\leqslant n} \tau(m) \sim \ln n.$$

由此提出的渐近等式中的误差项的最佳可能估计问题对许多函数,特别是对函数 $\tau(x)$,至今(1984,1992——译注)仍然没有解决(见**解析数论**(analytic number theory)).

算术函数的渐近式在加性问题(additive problems)中起着重要作用(见**加性数论**(additive number theory)).对许多加性问题,尚不知道如何去直接证明把一个数表为给定形式的分解式的存在性．然而,一旦得到了所求形式的分解式的个数的渐近式,就可立即推出:对所有足够大的 n 所求的分解式一定存在．

Б. М. Бредихин 撰 潘承彪 译 朱学贤 校

原子 [**atom ; атом**]

具有零元 0 的**偏序集** (partially ordered set) 中的非零极小元,即由 $0 < x \leqslant p$ 可得出 $x=p$ 的元素 p.

Л. А. Скорняков 撰

【补注】 原子(atom)这个术语还可以自然扩大其意义于范畴,即除自身与零对象外,无其他子对象的对象(见**范畴的零对象**(null object of a category)).

戴执中 译

原子分布 [**atomic distribution ; атомическое распределение**]

空间 Ω 的子集构成的一个 σ 代数 $\mathscr{A}$ 上的一类概率分布,其负荷集中在它的**原子** (atom) 所构成的集合上．概率空间 $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ 中的集合 $A \in \mathscr{A}$ 称为分布的原子 (atom of a distribution),如果 $\mathrm{P}(A)>0$,而且从 $A \supset B \in \mathscr{A}$ 可推出 $\mathrm{P}(B)=0$ 或 $\mathrm{P}(A \setminus B)=0$. 在原子是离散点的特殊情况下,原子分布和**离散分布** (discrete distribution) 一致．

А. В. Прохоров 撰 陈培德 译

原子格 [**atomic lattice ; атомная решетка**]

具有零元的格,对其中的每个非零元 a,存在一个原子(atom) $p \leqslant a$.

О. А. Иванова 撰 戴执中 译

原子环 [**atomic ring ; атомарное кольцо**]

具有单位元的满足主理想升链条件(极大条件)的**整环**(integral domain).换句话说,原子环的任意一族主理想都有极大元．这种环中的一个元素如果不能分解为不可逆元素的乘积,则被称为一个原子 (atom),或极元 (extremal element),或不可分解元 (indecomposible element).一个整环是原子环,当且仅当每个非零不可逆元素都是原子的乘积．所有 Noether 环

都是原子环．唯一因子分解整环是每个原子皆为素元(prime element)(即生成素理想的元素)的原子环．原子 **Bezout 环**(Bezout ring)是主理想环．

B. И. Данилов 撰

【补注】 在西方文献中，对这种环似乎没有给出过特殊的名称，而是直接称之为满足主理想升链条件(ascending chain condition for principal ideals)或除子链条件(divisor chain condition)的环．

参考文献

[A1] Gilmer, R., Multiplicative ideal theory, M. Dekker, 1972.

赵春来 译

可达边界弧 [attain-able boundary arc; достижимая дуга границы]，关于 z 平面中区域 G 的

作为区域 G 的部份边界且同时是某个 Jordan 区域 $g\subset G$ 的部份边界的 Jordan 弧．可达边界弧上的每一点都是 G 的(从 g 内)**可达边界点**(attainable boundary point)．单连通区域 G 到单位圆盘 $D:|z|<1$ 上的共形映射可连续延拓到可达边界弧上除端点外的每一点，成为这一开可达边界弧到圆周 $|z|=1$ 的某个开弧上的同胚．

Е. П. Долженко 撰

【补注】 可达边界弧的标准西方用语是 accessible boundary arc，例如可参见[A1]．

参考文献

[A1] Collingwood, E. F. and Lohwater, A. J., The theory of cluster sets, Cambridge Univ. Press, 1966.

[A2] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, т. 2, М., 1968 (中译本：A. И. 马库雪维奇，解析函数论，高等教育出版社，1957).

杨维奇 译

可达边界点 [attainable boundary point; достижимая граничная точка]

区域边界上的点，连同从区域内部通向该点的一类等价路径．设 ζ 是复平面内区域 G 的边界 ∂G 上的一个点，且存在由方程 $z=z(t)$ 描述的路径，$z(t)$ 是定义在某个区间 $[\alpha,\beta]$ 上的连续函数，当 $\alpha\leqslant t<\beta$ 时 $z(t)\in G$ $z(\beta)=\zeta$，则称该路径是一条(从 G 内)通向点 ζ 的路径，该路径确定一个用 ζ 表示的可达边界点．通向点 ζ 的两条路径称为等价的(或确定同一个可达边界点)，如果存在第三条从 G 内通向 ζ 的路径，在点 ζ 的任意邻近处它同所考虑的两条路径在 G 内的交集均非空．点 $\zeta\in\partial G$ 连同从 G 内通向 ζ 的一类等价路径合称区域 G 的一个可达边界点．并非每个点 $\zeta\in\partial G$ 都表示可达边界点；另一方面，同一点 $\zeta\in\partial G$ 可表示几个不同的可达边界点，甚至表示一个由不同可达边界点组成的无限集．

可达边界点是第一类素端(见**极限元**(limit element))的唯一的点；第二类素端(多点素端)恰好包含一个可达边界点，而第三类和第四类素端则不含可达边界点．Jordan 区域的每个边界点都是可达的．

参考文献

[1] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, т. 2, М., 1968 (中译本：A. И. 马库雪维奇，解析函数论，高等教育出版社，1957).

[2] Collingwood, E. F. and Lohwater, A. J., The theory of cluster sets, Cambridge Univ. Press, 1966.

Е. П. Долженко 撰

【补注】 可达边界点的标准西方用语是 accessible boundary point.

杨维奇 译

可达子群 [attainable subgroup; достижимая подгруппа]

子群 H，它被包括在群 G 的一个有限正规列，即在序列

$$\{1\}\subset H=H_0\subset H_1\subset\cdots\subset H_n=G$$

中，其中每个子群 H_i 是 H_{i+1} 的正规子群．子群的可达性是传递的．可达子群的交也是可达子群．由两个可达子群生成的子群不一定是可达子群．若群 G 的所有子群皆为可达子群，则 G 满足正规化子条件(normalizer condition)，即所有子群必不同于它们的正规化子(参见**子集的正规化子**(normalizer of a subset))．因而这样的子群是局部幂零的．

参考文献

[1] Курош, А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967 (中译本：A. Г. 库洛什，群论(上、下)，高等教育出版社，1982－1987).

В. М. Копытов 撰

【补注】 西方文献中，对这类子群的标准称谓是次正规子群(subnormal subgroup).

参考文献

[A1] Suzuki, M., Group theory, 2, Springer, 1986.

石生明 译 许以超 校

稳定分布的吸引域 [attraction domain of a stable distribution; притяжения область устойчивого распределения]

所有满足下述条件的分布函数 $F(x)$ 全体：对一个以 $F(x)$ 为分布函数的独立同分布随机变量序列 X_1, X_2, $\cdots$，以及适当选择的常数 A_n 和 $B_n>0$ ($n=1,2,\cdots$)，随机变量

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k-A_n}{B_n},\quad n=1,2,\ldots,\qquad(*)$$

的分布，当 $n\to\infty$ 时，弱收敛到一个非退化分布函数 $V(x)$，它必然是稳定的．

稳定律理论的基本问题之一是稳定律吸引域的描述．例如，对于正态分布，A. Я. Хинчин, W. Feller 和 P. Lévy 于 1935 年建立的 $F(x)$ 属于正态律的吸引域，当且仅当 $x\to\infty$ 时，有

$$x^2 \frac{\int_{|y|>x} dF(y)}{\int_{|y|<x} y^2 dF(y)} \to 0.$$

后来 Б. В. Гнеденко (1939) 和 W. Doeblin (1940) 给出了具有指数 $\alpha(0<\alpha<2)$ 的稳定律吸引域的描述：$F(x)$ 属于具有指数 α 的非退化稳定律 $V(x)$ 的吸引域，当且仅当对由 $V(x)$ 决定的某些 $c_1, c_2 \geqslant 0$，$c_1+c_2>0$，有

$$\frac{F(-x)}{[1-F(x)+F(-x)]} \to \frac{c_1}{c_1+c_2} \quad 当\ x\to\infty\ 时,$$

以及对每个常数 $t>0$，有

$$\frac{[1-F(x)+F(-x)]}{[1-F(tx)+F(-tx)]} \to t^{\alpha} \quad 当\ x\to\infty\ 时,$$

对正则化系数 $B_n(n=1, 2, \cdots)$ 的性状加以限制，得到更窄的分布函数类，其分布使收敛关系式(*)成立．对适当选择的 $A_n, c>0$ 和 $B_n=cn^{-1/\alpha}(n=1, 2, \cdots)$，使得(*)弱收敛到一个具有指数 α 的稳定分布 $V(x)$ 的分布函数 $F(x)$ 的集合，称为 $V(x)$ 的正规吸引域(normal domain of attraction)．正态分布的正规吸引域同具有有限方差的非退化分布的集合一致．

一个具有指数 $\alpha(0<\alpha<2)$ 的非退化稳定分布函数 $V(x)$ 的正规吸引域由这样的函数 $F(x)$ 来构造：

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{F(x)}{|x|^{\alpha}} = c_1 \geqslant 0,$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1-F(x)}{x^{\alpha}} = c_2 \geqslant 0$$

存在且有限，其中 c_1, c_2 由 $V(x)$ 确定．

参考文献

[1] Гнеденко, Б. В., Колмогоров, А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М. - Л., 1949 (中译本：Б. В. 哥涅坚科，А. Н. 柯尔莫哥洛夫，相互独立随机变数之和的极限分布，科学出版社，1955)．

[2] Ибрагимов, И. А., Линник, Ю. В., Независимые и стационарно связанные величины, М., 1965 (英译本：Ibragimov, I. A. and Linnik, Yu. V., Independent and stationary sequences of random variables, Wolters-Noordhoff, 1971)．

[3] Петров, В. В., Суммы независимых случайных величин, М., 1972 (英译本：Petrov, V. V., Sums of independent random variables, Springer, 1975)．

Б. А. Рогозин 撰　陈培德 译

吸引偏域 [**attraction, partial domain of; частичного притяжения область**]，无穷可分分布的

所有具有下述性质的分布函数 $F(x)$ 构成的集合：对一个以 $F(x)$ 为分布函数的独立同分布随机变量序列 $X_1, X_2, \cdots$，如果适当选择常数 A_n 和 $B_n>0$ $(n=1, 2, \cdots)$，以及正整数的子序列 $n_1<n_2<\cdots$，则随机变量

$$\frac{\left[\sum_{i=1}^{n_k} X_i - A_{n_k}\right]}{B_{n_k}}$$

的分布函数当 $k\to\infty$ 时弱收敛到一个给定的非退化无穷可分分布函数 $V(x)$；每一个无穷可分分布有一个非空的吸引偏域．存在不属于任何吸引偏域的分布函数，也存在属于任何无穷可分分布的吸引偏域的分布函数．

参考文献

[1] Гнеденко, Б. В., Колмогоров, А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М. - Л., 1949 (中译本：Б. В. 哥涅坚科，А. Н. 柯尔莫哥洛夫，相互独立随机变数之和的极限分布，科学出版社，1955)．

Б. А. Рогозин 撰

【补注】 本条所定义的概念通常也称为偏吸引域(domain of partial attraction)．　陈培德 译

自相关 [**auto - correlation; автокорреляция**]，随机过程 X_t 的

数值 X_t 和 X_{t+h} 的相关(correlation)．"自相关"这个术语，连同"相关函数"这个术语，最常用在平稳随机过程的研究中．在平稳随机过程中自相关只依赖于 h 而不依赖于 t (见**平稳随机过程**(stationary stochastic process))．

А. В. Прохоров 撰

【补注】 随机过程 X_t 的自相关，就是 X_t 和 X_{t+h} 的相关系数(correlation coefficient)．　陈希孺 译

自相关图 [**auto - correlogram; автокоррелограмма**]，随机过程的

同相关图 (correlogram)．

自振动 [**auto - oscillation; автоколебания**]

非线性**动力系统**(dynamical system)的一种非阻尼振动，其振幅与频率可以在很长一段时间中保持不变，它们在很大程度上独立于初始条件，而由系统本身的性质决定(亦见**振动理论**(**oscillation, theory of**))．"自振动"一词是由 А. А. Андронов 引进的(见[1])．

可以进行振动的动力系统称为自振动系统(auto-oscillating systems)．其中包含钟，电振荡发生器，电铃，管乐器和弦乐器等等．在某些条件下，通常不产生自振动的动力系统也会产生自振动(例如汽车前悬架的自振动——"抖动"，机翼的颤振或自动控制与监控系统的自振动等)．最简单的自振动系统可以用一常值能源，一个调节向振动系统供能的机制以及振动系统本身来描

述．这一系统的本质的特点是它的反馈(feedback)特性：一方面，调节机制控制了振动系统的运动，另一方面，系统本身的运动又影响了调节机制的动作([6])．从数学观点看来，具一个自由度的自治自振动系统可以定义为其运动方程在相空间中具有一个或多个**极限环**(limit cycle)的系统．

自振动系统的一个重要的典型性质是其振幅很大程度上与初始条件无关，即存在初始条件的一个或多个范围，使得在某一范围中任取的一组初值，都对应于相同的自振动振幅．这表明振动系统可能有几个稳态过程而其振幅各不相同；其中的每一个都可能在系统中实现，视初值区域的选取而定．这个性质是自振动系统的周期运动与保守系统的周期运动的基本区别．自振动系统的另一典型性质是其周期由系统本身决定而不是外加的．这是自振动与**强迫振动**(forced oscillations)的基本区别．

自振动的一个基本特性是其能量损失必须由一常值的能源来补偿．因为自治系统中的力并不显含时间，所以这一常值的能源必定会产生一个力，此力不是时间的某个已知函数而是由系统决定的．例如，钟表中的发条，以常角速度旋转的杆，以定常速度运行的无限长的皮带，或者以常速喷出的液流和气流都是这种常值能源；在驱动力为电流的系统中，可以用电池作为这种能源．

自振动系统的一个简单例子是在粘性的摩擦介质中的摆，它由一大小固定且恒作用于运动方向的力驱动．这个动力系统的微分方程是

$$\ddot{x}+2h\dot{x}+k^{2}x = F\,\mathrm{sign}\,\dot{x}$$

这里 $h>0$, $F>0$ 和 k^2 都是常数系数．在任意初始条件下，此系统都有一周期振动，摆与其平衡位置的最大偏离(即振幅)是

$$x_0 = \frac{1+e^{-hT}}{1-e^{-hT}}\cdot\frac{F}{k^2},$$

这里 $T=\pi/\sqrt{k^2-h^2}$ 是周期运动的半周期，相平面 $x\dot{x}$ 上的稳定极限环相应于此运动([3])．

一切自振动系统的典型性质是常值能源与此系统的联系，使得此源给出的能量作周期变化，其周期则由系统的性质决定．这个性质可以表述如下：自振动系统就是耗用非周期的能源得到周期过程的系统．自振动的形状可以接近于正弦形，也可以很不相同．后一类自振动称为**张弛振动**(relaxation oscillation)．形状接近正弦形的自振动通常发生在这样的系统中，其中能量在一个周期内的损失很小，所以馈入此系统中的能量也小．若系统在一个周期内能量损失很大，也可能发生这种情况，但要适当选定参数使得能量损失不仅在每个周期中得到补偿，而且在一周期的每一小部分中也得到补偿．这种系统包括所谓**正弦振动的RC振荡器**(RC-generators of sinusoidal oscillations)([4])．在张弛振动中，能量损失通常很大而且是在一个周期后用振荡系统的几乎全部能量来补偿的．

自振动的生成可能是"软"的或"硬"的([2])．在前一情况，系统在稳定平衡下某个参数的改变造成自振动，其振幅随参数连续变化而由0平稳增加．若将此参数在反方向上改变，则自振动的振幅又平稳减少到0而系统回到稳定平衡．若自振动的生成是硬的，则当某一参数缓慢连续变动时，系统从稳定平衡态转到有限振幅的自振动；当此参数再变动时，振幅的增加率变为常数．若此参数沿反方向变化，则振幅连续下降，当此参数达到某一值时，系统就回到了稳定平衡态．在这方面，重要的是要看到，系统由稳定平衡转到自振动，与由自振动再回到稳定平衡，发生在参数的不同值上．

自振动表现了一种有趣而重要的性质——即**强迫同步化**(enforced synchronization)效应，亦称"**俘获**"(capture)或"**锁相**"(mode locking)．当自振动系统的频率与作用于它的外力的频率之差充分小时，就出现这个情况，这时系统的定常周期运动将取得外力的频率；即外力将自己的频率赋给了自振动系统([3]，[5])．

参考文献

[1] Андронов, А. А., Собрание трудов, М., 1956.

[2] Андронов, А. А., Витт, А. А., Хайкин, С. Э., Теория колебаний, 2 изд., М., 1959(中译本：А. А. 安德罗诺夫、А. А. 维特、С. Э. 哈依金，振动理论，科学出版社，1973－1974)．

[3] Бутенин, Н. В., Элементы теории нелинейных колебаний, Л., 1962(英译本：Butenin, N. V., Elements of the theory of non-linear oscillations, Blaisdell, 1965)．

[4] Горелик, Г. С., Колебания и волны, М. - Л., 1950.

[5] Фельдбаум, А. А., Введение в теорию нелинейных цепей, М. - Л., 1948.

[6] Харкевич, А. А., Автоколебания, М., 1953(中译本：А. А. 哈尔克维奇，自振，科学出版社，1957)．

Н. В. Бутенин 撰

【补注】"自治自振动系统"的一般数学定义是：有非常数周期解为吸引子的向量场．"初始条件的范围"即这些解的吸引区．在保守系中，周期解不可能是吸引子，而且，若一开集中的一切解都是周期的，则其振幅与周期通常会依赖于初始条件．"软的自振动"即动力系统的Hopf分枝．

[A1]，特别是其517页和504页是有用的．

参考文献

[A1] Abraham, R. and Marsden, J. E., Foundations of mechanics, Benjamin-Cummings, 1978.

齐民友 译

自回归 [**auto - regression** ; **авторегрессия**]

给定随机序列$\{X_n: n=0, \pm 1, \cdots\}$中的值$X_n$与其先行值$X_{n-1}, \cdots, X_{n-m}$的回归依赖关系. m阶线性自回归由X_n与X_{n-k} ($k=1, \cdots, m$)之间的**线性回归**(regression)方程来定义,即

$$X_n = \beta_1 X_{n-1} + \cdots + \beta_m X_{n-m} + \varepsilon_n, \qquad (*)$$

这里$\beta_1, \cdots, \beta_m$为常数,而随机变量ε_n同分布,具有均值0和方差σ^2,且为不相关的(有时假定它们独立). 在描述某些**时间序列**(time series)时,自回归是一个有用的随机模型(线性自回归的概念是G. Yule在1921年提出的). 它用于分析描述一个系统的时间序列,该系统在其内力与随机的外来冲击的作用下产生振动. 自回归(*)可看作是一个特殊类型的随机过程——**自回归过程**(auto - regression process).

A. B. Прохоров 撰　陈希孺 译

自回归过程 [**auto - regressive process** ; **авторегрессионный процесс**]

一个随机过程$\{X_t\}$,其值满足一个带某些常数$a_1, \cdots, a_p$的**自回归**(auto - regression)方程:

$$X_t = a_1 X_{t-1} + \cdots + a_p X_{t-p} + Y_t, \qquad (*)$$

这里p是正整数,而Y_t通常假定为不相关和同分布,具均值0和方差σ^2. 如果复变量z的多项式$\varphi(z) = z^p - a_1 z^{p-1} - \cdots - a_p$的零点全在单位圆内,则方程(*)有解

$$X_t = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu Y_{t-\nu},$$

其中b_ν通过下述方程与a_j相联系:

$$\varphi^{-1}(z) = \psi(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu z^\nu.$$

例如,设$\{Y_t\}$为具谱密度$\sigma^2/2\pi$的**白噪声**(white noise)过程. 这时,满足方程(*)的仅有的一类自回归过程是具谱密度

$$f(\lambda) = \left(\frac{\sigma^2}{2\pi}\right) |\varphi(e^{i\lambda})|^{-2}$$

的过程$\{X_t\}$,若$\varphi(e^{i\lambda})$无实零点,则这过程是宽平稳过程. 此过程的**自协方差**(autocovariance) $r_k = \mathrm{E} X_t X_{t-k}$满足递推关系

$$r_k = a_1 r_{k-1} + \cdots + a_p r_{k-p}, \quad k>0,$$

若用b_ν表达,则有形式

$$r_k = \sigma^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu b_{\nu+k}.$$

自回归参数a_k与过程的**自相关**(auto - correlation)系数$\rho_k = r_k / r_0$. 有如下的矩阵关系:

$$A = R_p^{-1} \rho_p^*,$$

这里$A = (a_1, \cdots, a_p)^T$, $\rho_p^* = (\rho_1, \cdots, \rho_p)$,而$R_p$是自相关系数矩阵(Yule - Walker 方程(Yule - Walker equation)).

参考文献

[1] Grenander, U. and Rosenblatt, M., Statistical analysis of stationary time series, Wiley, 1957.

[2] Hannan, E. J., Time series analysis, Methuen, London, 1960.

A. B. Прохоров 撰　陈希孺 译

自协方差 [**autocovariance** ; **автоковариация**],随机过程X_t的

X_t和X_{t+h}的**协方差**(covariance). 若以$\mathrm{E}X$记随机变量X的数学期望,则自协方差等于

$$\mathrm{E}(X_t - \mathrm{E}X_t)(X_{t+h} - \mathrm{E}X_{t+h}).$$

"自协方差"一词通常用于(宽)**平稳随机过程**(stationary stochastic process). 对这种过程,自协方差只依赖于h,且它与**自相关**(auto - correlation)的差异仅在于多了一个因子,该因子就是X_t的方差. "协方差函数"和"自协方差函数"这两个术语也和"自协方差"这个术语在同一意义下使用.

A. B. Прохоров 撰　陈希孺 译

自动机的代数理论 [**automata, algebraic theory of** ; **автоматов алгебраическая теория**]

自动机理论(automata, theory of)的一个分支,其中使用代数工具研究自动机. 自动机的**代数理论**基于自动机可看作特殊的代数或代数系统这个事实. 此外,有限自动机可表示的事件关于并、积和迭代运算形成一个代数,它是由一个仅含一个字母或空字的所谓初等事件的有限集生成的. 代数方法使得直接在自动机理论中利用代数的结果成为可能,同时在某些情形下有助于建立自动机理论和其他数学分支的联系. 例如,应用自动机理论可以得到某些二阶算术理论的可解性的证明,也可得到**Burnside 问题**(Burnside problem)的一个新的更简单的解.

从代数的观点来看,一个有限或无限自动机$\mathfrak{A} = (A, S, B, \varphi, \psi)$是一个三基代数(tribasic algebra),即有三个元素集A, S和B及两个运算$\varphi: S \times A \to S$和$\psi: S \times A \to B$的一个代数. 另一方面,一个迁移系统$(A, S, \varphi)$,其中$A = \{a_1, \cdots, a_n\}$是输入字母表,$S$是状态集(见**有限自动机**(automaton, finite)),可以看作一个代数$\langle S, a_1, \cdots, a_n \rangle$,其一元运算用输入字母表的字母$a_i$表示,满足$a_i s_j = \varphi(s_j, a_i)$. 因此,对自动机可自然地定义诸如**自动机的同态**(automata, homomorphism of)、同构、子自动机等等概念. 这一方法也允许对自动机$\mathfrak{A} =$

(A, S, B, φ, ψ) 赋予集合 S 上的一个变换半群(在复合运算下)，它由运算 a_i 生成，这就是说，对任意 a_i，$a_j \in A$ 和 $s \in S$，设

$$a_i a_j S = \varphi(\varphi(s, a_i), a_j).$$

此半群称为自动机 $\mathfrak{A}$ 的半群(semi-group of the automaton)，被用作以代数的语言描述自动机的某些性质(分类、分解、同构，等等)的工具. 同样，对有单位元素的任何半群 Q，可以赋予一个有给定输入字母表 $A=\{a_1, \cdots, a_n\}$ 和状态集 Q 的自动机，如下所述：对 A 的每个字母 a_i，指定 Q 中某个元素 q_i 且定义迁移函数为 $\varphi(q, a_i) = q q_i$. 这一自动机的半群同构于元素 $q_1, \cdots, q_n$ 生成的 Q 的子半群，这意味着如果 $q_1, \cdots, q_n$ 是 Q 的生成元，则自动机的半群同构于原来的半群 Q. 一个自动机的半群显然同构于在字母表 A 上所有字关于字的连接(毗连)运算的输入半群 A^* 的一个商半群，按照同余

$$R = \{(\alpha, \beta) : \alpha, \beta \in A^* \text{ 且对所有 } s \in S \text{ 都有 } (\varphi(s, \alpha) = \varphi(s, \beta))\}.$$

对任何状态 $s \in S$，同余 R 是关系

$$R_s = \{(\alpha, \beta): \alpha, \beta \in A^* \text{ 且 } \varphi(s, \alpha) = \varphi(s, \beta))\}$$

的最大子同余. 特别地，这意味着初始接受器 $\mathfrak{A}_s = (A, S, \varphi, S')$ 表示的事件是某些 R 类的并集. 因为自动机在同构的意义下由它的半群刻画，故不同的半群类有它们自己的自动机类. 如果一个自动机的半群是自由的，Abel 的，循环的，幂零的，等等，或它本身是一个群，则此自动机分别称为自由的(free)，Abel 的(Abelian)，循环的(cyclic)，幂零的(nilpotent)，或一个群自动机(group automaton)；最后的一种也称为置换自动机(permutation automata). 另一个方法与迁移和输出函数的代数分类有关，导致线性自动机，代换自动机和其他**自动机**(automaton). 代换自动机实现一一函数且用于编码理论. 线性自动机由于它们的简单结构而引起人们的兴趣.

自动机 (A, S, B, φ, ψ) 称为线性自动机(linear automaton)，如果 A, S 和 B 是某个域 P 上的线性空间，且

$$\varphi(s, a) = \varphi_1(s) + \varphi_2(a), \; \psi(s, a) = \psi_1(s) + \psi_2(a),$$

其中 $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ 分别为 S 到 S、A 到 S、S 到 B 和 A 到 B 的线性映射. 通常假定域 P 是有限的，且空间 A, S 和 B 是有限维的；在这种情形下，一个线性自动机就是一个有限自动机. 如果在有限接受器作为一个其运算为输入字母表的字母的代数的表示中允许多元运算，则所得的推广称为一个项上自动机(automaton over terms)(树上自动机(automaton over trees)；广义自动机(generalized automaton)). 这种自动机用于证明某些二阶数学理论的可解性.

参考文献

[1] Алгебраическая теория автоматов, языков и полугрупп, М., 1975.

[2] Глушков, В. М., Абстрактная теория автоматов, 《Успехи матем. наук》, **16** (1961), 3–62

[3] Тэтчер, Дж. В., Райт, Дж. Б., в кн. 《Кибернетический сборник》, М., 6 (1969), 112–144.

亦见**自动机**(automaton)的参考文献.

В. Б. Кудрявцев, Ю. И. Янов 撰
陈世华 译 陶仁骥 校

自动机的完全系 [**automata, complete systems of; автоматов полные системы**]

给定自动机类 M 的一些特殊子集，在其上定义了在 M 中取值的某个运算集 Ω. 这些子集具有下述基本性质即完全性(completeness property)：由给定的一个子集 $A \subseteq M$ 中的自动机经有限次使用 Ω 中运算得到的所有自动机的集合与 M 相同. 一个集合是否完全的问题称为自动机的完全性问题(completeness problem). 这个问题对自动机的各种模型和运算都已进行了研究. 这种研究的对象范围按复杂性增加的顺序包括真自动机，实现带延迟函数(即带时间位移的 k 值逻辑函数)的自动机，有限自动机，等等. 真自动机对常考虑的叠加运算的完全性问题本质上与 k 值逻辑函数的完全性问题是一样的(见**多值逻辑**(many-valued logic))，且已进行了相当彻底的研究. 同步叠加(synchronous superposition)定义为这样一种自动机叠加，实现带相同延迟的函数的自动机的所有输入被结合. 特别是，在这些条件下发现的完全性准则表明存在一个算法，用它可以建立自动机的任何有限系的完全性或不完全性. 完全性的基本准则通过所谓准完全类(pre-complete classes)给出(准完全类是 M 的一些子集，它们对于 Ω 中的运算是封闭的，每个子集同不属于它的任一个自动机一起形成一个完全系). 已经证明，集合 A 是完全的，当且仅当它不是任何准完全类的子集. 这些类也已被完全描述. 这一方法成功地使用于许多其他情形. 如果自动机的叠加运算和反馈运算选择为 Ω，对于有限自动机原则上也可应用这一方法，见**自动机的合成**(automata, composition of). 上述准则也可应用于这一情形；但是，已经证明准完全类的族是一个连续类，这就排除了任何用这种语言的能行的准则的存在性. 我们指出，在此叙述的所有情形都存在有限完全系；因此，对任意的自动机系的完全性问题归结为对有限的自动机系的完全性问题. 有限自动机的有限系的完全性的算法解问题，与上述的后一情形相联系. 问题可以推广如下：对一个给定的自动机 a 和集合 B，决定是否 a 可由 B 中自动机经过某些给定的运算得到. 于

是,人们必须研究谓词 $P(x,y)$,即"自动机 x 由集合 y 实现".已经发现,实现性的判定问题对任意给定的 a 都是算法不可解的,即一月谓词 $P(a,y)$ 是非递归的.另一方面,对参数 y 的各种值 B,谓词 $P(x,B)$ 既可是递归的又可是非递归的.与自动机完全性问题的算法不可解相联系的一个问题是寻找集合的类,对它们有能行解.特别是,对只由 Moore 自动机和所有真自动机组成的系的完全性的判定存在一个算法.一个有关问题是找出具有给定性质的具体的自动机完全集.已经发现,对任意正整数 n 都存在一个自动机完全系其真子集是不完全的,且对给定的 n,这种完全系的个数是无限的.也存在一个在一定意义下最简单的自动机,它有两个状态,两个输入通道和一个输出通道且构成一个完全系.对于有限自动机和其上运算的不同推广的完全性问题也已经研究;另一种类型的推广涉及到所考虑的自动机类中的各种等价关系的引入.

参考文献

[1] Яблонский, С. В., Функциональные построения в k-значной логике,《Тр. матем. ин-та АН СССР》, **51** (1958), 5－142.

[2] Кудрявцев, В. Б., Теорема полноты для одного класса автоматов без обратных связей, В кн.《Проблемы кибернетики》, М., 1962, 8, 91－115.

[3] Кудрявцев, В. Б., О мощности множеств предполных множеств некоторых функциональных систем, связанных с автоматами, в кн.,《Проблемы кибернетики》, М., 1965, 13, 45－74.

[4] Кратко, М. И.,《Алгебра и логика. Тр семинара》, **3** (1964), 2, 33－44.

[5] Летичевский, А. А., Условия полноты в классе автоматов Мура, К., 1963.

[6] Буевич, В. А., Построение универсальной о.-д. функции от двух переменных, имеющей два внутренних состояния, в кн.《Проблемы кибернетики》, М., 1970, 22, 75－83.

В. Б. Кудрявцев 撰

陈世华 译 陶仁骥 校

自动机的合成 [automata, composition of; автоматов композиция]

按照某种规则结合开始的自动机所得到的更复杂的自动机的运算.自动机的合成在自动机综合和分解问题中起重要的作用.最重要和最常用的自动机合成是直积、叠加和反馈.

自动机 $\mathfrak{A}_i=(A_i,S_i,B_i,\varphi_i,\psi_i)$ $(i=1,\cdots,n)$ 的**直积**(direct product)是自动机 $\mathfrak{A}=(A,S,B,\varphi,\psi)$,其中

$$S=S_1\times\cdots\times S_n,\quad A=A_1\times\cdots\times A_n,$$
$$B=B_1\times\cdots\times B_n$$

且函数 $\varphi(s,a)$ 和 $\psi(s,a)$ 由下述关系定义:

$$\varphi((s_1,\ldots,s_n),(a_1,\ldots,a_n))=$$
$$=(\varphi_1(s_1,a_1),\ldots,\varphi_n(s_n,a_n)),$$
$$\psi((s_1,\ldots,s_n),(a_1,\ldots,a_n))=$$
$$=(\psi_1(s_1,a_1),\ldots,\psi_n(s_n,a_n)).$$

自动机 $\mathfrak{A}_1=(A_1,S_1,B_1,\varphi_1,\psi_1)$ 和 $\mathfrak{A}_2=(B_1,S_2,B_2,\varphi_2,\psi_2)$ 的**叠加**(superposition)是自动机 $\mathfrak{B}=(A_1,S,B_2,\varphi,\psi)$,其中 $S=S_2\times S_1$ 且

$$\varphi((s_2,s_1),a)=(\varphi_2(s_2,\psi_1(s_1,a)),\varphi_1(s_1,a)),$$
$$\psi((s_2,s_1),a)=\psi_2(s_2,\psi_1(s_1,a)),$$

任何 $(s_2,s_1)\in S,a\in A_1$.

在自动机的完全性和综合问题中**反馈**(feedback)运算是很重要的.这一运算应用到 n 输入和 m 输出自动机 $\mathfrak{A}=(A,S,B,\varphi,\psi)$,其中 $A=A_1\times\cdots\times A_n$,$B=B_1\times\cdots\times B_m$,

$$\psi(s,(a_1,\ldots,a_n))=$$
$$=(\psi_1(s,(a_1,\ldots,a_n)),\ldots,\psi_m(s,(a_1,\ldots,a_n))),$$

使得对某个 i,j 关系 $B_i=A_j$ 为真且函数 ψ_i 不依赖 a_j,即

$$\psi_i=\psi_i(s,(a_1,\ldots,a_{j-1},a_{j+1},\ldots,a_n)).$$

在这些条件下,在自动机的第 i 个输出和第 j 个输入上的反馈运算产生自动机 $\mathfrak{A}'=(A',S,B,\varphi',\psi')$,使得 $A'=A_1\times\cdots\times A_{j-1}\times A_{j+1}\times\cdots\times A_n$,

$$\varphi'(s,(a_1,\ldots,a_{j-1},a_{j+1},\ldots,a_n))=$$
$$=\varphi(s,(a_1,\ldots,a_{j-1},$$
$$\psi_i(a_1,\ldots,a_{i-1},a_{i+1},\ldots,a_n),a_{j+1},\ldots,a_n)),$$
$$\psi'(s,(a_1,\ldots,a_{j-1},a_{j+1},\ldots,a_n))=$$
$$=\psi(s,(a_1,\ldots,a_{j-1},$$
$$\psi_i(s,(a_1,\ldots,a_{j-1},a_{j+1},\ldots,a_n)),a_{j+1},\ldots,a_n)).$$

还有其他类型的自动机合成,例如乘积,直和,半直积,等等.

参考文献

[1] Глушков, В. М., Абстрактная теория автоматов,《Успехи матем. наук》, **16** (1961),, 3－62.

[2] Кудрявцев, В. Б., О мощности множеств предполных множеств некоторых функциональных систем, связанных с автоматами, в кн.《Проблемы кибернетики》, М., 1965, 13, 45－74.

В. Н. Редько 撰

【补注】 更多的信息见[A1].

参考文献

[A1] Géiseg, F., Products of automata, Springer, 1986.

陈世华 译 陶仁骥 校

自动机的等价 [**automata, equivalence of** ; **автоматов эквивалентность**]

在自动机集上的一个等价关系，由于研究自动机的某些特殊的内在性质所引起. 这样的一种性质通常是**自动机的行为** (automaton, behaviour of an), 因此, 两个自动机看作等价的, 倘若它们的行为相同. 此时, 一个自动机的行为通常理解为由它实现的全体函数, 见**有限自动机** (automaton, finite). 对有限自动机来说, 这样一个等价关系是可解的. 所以, 存在一个自动机的极小化算法, 即用来对任一给定自动机构造一个最小可能状态数的等价自动机(极小自动机)的算法.

自动机的等价性可依据**状态的等价** (equivalence of states) 概念方便地定义: 自动机 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{A}'$(它们可以相同)的两个状态 s 和 s' 称为等价的, 倘若初始自动机 $\mathfrak{A}_s$ 和 $\mathfrak{A}'_{s'}$ 实现相同的函数. 自动机 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{A}'$ 等价意味着 $\mathfrak{A}$ 的任一个状态可找到 $\mathfrak{A}'$ 的一个状态等价于它, 反之亦然. 一个自动机是极小的当且仅当它没有不同的两个等价状态. 在同构意义下, 任何一个自动机的极小自动机唯一确定. 有限自动机的这一等价关系的求解算法基于 Moore 定理 (Moore theorem). 按照这一定理, $\mathfrak{A}$ 的状态 s 和 s' 等价如果初始自动机 $\mathfrak{A}_s$ 和 $\mathfrak{A}_{s'}$ 实现的函数在长 $n-1$ 的字上一致, 其中 n 是 $\mathfrak{A}$ 的状态数. 如果状态 s 和 s' 分属两个自动机 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{A}'$, 则字长等于 $n+n'-1$, 其中 n' 是 $\mathfrak{A}'$ 的状态数. 著名的有限自动机极小化算法也是基于这一定理. 该算法构造所谓的归约自动机 (reduced automaton), 其状态是状态等价类, 而它的迁移函数和输出函数由原来的自动机的对应函数自然诱导出. 归约自动机是极小的, 因为它的任何两个不同状态是不等价的.

对具有 n 个状态, m 个输入字母和 p 个输出字母的极小自动机的个数 $A(m,n,p)$, 存在它的渐近估计. 如果 $m+n+p\to\infty$, 对 $m\geqslant 3$, 有估计 $A(m,n,p)\sim (np)^{mn}/n!$, 而

$$A(2,n,p)\sim e^{-1/(2p^2)}\frac{(np)^{2n}}{n!}.$$

在自动机的等价性研究中的另一个问题是自动机的**等价变换** (equivalent transformations) 问题. 这个问题对有限自动机的两种可能的定义方法——图和逻辑网络——都已被研究. 一般来说, 问题是要求出一组变换规则, 它们满足某些条件并可应用它们将任何给定自动机变换到任一个等价于它的自动机: 所谓的完全规则组. 在两种情形下, 变换规则都是一对图式(图或逻辑网络的片断), 它们实现相同的映射. 此规则的应用是用一个片断代替另一个片断. 对有限自动机来说, 完全规则组不存在, 但对限制延迟数的逻辑网络来说, 则是存在的.

在有限自动机的等价性研究中出现的基本概念、问题和方法, 适当地考虑它们的特点, 通常可以扩展到自动机的其他类型, 作为参考可见**自动机** (automaton).

В. Б. Кудрявцев, Ю. И. Янов 撰

【补注】 读者可参看条目**形式语言** (formal languages) 和 **L 系统** (L-systems). 本条中的大部分课题已不再看作是现在的主流.

陈世华 译 陶仁骥 校

自动机的试验 [**automata, experiments with** ; **эксперименты с автоматами**]

由自动机的行为获得有关自动机内部结构信息的方法, 且这些信息可从外部试验中推导出. (即这样的试验, 将输入字馈入自动机, 观察对应的输出字序列, 并基于这些观察作出结论).

自动机的试验可用于寻找解决下列问题的途径:

1) 已知自动机处于初始状态, 要求决定这一状态.

2) 构造一个试验, 它将自动机从任一状态变到某个预定的状态(调节问题).

3) 自动机的正确功能的验证. 要求用试验查明给定自动机是否功能正确.

4) 自动机的诊断. 不仅要求查明自动机是否工作正常, 还要查明何种类型的故障出现.

5) 从一类给定自动机中识别一个自动机的问题(译码). 已知看作一个"暗箱"的自动机属于某一给定集, 要求查明此自动机是哪一个.

设 $\mathfrak{A}$ 是具有输入字母表 X 和输出字母表 Y 的初始自动机类. 又设 X^* 是所有 X 上字的集合, $\alpha\subseteq X^*$ 且 $A\in\mathfrak{A}$. 一个自动机 A 的试验 (experiment with the automaton) 是一由所有 (x,y) 对组成的集合 $[\alpha,A]$, 满足条件: $x\in\alpha$ 且 A 将输入 x 变为输出 y.

试验的分类. 下列类型的试验常被考虑:

1. 简单无条件试验 (simple unconditional experiment) —— 一集合 $[\alpha,A]$, 其中 α 由一个字组成. 在试验过程中唯一的元素 α 馈入自动机的输入且输出的结果是 Y^* 中某个字.

2. 简单条件试验 (simple conditional experiment) —— 一集合 $[\alpha,A]$, 其中 α 由一个字 $X=(X(1),\cdots,X(\tau))$ 组成, 且对任意 $j\in\{1,\cdots,\tau\}$ 值 $X(j)$ 依赖于 $[\alpha',A]$, $\alpha'=(X(1),\cdots,X(j-1))$. 因此, 在自动机试验过程中每个输入字的后继字母依赖于早先得到的输出字.

3. 多重无条件试验 (multiple unconditional experiment) —— 简单无条件试验的一种推广, 此时集合 $[\alpha,A]$ 中的 α 由多于 1 个的字组成. 通常假定在给定试验的执行过程中有自动机 A 的多于 1 个的样本, 或该自动机的初始状态能复位.

4. 多重条件试验 (multiple conditional experiment) —— 简单条件试验的一种推广, 此时集合 $[\alpha,A]$

中 α 由多于 1 个的字组成:

$$\alpha = \{(X_1(1), \ldots, X_1(\tau_1)), \ldots, (X_s(1), \ldots, X_s(\tau_s))\}.$$

此外,可区分为两种可能情况:a) 对任何 $i \in \{1, \cdots, s\}$ 和 $j \in \{1, \cdots, \tau_i\}$, $X_i(j)$ 的值只依赖于 $[\alpha', A]$, 其中 α 由唯一的字 $(X_i(1), \cdots, X_i(j-1))$ 组成;或 b) 对任何 $i \in \{1, \cdots, s\}$ 和 $j \in \{1, \cdots, \tau_i\}$, $X_i(j)$ 的值依赖于 $[\alpha'', A]$, 其中 α'' 是集合 $\{(X_1(1), \cdots, X_1(t_j^1)), \cdots, (X_s(1), \cdots, X_s(t_j^s))\}$, 且指标 t_j^i 与 τ_i 相同当 $j-1 > \tau_i$ 或与 $j-1$ 相同当 $j-1 \leqslant \tau_i$ $(i \in \{1, \cdots, s\})$.

试验的复杂性度量 (measures of the complexity of experiments). 有一些数字特征用来估计试验复杂性的程度. 对复合试验来说, 常用的复杂性测度是试验的高 (height of the experiment) —— 最大输入字的符号个数, 重数 (multiplicity) —— 输入字的个数, 和长度 (length) —— 所有输入字包含的符号总数. 简单试验的复杂性测度指它的长 (所用输入字的符号个数).

若干结果. 一个 r 状态、m 输入和 p 输出 Moore 自动机称为一个 (r, m, p) 自动机. 下述简单试验状态可分性定理 (theorem on the distinguishability of states by a simple experiment) 成立: 设 A 是一个 (r, m, p) 自动机且所有状态两两可分, 则任二状态的可分性可用长 $r-1$ 的一个简单试验建立, 且界 $r-1$ 不能更低 (见 [4]).

决定一个自动机的初始状态的问题可用一个长 λ 的简单无条件试验来解决, 其中

$$3^{r(1+\varepsilon_1)/6} \leqslant \lambda < 3^{r(1+\varepsilon_2)/6} \text{ (当 } r \to \infty \text{ 时 } \varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0).$$

对一个 r 状态自动机, 其中 k 个状态是容许的, 它的调节总可用长 λ 的一个简单无条件试验解决, 其中 $\lambda \leqslant (2r-k)(k-1)/2$, 且这个界不能改进.

通常, 只有不多的一部分自动机能达到上述估计. 已经得出 (见 [4]), 对几乎所有具有两个容许状态的 (r, m, p)-自动机, 决定其初始状态的问题可用长 λ 的一个简单无条件试验解决, 其中 $\lambda \leqslant \log_m \log_p r + 4$; 且对几乎所有 (r, m, p)-自动机的调节问题可用长 λ 的一个简单无条件试验解决, 其中 $\lambda < 5 \log_p r$.

状态数未知的初始 Mealy 自动机的译码没有算法. 但是, 这种自动机的大部分还是能被译码的.

自动机试验也用作自动机功能控制的工具. 已经发展出自动机控制问题的统一途径, 它使指出解决这些问题的原则性方法成为可能. 对各种自动机找出所有陷入僵局的多重试验的一个能行算法, 也已构造出来 (见 [2]).

参考文献

[1] Moore, E. F., Gedanken-experiments on sequential machines, in C. Shannon and J. MacCarthy (eds.), *Automata studies*, Princeton Univ. Press, 1956, 179 - 210.

[2] Яблонский, С. В., О построении тупиковых кратных экспериментов для автоматов, 《Тр. Матем. ин-та АН СССР》, **133** (1973), 263 - 272.

[3] Трахтенброт Б. А., Барздинь, Я. М., Конечные автоматы, поведение и синтез, М., 1970 (英译本: Trakhtenbrot, B. A. and Barzdin, Ya. M., Finite automata, behaviour and synthesis, North-Holland, 1973).

[4] Hibbard, T. N., Lower upper bounds on minimal terminal state experiments for two classes of sequential machines, *J. Assoc. Comput. Mach.*, **8** (1961), 4, 601 - 612.

Х. А. Мадатян 撰

陈世华 译 陶仁骥 校

自动机的同态 [**automata, homomorphism of; автоматов гомоморфизм**]

一个自动机的输入和输出字母表及状态集到第二个自动机的对应集的映射, 它保持迁移和输出函数. 更严格地说, 自动机 $\mathfrak{A}_1 = (A_1, S_1, B_1, \varphi_1, \psi_1)$ 到自动机 $\mathfrak{A}_2 = (A_2, S_2, B_2, \varphi_2, \psi_2)$ 的同态 (见**有限自动机** (automaton, finite)), 是集合 $A_1 \times S_1 \times B_1$ 到集合 $A_2 \times S_2 \times B_2$ 的一个映射 $h = (h_1, h_2, h_3)$

$$h_1: A_1 \to A_2, \quad h_2: S_1 \to S_2, \quad h_3: B_1 \to B_2,$$

使得下列等式对任何 $s \in S_1$, $a \in A_1$ 都成立:

$$h_2 \varphi_1(s, a) = \varphi_2(h_2(s), h_1(a)),$$
$$h_3 \psi_1(s, a) = \psi_2(h_2(s), h_1(a)).$$

初始自动机还必须满足附加的要求: h 映射初始状态到初始状态. 自动机 $\mathfrak{A}_1$ 和 $\mathfrak{A}_2$ 称为同态的 (homomorphic), 倘若存在映射 $A_1 \times S_1 \times B_1$ 到 $A_2 \times S_2 \times B_2$ 的一个自动机同态 h. 此外, 如果 h 是一一的, 则称 h 为一个同构 (isomorphism) 且自动机 $\mathfrak{A}_1$ 和 $\mathfrak{A}_2$ 称为同构自动机 (isomorphic automata). 如果字母表 A_1 和 A_2 相同, 字母表 B_1 和 B_2 相同, 且映射 h_1 和 h_3 是恒同映射, 则同态 [同构] h 称为一个状态同态 (state homomorphism) [状态同构 (state isomorphism)]. 输入和输出同态 [同构] 可类似地定义. 状态同构自动机和状态同态初始自动机是等价的 (见**自动机的等价** (automata, equivalence of)).

自动机同态概念应用于自动机的极小化、分解、完全性等等有关问题的研究.

参考文献

[1] Глушков, В. М., Абстрактная теория автоматов, 《Успехи матем. наук》, **16** (1961), 3 - 62.

А. А. Летичевский 撰 陈世华 译 陶仁骥 校

自动机的描述方法 [**automata, methods of specification of; автоматов способы задания**]

描述自动机及其功能或行为的各种方法．自动机的描述方法依赖于自动机概念的定义方法．若采用宏观方法(见**有限自动机**(automaton, finite))，则所描述的是有限自动机的外部行为．若采用微观方法，则定义中应包含构造自动机的元件及它们的结合图式的描述．描述有限自动机的方法叙述于下．

宏观方法．对于给定字母表 $A=\{a_1,\cdots,a_m\}$, $S=\{s_1,\cdots,s_n\}$ 和 $B=\{b_1,\cdots,b_k\}$，描述一个有限自动机 $\mathfrak{A}=\langle A,S,B,\varphi,\psi\rangle$ 相当于描述函数 φ 和 ψ，或描述此**自动机的行为**(automaton, behaviour of an)．函数 φ 和 ψ 常用一个表，一个图或一个迁移矩阵定义．自动机 $\mathfrak{A}$ 的迁移表(table of transitions) T 由两个子表组成，即 $T_\varphi=\|t_{ij}^\varphi\|$ 和 $T_\psi=\|t_{ij}^\psi\|$ $(i=1,\cdots,n,\ j=1,\cdots,m)$，$t_{ij}^\varphi\in S$，$t_{ij}^\psi\in B$．函数 φ 和 ψ 由 $\varphi(s_i,a_j)=t_{ij}^\varphi$ 和 $\psi(s_i,a_j)=t_{ij}^\psi$ 定义．若 T_ψ 的所有列一致，则表 T 定义一个 Moore 自动机(Moore automaton)．例如，设 $A_0=\{a_1,a_2\}$，$S_0=\{s_1,s_2\}$，$B_0=\{b_1,b_2\}$；则表 T(图 1)描述一个自动机 $\mathfrak{A}^0$ 的函数 φ_0 和 ψ_0(图 2 表示 T 的子表 T_φ 和 T_ψ)．

	a_1	a_2
s_1	s_1,b_2	s_2,b_2
s_2	s_2,b_1	s_1,b_2

图 1

	a_1	a_2
s_1	s_1	s_2
s_2	s_2	s_1

	a_1	a_2
s_1	b_2	b_2
s_2	b_1	b_2

图 2

自动机的(迁移)图(diagram of (transitions of) an automaton)是一个有向图 G，其中图的顶点和 S 的元素一一对应．图的边和形如 (a,b)，$a\in A$，$b\in B$，的对的某一集合之间一一对应．G 的每个顶点至少是一个边的起点，同一起点的所有边上的赋值对的集合 $\mathfrak{N}$ 形如 $\mathfrak{N}=\{(a_1,b_{i_1}),\cdots,(a_m,b_{i_m})\}$．函数 φ 和 ψ 定义如下：$\varphi(s_i,a_j)=s_r$，$\psi(s_i,a_j)=b_p$，如果 (a_j,b_p) 是起点为 s_i 终点为 s_r 的边的赋值对．以图的语言陈述自动机的某些性质是方便的(自动机的连通性，状态的可达性，等等)．图 3 表示自动机 $\mathfrak{A}^0$ 的迁移图．

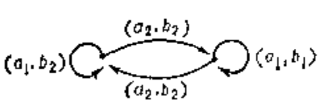


图 3

转移矩阵(transition matrix)用来描述迁移系统 $\langle A,S,\varphi\rangle$ 的功能(见**有限自动机**(automaton, finite))．它表示为 $(n\times n)$ 矩阵 $P=\|P_{ij}\|$，其元素是字母表 A 的子集(包含空集)，满足条件：$a\in P_{ij}$ 当且仅当 $\varphi(s_i,a)=s_j$．因此，对任何 $i=1,\cdots,n$，如果 $p\neq r$，则 $P_{ip}\cap P_{ir}=\varnothing$ 成立，且 $\bigcup_{j=1}^n P_{ij}=A$．为了扩充函数 φ 到集 $S\times A^*$(其中 A^* 是字母表 A 上所有字的集合，包括空字)，考虑矩阵 P 的乘方的序列．P 的自乘用通常的算法实现，但以集合的毗连(concatenation)运算与并运算代替乘与加运算．若 $\alpha\in A^*$ 是一个长 d 的字且 $\alpha\in P_{ij}^{(d)}$，其中 $P_{ij}^{(d)}$ 是矩阵 P^d 的一个元素，则有 $\varphi(s_i,\alpha)=s_j$．于是，迁移系统 $\langle A_0,S_0,\varphi_0\rangle$ 的转移矩阵 P 和矩阵 P^2 分别有形式：

$$P=\begin{Vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_1 \end{Vmatrix},$$

$$P^2=P\times P=\begin{Vmatrix} \{a_1a_1,a_2a_2\} & \{a_1a_2,a_2a_1\} \\ \{a_2a_1,a_1a_2\} & \{a_2a_2,a_1a_1\} \end{Vmatrix}.$$

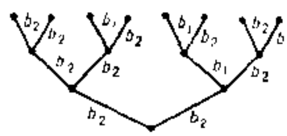


图 4.

若干极小化(化简)算法和自动机综合算法与自动机的这些描述方法有关．

为了描述一个初始(不必有限)自动机 $\mathfrak{A}_{s_1}$(变换器)的行为，人们必须定义函数 $f(\alpha)=\psi(s_1,\alpha)$，它映射 A^* 到 B^*(或 A^∞ 到 B^∞，其中 A^∞，B^∞ 分别是字母表 A 与 B 上所有超字的集合)．

这一函数可借助于**信息树**(information tree)来定义．信息树的每个顶点有 m 条边发出，它们与 A 的各个字母一一对应．每个顶点赋以自动机 $\mathfrak{A}_{s_1}$ 的一个状态，同时每条边赋以 B 的一个字母，方法如下．状态 s_1 赋予根．若状态 s_i 已经赋予某个顶点，则字母 $b=\psi(s_i,a)$ 赋予对应到 A 中字母 a 的边，同时在此边的终点赋予状态 $s_j=\varphi(s_i,a)$．对每个字 $\alpha=\alpha_1\cdots\alpha_r\in A^*$ 对应这个树的唯一边序列 $\rho=\rho_1\cdots\rho_r$ 使得 ρ_1 由根发出且 ρ_{i+1} 由 ρ_i 的终点发出．字 $\beta=\beta_1\cdots\beta_r$ 与 $\overline{\psi}(s_1,\alpha)$ 的值相同，其中 β_i 是 B 中赋予边 ρ_i 的字母，$i=1,\cdots,r$．如果函数 f 由一个有限自动机实现，对应的信息树可用一个有限子树能行地决定．图 4 表示初始自动机 $A_{s_1}^0$ 的子树(由顶点发出的左边对应符号 a_1，右边对应符号 a_2)．

一个有限自动机(接受器)在可表示事件(超事件)方面的行为可借助于正规表达式给出，见**正规事件**(regular event)．这种事件也可描述为由某些形式系统(半 Thue 文法，等等)产生(推演)出的字集合．这

时，半 Thue 系统由四元组 $T=\langle A, S, \xi, \omega\rangle$ 给出，其中 A, S 是有限字母表，$A\cap S=\emptyset$，ξ 是一个形如 s_0X 的公理模式(axiom scheme)，ω 是形如 $saX\to s'X$, $r\to r$ 的推演规则模式的集合，其中 s, s', $r\in S$, $a\in A$, X 是一个从 A^* 中取值的变元．进一步，如果 $saX\to s'X$ 和 $saX\to s''X$ 同属于 ω，则有 $s'=s''$．字 $\alpha\in A^*$ 称为系统 T 可推演的，如果存在一个字序列 $s_0\alpha=w_1,\cdots,w_n$ 使得 w_{i+1} 可由 w_i $(i=1,\cdots,n-1)$ 应用 ω 中某规则得到，其中 $w_n\in S$，且 ω 不含规则 $w_n\to w_n$．一个产生正规事件的文法具有类似的形式．它由四元组 $\Gamma=(A, S, s_1, \omega)$ 给出，其中 $s_1\in S$ 是一个公理，ω 是形如 $s_i\to as_j$ 或 $s_i\to a$ 的规则集．字 $\alpha=\alpha_1\cdots\alpha_n$ 是 Γ 可推演的，如果 ω 包含规则 $s_1\to\alpha_1s_{i_2}$, $s_{i_2}\to\alpha_2s_{i_3},\cdots,s_{i_n}\to\alpha_n$．已经知道由这类形式模式建立自动机的迁移矩阵的算法．因此，接受器 $\langle A_0, S_0, \varphi_0, s_1\rangle$ 的状态 s_2 表示的事件，譬如说，可定义为半 Thue 系统

$$\mathscr{T}=\langle A_0, S_0, \xi=\{s_1X\},$$
$$\omega=\{s_1a_2X\to s_2X;\ s_1a_1X\to s_1X;$$
$$s_2a_1X\to s_2X;\ s_2a_2X\to s_1X;\ s_1\to s_1\}\rangle$$

可推演的字集合．

还有其他几种方法描述自动机．例如，一个(必须有限的)迁移系统 $\langle A, S, \varphi\rangle$ 可以描述为一个代数 $\langle S, \Phi\rangle$，其中 $\Phi=\{\varphi_a : a\in A\}$ 是在 S 上满足 $\varphi_a(s)=\varphi(a,s)$ 的一元运算集．因此，迁移系统 $\langle A_0, S_0, \varphi_0\rangle$ 可以看作代数 $\langle S_0,\{\varphi_{a_1},\varphi_{a_2}\}\rangle$，其中 $\varphi_{a_1}(s_1)=s_1$, $\varphi_{a_1}(s_2)=s_2$, $\varphi_{a_2}(s_1)=s_2$, $\varphi_{a_2}(s_2)=s_1$．也可考虑代数 $\langle\widetilde{S}, \widetilde{\Phi}\rangle$，其中 $\widetilde{S}$ 是形如 $s\alpha$ 字的集合($s\in S,\alpha\in A^*$)，$\widetilde{\Phi}=\{\widetilde{\varphi}_a : a\in A\}$ 是在 $\widetilde{S}$ 上满足 $\widetilde{\varphi}_a(s\alpha)=s\alpha a$ 的一元运算的集合．代数 $\langle\widetilde{S}, \widetilde{\Phi}\rangle$ 由 S 生成元系和定义关系集 $\omega=\{s_i\alpha_i=s_i'\alpha_i' : i=1, 2, \cdots\}$ 定义．这样的一个代数描述一个(通常是部分的)自动机 $\langle A, S, \varphi\rangle$，满足条件，若 $s_i\alpha_i=s_i'\alpha_i'$ 是一个 ω 中关系，则关系 $\varphi(s_i,\alpha_i)=\varphi(s_i',\alpha_i')$ 为真．例如，迁移系统 $\langle A_0, S_0, \varphi_0\rangle$ 可由一个 S_0 生成元系和定义关系集 $\omega=\{s_1=s_1a_1, s_1=s_2a_2, s_2=s_1a_1, s_2=s_2a_1\}$ 描述．假定 $\varphi(s_1, \Lambda)=s_1$, $\varphi(s_2,\Lambda)=s_2$．

自动机的行为可由一目谓词逻辑的语言描述．定义有限自动机的公式类的选择可用各种方法完成．描述可能不完全，因为选择的公式类定义一类自动机，它们的行为在此描述的精确度内是恒同的．例如，"调查表"方法涉及到借助于信息树的片断描述自动机类，函数 φ 和 ψ 的部分定义，等等．

上面描述自动机的方法经适当修改后也可应用于某些广义有限自动机(非决定的，无限的，等等；见**自动机(automaton)**)的行为．因此，一个非决定有限自动机的表 T_φ 的元素可由集 S 的任意子集组成．和决定接受器一样，一个非决定有限接受器的行为可用一个正规表达式描述．有限自动机的其他推广是有限**概率自动机(automaton, probabilistic)**，项上自动机，镶嵌结构，等等．

已知字母表 $A=\{a_1,\cdots,a_m\}$, $B=\{b_1,\cdots,b_k\}$ 和 $S=\{s_1,\cdots,s_n\}$ 的概率自动机 $\langle A,S,B,\mu\rangle$ 的描述意味着对任意给定的 i 和 $j(1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant m)$ 指定一个在所有对 (s_r, b_q) $(r=1,\cdots,n,\ q=1,\cdots,k)$ 的集合上的条件概率测度 $\mu_{ij}(s_r,b_q)$．为此，人们通常考虑非负元素的方阵系

$$M^{q,j}=\|\mu_{i,r}^{q,j}\|,$$
$$i,r=1,\ldots,n;\ j=1,\ldots,m;\ q=1,\ldots,k,$$

满足条件：每个矩阵 $M^j=\sum_{q=1}^{k}M^{q,j}$ 都是随机的．测度 μ 由关系 $\mu_{ij}(s_r,b_q)=\mu_{i,r}^{q,j}$ 定义．概率自动机 $\langle A, S, B, \mu\rangle$ 被考虑具有集合 S 上的某个初始概率分布：

$$\mu_0=(\mu_0(s_1),\ldots,\mu_0(s_n)),\ \mu_0(s_i)\geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{n}\mu_0(s_i)=1.$$

有时概率自动机的定义只指定矩阵 M^j 或矩阵 $\overline{M}^j=\|\mu_{i,q}^j\|$，其中

$$\mu_{i,q}^j=\sum_{r=1}^{n}\mu_{i,r}^{q,j},$$

$i=1,\cdots,n$; $q=1,\cdots,k$; $j=1,\cdots,m$．任意有限 **Марков 链(Markov chain)** 可看作一个有限概率自动机，其矩阵 $M^j(j=1,\cdots,m)$ 是相同的．下面给出的矩阵系定义了某个概率自动机 $\mathfrak{A}$ $(n=2, k=2, m=2)$ 以及此自动机的矩阵 M^1, M^2, $\overline{M}^1$, $\overline{M}^2$：

$$M^{1,1}=\left\|\begin{matrix}\frac{1}{4} & 0\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{matrix}\right\|,\quad M^{1,2}=\left\|\begin{matrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{matrix}\right\|,$$

$$M^{2,1}=\left\|\begin{matrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{matrix}\right\|,\quad M^{2,2}=\left\|\begin{matrix}0 & 0\\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5}\end{matrix}\right\|,$$

$$M^1=\left\|\begin{matrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{matrix}\right\|,\quad M^2=\left\|\begin{matrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5}\end{matrix}\right\|,$$

$$\overline{M}^1=\left\|\begin{matrix}\frac{1}{4} & \frac{3}{4}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{matrix}\right\|,\quad \overline{M}^2=\left\|\begin{matrix}1 & 0\\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5}\end{matrix}\right\|$$

字母表 $A=\{a_1,\cdots,a_m\}$ 和 $S=\{s_1,\cdots,s_n\}$ 已知时，为了定义一个项上有限自动机 $\langle A, S, \sigma, \alpha_a\rangle$，人们必须首先确定一个集 A 到非负整数有限集的映射 σ，使得至少存在

一个元素$a\in A$满足$\sigma(a)=0$，其次对每个$a_i\in A\,(i=1,\cdots,m)$必须定义一个映射集$[S]^{\sigma_{a_i}}=S\times\cdots\times S$到$S$的$\sigma(a_i)$元函数$\alpha_{a_i}$. 对每个满足$\sigma(a)=0$的元素$a\in A$都对应一个元素$\alpha_a\in S$，称之为自动机的初始状态. 例如，如果$A=\{a_1,a_2\}$，$S=\{s_1,s_2\}$，$\sigma(a_1)=0$，$\sigma(a_2)=2$，$\alpha_{a_1}=s_1$，$a_{a_2}(s_1,s_1)=s_2$，$\alpha_{a_2}(s_1,s_2)=s_1$，$\alpha_{a_2}(s_2,s_1)=s_2$，$\alpha_{a_2}(s_2,s_2)=s_2$，则函数$\sigma,\alpha_{a_1},\alpha_{a_2}$定义某个具有初始状态$s_1$的项上自动机$\langle A,S,\sigma,\{\alpha_{a_1},\alpha_{a_2}\}\rangle$.

为了描述一个镶嵌结构(形如$\langle A,S,\varphi\rangle$的迁移系统的一个无限并集，其中$A=S^r$(见**自动机** (automaton))，人们必须对每个n维空间的整点定义整点的一个有序集；此集称为它的邻域. 安置在一个给定点上的迁移系统$\langle A,S,\varphi\rangle$的输入字母表$A$是安置在该点的邻域的点上的迁移系统的状态集的 Deseartes 积. 例如，设$S=\{s_1,s_2\}$，设二维空间的一个整点(α,β)的邻域$D_{\alpha,\beta}$是有序集$\{(\alpha-1,\beta),(\alpha,\beta+1),(\alpha+1,\beta)\}$. 为了描述一个一致的二维镶嵌结构，函数$\varphi$定义如下：$\varphi(s_1,s_1,s_1)=s_1$；所有其他情形$\varphi(s',s'',s''')=s_2$. 在此输入字母表$A$为 Deseartes 积$S\times S\times S$.

微观方法. 一个结构自动机的微观方法定义描述它的组成元件和它的结合图式. 描述可以是详细的或笼统的. 通常限于自动机构造的所谓**典范图式** (canonical scheme). 此时元件分成两类：**功能元件** (functional elements) (单状态自动机) 和**存储元件** (memory elements). 典范图式(图 5)由两个功能部件f和g连同作为存储元件的 Moore 自动机$\mathfrak{A}_i=\langle R_i,S_i,Q_i,\varphi_i,\psi_i\rangle(i=1,\cdots,l)$所组成. 部件$f$和$g$由功能元件组成. 当用这种方式定义结构时，这些部件不再进一步描述，而只给出这些部分实现的向量函数(比如用表)：

$$f=(f_1(x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_l),\ldots,\ldots,f_l(x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_l)):$$
$$A^n\times Q_1\times\cdots\times Q_l\to R_1\times\cdots\times R_l;$$
$$g=(g_1(x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_l),\ldots,\ldots,g_l(x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_l)):$$
$$A^n\times Q_1\times\cdots\times Q_l\to B^m,$$

其中A^n和B^m分别是典范图式的输入和输出字母表.

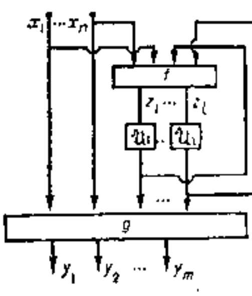


图 5

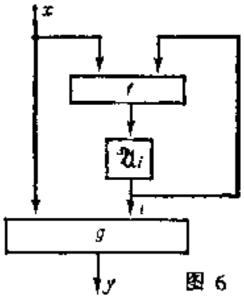


图 6

这个图式描述结构自动机$\langle A^n,S,B^m,\varphi,\psi\rangle$，其中$S=S_1\times\cdots\times S_l$，函数$\varphi$和$\psi$定义如下：

$$\varphi((s_1,\ldots,s_l),(a_1,\ldots,a_n))=(s_1',\ldots,s_n'),$$
$$s_i'=\varphi_i(s_i,f_i(a_1,\ldots,a_n,\psi_1(s_1),\ldots,\psi_l(s_l)));$$
$$\psi((s_1,\ldots,s_l),(a_1,\ldots,a_n))=(b_1,\ldots,b_m),$$
$$b_j=g_j(a_1,\ldots,a_n,\psi_1(s_1),\ldots,\psi_l(s_l)).$$

结构自动机的一个重要例子是逻辑网络，见**有限自动机** (automaton, finite). 图 6 表示同构于自动机$\mathfrak{A}^0$(其迁移图见图 3)的一个自动机$\langle\widetilde{A},\widetilde{S},\widetilde{B},\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi}\rangle$的典范图式，$\widetilde{A}=\widetilde{S}=\widetilde{B}=\{0,1\}$. 自动机$\mathfrak{A}'=\langle\widetilde{S},\widetilde{S},\widetilde{S},\varphi,\psi'\rangle$是一个Moore 自动机，其中$\varphi'(1,z)=z$，$\varphi'(0,z)=z$.

结构自动机常常用**典范方程** (canonical equations) 描述，即下述形式方程组：

$$u_1(1)=s_0,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$u_l(1)=s_0,$$
$$u_1(t+1)=f_1(u_1(t),\ldots,u_l(t),x_1(t),\ldots,x_n(t)),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$u_l(t+1)=f_l(u_1(t),\ldots,u_l(t),x_1(t),\ldots,x_n(t)),$$
$$y_1(t)=g_1(u_1(t),\ldots,u_l(t),x_1(t),\ldots,x_n(t)),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$y_m(t)=g_m(u_1(t),\ldots,u_l(t),x_1(t),\ldots,x_n(t)),$$

其中$t=1,2,\cdots$，它是一个整数参数，$s_0\in S$，且函数$f_i\,(i=1,\cdots,l)$，$g_i\,(i=1,\cdots,m)$，和变元$x_r\,(r=1,\cdots,n)$从集A中取值. 这个系统所对应的典范图式的所有存储元件是相同的：$\mathfrak{A}_i=\langle A,S,B,\varphi,\psi,s_0\rangle$，其中$A=S=B\,(i=1,\cdots,l)$；$\varphi(a,a')=a'$，$\psi(a,a')=a$. 自动机$\mathfrak{A}_i$的功能实质上可描述如下. 在时刻$t$假定字母$a(t)$赋予$\mathfrak{A}_i$的输入，则在时刻$t+1$时$\mathfrak{A}_i$的输出产生相同的字母. 图 6 表示一个自动机$\mathfrak{A}$，其典范方程形如

$$u(1)=0,$$
$$u(t+1)=x(t)+u(t)\ (\mathrm{mod}\,2),$$
$$y(t)=x(t)\vee u(t).$$

在一般情形下，结构自动机的描述涉及到元件自动机及某类"合理的结构"图式(网络)的选择问题，后者通常归纳地定义.

参考文献

[1] Shannon, C. and MacCarthy, J (eds.), Automata studies, Princeton Univ.Press, 1956 (中译本：C. E. 申南、J. 麦克卡赛编，自动机研究，科学出版社，1963).

[2] Глушков, В. М., Синтез цифровых автоматов, М.,

1962. B. A. Буевич, С. В. Алешин 撰

【补注】 见条目**自动机的等价**(automata, equivalence of)的补注.

陈世华 译 陶仁骥 校

自动机的极小化 [automata, minimization of; автоматов минимизация]

自动机参数的极小化,导致等价的且在一定意义下最优的自动机.自动机的极小化问题在自动机综合过程中出现,其特点依赖于研究中采用的方法.

如果采用宏观方法,通常是极小化自动机的状态数,以得到极小(minimal)或归约自动机(reduced automata).寻找归约自动机的实际方法依赖于它们的定义形式和行为类型.例如,如果一个用迁移图定义的有限自动机(automaton, finite)的行为理解为由该自动机实现的有限决定函数(finitely-determined function)组,则等价于原来自动机的极小有限自动机可能行地求出.它基于 Moore 定理(Moore theorem).按照此定理,可用长 $n-1$ 的试验决定一个 n 状态自动机的两个状态是否是可分的.极小化算法是要用同样的方法构造一个自动机,其状态对应原来自动机的不可分状态类,而迁移和输出函数借助于这些类的代表元来定义.极小自动机在状态同构的意义下是唯一的.如果把有限自动机看作接受器,它借助于指定的状态子集表示一个用正规表达式描述的事件,则极小自动机可能行地构造出,且它的构造算法可以划分为两个阶段.在第一阶段,原始的正规表达式用来构造表示对应正规事件的某个自动机,不必需要极小.这样的一个自动机,比如说,可以由正规表示式包含的并 $\cup$、毗连 $\circ$ 与迭代 $*$ 等运算归纳地构造出.分别表示事件 R_1, R_2 和 R_3 的自动机 $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ 和 $\mathfrak{A}_3$ 用于产生表示事件 $R_1 \cup R_2$, $R_1 \circ R_2$ 和 R_3^* 的自动机 $\mathfrak{A}_4$、$\mathfrak{A}_5$ 和 $\mathfrak{A}_6$ 的特定构造.此外,$\mathfrak{A}_4$ 的状态数不超过 $\mathfrak{A}_1$ 和 $\mathfrak{A}_2$ 的状态数的乘积;$\mathfrak{A}_5$ 的状态数一般不超过 $\mathfrak{A}_1$ 的状态数同 $\mathfrak{A}_2$ 的状态集的所有子集个数的乘积;$\mathfrak{A}_6$ 的状态数不超过 $\mathfrak{A}_3$ 的状态集的子集个数.在算法的第二阶段所得自动机的状态数可用通常的方法极小化,原来自动机的终结状态的不可分类对应到极小自动机的终结状态.表示一个给定超事件的极小自动机可用同样的方式构造.在状态同构的意义下,唯一存在一个极小自动机表示给定的事件和超事件.

对非决定有限自动机,以及决定和非决定无限自动机,在状态同构的意义下也都唯一存在归约自动机.在前一情形下,这一自动机可用一种类似于上面讨论的有限自动机情形的方法作出,而在第二种情形下它的构造通常是非能行的.对于一个有限状态的随机自动机,一般说来,存在各种归约自动机的连续统等价于原来的自动机.由此推出,不存在描述给定随机自动机的归约自动机集的能行方法.

用微观方法研究有限自动机时,为构造给定的自动机,从逻辑网络的某个有限基开始.给定一个自动机 $\mathfrak{A}$,比如说用典范方程定义,要求作出一个逻辑网络 S,它由基 $\mathfrak{B}$ 中元件经叠加和反馈运算构造出,实现 $\mathfrak{A}$ 且包含的 $\mathfrak{B}$ 中元件数是这个自动机所必要的最小数 $L(\mathfrak{A})$.在这种意义下,网络 S 是自动机 $\mathfrak{A}$ 的最优图式.在一般情况下,用 $\mathfrak{B}$ 上网络实现任一个自动机 $\mathfrak{A}$ 的问题是不可解的,因此自动机 $\mathfrak{A}$ 的复杂度函数 $L(\mathfrak{A})$ 是不可计算的.如果已知 $\mathfrak{A}$ 的基是完全的(见**自动机的完全系**(automata, complete systems of)),则对 $\mathfrak{A}$ 的任何最优网络的构造可能行地实现,例如下述方法.众所周知,一个自动机 $\mathfrak{A}$ 由给定的网络 S 实现可能行地检验.此外,对给定的数 l,在基 $\mathfrak{B}$ 上复杂度至多为 l 的网络数是可计算的,且所有这些网络可能行地构造.因此,顺序地检查复杂度 $1,\cdots,L(\mathfrak{A})$ 的所有网络对自动机 $\mathfrak{A}$ 的可实现性,可以用作构造给定自动机 $\mathfrak{A}$ 的所有最优网络的算法.函数 $L(\mathfrak{A})$ 的行为问题和它的推广中的某些问题是自动机综合的一般问题的一部分.关于自动机极小图式的综合,存在几种启发式算法,基于基的特殊性质和最优概念的具体内容.参考文献见**有限自动机**(automaton, finite).

B. A. Буевич 撰 陈世华 译 陶仁骥 校

自动机理论 [automata, theory of; автоматов теория]

控制系统理论的一个分支,研究通称为自动机的离散信息变换器的数学模型.在一定意义下,这种变换器可以是真实机构(计算机,自动机,生物体,等等),也可为抽象系统(数学机器,公理理论,等等).自动机理论形成于二十世纪中叶,由于研究作为神经系统和电子计算机的数学模型的**有限自动机**(automaton, finite).随后,自动机理论处理的对象种类和问题范围有本质上的扩大,包括了其他数学分支的某些概念和问题.自动机理论与**算法论**(algorithms, theory of)特别是抽象机器理论密切相关,因为自动机可看作这种机器的特别情形.

自动机理论的大部分研究问题和控制系统的其他主要类型是类似的.它们包括自动机的分析和综合问题,完全性问题,极小化问题,自动机的等价变换问题,等等.分析问题包括由给定的自动机描述它的行为,或从给定的关于自动机和它的功能的不完全数据决定它的某些性质,见**自动机的行为**(automaton, behaviour of an),**自动机的试验**(automata, experiments with).自动机的综合问题包括具有预先给定的行为或功能的自动机的构造,见**综合问题**(synthesis problems).相关的问题涉及到具有给定行为的自动机的复杂性估计,以及在某种意义下最优的自动机的构造,见

自动机的极小化 (automata, minimization of). 此外,联系到初始自动机或自动机映射类,出现完备性问题,见**函数系** (functional system),**自动机的完全系** (automata, complete system of). 等价变换问题对自动机和对与他们的行为有关的各种问题中都可提出,见**等价变换**(equivalent transformations). 除了对许多控制系统是共同的上述类型的问题外,还有一些自动机特有的问题. 因此,依赖于问题的情况,自动机的行为可以用各种语言(正规表达式,典范方程,逻辑谓词语言,等等)方便地给出,见**自动机的描述方法**(automata, methods of specification of),与此相关的重要问题是选择足够方便的适当的语言,以及从一种语言翻译到另一种语言. 与综合和等价变换问题密切相关的其他问题是一个自动机状态数的极小化问题和求出相应的估值的问题. 对有限自动机已发展了相当简单的算法,从而可以借助于正规表达式得到具有最小的可能状态数并表示对应事件的自动机,见**自动机的极小化** (automata, minimization of). 有关的一类问题涉及到在一类自动机上模拟另一类自动机的行为. 模拟自动机的极小化和它们的复杂性的估计也是有兴趣的问题. 例如,从一个表示(产生)字的正规集的非决定自动机(源)转换到一个表示同样集合的有限自动机,其状态数可能指数地增加. 自动机理论的一个特别的部分是所谓的**自动机的试验** (automata, experiments with). 这里,主要的问题是通过观察对某些外部作用的反应得到有关自动机结构的某些信息. 这时出现很大一类问题,涉及到试验分类,用某类试验的问题求解,和估计足以解决给定问题的最短试验. 自动机试验的概念也用于与自动机有关的控制问题中,见**控制系统的可靠性和检查**(reliability and inspection of control systems). 相互作用或与外部环境作用,在处理自动机博奕和**自动机的行为** (automaton, behaviour of an) 部分中处理. 上述问题,有许多可看作是大量(算法)问题. 对有限自动机来说他们中的大部分都有肯定解.

自动机理论在数学的其他分支和在解决实际问题中都找到了应用. 例如,它可用于证明某些形式演算的可解性. 应用自动机理论的方法和概念到形式语言和自然语言的研究导致产生算法论的一个分支:**数理语言学**(mathematical linguistics). 在各种各样的问题中自动机概念可作为对象的模型,因而有可能应用自动机理论于各种科学的和实用的研究中.

参考文献

[1] Shannon, C. and MacCarthy, J. (eds.), Automata studies, Princeton Univ. Press, 1956 (中译本: C.E.申南, J.麦克卡赛编,自动机研究,科学出版社,1963).

[2] Глушков, В. М., Синтез цифровых автоматов, М., 1962.

[3] Трахтенброт, Б. А., Барздинь, Я. М., Конечные автоматы, поведение и синтез, М., 1970 (英译本: Trakhtenbrot, B. A. and Barzdin, Ya. M., Finite automata, behaviour and synthesis, North-Holland, 1973).

В. Б. Кудрявцев, Ю. И. Янов 撰

【补注】 此条目仅涉及此理论的一些方面. 也应参阅条目**形式语言**(formal languages)、**L系统** (L-systems) 和**复杂性理论**(complexity theory).

陈世华 译 陶仁骥 校

自动控制理论 [**automatic control theory**; **автоматического управления теория**]

关于确定系统控制规律的方法的学科, 这种控制规律可以用自动装置实现. 历史上, 这种方法最初是用于具有技术性质的过程(见[1]). 例如, 飞行中的飞机是一个系统, 其控制规律将保证它在要求的轨道上飞行. 控制规律是通过一组传感器(测量装置)和执行器实现的, 这就是通常所说的自动驾驶仪. 这一发展的完成可归结为三个原因:很多控制系统已经可由经典科学来表述(表述一个控制系统意味着可以写下它的数学模型, 像下面的(1)及(2)所示的关系式);远在自动控制理论发展以前, 由于对自然界基本规律的认识已有了像微分方程特别是关于运动稳定性理论(见[2])这样发展完善的数学工具; 工程师们已经发现了反馈规律概念, 并找到了实现它的手段.

最简单的控制系统可以由一个常(向量)微分方程

$$\dot{x} = f(x, u, t) \tag{1}$$

和一个不等式

$$N(x, u, t) \geqslant 0 \tag{2}$$

来描述,这里 $x\{x_1,\cdots,x_n\}$ 是系统的状态向量, $u\{u_1,\cdots,u_r\}$ 是可以适当选取的控制向量, t 为时间. 方程(1)是控制系统所服从的规律的数学表达式, 而不等式(2)则刻画出它的定义域.

令 U 为某给定的函数 $u(t)$ 类(如分段连续函数), 其数值满足(2). 任何 $u(t)\in U$ 都称为容许控制 (permissible control). 方程(1)称为控制系统的数学模型(mathematical model of the control system), 如果:

1) 函数 $f(x, u, t)$ 的定义域 $N(x,u,t)\geqslant 0$ 已经给出;

2) 运动 $x(t)$ 能被观测的时间区间 $\mathscr{T}=[t_i, t_f]$ (或 $[t_i, t_f)$, 若 $t_f=\infty$) 已经给出;

3) 容许控制类已经给出;

4) 区域 $N\geqslant 0$ 和函数 $f(x, u, t)$ 是这样的, 使得方程(1)对于任何 $t\in\mathscr{T}$, $x_0\in N$ 具有唯一解, 而不管容许控制 $u(t)$ 是怎样的. 此外, (1)中的 $f(x,u,t)$ 常假定是

对所有自变量光滑的.

设 $x_i=x(t_i)$ 及 $x_f=x(t_f)$ 分别是控制系统的初始状态及终止状态. 状态 x_f 也称为控制的目标(target of the control). 自动控制理论必须解决两个主要问题: 程序设计问题, 即寻求控制 $u(t)$, 使得能从 x_i 到达目标; 确定反馈规律问题. 若系统(1)完全可控, 则上述两个问题可解. 系统(1)称为完全可控的(completely controllable), 若对任意 x_i 及 $x_f \in N$, 至少存在一个容许控制 $u(t)$ 和一个间隔 $\mathscr{T}$, 使得控制目标是可以达到的. 如果这一条件不成立, 则系统称为不完全可控的(incompletely controllable). 这就产生了以下基本问题: 给出数学模型(1), 寻求可控性的判据. 到1977年时, 此问题的解决取得的成果不大. 若方程(1)是线性的

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{3}$$

其中 A, B 为定常矩阵, 完全可控性判据可表述如下: (3)完全可控的充分必要条件为矩阵

$$Q = \| B\ AB \cdots A^{n-1}B \| \tag{4}$$

的秩等于 n. 矩阵(4)称为可控性矩阵(controllability matrix).

若 A, B 是已知的时间 t 的可微函数, 则可控性矩阵为

$$Q = \| L_1(t) \cdots L_n(t) \|, \tag{5}$$

其中

$$L_1(t) = B(t),\ L_k(t) = A(t)L_{k-1} - \frac{dL_{k-1}}{dt},$$
$$k=2, \ldots, n.$$

在这种情况下有定理: 系统(3)是完全可控的充分条件是, 至少存在一个点 $t^* \in \mathscr{T}$ 使矩阵(5)的秩等于 n (见[3]). 非线性控制系统的可控性判据尚不知道(直到1977年).

自动控制理论的第一个主要任务是选择容许控制以保证目标 x_f 可以到达. 有两种方法可以解决这一问题. 在第一种方法中, 系统(1)的主要设计者任意地确定某种运动使 x_f 是可以到达的, 并选择相应的控制. 这种程序设计问题的解法是在很多场合常被应用的. 在第二种方法中, 要寻求一个使给定的控制的费用极小的容许控制. 问题的数学提法如下. 给出: 被控系统的数学模型(1)及(2); 向量 x 的边界条件, 常可形式

$$(i, f) = 0; \tag{6}$$

光滑函数 $G(x, t)$; 以及要用到的控制的费用

$$\Delta G = G(x, t)\Big|_i^f \tag{7}$$

程序设计问题(programming problem)是在所有容许控制中, 寻求满足条件(6)并使泛函(7)取极小值的控制. 这个非经典的变分问题有极小解的必要条件是由Л С Понтрягин 的"极大值原理"(见[4])给出的(见**Понтрягин 极大值原理**(Pontryagin maximum principle)). 考虑辅助向量 $\psi\{\psi_1, \cdots, \psi_n\}$ 和辅助标量函数

$$H(\psi, x, u, t) = \psi f(x, u, t) \tag{8}$$

函数 H 使得能将方程(1)和向量 ψ 的方程写作如下形式:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \psi},\ \dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x}. \tag{9}$$

方程(9)对 ψ 是线性齐次的, 且有唯一的连续解, 对于任意初始条件 $\psi(t_i)$ 和 $t \in \mathscr{T}$ 有定义. 向量 ψ 称为非零向量, 如果它至少有一个分量对于 $t \in \mathscr{T}$ 不为零. 以下定理成立: 为了使曲线 x^0, u^0 构成泛函(7)的一个强极小, 必然存在一个由(9)定义的非零连续向量 ψ, 使得在其上函数 $H(\psi, x, u, t)$ 对 u 具有(逐点的)极大值, 而且横截条件(transversality condition)

$$\left[\delta G - H\delta t + \sum \psi_\alpha \delta x_\alpha\right]_i^f = 0$$

成立. 令 $x^0(t, x_i, x_f)$ 及 $u^0(t, x_i, x_f)$ 表示相应问题的解. 已经证明, 对于定常系统函数 $H(\psi^0, x^0, u^0)$ 满足条件

$$H(\psi^0, x^0, u^0) = C, \tag{10}$$

这里 C 是一常数, 这样(10)就是一首次积分. 解 u^0, x^0 称为程序控制(program control).

设 u^0, x^0 为某个(不一定最优)程序控制. 已经确知, 仅仅知道一个程序控制不足以保证到达目标. 这是因为, 程序控制 u^0, x^0 对于问题中无论多么小的变化, 特别是对于最重要的初始及终止值 (i, f) 的变化, 常常是不稳定的. 换句话说, 问题是不适定的. 但不适定性是可以通过仅以"反馈原理"为基础的自动稳定的手段来纠正. 这正是控制的第二个主要任务: 反馈规律的确定.

设 y 为系统的一个被扰运动的向量, 而 ξ 为描述用于消除被扰运动的控制装置的附加偏移的向量. 为了实现偏移 ξ, 必须预告提供适当的控制能源. 被扰运动由方程

$$\dot{y} = Ay + B\xi + \varphi(y, \xi, t) + f''(t) \tag{11}$$

描述, 其中 A 和 B 是由运动 u^0, x^0 所确定的已知矩阵, 并假定都是时间的已知函数; φ 是函数 $f(x, u, t)$ 展开式中的非线性部分; $f^0(t)$ 是不断作用的摄动力, 它的产生或者是由于程序控制运动确定时的误差, 或者由

下建立模型(1)时被忽略掉的附加力．方程(11)定义在邻域 $\|y\|\leqslant\bar{H}$ 上，其中 $\bar{H}$ 通常甚小，但在某些情况下可以是任意有限正数，或甚至是 ∞．

应注意，一般来说系统(1)完全可控并不保证系统(11)也完全可控．

系统(11)称为沿着坐标 $(y_1,\cdots,y_r,r\leqslant n)$ 可观测的(observable)，如果可利用一组测量仪器，在任意时刻 $t\in\mathscr{T}$ 连续地测量出这些坐标．考虑飞机的纵向运动就能说明本定义的意义．虽然航空已有 50 年以上的历史，一个能够量出机翼攻角扰动或接近地面时飞行高度的仪表迄今尚未发明出来．可测量坐标的全体称为调节域(field of regulation)，并记为 $P(y_1,\cdots,y_r)(r\leqslant n)$．

考虑定义于区域 P 上的全体容许控制 ξ:

$$\xi=\xi(y_1,\ldots,y_r,t,p),\quad r\leqslant n,\tag{12}$$

其中 p 是向量或矩阵参数．控制(12)表示一个反馈规律(feedback law)，如果闭合运算(即将(12)代入(11))产生的系统

$$\dot{y}=Ay+B\xi(y_1,\ldots,y_r,t,p)+\tag{13}$$
$$+\varphi(y,\xi(y_1,\ldots,y_r,t,p),t)$$

的未被扰运动 $y=0$ 是渐近稳定的(见**渐近稳定解**(asymptotically-stable solution))．系统(13)称为渐近稳定的(asymptotically stable)，如果其未被扰运动 $y=0$ 是渐近稳定的．

有两类问题可相对于闭系统(13)被表述：分析类的问题和综合类的问题．

考虑精确到参数选择的容许控制(12)，如

$$\xi=\left\|\begin{matrix}p_{11} & \cdots & p_{1r}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ p_{r1} & \cdots & p_{rr}\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}y_1\\ \cdot\\ \cdot\\ y_r\end{matrix}\right\|$$

分析问题(analysis problem)：确定参数 p 的值域 S，使得对于它闭系统(13)是渐近稳定的．这个值域是用在运动稳定性理论中发展起来的方法构造的(见**稳定性理论**(stability theory))，这种方法在自动控制理论中得到广泛应用．特别地，可以指出频域分析方法；**Ляпунов 稳定性理论**(Lyapunov stability theory)，第一近似方法(Hurwitz 定理，Routh 定理等)，直接构造 v 函数的 Ляпунов 方法，构造周期解的 Ляпунов-Poincaré 理论，调和平衡法，Б. В. Булгаков 法，А. А. Андронов 法，以及面与面之间的点变换理论(见[5])．最后一组方法不仅能用来在 P 空间构造区域 S，还能分析描述系统(13)的自振运动的方程(13)的稳定周期解的参数．所有这些方法在自动控制的实践中已被广泛采用，并且被列入高等学校各种专业的学习课程(见[5])．

如果 S 是非空的，控制(12)就称为一个反馈规律或者调节规律(regulation law)．它由一组测量仪器，放大器，转换器和执行机构来实现，这就是常称的调节器(regulator)．

另一个实际上相当重要的、与分析问题密切联系的问题，是怎样构造吸引域的边界(boundary of the domain of attraction)(见[6]，[7])．考虑系统(13)，其中 $p\in S$．包含点 $y=0$ 在内的值 $y(t_0)=y_0$ 的集合，可以保证闭系统(13)保持渐近稳定性质时，常称为平凡解($y=0$)的吸引域(domain of attraction)．问题在于确定给定闭系统(13)和一个点 $p\in S$ 时吸引域的边界．

现代科学著作都没有构造吸引域边界的有效方法，例外的仅是在一些罕见情况下可以构造闭系统的不稳定周期解．但是，也存在一些方法，可以用来构造一个 y_0 值的集合的边界，它完全处于吸引域的内部．这些方法在大多数情况下所依据的都是在相空间中估算一个区域，在其中 Ляпунов 函数(Lyapunov-function)满足条件 $v\geqslant 0$，$\dot{v}\leqslant 0$(见[7])．

闭系统(13)的任何解 $y(t,y_0,p)$ 代表一个所谓的转移过程(transition process)．在大多数有实际意义的情况中，仅仅解决一个稳定性问题是不够的．进一步的发展计划应包括一些有重要实际意义的补充条件，它要求转移过程具有某些附加的特征．这些要求的性质，以及这些附加的特征，与被控对象的物理性质是密切相关的．在分析问题中，常常可以通过适当选择参数 p，使转移过程保持需要的性质，例如预先设定的调节时间 t^*．选择参数 p 的问题，被称为调节品质(quality of regulation)问题(见[5])，而解决这个问题的方法又与某种构造解 $y(t,y_0,p)$ 的估值有关：或者对方程(13)进行实际的积分，或者借助于模拟或数字计算机对解作实验估算．

转移过程的分析问题在 $f^0(t)$ 是随机函数的所有情况中有很多其他的提法，例如在伺服系统中就如此(见[5]，[8])．其他提法与矩阵 A，B 甚至函数 φ 的随机变化的可能性有关(见[5]，[8])．这样就提出要研究随机过程方法，机器的适应和学习方法等问题(见[9])．具有滞后机构和分布参数的系统(见[10]，[11])，以及具有变结构的系统(见[12])中的转移过程也都已有研究．

综合问题(synthesis problem)：给定方程(11)，调节区域 $P(y_1,\cdots,y_r)(r\leqslant n)$，和容许控制集 $\xi(y_1,\cdots,y_r,t)$，要寻求全体反馈规律集合(见[13])．这个问题的最重要的变形之一是所谓的最小域结构(structure of minimal field)问题．一个域 $P(y_1,\cdots,y_r)(r\leqslant n)$ 称为最小域(minimal field)，若它至少包含一个反馈规

律，且该域的维数 r 是最小的．问题是对某给定的方程(11)和容许控制集，要确定所有最小域的结构 $P(y_{\alpha_1},\cdots,y_{\alpha_r})$．下例可说明问题的性质：

$$\dot{z} = Az + Bu,$$

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & m & 0 & 0 \\ -m & & 0 & 0 & n \\ 0 & & 0 & 0 & k \\ 0 & -n & k & 0 \end{Vmatrix},\quad B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix},\quad u = \begin{Vmatrix} u_2 \\ u_4 \end{Vmatrix},$$

其中 m，n，k 是给定的数．容许控制是分段连续函数集 u_2，u_4；它们从下域中取值：

$$|u_2| \leqslant \bar{u}_2,\quad |u_4| \leqslant \bar{u}_4.$$

此问题的最小域或者是域 $P(z_2)$ 或者是 $P(z_4)$．每个域维数均为 1 且不能再减小(见[13])．

迄今(1977)只知道一个方法可以综合出反馈规律[13]，该方法基于应用 Ляпунов 函数（见[13]）．一个有关的定理是属于 Барбашин - Красовский 的(见[6]，[10]，[15])：闭系统

$$\dot{y} = \varphi(y) \tag{14}$$

的未被扰运动 $y=0$ 是渐近稳定的，其充分条件是存在一个正定函数 $v(y)$，使得其按(14)的全导数(即使得 $v(y)$ 沿(14)定义的解对时间 t 的导数)是一半负定函数 $w(y)$，还使得在流形 $w(y)=0$ 上，除 $y=0$ 外没有系统(14)的整轨道，关于最小域的存在与结构的寻求问题具有重要的实际意义，因为正是这些域确定着主要设计师对子控制系统的最小重量、尺寸、复杂性、价格以及最大可靠性的可能要求．这个问题对于在工程、生物、医学、经济和社会中遇到的无限维系统具有特殊的理论与实际意义．

在控制系统的设计中，不幸的是我们不能仅限于解决一个反馈规律的综合问题．在大多数情况下主设计师的一些要求在于，保证闭系统中的转移过程满足某些特定的重要性质．这些要求的重要性在监控原子反应堆的例子中显而易见．此时如果转移过程超过 5 秒钟，或者某些坐标的最大偏离超过给定值，就要发生原子爆炸．因此，就产生了一类基于集合 M 新的调节规律的综合问题．下面给出这些问题之一的提法．考虑两个球 $\|y_0\|=R$，$y_0=y_t$，$\|y(t_1)\|=\varepsilon$；$R \gg \varepsilon$ 为给定的数值．现在考虑所有反馈规律的集合 M．利用其中任意一个反馈规律作闭合运算，得出方程

$$\dot{y} = Ay + B\xi(y_1,\ldots,y_r,t) + \varphi(y,\xi(y_1,\ldots,y_r,t),t). \tag{15}$$

考虑方程(15)的所有从球 R 上出发的解的全体，并称之为 R 解(R - solutions)．因为对于球上任一 y_0，系统都是渐近稳定的，所以存在一个时刻 t_1，使得条件

$$\|y(t_1,y_0)\| = \varepsilon,\quad \|y(t,y_0)\| < \varepsilon,$$

对任意 $t > t_1$ 都成立．

令

$$t^* = \sup_{y_0} t_1.$$

从 t_1 的定义，很明显 t^* 是存在的．如果当 $t_1 \leqslant t^*$ 时从 ε 球上出发的 R 解中的任意一个解，当 $t \geqslant t_1$ 时均处于 ε 球内，那么时间间隔 t^*-t_i 就称为闭系统(15)的调节时间(regulation time)（转移过程的衰减(damping of the transition prosess)时间）．很明显，调节时间是如下形式的一个泛函：$t^*=t^*(R,\varepsilon,\xi)$．令 T 为一给定的数，就产生一个快速调节器综合问题：给定某一反馈规律的集合 M，需要从中分离出一个子集 M_1，使得闭系统中的调节时间在 M_1 上满足条件

$$t^* - t_i \leqslant T.$$

可以完全类似地建立反馈规律集合 $M_2,\cdots,M_k$ 的综合问题，它们满足主设计师的其他 $k-1$ 个要求．

满足主设计师的所有要求的总的综合问题是可解的，如果集合 $M_1,\cdots,M_k$ 的交集非空(见[13])．

对于域 P 具有最大维数 $r=n$，而系统的代价指数表示为泛函

$$J = \int_0^\infty w(y,\xi,t)\,dt, \tag{16}$$

其中 $w(y,\xi,t)$ 是 y，ξ 的正定函数．这种情况，综合问题已解决得十分详细．此时问题被称为最优调节器的解析设计(见[14])，事实上问题也是这样被表述的．问题的给定条件包括方程(11)，定义在最大维数域 $P(y)$ 上的容许控制类 $\xi=\xi(y,t)$，以及泛函(16)．要求是找出一个控制 $\xi=\xi(y,t)$，使泛函(16)取极小值．这个问题的解决可表述为以下定理：若对于方程(11)可以找到一个上半连续的正定函数 $v^0(y,t)$，以及一个函数 $\xi^0(y,t)$ 满足等式

$$\frac{\partial v^0}{\partial t} + \frac{\partial v^0}{\partial y}\,(Ay+B\xi^0+\varphi(y,\xi^0,t))=0 \tag{17}$$

而且不等式

$$\frac{\partial v^0}{\partial t} + \frac{\partial v^0}{\partial y}\,(Ay+B\xi+\varphi(y,\xi,t))\geqslant 0$$

对于任意容许的 ξ 成立，则函数 $\xi^0(y,t)$ 是问题的解．此时有等式

$$v^0(t_0,y_0)=\min_{\xi}\int_0^\infty w(y,\xi,t)\,dt,$$

函数 $v^0(y,t)$ 称为 Ляпунов 最优函数 (Lyapunov optimum function) (见 [15]). 它是 Hamilton - Jacobi 型偏微分方程的解，满足条件 $v(y(\infty),\infty)=0$. 对于函数 w 及 φ 可以展开成 y, ξ 的收敛的幂级数，而其系数为 t 的有界连续函数的情况，已经发展了一些解决此问题的有效方法. 这时，具有原则意义的是，方程 (11) 的线性近似问题和只对 w 的展式中的二次项积分的最优化的可解性. 当完全可控性条件成立时，这个问题是可解的 (见[15]).

参考文献

[1] Максвелл, Д. К., Вышнеградский, И. А., Стодола, А., Теория автоматического регулирования, М., 1949.

[2] Четаев, Н. Г., Устойчивость движения, 3 изд., М., 1965 (中译本: Н. Г. 切塔耶夫, 运动的稳定性, 国防工业出版社, 1959).

[3] Красовский, Н. Н., Теория управления движением, М., 1968.

[4] Понтрягин, Л. С. [и др.], Математическая теория оптимальных процессов, 2 изд., М., 1969.

[5] Техническая кибернетика, кн 1 – 2, М., 1967.

[6] Барбашин, Е. А., Введение в теорию устойчивости, М., 1967 (英译本: Barbashin, E. A., Introduction to theory of stability, Wolters - Noordhoff, 1970).

[7] Зубов, В. И., Математические методы исследования систем автоматического регулирования, Л., 1959.

[8] Пугачев, В. С., Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления, 3 изд., М., 1962.

[9] Цыпкин, Я. З., Основы теории обучающихся систем, М., 1970.

[10] Красовский, Н. Н., Некоторые задачи теории устойчивости движения, М., 1959 (英译本: Krasovskii, N. N., Stability of motion. Applications of Lyapunov's second method to differential systems and equations with delay, Stanford Uni. Press, 1963).

[11] Бесекерский, В. А., Попов, Е. П., Теория систем автоматического регулирования. М., 1966.

[12] Теория систем с переменной структурой, под ред. Емельянова, С. В., М., 1970.

[13] Летов, А. М., «Дифференц. уравнения», 6 (1970), 4, 592 – 615.

[14] Летов, А. М., Динамика полета и управления, М., 1969.

[15] Малкин, И. Г., Теория устойчивости движения, 2 изд., М., 1966 (中译本: И. Г. 马尔金, 运动稳定性理论, 科学出版社, 1958).

A. M. Летов 撰

【补注】 上面的论述表现出与非俄文文献不同的传统与术语语汇. 它也几乎完全忽略了已经在非俄文文献中出现的关于自动(最优)控制理论的大量重要结果.

粗略地说，一个**控制系统** (control system) 是一种装置，它的未来发展(或在一确定系统或在一随机系统中)完全确定于它的现在**状态** (state) 以及控制参数的现在和未来值. 确定未来行为的"处方"几乎可以是任何东西，如上文见到的微分方程

$$\dot{x}=f(x,u,t),\ x\in\mathbf{R}^n,\ u\in\mathbf{R}^m,\ t\in\mathbf{R}, \qquad (A1)$$

或差分方程

$$x_{t+1}=f(x_t,u_t,t),\ x_t\in\mathbf{R}^n,\ u_t\in\mathbf{R}^m,$$
$$t=0,1,\cdots, \qquad (A2)$$

或者更一般的，具滞后的微分方程，在某函数空间的发展方程，更一般的偏微分方程，……，或者上述方程的组合. 通常控制 $u\in\mathbf{R}^m$ 可能取的值是受到约束的，如 $\|u\|\leqslant M$，这里 M 是一常数. 但是也的确有一些(工程)情况，在 t 时刻使用的控制 $u(t)$ 的值明显地依赖于时间和系统状态的即时值 $x(t)$ (这本身当然又依赖于过去曾使用过的控制). 这样可能使容许的控制空间表示成简单形式的问题复杂化了.

将控制的结构，通过方程 (A1) 和定义在 $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}$ 上的约束 $N(x,u,t)\geqslant 0$ 表示出来，就更显得不太可能了，这是可能发生的，例如在人造卫星控制的情况中，那里控制的取值还和状态 x 有关，比如在 x 点处球的切面上. 此时控制就变成一向量丛的截面，而且还常受到进一步的尺寸约束.

在这一点上，某些本性的和传统的问题与**可达性** (reachability)、**可控性** (controllability) 和**状态空间反馈** (state space feedback) 是有关的. 给定一初始状态 $x(0)$，控制系统称为**完全可达的** (completely reachable) (从 $x(0)$)，如果对所有状态 x，都存在一个容许控制将 $x(0)$ 带到 x. 这在条目正文中被称为完全可控性. 可控性在西方文献中通常被用作一个相反的概念：给定一个(需要的)终止状态 $X(f)$，系统被称为**完全可控的** (completely controllable) (到 $x(f)$)，若对任一可能的初始状态 x，都存在一控制将 x 带到 $x(f)$. 对于有限维连续定常系统两个概念是一致的，但并不总是这种情况.

对于非线性系统也存在许多关于可达性和可控性的结果，特别是对局部可控性和局部可达性. 这些结果通常是通过与控制系统相联系的 Lie 代数表达的. 例如，一控制系统可表为

$$\dot{x}=f(x)+\sum_{i=1}^{m}u_i g_i(x),\ x\in\mathbf{R}^n,\ u\in\mathbf{R}^m, \qquad (A3)$$

考虑 Lie 代数 $\mathscr{L}(\Sigma)$，它是由向量场 $(\mathrm{ad}\,f)^k(g_i)$ $(i=1,\cdots,m;\ k=0,1,\cdots)$ 张成的，这里 $\mathrm{ad}\,f(g)=[f,g]$，$(\mathrm{ad}\,f)^k=(\mathrm{ad}\,f)\circ(\mathrm{ad}\,f)^{k-1}$. 给定某流形 M 上的向量场 $\mathscr{L}$ 的 Lie 代数，$\mathscr{L}$ 在点 $x\in M$ 处的秩，$\mathrm{rk}_x\mathscr{L}$，是切向量空间

$\{X(x): X\in\mathscr{L}\}\subset T_xM$ 的维数．一个局部可达性结果现在可表述为：$\mathrm{rk}_x\,\mathscr{L}(\Sigma)=n$ 意味着 x 处的局部可达性．也还有各种各样的全局的和必要条件型的结果，特别是对于分析的系统．参见 [A2]，[A10]，[A14] 可以获得对可利用结果的一个初步印象．

给定一个控制系统 (A1)，一个重要的基本问题是：用反馈能够将系统改变到何种程度，这里仅指状态反馈．其含义如下．一状态反馈规律是一个适当的映射 $k:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m,\ x\mapsto u=k(x)$．将它代入 (A1)，得到一闭环系统 $\dot{x}=f(x,\ k(x),\ t)$，见图 1．

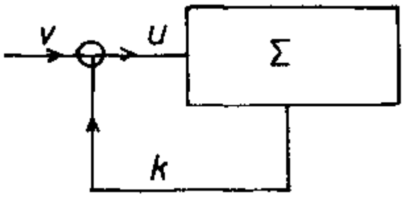


图 1

常常也引入"新"控制 $v\in\mathbf{R}^m$，例如考虑新控制系统 $\dot{x}=f(x,\ k(x)+v,\ t)$，或更一般地 $\dot{x}=f(x,\ k(x,v),\ t)$．动态反馈规律，其中函数 $k(x,v)$ 用完全的输入输出系统 (见后)

$$\dot{y}=g(y,\ x,\ v,\ t),\ u=h(y) \tag{A4}$$

来代替，也常被研究．现在的重要问题是，例如，对于给定的系统 (A1)，能否从各种类型的 $k(x)$，$k(x,v)$ 或系统 (A4) 选出一个，使得构成的闭环系统是稳定的．或者，能否利用反馈使一个系统线性化或嵌入线性系统 (4)．见 [A6]，其中有精选的结果．

在工程中使用 (强) 控制作用一般是昂贵的．这就导致了具有代价泛函 J 的控制系统的概念．一般 J 可表示为

$$J(u)=\int_{t_0}^{t_1} g(x,\ u,\ t)dt+F(x(t_1)).$$

这里出现最优控制问题，例如求使 $J(u)$ 极小 (同时将 x 带到目标集) 的容许函数 (最优开环控制)，或者求极小化的反馈控制规律 $u=k(x)$ (最优闭环控制)．实践中，具有二次型判据的线性系统 (4) 是很重要的，这就是所谓的 LQ 问题．此时有

$$G(x,\ u,\ t)=u^TRu+2u^TSx+x^TQx,$$

$$F(x)=x^TMx. \tag{A5}$$

这里上标 T 表示转置，$R,\ S,\ Q,\ M$ 是适当的矩阵 (它们可能同 $A,\ B$ 一样是时间的函数)．在此情况下，在对 $R,\ M$ 和块阵

$$\left\|\begin{matrix} R & S \\ S^T & Q \end{matrix}\right\|,$$

作适当的正定性假设后，最优控制解是存在的．它呈反馈型，导出如下．考虑 Riccati 矩阵方程 (matrix Riccati equation)

$$\begin{aligned}\dot{K}=&-AK-KA+\\&+(S+B^TK)^TR^{-1}(S+B^TK)-Q,\\ K(t_1)=&M.\end{aligned} \tag{A6}$$

向后解此方程直到 t_0．于是就得到最优控制

$$u=-R^{-1}(B^TK+S)x. \tag{A7}$$

这一解 (方法) 可以推广到还受 Gauss 随机干扰的线性系统的情况，见 [A9]，[A17]．

对于非线性系统，也有一些最优 (反馈) 控制的综合结果．例如，我们仍能用 Понтрягин 极大值原理来求解对每一初始状态 $x\in\mathbf{R}^n$ 的最优 (开环) 控制 (如果它存在且是唯一的)．这就给出一个映射 $x\mapsto u$，它将是最优反馈控制规律的候选者，而且在满足某些正规性假设的情况下也的确如此，见 [A3]，[A15]．在 [A5]，[A12]，[A13] 中有对各种不同情况的最优控制的标准论述．

在很多情况下，不能假定控制系统 (A1) 的状态 x 能直接达到控制的目标，例如达到实现反馈规律的目标，更一般地说，只有某些导出的量才是直接可观测的．(可想一下飞机的例子，各种测量装置并不能全部测出飞机的状态变量．) 这就导致一个输入输出 (动态) 系统 (input-output (dynamical) system) 的概念，或简单地说，(动态) 系统 (system) 的概念，也称对象 (见图 2)，

$$\dot{x}=f(x,\ u,\ t),\ y=h(x,\ u,\ t), \tag{A8}$$
$$x\in\mathbf{R}^n,\ u\in\mathbf{R}^m,\ y\in\mathbf{R}^p.$$

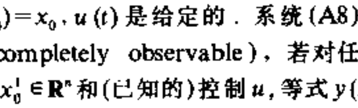


图 2

这里 $u\in\mathbf{R}^m$ 被视为控制或输入，而 $y\in\mathbf{R}^p$ 为观测或输出．令 $x(t,\ u;\ x_0)$ 表示 (A8) 中第一个方程的解，初始条件为 $x(t_0)=x_0$，$u(t)$ 是给定的．系统 (A8) 称为完全可观测的 (completely observable)，若对任意两个初始状态 $x_0,\ x_0^1\in\mathbf{R}^n$ 和 (已知的) 控制 u，等式 $y(x(t,u;x_0),\ u,\ t)=y(x(t,u;x_0^1),\ u,\ t)$ 对所有 $t\geqslant t_0$ 成立意味着 $x_0=x_0^1$．这多少就是在条目正文中所说的"沿着坐标 $y_1,\cdots,y_r$ 可观测"的意思．对于线性定常系统

$$\dot{x}=Ax+Bu,\ y=Cx. \tag{A9}$$

完全可观测的充分必要条件是 (块) 可观测性矩阵

(observability matrix) $\| C^T C^T A^T \cdots C^T (A^T)^{n-1} \|$ 有满秩 n. 这同条目正文中线性系统的可达性(可控性)结果是完全对偶的.

在这样建立了输入输出系统后, 上面所讲的很多问题得到一个输出模拟, 如输出反馈镇定, 这里(在最简单的情况下)要寻求一个反馈函数 $u=k(y)$ 使得 $\dot{x}=f(x, k(h(x, u, t)), t))$ 是(渐近)稳定的; 动态输出反馈问题; 以及最优输出反馈控制问题. 此外, 一些新的问题会自然地出现, 例如, 是否可以通过引入某种反馈, 使得某些输出完全和某些输入无关(**解耦问题** (decoupling problems)). 当在 x 的发展方程和测量 y 中均有附加的随机干扰可能出现时, 所有上述情况均发生滤波问题. 例如, 给出 $t_0 \leqslant s \leqslant t$ 上的观测 $y(s)$, 寻求给定系统状态的最好估计量 $\hat{x}(t)$ 的问题(见[A9]).

还有一个所谓的实现问题. 给定一个初始状态 x_0, 则形如(A8)的系统定义了一个从输入函数 u 的空间到输出函数 y 的空间的映射, 这就产生一个问题: 通过形如(A8)的系统可以实现哪些映射. [A6] 给出了非线性确定性系统情况下这方面结果的综述, 而[A9]包含线性随机系统的结果.

除了输出反馈问题外, 可以说, 到目前为止线性定常有限维系统(可能具有 Gauss 干扰和二次型代价判据)理论已经发展得相当完善. 例如, 可以参阅标准著作[A11]. 把这些主要结果推广到更一般的领域看来需要用到更高级的数学, 例如对于线性系统族要求代数几何或代数 K 理论([A8], [A16]), 对于无限维线性系统要求泛函分析和压缩半群[A4], 对于滤波和预测要求泛函分析、插值理论和 Fourier 分析[A9], 对于非线性系统理论则要求叶状结构物, 向量丛, 向量场的 Lie 代数, 以及其他微分拓扑和微分几何学的概念[A2], [A9].

目前, 关于含有未知(不确定)参数的系统进行着大量研究. 这里**适应性控制** (adaptive control) 是很重要的. 这意味着, 人们力求设计输出反馈, 它可以自动调整, 使自己适应未知的参数.

关于系统学科和控制理论发展的现状, 可以通过阅读每年的 IEEE CDC (Institute of Electronic and Electrical Engineers Conference on Decision and Control) 会议和两年一次的 MTNS (Mathematical Theory of Networks and Systems) 会议的会刊, 得到清楚的了解.

参考文献

[A1] Barnett, S., Introduction to mathematical control theory, Oxford Univ. Press, 1975.

[A2] Brockett, R. W., Nonlinear systems and differential geometry, *Proc. IEEE*, **64** (1976), 61-72.

[A3] Brunovsky, P., On the structure of optimal feedback, systems, in Proc. Internat. Congress Mathematicians Helsinki. 1978, Vol. 2, Acad. Sci. Fennica, 1980, 841-896.

[A4] Curtain, R. F and Pritchard, A. J., Infinite-dimensional linear system theory, Springer, 1978.

[A5] Fleming, W. H. and Rishel, R. W., Deterministic and stochastic optimal control, Springer, 1975.

[A6] Fliess, M. and Hazewinkel, M. (eds.), Algebraic and geometric methods in nonlinear control theory, Reidel, 1986.

[A7] Hazewinkel, M., On mathematical control engineering, Gazette des Math., **28** (1985), 133-151.

[A8] Hazewinkel, M., (Fine) moduli spaces for linear system theory, What are they and what are they good for, in Byrnes, C. I. and Martin C. F. (eds.), Geometric methods for linear system theory, Reidel, 1980, 125-133.

[A9] Hazewinkel, M. and Wellems, J. C (eds.), Stochostic systems: The mathematics of filtering and identification, Reidel, 1981.

[A10] Jurdjevic, V. and Kupka, I., Control systems on semi-simple Lie groups and their homogeneous spaces, *Ann. Inst. Fourier*, **31** (1981), 151-179

[A11] Kwakernaak, H. and Sivan, R., Linear optimal control systems, Wiley, 1972.

[A12] Lee, E. B. and Markus, L., Foundations of optimal control theory, Wiley, 1967

[A13] Lions, J. L., Optimal control of Systems governed by partial differential equations, Springer, 1971.

[A14] Lohry, C., Controlabilité des systèmes non-linéaires, in Outils et modèles mathematiques pour l'automatique, l'analyse des systémes et le traitement du signal, Vol. 1, CNRS, 1981, 187-214.

[A15] Sussmann, H. J., Analytic stratifications and control theory, in Proc. Internat, Congress Mathematicians Helsinki, 1978, Vol. 2 Acad. Sci. Fennica, 1980, 865-871.

[A16] Tannenbaum, A., Invariance and system theory: algebraic and geometric aspects, Springer, 1981.

[A17] Willems, J. C., Recursive filtering, *Statistica Neerlandica*, **32** (1978), 1-39.

[A18] Handbuch der Systemtheorie, Akademie Verlag, 1986.

高为炳 译

自动程序设计 [automatic programming; автоматизация программирования]

根据比较接近问题的原始的表达方式的某种初始描述, 用计算机自动地生产计算机程序 (program). "自动程序设计"的含义随着时间的转移而变化, 反映出人机通信工具和程序设计方法的一般发展. 最初, 自动程序设计在于把程序交给计算机进行翻译, 把用某种**算法语言** (algorithmic language) 表示的求解某个问题的

算法描述转换成机器代码．后来、自动程序设计被认为包括直接综合的方法，它对简洁问题描述的算法进行综合，且限于某些固定类问题．目前(19世纪70年代)，自动程序设计正被扩充到在较广泛的语言框架内对表述问题的算法进行综合的全过程，且不局限于某特定的类．这种综合需要算法的正确性检验和使用形式化方法，如自然语言语义学、谓词演算和定理证明技术的各种模型．　　　А. П. Ершов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Balzer, R., A 15-year perspective on automatic programming, *IEEE Trans. Software Engineering*, **11** (1985), 11, 1257 – 1267. Special issue on artifical intelligence and software engineering, Guest Ed.: J. Mostow.

钱宝峰译　仲萃豪校

自动翻译 [**automatic translation**; **автоматический перевод**], **机器翻译** (machine translation)

使用自动化设备从一种自然语言到另一种语言的正文翻译．

自动翻译是人类各种智力活动(目前是语言活动)的模拟和自动化领域的问题．自动翻译用一种**算法** (algorithm)来实现，这种算法的规则与人的知识和直觉无制约关系，是严格的形式规则．自动翻译的算法能用任何适当的自动化设备来实现，例如数字计算机．

自动翻译与现代结构语言学和数理语言学的发展密切相关，包括困难的和基础性的语言学问题，其中许多过去被忽视，甚至没有被明确阐述过．

开发自动翻译的理论基础是**形式文法** (grammar, formal)理论．自动翻译算法实现的由其文法定义的两种语言之间的某种对应称作翻译对应 (translation correspondence)．这种对应是在文法的框架内借助于这些语言性质的结构化描述公式化的．最经常使用的结构化描述是成分结构和相关树 (见**语法结构** (syntactic structure))．因此，自动翻译算法由三个主要部分组成：1)源语言正文分析，即以输入语言的给定语法为基础，对输入正文进行结构的分析；2)转换，即从源语言正文结构在给定的翻译对应的基础上转换到目标语言正文结构；3)目标语言正文综合，即从输出正文结构转换到特定的字序列．

在研究自动翻译的早期过程中，转换规则一般是以算法规则的形式直接公式化的，并没有预先构造源语言和目标语言的形式语法，也没有翻译对应的明显公式表述．因此，纯语言学性质的信息变得与算法的数学外形相混淆．在稍后一段时期，构造自动翻译算法的发展方向是，采用适合于多种语言的通用模式，尽可能将翻译分成阶段，使综合阶段与分析阶段互不依赖，寻求所有的语法和翻译对应容许的正文解释的各种变体(称为多种类翻译 (multivariant translation))．在多数情况下，有关特定语言的信息是严格与算法部分分离的．因此，就有可能不考虑每种语言特有的大量细节，而专心集中于一般步骤的开发以寻求满足特定的条件的解法．

至于自动翻译的纯语言学方面，可以认为在单个句子的范围内所有的词法和几乎所有的语法问题都是解决了的．建立高质量的全面自动翻译系统的主要困难是同语言语义理论的相对落后有关的，语言语义理论能用于准确表述意义和各种语义的处理规则，也用于理解连贯的正文中单独句子之间的逻辑联系．如果不把正文的语义适当地考虑进去，那么，翻译往往是含糊的或有错误的．错误的翻译一般是由这样的事实造成的、即翻译规则并不包括被翻译正文的所有可能的含义，或者不能保证每次都选择到正确的含义，这些含义可以由相当广泛的上下文或甚至由被译正文的学科知识和关于世界的一般知识等来确定．

通用的、产业化的高质量的自动翻译系统到目前(19世纪70年代)为止还不存在．有复杂程度不同的实验系统．简易的专用的自动翻译系统已在实际工作中成功地使用；这些系统是以科学技术信息的自动处理为基础(具有部分语法处理的逐字翻译，现场信息、专利证书和情报检索系统的部分翻译和自动引用)．在可以预见的将来，自动翻译仅仅可用于翻译科技出版物；自动翻译文学作品和小说是既不实际也不必要的．

参考文献

[1] Машинный перевод. Сб. статей. пер. с англ., М., 1957.

[2] Панов Д. Ю., Автоматический перевод, 2 изд., М., 1958.

[3] Автоматический перевод. Сб. статей, пер. с англ., итал., нем., франц., М., 1971.

С. Я. Фитиалов 撰

【补注】 机器翻译于1955年前后始于美国．

从语言学的观点来看，这些程序是朴实的(大体上，程序给出逐字翻译)，程序是以非结构化方法设计的(例如，语言学信息不与翻译算法分离)．这些程序并不令人满意：与人工翻译比较，速度慢，不够准确，成本也较高．因此，1966年美国政府决定停止对机器翻译项目的所有支持．1966至1975年期间，有关机器翻译的基础研究几乎没有进行．初级阶段的程序是在商业环境中另外开发的，现今实际使用的大部分是这些程序．这些程序的用处不在于翻译质量，而在于作为辅助工具(如正文编辑程序)使用时能节省专业人员的时间．到现在为止，只有一个全部自动翻译系统：把气象预报从英文译成法文的加拿大 TAUM 系统．1975年以来，机器翻译的研究有所恢复，尤其是西欧和日本．这种研究

的重要因素是理论语言学的发展,改变成本和影响速度因素的硬件的发展,以及对专业翻译(特别是技术手册)日益增长的需求.

参考文献

[A1] Hutchins, W. J., Machine translation: past, present, future, Ellis Norwood limited, Chichister, England, 1986.

[A2] Slocum, J., A survey of machine translation: its history, current status, and future prospects, *Computational Linguistics*, 11 (1985), 1－17.

钱宝峰译　仲萃豪校

自动机 [automaton; автомат]

一个**控制系统**(control system),通常指**有限自动机**(automaton, finite)或改变其成分或工作方式所得的变型.主要概念有限自动机于二十世纪中叶形成,是为了以数学语言描述神经网络、通用计算机和其他实际自动机的功能.最早的这种努力归于 W. McCulloch 和 W. Pitts (1943), S. C. Kleene (1951), A. W. Burks 和 J. Wright (1953), 及其他一些人.这种描述的一个特点是对应数学模型的离散性及其参数值域的有限性,后者说明了取名"有限"自动机的原因.外部作用、反作用和状态分别看做三个名为输入字母表、输出字母表和状态字母表的字母.此时,决定它们之间的相互作用的关系可由二函数即迁移函数和输出函数给出,它们将"状态-输入字母"对分别映射到"状态字母"和"输出字母".在每一离散时刻,处于一给定状态的系统接收一输入信号(输入字母表的一字母),发出一输出信号(由输出函数决定的输出字母表中的一字母)并转移到由迁移函数决定的一新状态.有限自动机的研究,还包括对反映实际系统各种特性的、各种有限自动机的推广和变型的研究.就有限自动机(A, S, B, φ, ψ)而论,已有的变型可分为下列三个主要类别.在第一类包括的自动机中,其某些字母表 A, S 或 B 是无限的,这种自动机称为无限的(infinite).在第二类包括的自动机中,函数 ψ 和 φ 代之以任意关系或随机函数.这就是偏的、非决定的、概率的或其他自动机.第三类包括的自动机具有特定的输入对象集,如具有可变结构的自动机、项上自动机(或树自动机),见**自动机的代数理论**(automata, algebraic theory of).有些自动机可同属几类,如模糊自动机同属以上三类.有限自动机的一些特殊子类是非常重要的,如无记忆自动机,自治自动机,可逆自动机,等等.此外,其他数学分支的概念和方法的使用亦产生出特殊种类自动机和有关问题.例如,代数方法的使用导致了项上自动机、线性自动机、群自动机、自由的和其他自动机的概念,见**自动机的代数理论**;编码理论中的问题导致了自调节自动机、可逆自动机等概念,见**概率自动机**(automaton, probabilistic).结构自动机亦有几种推广,主要是允许无限网络和在工作中改变元件间之连接.这就导致了生长自动机(growing automaton)概念.兹将有限自动机的主要变型和子类及其最重要的性质陈述于下.

宏观方法(macro approach). 1.无限自动机(infinite automata,第一类)不同于有限自动机仅在于它们的字母表 A, B 或 S (输入、输出和状态集合)可以是无限的.关于有限自动机的大部分概念和问题可以自然地推广到无限自动机.更高基数的字母表扩展了自动机的计算能力.例如,有限自动机只能实现有限决定的(时序)函数,见**有限决定函数**(finitely-determined function),而无限自动机则可用于实现任何决定函数.此外,可用无限自动机来描述任何自动机和机器的功能.同时,无限自动机的普遍性削弱了它的重要性,从而大部分研究仅限于与控制系统的特定模型有关的无限自动机的特殊子类.

2.非确定性和异步自动机(non-deterministic and asynchronous automata,第二类).一个非确定性自动机(non-deterministic automaton)形式地定义为一个系统(A, S, B, χ),其中A, S 和 B 是前述意义下的字母表,$\chi \subseteq S\times A\times S\times B$ 是一个迁移-输出关系.如果关系 χ 是一个 $S\times A$ 到 $S\times B$ 的函数,则此非确定性自动机称为确定性自动机(deterministic automaton),实际上它等同于一个有限自动机,因为这种 χ 可看做分别映射 $S\times A$ 到 S 和 B 的函数 φ 和 ψ 的对.不同于有限自动机,一个初始非确定性自动机 $\mathfrak{A}_{S_1}$ 有几个初始状态,它们形成集合 S 的一个子集 S_1. $\mathfrak{A}_{S_1}$ 的行为通常指有限自动机功能的下列推广之一.

a) 代替函数 f,自动机 $\mathfrak{A}_{S_1}$ 实现一个关系 f',它由所有满足下述条件的 $A^*\times B^*$ 中字对 $(a_1\cdots a_n, b_1\cdots b_n)$ 所组成:存在状态 $s_1, \cdots, s_{n+1}$,使得 $s_1\in S_1$ 且 $(s_i, a_i, s_{i+1}, b_i)\in\chi(i=1,\cdots,n)$.初始非确定性自动机实现的关系类与有限决定关系类一致,见**有限决定函数**(finitely-determined function).

b) 指定了终结状态集 S' 的初始非确定性自动机 $\mathfrak{A}_{S_1}$,当字母表 B 为空(即 $\chi\subseteq S\times A\times S$)时表示事件(event) L_S,它由所有满足下述条件的 A^* 中字 $a_1\cdots a_n$ 所组成:存在状态 $s_1,\cdots, s_{n+1}$ 使得 $s_1\in S_1$, $s_{n+1}\in S'$, 且 $(s_i, a_i, s_{i+1})\in\chi(i=1,\cdots,n)$.自动机 $\mathfrak{A}_{S_1}$ 所能表示的事件类与正规事件类一致,即关于行为的这一方面非确定性自动机和有限自动机是等价的.然而,非确定性自动机概念的高度普遍性实际上反映在表示相同事件所需的状态数由非确定性自动机和由有限自动机是不同的.存在可由 m 个状态的非确定性自动机表示的事件,可由 2^m 个状态的有限自动机表示,但不能用更少状态的任何有限自动机表示.

非确定性自动机的一个特殊子类由所谓偏自动机

(partial automata) 构成，其中关系 χ 是将集 $S\times A$ 映射到 $S\times B$ 的偏函数．这类自动机实现有限决定偏函数．

术语"异步自动机"通常表示下列两种自动机之一．第一种包括自动机 (A,S,B,φ,ψ)，其输出函数 ψ 映射集 $S\times A$ 到 B^*(对有限自动机而言，ψ 映射 $S\times A$ 到 B)．这些自动机主要用于编码理论．第二种包括有限自动机，其迁移函数 φ 具有下列性质：$\varphi(s,aa)=\varphi(s,a)$，对所有的 s 和 a 成立．这些自动机用于编码理论，亦用于技术和生物方面的某些系统的建模上．

3. 可变结构自动机 (automata with a variable structure，第三类)是一种有限自动机 $\mathfrak{A}=(A\times A,S,B,\varphi,\psi)$，它具有两个输入通道和字母表 A 上某个固定的无限序列 α(超字)．字母表 A 上任意字送到这种自动机的第一个输入(通道)的同时，序列 α 的同样长度的开始部分送到第二个输入(通道)．这就在输入字对的集合上强制加上了限制．如果一个可变结构自动机看作一个仅有第一个输入的自动机(A 上任意字皆可馈入)，则它的迁移和输出函数将依赖于馈入的输入字的长度．在行为方面，一个可变结构自动机等价于一个具有限输入和输出字母表及可数状态集的无限自动机．

4. 模糊自动机 (fuzzy automata) 构成有限自动机概念的一种推广，它可由替换迁移和输出函数为模糊关系而得到．集合 M 的一个模糊子集 (fuzzy subset) 定义为映射 M 到区间$[0,1]$的一个函数．相应地，在一个模糊自动机中迁移和输出函数分别被代之以映射集合 $S\times A\times S$ 和 $S\times A\times B$ 到$[0,1]$的函数，其中 S 为状态集，A 为输入字母表，B 为输出字母表．有限自动机代表性的基本概念和问题对模糊自动机有自然的推广；特别是应用于模糊事件的表示和模糊关系的实现．模糊自动机是某些识别机制的数学模型，被用于模式识别 (pattern recognition)．

5. 特殊种类有限自动机 (special class of finite automata)．

无记忆自动机 (automata without memory) 是单状态有限自动机或其等价自动机．这种自动机的每个输出字母由该时刻馈入的输入字母完全决定．它们常看做功能元件 (functional elements) 并广泛地用于自动机综合问题中．

有限存储自动机 (automata with a finite storage space) 或有限记忆自动机 (automata with a finite memory) 是一种有限自动机，它的每个输出字母由当前时刻以前馈入的、长度有界的输入字段完全决定，与初始状态无关．对一个 n 状态有限存储自动机，上述输入字段长度的最小上界不超过 $n(n-1)/2$；这个界实际上可由某些自动机达到．一个有限存储自动机称为自调节的 (self-regulating)，倘若对某 t，任何时刻 $\tau\geqslant t$ 的输出字母不依赖于初始状态．这种自动机用于编码理论，见编码与译码 (coding and decoding)，且通常使用这种自动机的变型，即上述条件不必对所有输入字的集合成立，而只对它的某个子集成立．有限存储自动机由没有反馈的逻辑网络实现．

可逆自动机 (reversible automata) 或无信息损失自动机 (automata without loss of information) 是实现一一函数的有限自动机．这种自动机也用于编码理论．

微观方法 (micro approach)．有三类广义结构自动机，它们可以看做广义逻辑网络：1) 不变结构广义逻辑网络，当自动机工作时，其元件和元件间的关系保持不变；2) 可变结构广义逻辑网络；和 3) 由体积元件和连接构成的广义逻辑网络．这种自动机的主要类型陈述如下．

1. 不变结构广义逻辑网络 (generalized logical networks with a permanent structure)．包含镶嵌结构和迭代网络 (iterative networks)，后者是镶嵌结构的有限片断，具有类似的问题范围．

镶嵌结构 (mosaic structures) 是迁移系统 (A,S,φ)(即形为 (A,S,S,φ,φ) 的有限自动机，其中输出函数与迁移函数相同，且输出字母表与状态集一致)的无限并集．这些系统安置在 n 维空间的整坐标的点(整点)上，同时对每一个这种点都定义一个整点的有限集，称为它的邻域．安置在某点的迁移系统的输入字母表乃是安置在该点的邻域中各点的迁移系统的状态集的 Descartes 积．

一个镶嵌结构可看作一个无限自动机，其输入字母表、输出字母表和状态集都同为它包含的所有迁移系统的状态集的无限 Descartes 积．这就使将镶嵌结构的许多问题归结到无限自动机的问题成为可能．镶嵌结构特有的问题包括能行过程特别是计算过程的建模．偶尔也考虑以任意自动机代替迁移系统的镶嵌结构．

一致结构 (uniform structures) 形成一类重要的镶嵌结构．如果所有迁移系统都相同且任一点的邻域可由某个固定点的邻域经平行移位而得到，则该镶嵌结构通常称为一个一致结构 (uniform structure) 或一个细胞自动机 (cellular automaton)．通常假定迁移系统存在下述意义下的某个"稳定"状态：如果输入字母是每个分量皆为该状态的多元组 (tuple)，则迁移系统保持状态不变．一致结构的代表性问题有自繁殖问题和"伊甸园"问题．

任一时刻安置在整点上的迁移系统的状态产生一个空间镶嵌模式，通常称之为一个构形 (configuration)．如果一个构形中只包含有限个迁移系统，其状态是非稳定的(激励部分)，则称它为有限的．自繁殖问题 (self-reproduction problem) 探索是否存在有限构形，使得在一致系统运算过程中变到一些

构形,它们的激励部分是多个重复的原始构形的激励部分."伊甸园"(Garden of Eden)一词表示一个不能由其他构形变成的构形."伊甸园问题"(Garden-of-Eden problem)是要决定给定的一致结构的"伊甸园"的存在性.

2. 可变结构广义逻辑网络(generalized logical networks with a variable structure).存在这种逻辑网络的各种类型.最一般的一类包括元件邻域和元件本身在工作中都可变化的镶嵌结构.作为这种广义逻辑网络的一个例子,人们可举出模拟具有输入的**Turing 机**(Turing machine)功能的一维结构.此时一维网络的一个结点对应到控制机构,而其他结点对应到带上的格子,这些格子被看作迁移系统,Turing 机工作字母表中字母作为它的输入字母和状态.换向则由读写头的位置决定.

另一类可变结构广义逻辑网络是所谓生长自动机(growing automata),即工作中激励部分增长的一致结构.有许多这种自动机的模型,它们模拟真实机制的各种特征.

3. 体积元件广义逻辑网络(generalized logical networks of volume elements)的特别之处在于它们的基本自动机及其相互间的连接都赋以体积.从而引起具有最少可能体积的自动机的综合问题.

"自动机"一词也使用于诸如双向、多带、多头、线性界限等等自动机概念中,事实上它们是 Turing 机的变型.有时将所有抽象机器纳入自动机概念中.

参考文献

[1] McCulloch, W. S. and Pitts, W., A logical calculus of ideas immanent in nervous activity, *Bull. Math. Biophys.*, **5** (1943), 115-133.

[2] Kleene, S. C., Reproduction of events in nerve sets and finite automata, in *Automata studies*, Princeton Univ. Press, 1956, 3-14.

[3] Burks, A. W. and Wright, J. B., Theory of logical nets, *Proceedings of the I. R. E.*, **41** (1953), 1357-1365.

[4A] Глушков, В. М., Абстрактная теория автоматов, 《Успехи матем. наук》, **16** (1961), 3-62.

[4B] Глушков, В. М., 《Успехи матем. наук》, **17** (1962), 2, 270.

[5] Rabin, M.O. and Scott, D., Finite automata and their decision problems, *IBM J. Res. Develop.*, **3** (1959), 114-125.

[6] Zadeh, L.A., Probability measures of fuzzy events, *J. Math. Anal. Appl.*, **23**(1968), 421-427.

[7] Аладьев, В. З., К теории однородных структур, Тал., 1972.

В. Б. Кудрявцев, Ю. И. Янов 撰

【补注】 见**自动机的等价**(Automata, equivalence of)条目的补注.

【译注】 可逆自动机和自治自动机也都用于密码学(cryptology).更多的信息见[A1]和[A2].

参考文献

[B1] 陶仁骥,有限自动机的可逆性,科学出版社,1979.

[B2] Курмит, А. А., Автоматы без потери информации конечного порядка, Рига, 1972.

陈世华 译 陶仁骥 校

自动机的行为 [automaton, behaviour of an; автомата поведение]

描述自动机和它的外部环境的相互作用的数学概念.对一个**有限自动机**(automaton, finite)来说,其外部环境通常为输入字的集合,而它的行为则是自动机产生的字函数或它表示的事件(有时为超事件).对一个项上自动机来说(见**自动机的代数理论**(automata, algebraic theory of)),常项集为环境,它的行为是这样一些项的集合,用自动机计算它们的值属于相应代数的元素的指定子集.对一个镶嵌结构来说,环境为初始构形的集合,而它的行为由在各时刻产生的构形序列组成.一般来说,(更一般的)自动机的行为的概念类似于有限自动机的行为的概念,或本质上是它的轻微修改.

所谓处在随机介质中自动机的行为(behaviour of an automaton in a random medium)是一种特别情形.这里的"介质"指一个概率自动机 $\mathfrak{B}$,它将所考虑的自动机 $\mathfrak{A}$ 的输出信号变换为 $\mathfrak{A}$ 的输入信号.可以假定在随机介质 $\mathfrak{B}$ 中的自动机 $\mathfrak{A}$ 是一个自治逻辑网络,它由自动机 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 通过连接一个自动机的输出到另一个的输入而得到.在随机介质 $\mathfrak{B}$ 中的自动机 $\mathfrak{A}$ 的行为可以看作是这个自治逻辑网络的功能.介质 $\mathfrak{B}$ 称为平稳的(stationary),倘若它是一个单状态自动机.如果自动机 $\mathfrak{B}$ 的输出信号看作对自动机 $\mathfrak{A}$ 的"奖赏"或"惩罚",那么自然地引起一个问题:如何构造自动机 $\mathfrak{A}$,使它在介质 $\mathfrak{B}$ 中的行为是最优的(optimal),即在该介质中能产生最大可能的增益.通常假定介质 $\mathfrak{B}$ 的输出字母表由字母 0 和 1 组成,且作为对自动机 $\mathfrak{A}$ 的输出符号 $b_1,\cdots,b_k$ 的响应,分别以 $p_1,\cdots,p_k$ 的概率输出字母 1.仅仅字母 1 看作自动机 $\mathfrak{A}$ 的"奖赏".

如果介质 $\mathfrak{B}$ 是平稳的,则自治逻辑网络的状态集与自动机 $\mathfrak{A}$ 的状态集相同.此外,如果自动机 $\mathfrak{A}$ 的输出字母无二义地由它的状态决定,则此逻辑网络的功能可以由一个状态迁移随机矩阵 Q 描述.通常,考虑遍历矩阵的情况,见**遍历性**(ergodicity).于是,定义函数

$$W(\mathfrak{A},\mathfrak{B})=\sum_{i=1}^{k}\sigma_i p_i-\sum_{i=1}^{k}\sigma_i(1-p_i)=\sum_{i=1}^{k}\sigma_i(2p_i-1),$$

其中,σ_i 是所有决定输出字母 b_i 的状态的终概率的和.这时,有

$$\min_i(2p_i-1)\leqslant W(\mathfrak{A},\mathfrak{B})\leqslant\max_i(2p_i-1).$$

如果自动机 𝔄 的输出信号不依赖于介质的作用且它们是等概的，即 $\sigma_1=\cdots=\sigma_k=1/k$，则有

$$W(\mathfrak{A},\mathfrak{B}) = W_0 = \frac{2}{k}\sum_{i=1}^{k}p_i-1.$$

函数 $W(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ 是一个称为自动机 𝔄 在介质 𝔅 中的增益(gain)的变量的数学期望．如果 $W(\mathfrak{A},\mathfrak{B})>W_0$，则称自动机 𝔄 在介质 𝔅 中的行为是符合目标的(goal-conforming)．现在，随机介质中的最优行为问题可陈述如下．要求构造一个所谓的自动机渐近最优序列(asymptotically optimal sequence) $\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_2,\cdots$，使得自动机 $\mathfrak{A}_n$ 的增益的数学期望当 n 趋近无穷大时趋近于在此介质中的最大可能的增益，即 $d_{\max}=\max_i\{2p_i-1: i=1,\cdots,k\}$．在所考虑的情形，当 $d_{\max}\geq 1/2$ 时，用所谓的线性策略自动机(automata with linear tactics)构成这种序列．(一个具有 k 字母输出字母表的线性策略自动机 A_n 存在 k_n 个状态 $s_{ij}(i=1,\cdots,k,\ j=1,\cdots,n)$，以及下述迁移函数 φ 和输出函数 ψ：

$$\varphi(s_{ij},1)=s_{i,j+1},\ 若 j=1,\cdots,n-1,$$

$$\varphi(s_{in},1)=s_{in},\ \varphi(s_{ij},0)=s_{i,j-1},\ 若 j=2,\cdots,n,$$

$$\varphi(s_{i1},0)=s_{i+1,1},\ \psi(s_{ij},a)=b_i,$$

$$i=1,\cdots,k,\ j=1,\cdots,n.)$$

在平稳随机介质中控制渐近最优行为的规则首先是在数理统计中研究的．但是在该领域得到的结果显然能翻译为自动机理论的语言．

在更复杂介质中也研究自动机的行为，以及在随机介质中自动机集体(collectives of automata)的行为．在后一情形，自动机被看作局中人，自动机参予的博奕的规则被看作介质．

参考文献

[1] Трахтенброт, Б. А., Барздинь, Я. М., Конечные автоматы, поведение и синтез, М., 1970 (英译本：Trakhtenbrot, B. A. and Barzdin', Ya. M., Finite automata, behaviour and synthesis, North-Holland, 1973).

[2] Цетлин, М.Л., Исследования по теории автоматов и моделированию биологических систем, М., 1969.

[3] Robbins, H., Sequential decision problems with a finite memory, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 42 (1956), 12, 920–923.

В. Б. Кудрявцев, Ю. И. Янов 撰

【补注】 见**自动机的等价**(automata, equivalence of)条目的补注．

陈世华 译　陶仁骥 校

有限自动机 [automaton, finite; автомат, конечный]

处理具有有限存贮的离散信息系统的数学模型．有限自动机是**控制系统**(control system)的最重要类型之一．实质上，一个有限自动机可描述为一个具有输入和输出通道且在任一离散时刻处于 n 个状态 $s_1,\cdots,s_n$ 之一的系统．这些时刻构成时间集(time set)．在每一时刻一些信号即输入字母表中的一些字母馈人输人通道，并在输出通道产生一些信号即输出字母表中的一些字母．在特定观点下，这种系统可包括**形式系统**(formal system)，实际自动机，生物体，等等．

有限自动机概念可从不同的观点来定义．当采用宏观方法(macro approach)即仅对系统的外部行为感兴趣时，一个有限自动机可用一类函数，一个有限有向图，或(以代数的形式)用一个具有一元运算的有限代数给出(见**自动机的描述方法**(automata, methods of specification of))．当采用微观方法(micro approach)时，一个有限自动机定义为一组元件和它们的互相连结图式，即不仅考虑自动机的功能，还考虑其结构．相应地，这一概念称为结构的(structural)，而有限自动机本身称为结构自动机(structural automata)或自动机网络(automata networks)．

宏观方法(macro approach)．一个有限自动机就是一个系统 (A,S,B,φ,ψ)，其中 A,S,B 是有限字母表，通常非空，分别称为输入字母表(input alphabet)、状态集(set of states)和输出字母表(output alphabet)；φ 是转移函数(transition function)，它映射集合 $S\times A$ 到 S；ψ 是输出函数(output function)，它映射 $S\times A$ 到 B．这种有限自动机有时称为 Mealy 自动机(Mealy automaton)．若输出函数 ψ 映射 S 到 B(即不依赖输入字母表的字母)，则此有限自动机称为一个 Moore 自动机(Moore automaton)．任一 Moore 自动机也是一个 Mealy 自动机．

一个有限自动机的最重要的特征是它的行为(见**自动机的行为**(automaton, behaviour of an))，它可用不同的方法定义．取决于所考虑的行为类别，有限自动机可分为转换器，接受器(识别器)，产生器，等等．为了定义有限自动机行为的主要类型，扩充函数 φ 和 ψ 到集合 $S\times A^*$(其中 A^* 是 A 上所有字的集合，包括空字 Λ)：

$$\varphi(s,\Lambda)=s,\ \varphi(s,\alpha a)=\varphi(\varphi(s,\alpha),a),$$

$$\psi(s,\Lambda)=\Lambda,\ \psi(s,\alpha a)=\psi(\varphi(s,\alpha),a),$$

其中 $s\in S,\alpha\in A^*,a\in A,\alpha a$ 表示连接字母 a 到字 α 得到的字．因此，函数 $\varphi(s,\alpha)$ 和 $\psi(s,\alpha)$ 对任意 s 和 α 的扩充，分别描述自动机在输入字 α 的作用下从状态 s 变到的状态和自动机在馈入输入字 α 的最后一个字母的时刻所产生的输出字母．设 $\alpha]_n$ 表示字 α 的长 n 的开始部分，又设 $\overline{\varphi}(s,\alpha)$ 和 $\overline{\psi}(s,\alpha)$ 分别为 S 和 B 上定义如下的字：

$$\overline{\varphi}(s,\alpha)=\varphi(s,\alpha]_1)\varphi(s,\alpha]_2)\cdots\varphi(s,\alpha),$$

$$\overline{\psi}(s,\alpha)=\psi(s,\alpha]_1)\psi(s,\alpha]_2)\cdots\psi(s,\alpha).$$

函数 $\overline{\varphi}(s,\alpha)$ 和 $\overline{\psi}(s,\alpha)$ 分别描述馈入字 α 的字母过程中自动机呈现的状态序列，和在输入字 α 的作用下自动机产生的输出字即输出字母表的字母序列．三元关系

$$F=\{(\alpha,\overline{\varphi}(s,\alpha),\overline{\psi}(s,\alpha)):\alpha\in A^*,s\in S\}$$

称为有限自动机 $\mathfrak{A}=(A,S,B,\varphi,\psi)$ 的功能(functioning)(运算(operation))．函数 $\overline{\varphi}$ 和 $\overline{\psi}$ 以自然方式扩充到 A 上无限序列(超字(superwords))．为此，一个有限自动机的功能有时理解为这类关系 F，其中 α 是任一超字．在这种情形下，函数 $\varphi(s,\alpha)$ 的值定义为在序列 $\overline{\varphi}(s,\alpha)$ 中出现无穷次的那些状态的集合．

具有指定初始状态 s_1 的有限自动机称为初始的(initialized)，记作 $\mathfrak{A}_{s_1}$．初始有限自动机 $\mathfrak{A}_{s_1}$ 的行为通常定义为下列四种关系之一．

1) 函数 $f(\alpha)=\overline{\psi}(s_1,\alpha)$，它映射 A^* 到 B^*(或 A^∞ 到 B^∞，其中 A^∞ 和 B^∞ 分别为 A 和 B 上的所有超字的集合)．此函数称为由初始有限自动机 $\mathfrak{A}_{s_1}$ 可计算的(computable)或可实现的(realizable)．

2) 集合 $L_{S'}\subseteq A^*$，对给定终结状态(final states)集 $S'\subseteq S$ 定义如下：

$$L_{S'}=\{\alpha\in A^*:\varphi(s_1,\alpha)\in S'\}.$$

集合 $L_{S'}$ 称为由具有终结状态集 S' 的有限自动机 $\mathfrak{A}_{s_1}$ 可表示的事件(representable event)．

3) 对 A^* 中所有可能的 α 函数 $f(\alpha)=\overline{\psi}(s_1,\alpha)$ 的值的集合，称为可由给定的有限自动机 $\mathfrak{A}_{s_1}$ 枚举的集合．

4) $M_\gamma\subseteq A^\infty$ 对 S 的子集系 γ 定义如下：

$$M_\gamma=\{\alpha\in A^\infty:\varphi(s_1,\alpha)\in\gamma\}.$$

称 M_γ 为由具有终结状态子集系 γ 的有限自动机 $\mathfrak{A}_{s_1}$ 表示的超事件．具有1)型行为的有限自动机称为有限转换器(finite transformers)，而具有2)型行为的有限自动机称为有限识别器(finite identifiers)或接受器(acceptors)．

如果 Descartes 积 $A_1\times\cdots\times A_m$ 和 $B_1\times\cdots\times B_n$ 分别取作输入和输出字母表，则1)型行为将是 m 元函数的 n 元组．在这种情形下，可说自动机有 m 个输入和 n 个输出，字母表 $A_1,\cdots,A_m$ 和 $B_1,\cdots,B_n$ 分别称为自动机的输入字母表(input alphabets)和输出字母表(output alphabets)．有限自动机表示的事件类和有限自动机计算的函数类可用各种数学工具描述．主要结果是，有限自动机可表示的事件类恒同于所谓的正则事件，有限自动机计算的函数恒同于**有限决定函数**(finitely-determinded function)．此外，有限自动机枚举的集合类恒同于有限自动机表示的事件类．

关于2)型，3)型，和4)型行为，在下述意义下 Moore 自动机等价于 Mealy 自动机：每个 Mealy 自动机对应一个等价(即表现同样的行为)的 Moore 自动机，反之亦然．1)型行为则不然．但是，如果在一个 Moore 自动机中取形如

$$\overline{\psi}(s,\alpha)=\psi(\varphi(s,\alpha]_1))\psi(\varphi(s,\alpha]_2))\cdots\psi(\varphi(s,\alpha))$$

的函数代替 $\overline{\psi}$，则 Moore 自动机等价于 Mealy 自动机．

称Moore 自动机 $\mathfrak{A}=(A,S,B,\varphi,\psi)$ 为一个自治自动机(autonomous automaton)或一个产生器(generator)，如果转移函数不依赖输入字母表的字母．初始自治自动机 $\mathfrak{A}_{s_1}$ 的行为(behaviour of an initialized autonomous automaton)通常指超字

$$\psi(s_1)\psi(\varphi(s_1))\psi(\varphi^2(s_1))\cdots,$$

其中 $\varphi^{n+1}(s)=\varphi(\varphi^n(s))$．这个序列除去某个开始部分外是周期的．

称有限自动机 $\mathfrak{A}$ 为一个转移系统(transition system)，如果 $B=S$ 且等式 $\overline{\psi}(s,a)=s$ 对任何 $s\in S$ 成立，或者输出字母表 B 为空集．因此，一个转移系统由三个参数 (A,S,φ) 完全定义．

有限自动机和有限自动机的功能等概念可以用几种等价的方法定义(见**自动机的描述方法**(automata,methods of specification of)，**自动机的行为**(automaton, behaviour of an))．所谓典范方程(canonical equations)已被广泛地使用．对任一字 α，以 $\alpha(t)$ 表示 α 的第 t 个字母，以 $|\alpha|$ 表示 α 的长．一个有限自动机 $\mathfrak{A}$ 的功能 F 恰包含满足下列条件的字的三元组 (α,σ,β)：1) $|\alpha|=|\beta|=|\sigma|-1$；2) 对每个 $t(1\leqslant t\leqslant|\alpha|)$ 等式 $\sigma(t+1)=\varphi(\sigma(t),\alpha(t))$ 和 $\beta(t)=\psi(\sigma(t),\alpha(t))$ 成立．为定义一个初始有限自动机 $\mathfrak{A}_{s_1}$ 的行为，还应加上等式 $\sigma(1)=s_1$．这些等式的全体单值地决定一个初始有限自动机的行为，通常称为典范方程(canonical equations)．典范方程广泛使用于自动机的分析和综合．

微观方法(micro approach)．

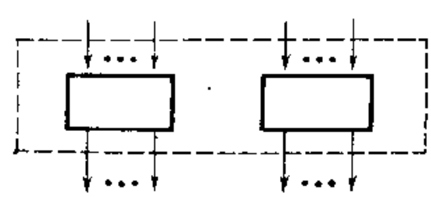


图1

考虑由如上定义的、输入输出字母表形如 A^n 的有限自动机所组成的元件集，其中 A 是一个对所有元件都相同的有限字母表．由这些元件组成的结构有限自动机的构造规则描述输入和输出允许的连接(合一)，并定义所得有限自动机的输入和输出集．

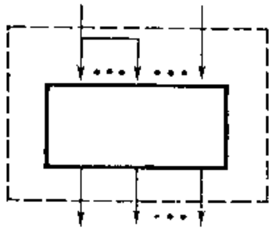


图 2.

这种有限自动机的最重要例子是逻辑网络(logical networks),下面提出此概念的一种表述．考虑情形 $A=\{0,1\}$,且元件是表示单状态有限自动机的所谓功能元件(functional elements)和一种称为延迟器(delayer)的特殊 Moore 自动机．后者的特征是,它有两个状态,通常用输入字母表的字母 0 和 1 表示,且迁移和输出函数满足条件: $\varphi(a,b)=b$ 和 $\psi(a)=a$．因为功能元件只有一个状态,他们完全由输出函数 ψ 决定,现在的情形 ψ 是一个 n 元 **Boole 函数**(Boolean function),其中 n 是功能元件的输入数．元件本身是初始的逻辑网络,其输入和输出分别对应到元件的输入和输出．按照下述规则可进一步构造更复杂的逻辑网络．

1. 两个逻辑网络的并集是一个逻辑网络,其输入和输出分别是两个逻辑网络的输入和输出(图 1).

2. 一个逻辑网络的任意两个输入合一的结果是一个逻辑网络,其输出与原来的逻辑网络一样,其输入除合一的一个输入外与原来的逻辑网络一样(图 2).

3. 一个逻辑网络的一个输出连接到另一个逻辑网络的一个输入的结果是一个逻辑网络．其输入是所有第一个逻辑网络的输入和第二个逻辑网络的未与第一个逻辑网络的输出合一的输入;输出是所有两个逻辑网络的输出(图 3).

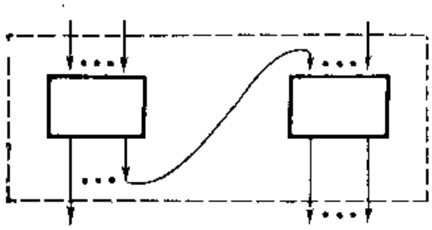


图 3

4. 将逻辑网络的一个延迟元件的输出与该逻辑网络的任一输入合一的结果是逻辑网络,其输入是所有未被合一的原来的逻辑网络的输入,其输出是所有原来的逻辑的输出(图 4)．在某种限制下这一规则也可应用到逻辑网络的一个非延迟元件的输出．

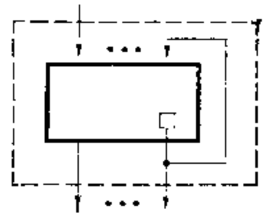


图 4

5. 在任意的逻辑网络中,可能只考虑在规则 1－4 中定义的若干输出作为输出．由功能元件经规则 1, 2, 3 和 5 得到的逻辑网络通常称为功能元件图．

一个逻辑网络的功能本质上可描述如下．设在时刻 t 逻辑网络的所有输入都赋值以特定的输入字母,且延迟元件的状态给定．则在此时刻,按照下述规则,逻辑网络的元件的所有输入和输出,特别是逻辑网络的所有输出,都将赋予字母．如果字母 $a_{i_1},\cdots,a_{i_n}$ 已经赋值到具有输出函数 $\psi(x_1,\cdots,x_n)$ 的一个功能元件的输入,则其输出在此时刻的赋值为 $\psi(a_{i_1},\cdots,a_{i_n})$．如果在时刻 t 延迟器处在状态 a,则其输出在此时刻的赋值为字母 a．相同的字母赋予合一的输入和输出．进一步,在时刻 $t+1$ 的延迟器状态由时刻 t 的输入字母决定,如前所述即 $\varphi(a,b)=b$．因此,如果延迟器的初始状态被指定,则逻辑网络定义一个字母表 A^m 上的输入序列到字母表 A^n 上的输出序列的映射,其中 $m\geqslant 1$ 是逻辑网络的输入数,$n\geqslant 1$ 是逻辑网络的输出数．这种映射类恒同于第 1 种意义下有限自动机实现的字上函数类(即有限决定函数类)．这是因为上述逻辑网络的功能与有限自动机 (A^m,S,A^n,φ,ψ) 的功能一样,其中 m 是逻辑网络的输入数,n 是逻辑网络的输出数,S 是逻辑网络的所有延迟器的状态集的 Descartes 积;转移函数 φ 是按坐标方式应用延迟器的转移函数,而输出函数 ψ 由前述的功能元件和延迟元件的功能决定．

例如,设元件为延迟器(在图 5 中的记号为长方形)和输出函数为 $\bar{x}$, $x\vee y$, $x\& y$ 的功能元件(记号为带有相应函数符号的三角形)．

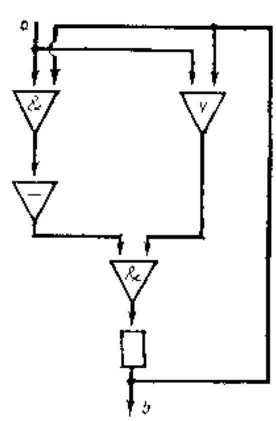


图 5

图5表示一个逻辑网络,在时刻t的输出字母为1当且仅当在时刻0,…,t的输入字母包含奇数个字母"1"(在开始时刻延迟器有值0;字母a和b分别表示逻辑网络的输入和输出). 如果$s(t)$, $a(t)$和$b(t)$分别表示时刻t的状态,输入字母和输出字母,则此逻辑网络的功能可由典范方程定义:

$$s(0)=0,\ s(t+1)=s(t)+a(t)\ (\mathrm{mod}\ 2),\ b(t)=s(t).$$

如果采用宏观方法,则此自动机可表示为(A,S,A,φ,ψ)的形式,其中$A=S=\{0,1\}$, $\varphi(s,a)=s+a\ (\mathrm{mod}\ 2)$,且$\psi(s,a)=s$.

有限自动机概念是现代**自动机理论**(automata, theory of)的出发点,它也与这一概念的各种变型和推广有关.

参考文献

[1] Shannon, C. and MacCarthy, J. (eds.), Automata studies, Princeton Univ. Press, 1956 (中译本:C. E.申南,J.麦克卡赛,自动机研究,科学出版社,1963).

[2] Глушков, В. М., Синтез цифровых автоматов, М., 1962.

[3] Кобринский, Н. Е., Трахтенброт, Б. А., Введение в теорию конечных автоматов, М., 1962.

В. Б. Кудрявцев, Ю. И. Янов 撰

【补注】 见**自动机的等价**(automata, equivalence of)条目的补注.

【译注】

参考文献

[B1] 陶仁骥, 自动机引论, 科学出版社, 1986.

陈世华 译 陶仁骥 校

概率自动机 [**automaton, probabilistic; автомат вероятностный**],随机自动机(stochastic automaton)

有限自动机(automaton, finite)的一种推广,其迁移和输出函数是随机函数. 换句话说,一个概率自动机可以定义为一个系统(A,S,B,φ,ψ),其中A,S,B是有限字母表具有和有限自动机情形同样的含义,而φ和ψ分别是映射$S\times A$到S和B的随机函数,且分别用S上和B上的概率测度系$\varphi_{s,a}$和$\psi_{s,a}$表示,其中$a\in A$, $s\in S$. 这些测度常用随机矩阵给出(见**自动机的描述方法**(automata, methods of specification of)). 如果这些概率测度只取两个值0和1,则概率自动机概念实际上等同于确定性自动机(deterministic automaton). 无输出的自治概率自动机实质上等同于离散Марков链. 概率自动机的功能的定义类似于非确定性自动机,而且初始状态由S上的一个概率测度σ定义. 如果概率自动机处于状态s的概率为p且接收输入字母a,则它以概率$p\cdot\omega(s,a,s',b)$进入状态s'和输出字母表中字母b.

如有限自动机一样,概率自动机可按它们的行为类型分为转换器和接受器. 在前一情形,按照功能,概率自动机以某种概率变换输入字到输出字并产生状态字母表中的字. 对等长字的这些概率形成一个概率测度,因此这样的行为可以考虑作给出这种测度的可数系. 在后一情形,给定终结状态子集$S'\subseteq S$和称之为割点(cut point)的区间[0,1]中数λ. 概率接受器$\mathfrak{A}_\sigma=(A,S,\varphi,S',\lambda)$表示的事件由所有这样的$A$上字组成,在其作用下自动机以至少$\lambda$的概率进入某个终结状态,其中$\varphi$是映射$S\times A$到$S$的随机函数且由定义在$S$上的概率测度系$\varphi_{s,a}$定义. 不同于有限自动机,概率自动机可表示事件类是一个连续统. 而且,即使是唯一的一个概率自动机,当λ变化时也可表示一个连续统事件类. 如果输入字母表只含一个字母,则每个概率自动机只表示一个可数事件类,一般地说,也包含非正规事件. 在称之为孤立割点的特殊割点上,概率自动机只表示正规事件. 区间[0,1]中的一个数λ称为给定概率自动机的一个孤立割点(isolated cut point),如果存在正数δ使得任何输入字变换该概率自动机到它的终结状态的概率与λ至少差δ.

有限自动机的大部分代表性概念和问题可以不同的作法推广到概率自动机. 许多概念和问题保持有限自动机的性质. 例如,可引入状态的等价概念使得著名的简单试验状态可分性定理仍保持,见**自动机的试验**(automata, experiments with). 另一方面,不同于有限自动机,它的极小形式在同构意义下是唯一定义的,对一个给定概率自动机存在等价的极小概率自动机的一个连续统.

存在给出概率自动机的不同形式和方法. 例如,一个概率自动机可表示为有两个输入的决定自动机,其中一个输入馈入输入字母的一个随机序列. 概率自动机是许多真实机构的数学模型且被用于研究生物体的行为.

参考文献

[1] Бухараев, Р. Г., Вероятностные автоматы, Казань, 1970.

[2] Starke, P., Abstrakte Automaten, Deutsch. Verlag Wissenschaft., 1969.

В. Б. Кудрявцев, Ю. И. Янов 撰

陈世华 译 陶仁骥 校

自守形式 [**automorphic form; автоморфная форма**]

复空间$\mathbf{C}^n$中有界域D上的**亚纯函数**(meromorphic function),对作用在这个区域上的某个**离散群**(discrete group)Γ满足方程

$$f(\gamma(x))=j_\gamma^{-m}(x)f(x),\quad x\in D,\ \gamma\in\Gamma,$$

其中$j_\gamma(x)$是映射$x\to\gamma(x)$的Jacobi行列式,m是一个

整数，称为自守形式的权(weight of the automorphic form)．如果在群Γ的作用下没有不动点，那么自守形式就定义了商空间 D/Γ 上的微分形式，反之亦然．自守形式可用来构造出非平凡的**自守函数**(automorphic function)．已经证明：如果 $g(x)$ 是区域 D 上的一个全纯有界函数，那么对大的 m 值，级数

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} g(\gamma(x))j_\gamma^m(x)$$

收敛，从而它表示一个权为 m 的非平凡的自守函数．这些级数称为 Poincaré θ 级数．

上面给出的自守形式的经典定义近来成为 Lie 群及阿代尔群的离散子群理论中一个有深远意义的推广的出发点．

参考文献

[1] Poincaré, H., Oeuvres de Henri Poincare. Gauthier-Villars, 1916－1965.

[2] Siegel, C. L., Automorphe Funktionen in mehrerer Variablen, Math. Inst. Göttingen, 1955.

A. H. Паршин 撰

【补注】 从文献[A2]和[A3]可以对自守形式的近代发展、课题以及它与其他数学分支的关系有某种了解(更为一般的概念见**自守函数**(automorphic function)条目的补注)．

参考文献

[A1] Baily, W. L. jr., Introductory lectures on automorphic forms, Iwanami Shoten & Princeton Univ. Press, 1973.

[A2] Borel, A. and Casselman, W.(eds.), Automatic forms, representations and L-functions, 1－2, Amer. Math. Soc., 1979.

[A3] Gelbart, S. S., Automorphic forms on adèle groups, Princeton Univ. Press, 1975.

张明尧 译　潘承彪 校

自守函数[automorphic function; автоморфная функция]

这样一个多复变量的**亚纯函数**(meromorphic function)，使得它在一个给定复流形 M 的解析变换的某**离散群**(discrete group)Γ下是不变的：

$$f(\gamma(x)) = f(x),\quad x\in M,\quad \gamma\in\Gamma.$$

自守函数常常定义为仅仅包含定义在 n 维复空间 $\mathbf{C}^n$ 的一个有界连通域 D 上的函数，使得它在这域的一个自同构的离散群Γ下是不变的．

商空间 $X=M/\Gamma$ 可赋与一个复结构，于是自守函数是 X 上的亚纯函数．在所研究的大多数情况都是考虑空间 X 具有紧化 $\bar{X}$ 的情形．因此自然地在自守函数的定义中包含要求它作为一个亚纯函数可扩充到整个空间 $\bar{X}$．如果 $M=D$(即 M 是一个有界连通域)．则仅当 $n=1$ 时才需要这个条件(如果 $n>1$ 或者 M/Γ 是紧的，则这条件是自然满足的)．容易证明自守函数构成一个域 $K(\Gamma)$，而这个域的研究则是自守函数理论的主要任务之一．

单个复变量的自守函数比较彻底地被加以研究，其理论基础是在19世纪由 F. Klein([1])和 H. Poincaré([2])奠定的．那时流形 M 通常考虑为单连通区域．M 可区分为三种情形：$M=P^1(\mathbf{C})$(复射影直线或 Riemann 球，$M=\mathbf{C}$ 和 $M=H$(上半平面 $\{z\in\mathbf{C}: \mathrm{Im}\,z>0\}$)．在第一种情形离散群Γ是有限的，曲线 M/Γ 是亏格为0的代数曲线(见**曲线的亏格**(genus of a curve))，因此自守函数生成一个有理函数域．在 $M=\mathbf{C}$ 情形下自守函数的例子是周期函数(因此函数 $e^{2\pi iz}$ 在平移群 $\{z\to z+n,\ n\in\mathbf{Z}\}$ 下是不变的)，特别地，另一例子是椭圆函数．在后一种情形，曲线 M/Γ 是紧的并且是一椭圆曲线，而域 $K(\Gamma)$ 是在 M/Γ 上所有代数函数所成的域．最后，当 $M=H$ 时，离散群Γ使得 M/Γ 是紧的或者有有限体积(在 Poincaré 度量下)，M/Γ 是一代数曲线而 $K(\Gamma)$ 仍然是在 M/Γ 上代数函数的域．此曲线的亏格 g 可以对在上半平面 H(在此看成是 Лобачевский 平面)构造Γ的形状是多边形的基本域决定．这时构造自守函数的基本方法是考虑两个具有相同的充分大的权的自守形式(见**自守形式**(automorphic form))的商．这个方法是 Poincaré 的，他用它证明了关于自守函数域的结构的上述结果([2]，[3]，[4])．关于椭圆函数的类似构造是将这样的函数表为 θ 函数的商．利用单值化理论可以证明所有单变量的代数函数域都可以用这样的方式得到([3])．

这些早在19世纪就已得到的结果，给出了 $n=1$ 时的自守函数域和使空间 H/Γ 具有有限体积的群Γ的完全的描述．对于 H/Γ 具有无限体积的群Γ(Klein 群)情形的描述就困难得多；这个问题仍然在深入研究之中([5]，[6])．

在20世纪自守函数理论集中在多个变量的函数上．也许在19世纪 n 个变量的自守函数只有 Abel 函数的情形进行了详细研究，它与 Abel 簇的关系类似于椭圆函数和椭圆曲线之间的关系([1]，[7])．在有界域 D 上的 n 个变量的自守函数的第一个例子是 C. L. Siegel 的模函数([7])(见**模群**(modular group))．它们的定义域是上半平面 H 的一个 n 维拓广且是有界对称域的主要例子之一．Siegel 也是得到有界域 D 上任意自守函数的第一个一般性结果的人．他推广了上述构造自守函数的 Poincaré 方法，并且证明了域 $K(\Gamma)$ 总是至少包含 n 个代数独立的函数．

今后则致力于阐明使下述代数关系定理(theorem on algebraic relations)成立的区域 D 和群Γ：如果 f_1，

…, f_n是代数独立的自守函数,那么域$K(\Gamma)$是有理函数域$\mathbf{C}(f_1,\cdots,f_n)\subset K(\Gamma)$的有限代数扩张.

在写本书时(1977)这定理在下述情形得到了证明: 1) 如果商空间D/Γ是紧的([7]); 2) 如果群Γ是伪凹的([8]);及3) 如果D是对称域而Γ是一算术群. 伪凹群(pseudo-concave group)定义如下: 命X为一区域D的子区域, 使得它的闭包仍然包含在D中. 这时边界点$x_0\in\partial X$称为拟凹的,如果对x_0的任意开邻域U和在U内正则的任意函数$\varphi(x)$存在一点$x\in U\cap X$使得$|\varphi(x)|\geq|\varphi(x_0)|$. 群$\Gamma$称为拟凹的,如果存在一子区域$X\subset D$使得每一边界点$x\in\partial X$都可用$\Gamma$的一个元素变为$X$的一个内点或者边界$\partial X$的一个伪凹点.

在n个变量的自守函数理论中出现的代数簇的本性和性质还没有深入研究,这与单变量的情形有所区别.

自守函数概念的重要拓广——自守形式,θ函数(theta-function)和一些其他拓广——都是下述一般结构的特殊情形. 考虑到M上的一纤维丛(见**纤维化**(fibration))L和在其上的群Γ的一个作用. 于是可认为L的截面在Γ下是不变的. 如果纤维丛L和群Γ的作用两者均是平凡的,则可得到自守函数.

自守函数的研究显示了区域D的自同构群所起的重要作用. 自守函数理论的概念和方法就是这样应用于代数群的理论中, 其中它们在描述无穷维表示中起了重要作用([10]).

从自守函数理论的发展一开始,它就和数学的其他分支的许多方面联系着. 特别是应用到代数几何方面的联系. 除了上述讨论的结果外,自守函数理论中的方法在对象为代数曲线和Abel簇等的模簇的研究中是重要的. 自守函数在数论中也具有重要的意义. 在写本书时它们是研究代数簇的θ函数的仅有工具([11]). 在自守函数论中另一个很有希望的数论方向是p进自守函数和形式的研究([9]). 最后,必须提到应用自守函数来研究复域上的常微分方程([12])和构造次数高于四的代数方程的解.

参考文献

[1] Klein, F., Development of mathematics in the 19th century, 1, Math. Sci. Press, 1979, Chapt. 8 (译自德文).

[2] Poincaré, H., Oeuvres de Henri Poincaré, Vol. 4, Gauthier-Villars, 1916–1965.

[3] Ford, L. R., Automorphic functions, Chelsea, reprint, 1951.

[4] Bateman, H. and Erdélyi, A., Higher transcendental functions. Automorphic functions, Vol. 3, McGraw-Hill, 1955.

[5] Адамар, Ж., Неевклидова геометрия в теории автоморфных функций, пер. с франц., М., 1952.

[6] Kra, I., Automorphic forms and Kleinian groups, Benjamin, 1972.

[7] Siegel, C. L., Automorphe Funktionen in mehrerer Variablen, Math. Inst. Göttingen, 1955.

[8] Andreotti, A. and Grauert, H., Algebraische Körper von automorphen Funktionen, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen*, 3 (1961).

[9] Serre, J.-P., Delinge, P. and Kuyk, W. (eds.), Modular functions of one variable. Proc. Internat. Summer Scool RUCA 1972, 1–3, Springer, 1973.

[10] Jacquet, H. and Langlands, R. P., Automorphic forms on GL(2), Springer, 1970–1972.

[11] Shimura, G., Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions, Math. Soc. Japan, 1971.

[12] Голубев, В. В., Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, М., 1950.

А. Н. Андрианов, А. Н. Паршин 撰

【补注】 上述关于域$K(\Gamma)$是有理函数域$\mathbf{C}(f_1,\cdots,f_n)$的一个有限代数扩张(关于代数关系的定理)的结果在对称域D和算术群Γ的情形是由W. L. Baily jr. 与A. Borel([A6])及I. I. Pyatetskiĭ-Shapiro([A7])分别独立得到的.

命X是某一类空间(例如复的或实解析的,光滑流形),Γ为X的自同构群, 又H是作用在一空间V上的群. 命$\mathrm{Mor}(X,H)$为从X到H内的射的集合. Γ的自守因子(automorphy factor)是Γ的1上闭链(1-cocycle)(交叉同态(crossed homomorphism))j, 它取值于$\mathrm{Mor}(X,H)$. 这表示它是一映射$j: X\times\Gamma\to H$使得$j(x,\gamma\gamma')=j(x,\gamma)j(x\gamma,\gamma')$. 一个例子是$j$作为微分同胚$X\to X$(链式法则)的Jacobi矩阵. j型的自守形式(automorphic form of type j)现在是一射$f: X\to V$使得$f(x)=j(x,\gamma)f(x\gamma)$. 取Jacobi矩阵作为一自守因子及取作用在$\mathbf{C}$上的$H=\mathrm{GL}(\mathbf{C})$,通过行列式的$m$次幂, 我们得到权$m$的自守形式(automorphic form of weight m)的较经典概念,见**自守形式**(automorphic form). 藉助于$(X,V)\gamma=(X,\gamma,j(X,\gamma)V)$自守因子$j$可用来定义$\Gamma$在$X\times V$上的作用. 现在如果$\Gamma$作为一真不连续变换群自由作用在$X\times V$上,那么$(X\times V)/\Gamma$是具有纤维$V$的$X/\Gamma$上的一纤维丛,而自守形式是这纤维丛的截面,或者,等价地,是平凡丛$X\times V\to X$的Γ等价的截面.

用比较多的群的理论命G为一具有Lie代数$\mathfrak{g}$的实半单Lie群,藉助扩张这样一个映射,此映射指定$a\in\mathfrak{g}$对应于右不变向量场,我们将$\mathfrak{g}$的万有包络代数$U_{\mathfrak{g}}$等同于G上的右不变微分算子$D(G)$. 命K为G的极大紧子群,Γ为一离散子群, 又命$\rho: K\to \mathrm{GL}(V)$为$K$的一个表示. 一光滑的向量值函数$f: G\to V$称为对$\Gamma$的一个自守形式(automorphic form), 如果$f(kg\gamma)=\rho(k)f(g)$, $(Z_{\mathfrak{g}})f$是一有限向量空间, 其中$Z(\mathfrak{g})=U_{\mathfrak{g}}=$

$D(G)$是U_q的中心，而f满足一增长条件．和上面讨论的"j型自守形式"概念之间的联系由$X=K\backslash G$，K在G中的左旁系空间和一规范自守因子(具有$H=K_C$)所提供，此处规范自守因子可在上述理论中定义．所有这些较详细的情形见[A1]．

除了上述应用自守函数于常微分方程和代数方程外，还有一个在关于$SL_2(\mathbf{R})$的离散子群的自守函数的调和分析和应用于非 Euclid 波动方程(non - Euclidean wave equation)的 Lax - Philips 散射理论(Lax - Philips scattering theory)之间的最为明显的联系，见[A4]，[A5]．

与自守形式和自守函数紧密相关的更多材料，也见于条目**模形式**(Modular form)；**模函数**(modular function)；Fuchs **群**(Fuchsian group)；**离散子群**(discrete subgroup)；**离散变换群**(discrete group of transformations)．

参考文献

[A1] Borel, A., Introduction to automorphic forms, in A. Borel and G. D. Mostow (eds.), Algebraic groups and discontinuous subgroups, Amer. Math. Soc., 1966, pp. 199－210.

[A2] Fricke, R. and Klein, F., Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen, 1－2, Teubner, 1926.

[A3] Borel, A. and Casselman, W., Automorphic forms, representations and L-functions, 1－2, Amer. Math. Soc., 1979.

[A4] Faddeev, L. D. and Pavlov, B. S., Scattering theory and automorphic functions, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **27** (1972), 161－198.

[A5] Lax, P. D. and Philips, R. S., Scattering theory for automorphic functions, *Bull. Amer. Math. Sco.* (*New. Ser.*), **2** (1980). 261－296.

[A6] Baily, W. L. jr. and Borel, A., Compactifications of arithmetic quotients of bounded symmetric domains, *Ann. of Math.*, **84** (1966), 442－528.

[A7] Pyatetskiĭ Shapiro, I. I., Arithmetic groups on complex domains, *Russ. Math. Surveys*, **19** (1964), 83－109.

钟同德 译

自同构 [automorphism；автоморфизм]

一些对象的系统到其自身的**同构**(isomorphism)(同构映射)．一个任意代数系统的所有的自同构全体构成一个群，对这个群的研究是研究所述代数系统自身的性质的一个重要且有力的工具．(见**代数系统的自同构**(algebraic system, automorphism of an)．)

周伯埙 译

自治系统 [autonomous system；автономная система]，常微分方程的

一个不显含自变量t(时间)的常微分方程组．标准形式的一阶自治系统的一般形式是：

$$\dot{x}_j = f_j(x_1, \ldots, x_n),\ j=1, \ldots, n,$$

或者用向量符号，

$$\dot{x} = f(x) \tag{1}$$

引进一个新未知函数$x_{n+1}=t$，可将一个非自治系统$\dot{x}=f(t, x)$化为一个自治系统．在历史上，自治系统是在描述有限自由度的物理过程时首先出现的，也称为动力或守恒系统(见**动力系统**(dynamical system))．

(1)式的复自治系统等价于具有$2n$个未知函数的实自治系统

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{Re}\,x) = \mathrm{Re}\,f(x),\quad \frac{d}{dt}(\mathrm{Im}\,x) = \mathrm{Im}\,f(x).$$

复自治系统理论的基本内容——不同于实的情况——是在$f(x)$解析的情况下建立的(见**微分方程解析理论**(analytic theory of differential equations))．

考虑一个实系数的解析系统和它的实解．设$x=\varphi(t)$为解析系统(1)的一个(任意的)解，设$\Delta=(t_-, t_+)$为它有定义的区间，并设$x(t;t_0,x^0)$为具有初值$x|_{t=t_0}=x^0$的解．令G为$\mathbf{R}^n$中的一个区域且$f\in C^1(G)$．如果$f(x^0)\equiv 0$，则点$x^0\in G$称为自治系统(1)的平衡点(equilibrium point)或静止点(point of rest)．解$\varphi(t)\equiv x^0(t\in\mathbf{R}=(-\infty, +\infty))$对应于这样的平衡点．

解的局部性质(local properties of solutions)．1)如果$\varphi(t)$是解，则对任一$c\in\mathbf{R}$，$\varphi(t+c)$是解．

2)存在性(existence)：对任何$t_0\in\mathbf{R}$，$x^0\in G$，在某一区间$\Delta\ni t$内存在一个解$x(t;t_0,x^0)$．

3)光滑性(smoothness)：如果$f\in C^p(G)$，$p\geq 1$，那么$\varphi(t)\in C^{p+1}(\Delta)$．

4)对参数的依赖性(dependence on parameters)：设$f=f(x,\alpha)$，$\alpha\in G_\alpha\subset\mathbf{R}^m$，其中$G_\alpha$是一个区域；如果$f\in C^p(G\times G_\alpha)$，$p\geq 1$，那么$x(t;t_0,x^0,\alpha)\in C^p(\Delta\times G_\alpha)$(其细节见[1]－[4])．

5)设x^0为非平衡点，那么分别存在点x^0，$f(x^0)$的邻域V，W，以及**微分同胚**(diffeomorphism)$y=h(x)$：$V\to W$，使得该自治系统在W中有形式$\dot{y}=$常数．

在自治系统(1)中作变量变换$x=\varphi(y)$，得到系统

$$\dot{y} = (\varphi'(y))^{-1}f(\varphi(y)), \tag{2}$$

其中$\varphi'(y)$是 **Jacobi 矩阵**(Jacobi matrix)．

解的整体性质(global properties of solutions)．1)自治系统(1)的任一解$x=\varphi(t)$可扩展至区间$\Delta=(t_-, t_+)$．如果$\Delta=R$，那么此解就称为无限可扩张的(unboundedly extendable)；如果$t_+=+\infty$，$t_->-\infty$，那么此解就称为关于时间前向无限可扩张的(unboundedly

extendable forwards in time)(类似地 关于时间后向(backwards in time)). 如果 $t_+ < +\infty$, 那么对任一紧集 $K \subset \Omega, x^0 \in K$, 存在一个 $\tau = \tau(K) < t_+$ 使得对 $t > \tau(K)$ 点 $x(t; t_0, x^0)$ 落在 K 之外(对 $t_- > -\infty$, 情况类似; 见**微分方程解的延拓**(prolongation of solutions of differential equations)).

2)在这样的意义上扩张是唯一的, 即具有共同初始数据的任何两个解在它们整个定义域内是恒等的.

3)一个自治系统的任何解属于下列三种类型之一: a)非周期的, 对所有 $t_1 \neq t_2$, $t_i \in R$, $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$; b)周期的, 非常数; c) $\varphi(t) \equiv$ 常数.

自治系统的几何解释. 对每一个解 $x = \varphi(t)$ 在区域 G 内规定了一条相应的曲线 Γ: $x = \varphi(t)$, $t \in \Delta$. 这时 G 称为自治系统的**相空间**(phase space), Γ 是相空间中的轨道(trajectory in the phase space), 解则可理解为相空间中沿着轨道的运动. 由公式 $g^t x^0 = x(t; 0, x^0)$ 定义的映射 g^t: $G \to G$ (即每一点在时间 t 持续的过程中沿相轨道移动)称为相位流(phase flow). 在它的定义域内相位流满足以下条件: 1) $g^t x$ 对 (t, x) 为连续; 2)有群性质(group property) $g^{t_1+t_2}x = g^{t_1}g^{t_2}x$.

Liouville 定理(Liouville theorem)成立: 设 $D \subset G$ 为一有限体积的区域, 而 v_t 为区域 $g^t D \subset G$ 的体积, 那么

$$\left.\frac{dv_t}{dt}\right|_{t=0} = \int_D \operatorname{div} f(x)\, dx. \qquad (3)$$

对于一个 Hamilton 系统, (3)式的一个推论为相位流的相位体积守恒. (3)式的第二个变式按下述方式获得. 设 $x = \varphi(t, \alpha)$ 为(1)式的一族解, $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}) \in G_\alpha$, 设 G 为一区域, 并设 $\varphi \in C^1(\Delta \times G_\alpha)$, 那么

$$\frac{d}{dt}\ln I(t, \alpha) = \operatorname{div} f(x), \qquad (3)$$

其中 $I(t, \alpha) = \det \partial x / \partial(x, \alpha)$.

相轨道的结构(structure of phase trajectories). 1)任意两个相轨道或者没有公共点或者相重合.

2)任一相轨道属于下列类型之一: a)一个光滑、简单、非封闭的 Jordan 弧; b)一个环, 即与一个圆微分同胚的曲线; c)一个点(一个平衡点). 在一个不是平衡点的一点的小邻域内相轨道的局部结构是平凡的(见解的局部性质 5)): 相轨道族与平行直线族微分同胚. 对于线性自治系统, 一个平衡点邻域中相轨道的结构是已知的, 因为自治系统是可积的([5]). 对于非线性自治系统, 这个问题甚至在 $n=2$ 的情况下也尚未完全解决(见**微分方程的定性理论**(qualitative theory of differential equations)). 这一问题的一个方面是平衡点的稳定性问题(见**稳定性理论**(stability theory)). 下面将给出一些结果. 设 x^0, y^0 是系统(1)的平衡点, 设

$$\dot{y} = g(y) \qquad (1')$$

并设 U, V 为点 x^0, y^0 的邻域. 如果存在邻域 U, V 和一个双映射 $h: U \to V$, 使得 $(h \circ f^t)x = (g^t \circ h)x$ (对于 $x \in U, f^t x \in U, (g^t \circ h)x \in V$), 即作为 $y = h(x)$ 变换的结果, 自治系统(1)的轨道变成自治系统(1′)的轨道, 就称系统(1)和(1′)在它们平衡点 x^0, y^0 的邻域中是等价的(equivalent). 如果 h 是一个微分同胚(同胚), 则称此等价是可微的(differentiable)(拓扑的(topological)). 设 x^0 是自治系统(1)的平衡点, 设矩阵 $f'(x^0)$ 是非退化的, 并设它不具有任何纯虚数本征值. 那么自治系统(1)在 x^0 的一个邻域中与它的线性部分 $\dot{y} = f'(x^0)y$ 拓扑地等价. 一个重要的例子是自治系统 $\dot{x} = Ax, \dot{y} = By$, 其中 A, B 是具有纯虚数本征值且 $n > 2$ 的常数矩阵; 至于这些自治系统何时拓扑地等价是未知的. 自治系统理论中最基本的问题之一是相轨道整个族的结构问题. 对于 $n=2$ 的情况已获得最完全的结果, 但是即使在此情况下解答也是远不够完全的.

参考文献

[1] Петровский, И. Г., Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, 6 изд., М., 1970 (中译本: И.Г. 彼得罗夫斯基, 常微分方程论讲义, 人民教育出版社, 1959).

[2] Понтрягин, Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 2 изд., М., 1965 (中译本: Л. С. 庞特利雅金, 常微分方程, 上海科学技术出版社, 1962).

[3] Coddington, E. A. and Levinson, N., Theory of ordinary differential equations, McGraw - Hill, 1955.

[4] Арнольд, В. И., Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., 1971 (中译本: В. И. 阿诺尔德, 常微分方程, 科学出版社, 1985).

[5] Немыцкий, В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.-Л., 1949 (中译本: В. В. 涅梅茨基, В. В. 斯捷巴诺夫, 微分方程定性论, 科学出版社, 1956).

М. В. Федорюк 撰

【补注】 人们已研究并解决了两个线性动力系统 $\dot{x} = Ax$ 和 $\dot{y} = By$ 拓扑等价(轨道系统的同胚等价(homeomorphic equivalence of orbit systems)问题([A2]). 设 V_A^+, V_A^-, V_A^0 分别对应于具有正、负及零实部 A 的(广义的)本征值的 R^n 的分解, 并设 A^0 为 A 对 V_A^0 的限制. 那么, 如果 $\dim V_A^+ = \dim V_B^+$, $\dim V_A^- = \dim V_B^-$, 并且 A^0 和 B^0 线性等价(即对某一常数可逆矩阵 S, $A^0 = S^{-1}BS$), 则 $\dot{x} = Ax$ 和 $\dot{y} = By$ 的轨道系统同胚.

在离散动力系统情况下有一类似问题: 对于两个线性自同态 A, B: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, 何时存在一个自同态 φ 使得 $A\varphi = B\varphi$, 这是一个更深的问题(矩阵的拓扑相似性(topological similarity of matrices)), 并且必须考虑像

透镜空间(lens spaces)和 P. A. Smith 猜想(P. A. Smith conjecture)等类问题. 完整的叙述见 [A1]. 根据 G. de Rham 定理, 如果正交矩阵 A 和 B 是拓扑相似的, 并且拓扑(非线性)相似性保持单位球以及限制于其中的微分同胚, 那么矩阵 A 和 B 也是线性相似的. S. E. Cappell 和 J. L. Shaneson 的结果表明, 在维数 $\leqslant 5$ 的情况下, 对于本征值的绝对值为 1 的矩阵(关键的情况)拓扑和线性等价是一样的. 结合 Kuiper - Robbin 的结果([A3])就得到维数最大为 5 的矩阵完全的拓扑分类. 在更高维情况下, 对于本征值模数为 1 的矩阵拓扑相似, 一般地说绝不意味着线性相似([A1]). 这些结果用来断定连续时间系统相位流在哪些时间 t 变为拓扑等价的. 这甚至在不是拓扑等价系统情况下也会重复发生.

参考文献

[A1] Cappell, S. E. and Shaneson, J. L., Non-liear similarity, *Ann. of Math.*, **113** (1981), 315–355.

[A2] Kuiper, N. H., The topology of the solutions of a linear differential equation on $\mathbf{R}^n$, in Proc. Internat. Congress on Manifolds Tokyo, 1973, pp. 195–203.

[A3] Kuiper, N. H. and Robbin, J. W., Topological classification of linear endomorphisms, *Inv. Math.*, **19** (1973), 83–106.

周芝英 译

自命名 [autonymy; автонимия]

一个表示式(一个字)用作其自身的名字. 表示式的这种用法称为自命名的(autonymous)(不同于通常意义下的用法). 例如, 如果我们说"x 是方程 $x+3=2$ 的组成部分", 那么我们是用 x 作为字母 x 的名字, 并且用"$x+3=2$"作为表示式 $x+3=2$ 的名字. 如果我们说"12 可以被 2 整除", 那么术语"12"是非自命名用法(用来指定一个整数), 然而如果我们说"12 由两个数字组成", 那么"12"是自命名用法(作为自身的名字).

在普通语言中, 通常有来自上下文和语法上的充分可靠的因素, 用以区别自命名和非自命名用法. 然而在某些情况下, 区别两种用法可能是困难的. 这时需要特别留心避免模棱两可的用法: 必须区别对象本身和它的名字(名称); 在给定语言中必须把用作对象名字的术语和用名字表示的对象的术语区别开来. 对象和它的名字之间的区别可以用为此目的而特别创造的术语, 或是用加引号的方式来实现; 加引号的术语不同于不加引号的同一术语. 一个术语的自命名用法把术语的意义和术语本身结合在一起了: 它不但是对象自身, 而且又用它作为所表示的对象的名字.

参考文献

[1] Church, A., Introduction to mathematical logic, 1, Princeton Univ. Press, 1956.

[2] Kleene, S. C., Introduction to metamathematics, North - Holland, 1951 (中译本: S.C. 克林, 元数学导论, 科学出版社, 1984, 1985).

[3] Curry, H. B., Foundations of mathematical logic, McGraw - Hill, 1963.

A. C. Кузичев 撰 卢景波 译 王世强 校

平均值 [average; среднее] 一组实数 $a=(a_1, \cdots, a_n)$ 关于权 $q=(q_1, \cdots, q_n)$ ($q_i>0$, $\sum q_i=1$) 的量

$$\mathfrak{M}_\varphi(a, q)=\varphi^{-1}\left[\sum_i q_i\varphi(a_i)\right],$$

其中 $\varphi(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上严格单调的连续函数. 当 $\varphi(x)=x^r$ 时, 我们得到

$$\mathfrak{M}_r(a, q)=\left[\sum_i q_i a_i^r\right]^{1/r}.$$

特别地, 当 $r=1$, $q_i=1/n$ $(i=1, \cdots, n)$ 时, $\mathfrak{M}_r(a, 1/n)=\mathfrak{A}(a)$ 就是数 $a_1, \cdots, a_n$ 的算术平均值(arithmetic average); 而当 $r=-1$ 时, 相应的是调和平均值(harmonic average). 几何平均值(geometric average) $\mathfrak{G}(a)=(\prod_i a_i)^{1/n}$ 以及加权几何平均值(weighted geometric average)

$$\mathfrak{G}(a, p)=\left[\prod_i a_i^{p_i}\right]^{1/\sum p_i}$$

则单独引人.

平均值理论中的基本结果之一是不等式 $\mathfrak{G}(a)<\mathfrak{A}(a)$ 成立, 除非所有 a_i 全部相等. 另外的结论是:

1) $\mathfrak{M}_\varphi(ka, p)=k\,\mathfrak{M}_\varphi(a, p)$, $k>0$;

2) $\mathfrak{M}_\psi(a, p)=\mathfrak{M}_\varphi(a, p)$ 当且仅当 $\psi=\alpha\varphi+\beta$, $\beta\in\mathbf{R}$, $\alpha\neq 0$;

3) $\mathfrak{M}_\psi(a, p)\leqslant\mathfrak{M}_\varphi(a, p)$ 当且仅当 $\varphi\circ\psi^{-1}$ 为凸函数; 特别, 若 $r<s$, 则 $\mathfrak{M}_r(a, p)\leqslant\mathfrak{M}_s(a, p)$.

平均值概念还可以推广到无穷数列, 只要相应的级数以及乘积收敛. 也可以推广到函数. 下面就是一个例子: 设在考虑的区间上, $f(x)\geqslant 0$ 几乎处处成立, $p(x)>0$. 又设

$$\mathfrak{M}_\varphi(f, p)=\frac{\varphi^{-1}\left[\int_a^b p(x)\varphi(f(x))\,dx\right]}{\int_a^b p(x)\,dx},$$

那么下式成立:

$$\int_a^b f(x)p(x)\,dx\leqslant\mathfrak{M}_\varphi(f, p)\int_a^b p(x)\,dx.$$

参考文献

[1] Hardy, G. H., Littlewood, J. F. and Pólya, G., Inequalities, Cambridge Univ. Press, 1934 (中译本: G. H. 哈代等,不等式,科学出版社,1965). B. И Соболев 撰

【补注】 对应于平均值一词,在英文中除 average 外,还经常使用 mean(平均值)这个词. 例如,算术平均值(arithmetic mean),几何平均值(geometric mean)等.

参考文献

[A1] Mitrinović, D. S., Analytic inequalities, Springer, 1970.

[A2] Mitrinović, D. S., Elementary inequalities, Noordhoff, 1964. 王斯雷 译

平均转动 [**average rotation**; **среднее движение**]. 一致殆周期复值函数 $f(t)$ 的幅角 $\arg f(t)$ 的由极限

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\arg f(t)}{t}=c$$

的存在性(在某些给定的条件下,见后文)所构成的一种现象. 极限本身也称为平均转动(平均运动(mean motion)). 如果对所有的 t, $|f(t)|\neq 0$, 则意味着可以选取 $\arg f(t)$ 的一个连续的分枝. 对于解析的殆周期函数 f, 即使它含有零点,仍可以保留平均转动的概念. 即,引进"右"幅角及"左"幅角的概念,它们的差在 f 的 k 阶零点处跳跃 $\pm k\pi$, 并且相应地陈述右平均转动及左平均转动. 若它们相等,则简单地称为平均转动.

平均转动问题的出现与下面的事实有关,即在天体力学中行星近日点的经度被近似地表成某个三角多项式

$$f=\sum_{j=1}^{n}a_je^{i\omega_jt}$$

的幅角. J. L. Lagrange 研究了两种简单的情形,即,某一个 $|a_j|$ 大于其余系数的和的情形,以及 $n=2$ 的情形;他还注意到,在其他情形问题就复杂了. 这一问题的研究直到 20 世纪才开始着手(有关它的历史,见[1]-[3]). 一个三角多项式总有一个平均转动这一最终的结果是由 B. Jessen 于 1938 年提出的(关于它的证明,见[1]). (从动力系统理论的角度看,这是沿着流动的轨迹去平均某个定义在圆环面上的函数,这一流动是由单参数子群的元素通过移动定义的. 但是,这个函数有奇点,从而不能现成地应用相应的一般定理.) 比这更早些,H. Bohr 证明了满足条件 $\inf|f(t)|>0$ 的任意一致殆周期函数的平均转动的存在性(见[4]). 在这种情形时,差 $\arg f(t)-ct$ 是一个一致殆周期函数而且有界. 在一般情形时,解析殆周期函数的平均转动也有研究(见[1],[4]). 这时,平均转动并不总是存在,而且即使存在,差 $\arg f(t)-ct$ 也并不一定是有界的. 然而,它仍然可以具有殆周期的某种广义性质;特别地,这对三角多项式是正确的([5]). 除了解析情形以外,只存在一些涉及满足条件 $|f(t)|\neq 0$ 及 $\inf|f(t)|=0$ 的函数 f 的平均转动的孤立结果.

参考文献

[1] Jessen, B. and Tornehave, H., Mean motions and zeros of almost periodic functions, *Acta Math.*, **77** (1945), 137-279.

[2] Jessen, B., Some aspects of the theory of almost periodic functions, in Proc. Internat. Congress Mathematicians Amsterdam, 1954, Vol. 1, North-Holland, 1954, 304-351.

[3] Weyl, H., Mean motion, *Amer. J. Math.*, **60** (1938), 889-896.

[4] Левитан, Б. М., Почти-периодические функции, М., 1953 (中译本: Б. М. 列维坦,概周期函数,高等教育出版社,1956).

[5] Doss, R., On mean motion, *Amer. J. Math.*, **79** (1957), 2, 389-396

[6] Левитан, Б. М., 《Матем. заметки》, 1 (1967), 1, 35-44.

[7] Горин, Е. А.,《Матем. сб.》, **82** (1970), 2, 260-272.

Д. В. Аносов 撰

【补注】 亦用"平均运动"(mean motion)一词代替"平均转动",例如见[2], p. 310. 朱学贤 译 潘文杰 校

平均值变化定理 [**average value, theorem on variations of the**; **вариации среднего значения теорема**], 统计力学中的

关于 **Gibbs 统计系综**(Gibbs statistical aggregate)中的动力学量的平均值因 Hamilton 算子的无穷小变化而产生的变化的一种陈述. 平均值的变化一般讲依赖于"引入"Hamilton 算子变化的方式及初值条件. 设有一个含多个相互作用的粒子的(量子的或经典的)系统,它可由不以显式依赖于时间的 Hamilton 算子所描述,当初始时刻 $t\to-\infty$ 时处于热平衡状态. 当绝热地引入 Hamilton 算子的无穷小的、依赖于时间的扰动时

$$H\to H+\delta V(t),$$

其中

$$\delta V(t)=\sum_{(E)}e^{\varepsilon t-iEt}\delta V_E,\ \varepsilon>0,\ \varepsilon\to+0,$$

不以显式依赖于时间的动力学变量 A 的 Gibbs 平衡平均 $<A>$ 将改变(按对扰动的线性近似)一个量

$$\delta<A(t)>=-2\pi i\sum_{(E)}e^{\varepsilon t-iEt}<<A\mid\delta V_E>>_E^{(ret)},$$

这里 $\ll A|\delta v_E \gg E^{(ret)}$ 是延迟换位 Green 函数的 Fourier 变换(见统计力学中的**Green 函数** (Green function)).

这个定理主要应用于非平衡不可逆过程理论(在此理论中这一定理的一种表述还称为起伏散逸定理 (fluctuation - dissipation theorem))以及从关联函数的方程链与方程组推导 Green 函数的方程链与方程组(见**关联函数(统计力学中的)**(correlation function (in statistical mechanics))).

参考文献

[1] Kubo, R., *J. Phys. Soc. Japan*, 12 (1957), 570.

[2] Боголюбов, Н. Н. [мл.], Садовников, Б. И., 《Ж. экспер. и теор. физики》, 1962, 43, 677.

[3] Боголюбов, Н. Н. [мл.], Садовников, Б. И., Некоторые вопросы статистической механики, М., 1975.

[4] Тябликов, С. В., Методы квантовой теории магнетизма, 2 изд., М., 1975 (英译本: Tyablikov, S. V., Methods of the quantum theory of magnetism, Plenum Press, 1967).

В. Н. Плечко 撰

【补注】

参考文献

[A1] Bogolyubov, N. N. and Bogolyubov, jr., N. N., Introduction to quantum statistical mechanics, World Scientific, 1982.

沈 青 译

平均化 [averaging; усреднение]

计算函数平均值的运算,这些函数是微分方程的构造的一部分,此方程描述周期的、概周期的而总的说来描述振动过程.平均化运算可看成一种类型的光滑化算子.平均化方法首先被用于天体力学中行星绕日运动的研究中.后来又扩展到很广泛的领域中:非线性振动理论、物理学、自动控制理论、天文动力学等等.平均化方法常给出原方程的近似解.适用平均化方法的最典型的微分方程类型如下.

1) Н. Н. Боголюбов 意义下的标准方程组:

$$\frac{dx}{dt}=\mu X(x,t,\mu), \tag{1}$$

这里 x, X 是向量, t 是时间, μ 是正的小参数.

2) 多频率自治 2π 周期系统:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=\mu X(X,y),\\ \frac{dy}{dt}&=\omega(x)+\mu Y(x,y),\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

x, y, X, Y 均是向量, 且

$$X(x,y+(2\pi))\equiv X(x,y),\quad Y(x,y+(2\pi))\equiv Y(x,y),$$

$\omega(x)$ 是频率向量.

3) 多频率非自治系统:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=\mu X(x,y,t),\\ \frac{dy}{dt}&=\omega(x,y,t)+\mu Y(x,y,t).\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

平均化方法用"更简单"的一级近似方程组来代替方程组 (1) - (3):

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mu\mathbf{X}_0(\mathbf{x}); \tag{1'}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}}{dt}&=\mu\mathbf{X}_1(\mathbf{x}),\\ \frac{d\mathbf{y}}{dt}&=\omega(\mathbf{x});\end{aligned}\right\} \tag{2'}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}}{dt}&=\mu\mathbf{X}_2(\mathbf{x},x_0,y_0,t),\\ \frac{d\mathbf{y}}{dt}&=\omega(\mathbf{x},\mathbf{y},t),\end{aligned}\right\} \tag{3'}$$

这里

$$\mathbf{X}_0(\mathbf{x})=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T X(\mathbf{x},t,0)\,dt, \tag{4}$$

$$\mathbf{X}_1(\mathbf{x})= \tag{5}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}X(\mathbf{x},y_1,\ldots,y_n)\,dy_1\cdots dy_n.$$

$$\mathbf{X}_2(\mathbf{x},x_0,y_0,t_0)= \tag{6}$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}X(\mathbf{x},\varphi(x_0,y_0,t_0,t),t)\,dt.$$

公式 (4) - (6) 就是最常用的平均化方法.

公式 (6) 表示"沿生成解"作平均化的格式,先在函数 $X(x,y,t)$ 中, 用方程组

$$\frac{dx}{dt}=0,$$

$$\frac{dy}{dt}=\omega(x,y,t),$$

的生成解来代替 y, 然后再作积分平均(6).

把方程组(1) - (3)改变了以后产生的主要问题是:在尽可能大的时间区间(数量级为 $1/\mu$)内对范数

$$\|x(t,\mu)-\mathbf{x}(t,\mu)\|,\quad \|y(t,\mu)-\mathbf{y}(t,\mu)\|$$

作 ε 估计,这里

$$x(0,\mu)=\mathbf{x}(0,\mu),\quad y(0,\mu)=\mathbf{y}(0,\mu).$$

这就是平均化方法的问题的实质. 对于方程组(1),平均化方法的这一问题是 Боголюбов 提出的,他的结果

成了常微分方程的现代算法理论的基础.

参考文献

[1] Боголюбов, Н. Н., Митропольский Ю. А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, 4 изд., М., 1974 (英译本: Bogolyubov, N. N. and Mitropol'skii, Yu. A., Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations, Gordon and Breach, 1961).

[2] Митропольский, Ю. А., Метод усреднения в нелинейной механике, К., 1971

[3] Волосов, В. М., Моргунов, Б. И., Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем, М., 1971.

[4] Гребеников, Е. А., Рябов, Ю. А., Конструктивные методы анализа нелинейных систем, М., 1979.

Е. А. Гребеников 撰

【补注】[A1] 中给出了关于平均化方法最近的现代处理.

参考文献

[A1] Sanders, J. A. and Verhulst, F., Averaging methods in non-linear dynamical systems, Springer, 1985.

齐民友 译

轴向量 [**axial vector**; **осевой вектор**]. 伪向量 (pseudovector)

有向空间中的一个向量,当空间的取向相反时,它变换为逆向量. 两向量的向量积就是轴向量的一个例子.

БСЭ-3 张鸿林 译

公理 [**axiom**; **аксиома**]

基本的假设,自明的原理. 在演绎的科学理论中,公理是某种理论的一些基本的原始假设,从这些假设出发,通过演绎即纯逻辑推理,可以得出该理论的其他一切内容. 见**公理方法** (axiomatic method).

П. С. Новиков 撰 张鸿林 译

选择公理 [**axiom of choice**; **выбора аксиома**]

集合论中的一条公理,即对任何非空集合簇 F,存在函数 f,使得对 F 中的任何集合 S,均有 $f(S)\in S$(f 称为 F 上的选择函数 (choice function)). 对于有限集簇 F,选择公理可从集合论(如在系统 ZF 中)的其他公理推出.

选择公理是由 E. Zermelo (1904) 明确地表述的,但曾被许多数学家所反对. 其原因首先是由于它不同于集合论其余公理的纯存在特性,其次是由于它的一些不可接受的,甚至与直觉"通常意义"相矛盾的推论. 如由选择公理可推出: 实数的 Lebesgue 不可测集的存在; 球 B 的三分体的存在:

$$B=U_1\cup\cdots\cup U_n,$$

$$B=V_1\cup\cdots\cup V_m,$$

$$B=X_1\cup\cdots\cup X_{n+m},$$

使得 U_i 与 X_i 全等 $(1\leqslant i\leqslant n)$ 且 V_j 与 X_{n+j} 全等 $(1\leqslant j\leqslant m)$. 因此, 球 B 可分为有穷多个部分 $X_1,\cdots,X_{n+m}$,它们可在空间中移动而形成两个与它相等的球.

许多与选择公理等价的公设随后相继被发现. 其中有: 1) 良序定理 (well-ordering theorem): 在任何集合 X 上存在全序 $R\subseteq X\times X$, 使得任何非空集合 $U\subset X$ 包含在关系 R 意义下的最小元素; 2) 最大原理 (maximality principle) (Zorn 引理 (Zorn lemma)): 如果偏序集 X 的任何全序子集 U 都有上界, 则 X 包含最大元; 3) 具有单位元的任何非平凡格都有最大理想; 4) 紧致拓扑空间的积是紧致的; 5) 任何无穷集合 X 具有与 $X\times X$ 相同的基数.

选择公理并不与集合论(例如,系统 ZF)的其他公理相矛盾,并且如果它们不矛盾,则选择公理便不可能由它们导出. 选择公理在经典数学中已被广泛地采用. 如它用于以下定理: 1) 自由群的每个子群都是自由的; 2) 代数域的代数闭包存在且在同构意义下是唯一的; 3) 每个向量空间都有一个基. 它也用于: 4) 一个函数在一点处连续的两个定义的等价性 (ε-δ 定义和序列极限定义)和用于证明 5) Lebesgue 测度的可数可加性. 最后两个定理是从可数选择公理得出的 (公理的表述包含集簇 F 的可数性条件). 已经证明, 如果 ZF 不矛盾, 则定理 1)–5) 不可能在 ZF 中推出.

人们已经构造了一个满足可数选择公理的集合论模型并且在该模型中每个数集都是 Lebesgue 可测的. 这个模型是在系统 ZF 与存在不可达基数的公理不矛盾的假设下构造出来的.

参考文献

[1] Fraenkel, A. A., Bar-Hillel, Y. and Levy, A., Foundations of set theory, North-Holland, 1973.

[2] Jech, T. J., Lectures in set thery: with particular emphasis on the method of forcing, Springer, 1971.

[3] Jech, T. J., The axiom of choice, North-Holland, 1973.

В. Н. Гришин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Jech, T. J., Set theory, Acad. Press, 1978.

吕义忠 译 莫绍揆 校

外延性公理 [**axiom of extensionality**; **объемности аксиома**]

集合论公理之一,它断言当两个集合含相同元素时两集合相等:

$$\forall u\,\forall v\,(\forall x\,(x\in u\Leftrightarrow x\in v)\Rightarrow u=v).$$

在一个不含等号而且仅有一个谓词符号 $\in$ 的语言中,外

延性公理形式为

$$\forall u \forall v(\forall x (x\in u \Leftrightarrow x\in v) \Rightarrow \forall z (u\in z \Leftrightarrow v\in z)).$$

外延性公理在 Zermelo - Fraenkel 系统 (Zermelo - Fraenkel system)ZF 中对于数学的形式化不具有实际的重要性.任何能在 ZF 系统中构作的对象都能在一个没有外延性公理的系统中刻画.设 ZF^-是通过在 ZF 中去掉外延性公理以及把其余公理中形如 $u=v$ 的公式替换为公式

$$\forall x (x\in u \Leftrightarrow x\in v)$$

而得到的.那么可以证明在 ZF^-中存在 ZF 的解释 (interpretation). 类似的结论对于类型论也成立.

对于 Quine 系统 NF, 它由消除类型论的类型标号而得,情况就不同: 不能在 NF^- 中解释 NF. 系统 NF^-(除去外延性公理的 NF) 是一个颇弱的系统,而且它的相容性能在形式算术中证明,然而 NF 不弱于有无穷公理的类型论.

参考文献

[1] Barwise, J. (ed.), Handbook of mathematical logic, North - Holland, 1977.

[2] Boffa, M., The consistency problem for NF, *J. Symbolic Logic*, 42 (1977), 2, 215 – 220. B. H. Гришин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Scott, D. S., More on the axiom of extensionality, in Y. Bar - Hillel, E. I. J. Poznanski and M. O. Rabin, et al. (eds), Essays on the foundation of mathematics, North - Holland, 1962. 宋方敏 译 莫绍揆 校

公理模式 [**axiom scheme ; аксиом схема**]

表述具有相同语法结构的各种公理 (axiom) 的一种统一化方式. 一个特定的公理模式通常表示为一个表达式 $\mathfrak{A}$ (它经常是用一种不同于表达那些公理的语言来表达的), 它确定这一模式的语法结构, 并且从 $\mathfrak{A}$ 出发按一定的规则可以得到原有的任何一条公理.

当由表达式 $\mathfrak{A}$ 生成公理的规则已先行确定或使之无歧义理解时, 一种公理模式常被看成是 $\mathfrak{A}$ 的替换式. 例如, 命题演算 P 的公理模式 $\alpha\supset(\beta\supset\alpha)$ 就是指形如 $A\supset(B\supset A)$ 的公理的集合, 其中 A 和 B 是 P 中任意公式.

一个非逻辑公理的模式的例子是传统的算术公理中下列的归纳模式:

$$(\alpha(0)\&\forall x (\alpha(x)\supset\alpha(x'))) \supset \forall x\, \alpha(x),$$

这里假设 α 和 x 都不属于所考虑的形式语言的字母表, 分别解释为这一形式语言的任意一个公式和任意一个变元.

运用公理模式可以使我们在构造形式理论时不用代入法则. 这样, 在具有两条导出法则—— 代入法则和终结法则—— 的任意一种充分强的命题演算中可以只对公理作代入而进行推导, 这就使我们可以对命题演算作等价的修改, 即用相应的公理模式来代替每条公理, 而把代入法则从推导法则中删除.

参考文献

[1] Kleene, S. C., Introduction to meta - mathematics, North - Holland, 1951 (中译本: S.C. 克林, 元数学导论, 科学出版社, 1984, 1985).

[2] Church, A., Introduction to mathematical logic, 1, Princeton Univ. Press, 1956.

Ф. А. Кабаков 撰 沈复兴 译 王世强 校

公理方法 [**axiomatic method ; аксиоматический метод**]

获得科学理论的一种方法. 为得到一种科学理论, 把其中某些原始的假设称为公理 (axiom), 以其作为这个理论的基础, 而理论的其他命题是由这些公理经逻辑推演而得到的.

在数学中, 公理方法始于古希腊关于几何学的研究. 公理方法应用的最辉煌实例 —— 直到 19 世纪 —— 是 Euclid 的《几何原本》(Euclid's Elements) 的公理系统 (大约公元前 300 年). 当时还没有提出用逻辑工具导出公理的推论的问题, 但是, Euclid 系统非常明显地是试图根据相对来说为数不多的公设 (公理), 利用纯推导的办法得到几何学的所有基本命题, 而把公设的成立看成是自明的.

19 世纪初, Н. И. Лобачевский 和 J. Bolyai 发现的非 Euclid 几何学进一步促进了公理方法的发展. 他们证明了, 如果把传统的 Euclid 第五公设用它的否定代替, 那么也可以按照纯逻辑的方式得到一种和 Euclid 几何同样漂亮, 并且同样有意义的几何学. 在 19 世纪,数学家们的注意力于是被吸引到关于构造数学理论的演绎方法方面; 这就产生了一个新问题, 即公理方法概念自身和形式 (公理) 数学理论的联系的问题. 随着用公理方法导出的数学理论的逐步增加——特别应提到的是 M. Pasch, G. Peano 和 D. Hilbert 关于初等几何的公理化推演, 它们不象 Euclid《几何原本》那样, 它们在逻辑上无可非议, 还有 Peano 首先提出的对算术的公理化——形式公理系统的概念变的更严格了 (见下文), 最后终于创立了作为近代数理逻辑主要部分之一的证明论 (proof theory).

早在 19 世纪、人们就意识到必须创立数学和关系到数学的问题的基础. 那时主要是在分析中把基本的概念更加精确化, 以及利用不断发展的严格逻辑推理把较复杂的思想归结到较简单的概念 (A. L. Cauchy 的 ε - δ 语言, B. Bolzano 和 K. Weierstrass 的函数论概

念，以及 G. Cantor 和 R. Dedekind 的连续统）．另外，非 Euclid 几何学的发现促进了公理方法的发展，新思想的形成，以及更一般的数学问题的提出．主要是与一个任意的公理理论有关的问题，例如，给定公理系统的相容性，完全性和独立性问题．这方面的第一批成果是利用解释方法(method of interpretation)得到的，它可描述如下．设对给定公理理论 T 的每一个原始概念和每一个关系都指派一个特殊的数学对象．这些对象的全体称为解释域(field of interpretation)．然后就自然地指派 T 的每一个命题 $\mathfrak{A}$ 为关于解释域的元素的某一个句子 $\mathfrak{A}^*$，$\mathfrak{A}^*$ 可能是真的或假的．从而就可分别说理论 T 的命题 A 在此解释中是真的或假的．解释域和它的性质通常又是另一个可公理化的数学理论 T_1 的研究对象(T_1 一般不同于 T)．解释法可以用来证明相对相容性(relative consistency)——即用下述方法证明形式为"如果理论 T_1 是相容的，那么理论 T 也是相容的"这样的命题．假定理论 T 已经在理论 T_1 中被解释，使得 T 的每一个公理 A_i 都被解释为 T_1 的一个真命题 A_i^*．T 的所有定理(theorem)，即由 T 的诸公理 A_i 逻辑推演出的任一命题 A，在 T_1 中被解释为某一命题 A^*，A^* 可由 T 的诸公理 A_i 在 T_1 中的解释 A_i^* 推演出，因此 A^* 是真的．上面的说法基于一个不言而喻的假设，这就是理论 T 和 T_1 的逻辑工具在某种程度上是类似的．事实上这个条件通常是成立的(在解释方法的早期应用中，这个假设甚至不加讨论，因为它被认为是不言自明的；事实上，在早期试图证明相对相容性定理时，T 和 T_1 的逻辑工具是完全相同的，这就是古典谓词演算的理论)．现在假设理论 T 是不相容的，即设这个理论的某个命题 A 和它的否定都能从 T 推演出来，那么上面得到的两个命题 A^* 和非 A^* 将都是 T_1 的真命题，即 T_1 是不相容的．F. Klein 和 H. Poincaré 曾用这种方法证明：如果 Euclid 几何是相容的，那么 Лобачевский 的非 Euclid 几何也是相容的；另外，Euclid 几何的 Hilbert 公理系统的相容性问题被 Hilbert 用此方法归结到算术的相容性问题．解释方法也可用于解决公理系统的独立性问题．为了证明理论 T 的公理 A 独立于理论 T 的其他公理，即公理 A 不能由 T 的其余公理推演出(因而必须包括它才能得到理论 T 的全部)，只要构造一个解释，在其中 A 假而 T 的其余公理都真即可．证明 A 独立的这种方法的另一种形式是证明在理论 T 中用 A 的否定代替 A 后得到的理论是相容的．由上面提到的把 Лобачевский 几何的相容性问题归结到 Euclid 几何的相容性问题，以及把 Euclid 几何的相容性问题归结到算术的相容性问题，就得到这样的结论：假若正整数的算术是相容的，那么 Euclid 的第五公设是不能由其余公理推出的．这种解释法的弱点是，仅就考虑公理系统的相容性和独立性问题来看，它只能得到相对性的结果．然而解释法的一个重要成就是揭示了算术起着特殊作用，它是一个若干其他理论的相容性问题归结到它的相容性的数学理论．

由 Hilbert 及其学派所提出并且被称为数学基础的**形式主义**(formalism)的方法是上面方法的进一步发展(在某种意义上是一个顶峰)．公理化方法的这一进一步发展是通过引进**形式系统**(formal system)的概念而使公理理论的思想更精确化．从而使得数学理论本身可以作为一个确切的数学对象来对待并且可以构造一个关于这种形式化数学理论的一般理论——称为**元理论**(meta-theory)．用这种方法解决数学基础方面的所有主要问题的可能性看来有很大的吸引力，而且 Hilbert 本人就试图沿此道路进行研究．这个方法的主要概念是形式系统．任一个形式系统是由一个完全确定的表示式类构成的——即一类公式，在其中可以按照一种确定的方式推演出来公式的一个子类，称为形式系统的定理．形式系统中的公式没有直接的含义，并且一般说来他们可以由仅仅出于某种技术原因而选择的符号构成．事实上，构成公式的方法和一个形式系统中定理的概念是这样选择的，就是使所得的形式手段能够用来最有效地表示某种数学理论(甚至是非数学理论)，说的更准确一点，就是既表示了它的实际含义，也表示了它的推演结构．构造任一形式系统 S 的一般方法如下：

Ⅰ．系统 S 的语言(language of the system)

a) 列举系统中基本符号的字母表(alphabet)．

b) 由基本符号构成 S 的公式的构造(语法)法则(construction (syntactic) rules)．基本符号的一个序列是一个公式，当且仅当它能由语法法则构造出来．

Ⅱ．系统 S 的公理(axioms of the system)．由指定的若干个公式(通常是有限个或可数多个)组成的一个集合，称这些公式为系统 S 的公理．

Ⅲ．系统 S 的推导法则(derivation rules of the system)(或演绎法则(deduction rules))．在 S 的所有公式构成的集合上定义一些谓词 $R_1, \cdots, R_k$(通常是有限多个)．设 $R_i(x_1, \cdots, x_{n_i+1})$ 是这些谓词中的一个($n_i>0$)；对于给定的公式 $F_1, \cdots, F_{n_i+1}$，如果 $R_i(F_1, \cdots, F_{n_i+1})$ 真，那么就说公式 F_{n_i+1} 可以由公式 $F_1, \cdots, F_{n_i}$ 通过法则 R_i 而直接得到．

作为一个确切的数学对象，指定Ⅰ，Ⅱ和Ⅲ与指定形式系统 S 有相同的意义，因为 S 的定理或可推导出的公式的概念对所有形式系统都是用统一的方式形成的(其一致的程度依赖于字母表、语法规则和推导法则(即谓词 $R_1, \cdots, R_k$)的一致水平)．S 中的一个推导(derivation)是一个满足如下条件的有限公式序列：序列的每一个公式或是一个公理或是由其前面的某几个公式利

用 S 的一个推导法则 R_i 而得到．S 的一个公式称为这个系统的定理(theorem)，如果存在一个推导以它为最后一个公式．

任意一个特定的数学理论 T 都可以翻译到一个适当的形式系统 S 的语言中，使 T 的任一有意义(真或假)的命题都可以利用 S 的一个公式来表示．

人们自然可以期望这种形式化方法能够做到，把任何数学理论的一切有意义的内容都建立在由可推导出的公式(形式系统的定理)这一概念所代表的精确且显然可靠的基础上，而为了解决像数学理论的相容性问题这样的基本问题，只要对形式化这个理论的形式系统证明相应的命题即可．由于上面描述的形式系统是严格的，或者用 Hilbert 学派的术语来说是"有穷论的"数学对象．人们可能期望得到相容性命题的有穷论证明(finitisic proof)，即在某种意义下是有效的证明，也就是说其证明不依赖于例如**像实无穷抽象**(abstraction of actual infinity)这样的强有力工具(后者是古典数学理论的基础遇到困难的原因之一)．于是要求用于证明涉及形式系统的结果的工具具有"有穷"性，特别是用于证明形式系统相容性的工具具有"有穷"性，就代表了 Hilbert 形式化纲领的一个主要特征．然而 Gödel 在 20 世纪 30 年代早期所得到的结果推翻了基于这个纲领的主要期望．Gödel 证明了：

1) 算术理论或任一包含算术的数学理论(如集合论)的任何自然的相容的形式化，都是不完全的，并且在下述意义下是不可能完全化的：a) S 包含(在通常意义下真的)不可解公式，即 S 包含一个公式 A，使得 A 和非 A 在 S 中都不能推导出来(形式算术的不完全性(incompleteness of formal arithmetic))．b) 无论用什么样的有限公式集合去扩充 S 的公理系统(包含用 S 中的不可解公式去扩充)以得到新的、更强的形式系统，都不能使得到的系统没有不可解公式(不完全性(incompleteness)；见 [5] 和 **Gödel 不完全性定理**(Gödel incompleteness theorem))．

2) 如果形式算术理论实际上是相容的，那末，虽然它的相容性这一命题用自身的语言可以表示，但不可能用形式化算术自身的方法来证明这个命题．

这就意味着，即便是在算术这种情况，要想用任何形式系统的可推导公式来穷尽所有其内容为真的命题也是本质上不可能的．对于算术的相容性也不能希望得到任何有穷性的证明，这是因为有穷性证明的任何合理精确化似乎都能在形式算术中加以形式化．

所有这些都给 Hilbert 的形式主义框架中的公理方法的能力加上了一定的限制．然而，在这些限制的范围之内，它仍然在数学基础中继续起着重要作用．因此，在 Gödel 的这些结果发表之后，Gödel 本人(1938 — 1940)和 P. Cohen(1963)，也都以公理化方法为基础，用解释方法得到了集合论中关于选择公理和连续统假设的相容性以及彼此独立性的基本结果([6]，[7])．至于相容性这一数学基础的根本问题，由 Gödel 的结果可以清楚地看出，它只能借助于非有穷性的工具和思想去证明．对这个问题的各种可能的证明方法，不是所有数学家都有相同的接受程度，这主要是因为对各种逻辑工具的可接受性的见解不同．在已得到的关于形式系统相容性的结果中，首先应提及的是形式算术的相容性的证明 [8]，这个结果是基于对一个可数超限数上的无限归纳法证明的．这方面的另一个更新的例子是试图用某些**直觉主义**(intuitionism)的思想证明分析的形式系统的相容性 [9]．

参考文献

[1] Heath, T. L., The thirteen books Euclid's elements, 11 – 13, Dover, reprint, 1956 (Translated from the Greek).

[2] Каган, В. Ф, Основания геометрии. ч. 1, М - Л., 1949.

[3] Hilbert, D., Grundlagen der Geometrie, Springer, 1913 (D. 希尔伯特，几何基础(上册)，科学出版社，1987).

[4] Peano, G., Principii di logica metamatica, *Rivista Matematika*, 1 (1891), 1 – 10.

[5] Gödel, K., Under formal unentscheidbare Sadze der Principia Mathematica und verwandter Systeme 1, *Monatsh. Math. Physik*, **38** (1931), 178 – 198.

[6] Gödel, K., The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory, Princeton Univ. Press, 1940.

[7] Cohen, P. J., Set theory and the continuum hypothesis, Benjamin, 1966.

[8] Gentzen, G., Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie, *Math. Ann.*, **112** (1936), 493 – 565.

[9] Spector, C., Provable recursive functionals of analysis, in Recursive function theory, Amer. Math. Soc., 1962, 1 – 27.

П. С. Ионнков 撰

【补注】

参考文献

[A1] Kleene, S. C., Introduction to metamathematics, North - Holland & Noordhoff, 1959 (中译本：S. C. 克林，元数学导论，科学出版社，1984, 1985).

卢景波 译　王世强 校

公理集合论 [axiomatic set theory; аксиоматическая теория множеств]

数理逻辑的一个分支，在这个分支中，我们用数理逻辑的方法处理集合的非形式理论的部分．为此，通常将集合论的这些部分表述为形式公理化理论．更狭义地，术语"公理集合论"表示一种公理化理论，其目的在

于构造非形式("朴素")集合论的某些部分.

1900 年左右创建的集合论必须处理在它的早期所产生的几个悖论. G. Cantor 和 B. Russell 的基本悖论的发现(见**悖论**(antinomy))引起了一场广泛的讨论并且导致数理逻辑基础的本质修改.集合论的公理化方向可视为对由此产生的这种状况作更彻底研究的工具.

集合的形式公理化理论的构造法始于表述命题的语言的精确描述.然后用这个语言将"朴素"集合论的原则表示成公理或公理模式的形式.公理集合论的最为广泛流传的系统的扼要描述可给出如下.在这个描述中,包含以下初始符号的语言担任了重要的角色: 1) 变元 $x, y, z, u, v, x_1, \cdots$,它们在该语言中担任了集合的通名的角色; 2) 谓词符号 $\in$(关联符号)和 $=$(等号); 3) 摹状算子 (description operator) ι,它指"使得…成立的一个个体"; 4) 逻辑联结词和量词: $\leftrightarrow$(等价), $\to$(蕴涵), $\vee$(或者), $\wedge$(并且), $\neg$(否定), $\forall$(全称), $\exists$(存在); 5) 括号(和).语言的表达式分为项和公式.项是集合的名,而公式表示命题.项和公式按照以下规则生成.

R1. 若 τ 和 σ 为变元或项,则 $(\tau\in\sigma)$ 和 $(\tau=\sigma)$ 为公式

R2. 若 A 和 B 为公式且 x 为变元,则 $(A\leftrightarrow B)$, $(A\to B)$, $(A\vee B)$, $(A\wedge B)$, $\neg A$, $\forall xA$, $\exists xA$ 为公式且 $\iota x\, A$ 为项; 变元 x 为项.

例如,公式 $\forall x(x\in y\to x\in z)$ 相当于说"y 为 z 的子集"并且可记为 $y\subseteq z$; 项 $\iota w\,\forall y(y\in w\leftrightarrow y\subseteq z)$ 是 z 的一切子集的集合的名并且用通常的数学符号表示就是 Pz.设符号 $\Leftrightarrow$ 表示"左方为右方的一个记号".下面将给出许多其他公式和项的记号.

空集:

$$\varnothing \Leftrightarrow \iota x\forall y\neg y\in x.$$

使 $A(x)$ 成立的一切 x 的集合:

$$\{x: A(x)\} \Leftrightarrow \iota z\forall x(x\in z\leftrightarrow A(x)).$$

其中, z 不在 $A(x)$ 中自由出现(即,不是公式 $A(x)$ 的参数).

x 和 y 的无序对:

$$\{x,y\} \Leftrightarrow \{z: z=x\vee z=y\}.$$

由 x 组成的单元集:

$$\{x\} \Leftrightarrow \{x,x\}$$

x 和 y 的有序对:

$$<x,y> \Leftrightarrow \{\{x\},\{x,y\}\}.$$

x 和 y 的并:

$$x\bigcup y \Leftrightarrow \{z: z\in x\vee z\in y\}.$$

x 和 y 的交:

$$x\bigcap y \Leftrightarrow \{z: z\in x\wedge z\in y\}.$$

x 的一切元素的并:

$$\bigcup x \Leftrightarrow \{z: \exists v(z\in v\vee v\in x)\}.$$

x 和 y 的 Descartes 积:

$$x\times y \Leftrightarrow \{z: \exists uv(z=<u,v>\wedge u\in x\wedge v\in y)\}.$$

w 为函数的记号:

$$\mathrm{Fnc}(w) \Leftrightarrow \exists v(w\subseteq v\times v)\wedge$$
$$\wedge\forall uv_1v_2(<u,v_1>\in w\wedge<u,v_2>\in w\to v_1=v_2).$$

函数 w 在元素 x 处的值:

$$w'x \Leftrightarrow \iota y<x,y>\in w.$$

标准无穷集合 z:

$$\mathrm{Inf}(z) \Leftrightarrow \varnothing\in z\wedge\forall u(u\in z\to u\bigcup\{u\}\in z).$$

如下公理理论 A 是"朴素"集合论的原则的最完全的表示. A 的公理为:

A1 外延性公理 (axiom of extensionality):

$$\forall x(x\in y\leftrightarrow x\in z)\to y=z$$

("如果集合 x 和 y 包含相同的元素,则它们相等").

A2 概括公理模式 (axiom scheme of comprehesion):

$$\exists y\,\forall x(x\in y\leftrightarrow A),$$

其中, A 为不含 y 为其参数的任何公式("存在只含使 A 成立的元素 x 的集合 y").

这个系统是自相矛盾的.如果在 A2 中取公式 $\neg x\in x$ 作为 A,则由公式 $\forall x(x\in y\leftrightarrow\neg x\in x)$ 容易得出 $y\in y\leftrightarrow\neg y\in y$,这是一个矛盾.

集合论的公理系统可以被细分为以下四个组.

a) 在第一组中的公理系统的构造试图限制概括公理以便获得通常数学证明的最自然的表述方法,并且同时避免熟悉的悖论.这一类型的第一个公理系统是系统 Z, 由 E. Zermelo (1908)提出.但是,这个系统不允许有些数学分支的自然表述,而 A. Fraenkel 于 1922 年通过增补一条新的原则——替换公理(axiom of replacement)而对 Z 作出了补充.所得的系统称为 Zermelo-Fraenkel 系统 (Zermelo-Fraenkel system) 并且记为 ZF.

b) 第二组是由其公理选自给出悖论的某些解释的系统组成的,例如,作为非谓词定义的结果.该组包括 Russell 的分支类型论,简单 T 型论和具超穷指标的

类型论(types, theory of).

c) 第三组是由使用非标准的逻辑推理方法,多值逻辑,证明的补条件和无穷推理规则刻画的. 该组的系统发展最少.

d) 第四组包括了属于前三个组的系统的修改并且旨在达到某些逻辑和数学的目标.这里将只提及Neumann - Gödel -Bernays 的系统 NBG(1925)和 W. Quine 的系统 NF(1937).NBG 系统的构造是由在 ZF 系统的基础上具有有穷多条集合论公理的要求而诱发的.系统 NF代表了克服类型论中概念的分层的一种尝试.

系统 Z, ZF 和 NF可以用上面描述的语言加以表述.这些系统的推理规则和所谓的逻辑公理都是相同的,并且构成了一个具有等号和摹状词的一阶应用谓词演算.相等性公理和摹状词公理是:

$$x = x,\ \ x = y \rightarrow (A(x) \rightarrow A(y)),$$

其中,$A(x)$是一个不含约束变元 y 的公式(即,它不含 $\forall y$, $\exists y$, ιy 类型的成分),而 $A(y)$是在公式 $A(x)$中用 y 替换变元 x 的某些自由出现而得:

$$\exists ! x\, A(x) \rightarrow A(\iota x A(x)),$$

其中,量词 $\exists ! x$ 指"存在一个且仅一个 x"而公式 $A(\iota x A(x))$是通过用项 $\iota x A(x)$ 替换变元 x 的一切自由出现而得.量词 $\exists ! x$ 可以通过量词 $\forall$ 和 $\exists$ 及等号加以表示.

系统 Z 的非逻辑公理(non - logical axioms)

Z1. 外延性公理(axiom of exten sionality)A1.

Z2. 对偶公理(pair axiom):

$$\exists u\, \forall z (z \in u \leftrightarrow z = x \vee z = y)$$

("集合 $\{x, y\}$存在");

Z3. 并集公理(union axiom):

$$\exists y\, \forall x (x \in y \leftrightarrow \exists t (t \in z \wedge x \in t))$$

("集合 $\bigcup z$ 存在");

Z4. 幂集公理(power set axiom):

$$\exists y\, \forall x (x \in y \leftrightarrow x \subseteq z)$$

("集合 Pz 存在");

Z5. 分离性公理模式(separation axiom sche - eme):

$$\exists y\, \forall x (x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge A(x))$$

("存在由 z 中的使 $A(x)$成立的元素 x 组成的 z 的子集");公理 Z2－Z5 是概括公理的例子;

Z6. 无穷公理(axiom of infinity):

$$\exists z\ \mathrm{Inf}(z);$$

Z7. 选择公理(axiom of choice):

$$\forall z\, \exists w (\mathrm{Fnc}(w) \wedge \forall x (x \in z \wedge \neg x = \varnothing \rightarrow w' x \in x))$$

("对任何集合 z, 存在函数 w, 它从 z 的每个非空元素 x 中选出唯一元素 w 'x'").以上公理可用正则公理(regularity axiom)加以补充:

$$\text{Z8.}\quad \forall x (\neg x = \varnothing \rightarrow \exists y (y \in x \wedge y \cap x = \varnothing)),$$

这条公理旨在假定不存在 $x_2 \in x_1$, $x_3 \in x_2$, $x_4 \in x_3$, $\cdots$ 这样的递降链.公理 Z8 简化了 Z 的构造并且它的引入并不导致矛盾.

系统 Z 适合于研究算术、分析、泛函分析和小于 $\aleph_\omega$ 的基数.但是;如果 $\aleph$ 按通常方式定义,则它不再能证明 $\aleph_\omega$ 和更高基数在 Z 中的存在性.

系统 ZF 是从 Z 出发增加 Fraenkel 的替换公理模式而得到的,该公理模式能以概括公理模式的形式如下给出:

$$\exists y\, \forall x (x \in y \leftrightarrow \exists v (v \in z \wedge x = \iota t A(t, v)))$$

("存在由使 $x = \iota t A(t, v)$ 成立的 x 组成的集合 y,其中, v 取遍集合 z 的一切元素").换句话说,y 是从 z 出发,将 z 的每个元素 v 替换为 $\iota t A(t, v)$而得到的.

系统 ZF 是一个很强的理论.所有通常的数学定理都可由 ZF 表述.

NBG 系统是在 ZF 上增加新类型的变元——类变元 X, Y, Z, $\cdots$ 和有穷多条构成类的公理而得,借此可证明以下类型的公式:

$$\exists Y\, \forall x (x \in Y \leftrightarrow A(x)),$$

其中,$A(x)$为 NBG 的公式,它不含约束类变元或符号 ι,因为,任何公式 $A(x)$都可用来构造一个类,故无穷多条 ZF 公理便可用含类变元的有穷多条公理加以代替.选择公理有形式:

$$\exists X (\mathrm{Fnc}(X) \wedge \forall x (\neg x = \varnothing \rightarrow X' x \in x))$$

并且确认选择函数的存在,它对一切集合是唯一的并且构成一个类.

系统 NF 有更简单的公理形式,即: 1) 外延性公理; 2) 公式 A 能被分层的概括公理,即,能够指定以下标有指标的公式 A 的一切变元以便得到 T 型理论的公式,即,在形如 $x \in y$ 的子公式中,x 的指标低于 y 的指标.

系统 NF 有以下特性:

a) **选择公理**(axiom of choice)和广义**连续统假设**(continuum hypothesis)是不可证的;

b) **无穷公理**(infinity, axiom of)是可证的;

c) 外延性公理担任了一个很重要的角色. 因此,

如果外延性公理用以下略微弱的公理代替:

$$(\exists u(u\in y)\wedge\forall u(u\in y\leftrightarrow u\in z))\rightarrow y=z,$$

它允许大量的空集、而 NF 的概括公理保持不变,则得到一个相当弱的理论:所得系统的相容性甚至可在形式算术中加以证明.

有关刚刚描述的系统之间的相互联系的一些结果可给出如下.

α) ZF的任一公式在 NBG 中可证当且仅当它在 ZF 中可证.

β) 在 ZF 中可以证明对 Z 补充了替换公理模式 **ZF9** 的任意有限多个例子以后的系统的相容性,因此, ZF 比 Z 强得多.

γ) T 的相容性在 Z 中可证,故 Z 比 T 强.

δ) 由可以在 NF 中发展整个类型论的意义之下, NF 并不比 T 弱.

集合论的公理化方法使人们有可能叙述一些数学问题的(精确意义下的)不可解性的命题并且能严格地证明它.使用公理化方法的一般过程如下:考虑一个集合论的形式公理系统 S(通常,它为 ZF 或它的一种修改方案),它是相当一般的,足以包括经典数学的一切通常的证明和由它可推出的一切通常的数学事实.一个给定问题 A 可作为语言 S 中的公式而写下来.然后用数学方法证明 A 和它的否定都不可能在 S 中导出.于是可得问题 A 不可能用理论 S 的工具(不论用哪种方法)得到解决,但是,因为假定理论 S 包含了一切通常的证明方法,故结果表明 A 不可能用通常的推理方法加以解决,即,A 是"超越的".

叙述一个证明不可能在理论 S 中进行的一些结果通常是在 S 或 S 的某个自然扩张是相容的假定之下取得的.这是因为,一方面仅当 S 为相容时,问题才可能不能从 S 中导出,但是这种相容性不可能用 S 提供的工具加以证明(见**Gödel 不完全性定理** (Gödel incompleteness theorem)),即,不可能通过通常的方法导出.另一方面,S 的相容性常常是一个很恰当的假设;理论 S 正是建立在它的真实性的基础上的.

此外,集合论的公理化方法使人们能够精确地提出和解决集合论中有关能行性的问题,这些问题在集合论发展初期曾被 R. Baire, E. Borel, H. Lebesgue, S. N. Bernstein [S. N. Bernshtein], H. H. Лузин 和 W. Sierpinski 等人深入地研究过.称集合论中满足性质 $\mathfrak{A}$ 的个体在公理化理论 S 中能行可定义,如果能构造 S 的公式 $A(x)$ 使得在 S 中能够证明它被唯一个体所满足并且该个体满足性质 $\mathfrak{A}$.由于这个定义,我们能够严格地证明对 S 中的某些性质 $\mathfrak{A}$,人们不能能行地确定一个满足 $\mathfrak{A}$ 的个体,但 S 中这些个体的存在性可以得到证明.然而,由于所选择的理论 S 是充分一般的,故 S 中某些个体的存在是非能行的这一事实也是它们的存在性不能用通常的数学方法能行地建立这一事实的证明.

最后,公理化集合论的方法也使人们能够解决经典数学分支,如基数和序数理论,描述集合论和拓扑中的许多困难问题.

下面是由公理集合论所获得的某些结果.其中大多数定理是涉及 Zermelo - Fraenkel 公理集合论(ZF)的,它是目前最常被人们使用的.设 ZF^- 为不含选择公理 **Z7** 的系统 ZF.由于 α),这些结果也能够很容易地被修改而使之适合于系统 NBG.

1) K. Gödel 于 1939 年证明,如果 ZF 是相容的,则在加进选择公理和连续统假设后,它仍将保持相容.由此可见,在 ZF 中否证选择公理和连续统假设是不可能的.为了证明这个结果,Gödel 构造了一个由所谓 **Gödel 构造集** (Gödel constructive set)组成的理论 ZF 的**模型**,这个模型在现代公理集合论中担任了重要的角色.

2) 选择公理或连续统假设是否可在 ZF 中导出的问题直到 1963 年才解决,当时,P. J. Cohen 用他的**力迫法** (forcing method)证明了如果 ZF^- 是相容的,则当加进选择公理、连续统假设或它们的否定的任何组合之后,它仍然是相容的.因此,这两个问题是独立于 ZF 的.

用于证明一个公式 A 不可在 ZF 中导出的主要方法是去构造一个包含 A 之否定的 ZF 的模型.被人们改进了的 Cohen 力迫法极大地拓广了构造集合论模型的可能并且现在成为几乎所有有关不可推演出的结果的基础.例如:

3) 已经证明,可以在 ZF 中增加如下假设而不产生(另外的)不相容:假设集合 x 的子集的集合的基数可以为一个正规基数上的、x 的基数的、几乎任意预先给定的函数(该唯一重要的限制与 König 定理有关).

4) M. Я. Суслин (1920)表述了以下假设:对任何线性全序集,如果其两两不相交的非空开区间的簇至多为可数的,则必定包含一个可数的处处稠密的子集. Суслин 假设在 ZF 中不可推导,是用 Cohen 方法证明的.

5) 已证以下假设在 ZF^-(不含选择公理)中不可解:"实数集的任何子集是 Lebesgue 可测的."

6) 描述集合论的许多重要问题与 ZF 的相互关系已被澄清.关于这个问题的第一个结果是由 П. С. Новиков 证明的([5]).公理集合论的方法使人们能够预先发现"朴素"集合论的问题之间的未知的联系.例如, $\sum_2^1$ 型(即 A_2)实数的 Lebesque 不可测集合的存在可推出不含完全子集的不可数 $\prod_1^1$(即 $C\mathscr{A}$) 集合的存在.

7) 已经证明在 ZF 中缺乏能行全序连续统.许多结果证明了在描述集合论和序数理论中缺乏能行定义

的对象.

参考文献

[1] Fraenkel, A. A., Bar-Hillel, Y. and Levy, A., Foundations of set theory, North-Holland, 1973

[2] Cohen, P. J., Set theory and the continuum hypothesis, Benjamin, 1966.

[3] Jech, T. J., Lectures in set theory: with particular emphasis on the method of forcing, Springer, 1971.

[4] Drake, F. R., Set theory: an introduction to large cardinals, North-Holland, 1974.

[5] Новиков, П. С., 《Тр. матем. ин-та АН СССР》, 38 (1951), 279–316.

В. Н. Гришин、А. Г. Драгалин 撰

【补注】 Gödel 的书[A4]包含了上述 1) 中命题的他的证明.

参考文献

[A1] Jech, T. J., Set theory, Acad. Press, 1978.

[A2] Lemmon, E. J., Introduction to axiomatic set theory, Routledge & Kegan Paul, 1968.

[A3] Takeuti, G. and Zaring, W. M., Introduction to axiomatic set theory, Springer, 1971.

[A4] Gödel, K., The consistency of the continuum hypothesis, Princeton Univ. Press, 1940.

吕义忠 译 莫绍揆 校

公理化类 [axiomatized class; аксиоматизируемый класс]

由一个公理系统所确定的同型模型的类. 形式语言 L 的模型的一个类 K 称为公理化的(有限公理化的)(axiomatized (finitely axiomatized)), 如果存在 L 的闭公式的(有限)系统 Σ, 使得 K 由且仅由满足如下条件的所有模型 $\mathfrak{A}$ 构成: Σ 中的所有公式在 $\mathfrak{A}$ 中有定义并且在 $\mathfrak{A}$ 中成立(见**代数系统**(algebraic system)). 递归表征的一个模型类称为递归公理化的(recursively axiomatized), 如果它可被一个递归的公理集合所确定.

数学中研究的很多代数系统类可以由一阶语言的公理系统确定. 例如, 所有 Boole 代数的类、所有群的类、所有域的类和所有格的类都是有限公理化的. 所有无扭群的类、所有特征为 0 的域的类和所有代数闭域的类都是递归公理化的, 但不是有限公理化的. 公理化类的理论是要揭示由一个确定语言所定义的所有的类共有的规律性; 对一阶语言的这种理论已有很好的研究, 因此以下仅讨论这种类和公式.

两个模型称为初等等价的(elementarily equivalent), 如果对一阶语言的任一公式, 只要它在一个模型中是真的, 那么它就在另一个模型中也是真的. 模型 $\mathfrak{M}$ 称为模型 $\mathfrak{N}$ 的初等扩充(elementary extension), 如果任一在 $\mathfrak{N}$ 中有定义并且真的公式在 $\mathfrak{M}$ 中也是真的.

一个初等闭模型类 K 称为完全的(complete), 如果它的所有模型彼此初等等价. 每一个公理化模型类是若干个两两不相交的完全类的并. 一个类称为对于基数 $\mathfrak{m}$ 范畴的(categorical in cardinality $\mathfrak{m}$), 如果它的所有基数为 $\mathfrak{m}$ 的模型彼此同构. 如果一个完全的可数表征模型类对于一个不可数基数是范畴的, 那么它对于所有不可数基数都是范畴的, 但它对于可数基数可能不是范畴的; 此时它有可数个两两不同构的可数模型. 对任意自然数 $n \neq 2$, 都存在恰有 n 个两两不同构可数模型的完全公理化模型类.

一个公理化模型类称为可解的(solvable), 如果存在一个算法, 可以用它断定语言 L 的任一闭公式在 K 的每一模型中是真或是假的. 下面的定理刻画了完全类、范畴类、可解类之间的联系: 如果 K 对于一个无限基数范畴, 并且 K 不含有限模型, 那么 K 是完全的, 一个递归完全的公理化类是可解的.

简约类和射影类是公理化类的推广. 射影类(projective classes)是由形如

$$\exists T_1 \cdots \exists T_n \mathfrak{A}(P_1, \ldots, P_k, T_1, \ldots, T_n)$$

的二阶公理定义的类, 其中 P_i, T_j 是谓词变数. $\mathfrak{A}(P_1, \cdots, P_k, T_1, \cdots, T_n)$ 是表征为 $\sigma = (P_1, \cdots, P_k, T_1, \cdots, T_n)$ 的公式. 公理化类的很多性质适用于这些类.

参考文献

[1] Мальцев, А. И., Алгебраические системы, М., 1970 (英译本: Mal'tsev, A. I., Algebraic systems, Springer, 1973).

[2] Мальцев, А. И., Тр. 4 Всесоюзн. матем. съезда, т. 1, Л., 1963, 169–198.

[3] Cohn, P. M., Universal algebra, Reidel, 1981.

А. Д. Тайманов 撰

【补注】 在英语中公理化类称为"axiomatic class"、初等等价的也称为不可辨的(indiscernible).

卢景波 译 于世强 校

轴测投影法 [axonometry; аксонометрия]

把三维图形映射到一个平面的方法之一. 对于一个图(图形), 当一个正交 Descartes 坐标系和一个该图形将被投影其上的平面选定后, 轴测投影把该图形投影到选定的平面上. 根据投影的方式, 轴测投影可以是平行的(parallel)或中心的(central). 如果平行投影到选定平面的方向垂直于该平面, 那么这个轴测投影就称作是垂直的(normal)或正的(orthogonal); 否则就称之为斜的(skew). 一个正轴测投影的参数是各坐标轴与选定平面之间夹角的余弦, 有时称它们为畸变指数(distortion index). 若两个畸变指数相等, 则称该轴测投影法为二测法(dimetry), 若三个畸变指数相等, 则称之为等测法(isometry); 而若三个畸变指数都不

相等，则称之为三测法(trimetry). 关于轴测投影法的基本定理是 Pohlke-Schwartz 定理(Pohlke - Schwartz theorem)：任何四面体能被投影为一个任意给定的平面四边形.

参考文献

[1] Глазунов, Е. А., Четверухин, Н. Ф., Аксонометрия, М., 1953.

А. Б. Иванов 撰

杨 路、张景中、侯晓荣 译

B

(B,φ)结构 [(B,φ)-structure; (B,φ)-структура]

向量丛(或球丛等)上的一种结构,它是纤维化的结构群概念的推广.

设 $\varphi_n: B_n \to BO_n$ 为纤维化, ξ为空间 X 上的 n 维向量丛,它为映射 $\xi: X \to BO_n$ 所分类.映射 $\xi: X \to BO_n$ 到 B_n 的一个提升的同伦类称为ξ的一个(B_n,φ_n)结构,即它是满足 $\varphi_n\circ\xi^*=\xi$ 的映射 $\xi^*: X \to B_n$ 的一个等价类,这里两个映射 ξ^* 及 $\xi^{*\prime}: X \to B_n$ 称为等价的(equivalent),如果它们是纤维同伦的.我们无法对等价的纤维化一致地定义(B_n,φ_n)结构,因为这种一致性与等价的选取有关.

设有一个纤维化 $\varphi_r: B_r \to BO_r$ 及映射 $g_r: B_r \to B_{r+1}$ 的序列(B,φ,g),满足 $j_r\circ\varphi_r=\varphi_{r+1}\circ g_r$ ($j_r: BO_r \to BO_{r+1}$ 为标准映射).族$\{B_r,\varphi_r,g_r\}$ (有时只是$\{B_r,\varphi_r\}$) 称为一个结构序列(structure series).流形 M^n 的法丛(normal bundle) $\{\xi_r\}$上(B_r,φ_r)结构序列的一个等价类称为 M 的一个(B,φ)结构; 它们从某个充分大的 r 起均相等.带有固定(B,φ)结构的流形 M^n 称为(B,φ)流形((B,φ)-manifold).

可以研究用更一般的分类球丛空间 BG_n 代替 BO_n,并能在其上引进(B,φ)结构.

参考文献

[1] Lashof, R., Poincaré duality and cobordism, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **109** (1963), 257–277.

[2] Stong, R. E., Notes on cobordism theory, Princeton Univ. Press, 1968.

Ю. Б. Рудяк 撰

【补注】 这里

$$BO_n=\lim_{r\to\infty}\inf \mathrm{Gras}_n(\mathbf{R}^{r+n})$$

是 $\mathbf{R}^{n+r}$ 中 r 平面的 Grassmann 流形的极限.

李贵松 译 陈贵忠 校

Baer 乘法 [Baer multiplication; Бэра умножение]

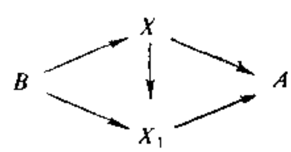
由 R. Baer ([1])所提出的一种在模扩张类的集合上的二元运算.设 A 与 B 为任意的模.A 的一个以 B 为核的扩张(extension)是一个**正合序列**(exact sequence):

$$0\to B\to X\to A\to 0. \tag{1}$$

扩张(1)称为与扩张

$$0\to B\to X_1\to A\to 0$$

等价的,如果有一个同态 $\alpha: X \to X_1$ 使下图可交换:



扩张的等价类的集合表为 $\mathrm{Ext}(A,B)$.在 $\mathrm{Ext}(A,B)$上的 Baer 乘法是从扩张的乘法运算导出的.扩张的乘法定义如下.设

$$0\to B\xrightarrow{\beta} X\xrightarrow{\alpha} A\to 0, \tag{2}$$

$$0\to B\xrightarrow{\beta_1} Y\xrightarrow{\alpha_1} A\to 0 \tag{3}$$

为两个扩张.在直和 $X\oplus Y$ 中取出两个子模

$$C=\{(x,y): \alpha(x)=\alpha_1(y)\}$$

与

$$D=\{(-x,y): x=\beta(b),\ y=\beta_1(b)\}$$

显然 $D\subset C$,所以我们可以定义商模 $Z=C/D$.扩张(2)与(3)的 Baer 积(Baer product)就是扩张

$$0\to B\xrightarrow{\beta_2} Z\xrightarrow{\alpha_2} A\to 0.$$

这里

$$\beta_2(b)=[\beta(b),0]=[0,\beta'(b)],$$

且

$$\alpha_2[x,y]=\alpha(x)=\alpha_1(y).$$

参考文献

[1] Baer, R., Erweiterung von Gruppen und ihren Isomorphismen, *Math. Z.*, **38** (1934), 374–416.

[2] Cartan, H. and Eilenberg, S., Homological algebra, Princeton Univ. Press, 1956.

B. E. Говоров 撰 周伯埙 译

Baire 类 [Baire classes; Бэра классы]

实函数族系，它们是利用函数定义自身中的极限传递序数而归纳定义的，并且构成由 R. Baire ([1])于 1899 年提出的函数分类——称为Baire分类(Baire classification). 连续函数 $f: A \to \mathbf{R}$ 的全体所组成的集合，其中 A 为度量空间，称为第 0 Baire 类 (zeroth Baire class) H_0. 第一 Baire 类 (first Baire class) H_1 是由如下的不连续函数 $f: A \to \mathbf{R}$ 的全体组成的. 其中的 f 是处处收敛的连续函数列的极限. 当 α 为第一类或第二类的序数时，Baire 类(Baire class) H_α 定义为满足如下条件的函数 $f: A \to \mathbf{R}$ 的全体，它们不属于前面的任何类，但可表示成 $f = \lim_{n\to\infty} f_n$，其中 $f_n \in H_{\beta_n}$，$\beta_n < \alpha$. Baire 类 H_α，关于第一类和第二类中所有序数之并，称为 Baire 函数 (Baire functions). 这是包括连续函数在内且关于逐点收敛是封闭的函数 $f: A \to \mathbf{R}$ 的最小类. 不超过第 α Baire 类的函数的线性组合、积与商(对非 0 分母)仍为不超过第 α Baire 类的函数. 不超过第 α Baire 类的均匀收敛的函数列的极限函数也属于不超过第 α Baire 类. 不超过第 α Baire 类的一列函数收敛于不超过第 α Baire 类的函数的充要条件已经找到([4]). 所有自稠密集 $M \subset A$ 之并，称为拓扑空间 A 的核 (kernel of the topological space). 假如 A 是完全空间并具有一非空的自密核，那么没有一个 Baire 类是空的([2]). Baire 函数全体重合于 Borel 可测函数全体(见 **Borel 测度** (Borel measure)). 由此可知，Baire 函数均为 Lebesgue 可测函数(见 **Lebesgue 测度** (Lebesgue measure)). 任一 Lebesgue 可测函数 $g: A \to \mathbf{R}$ 必等价于不超过第 2 Baire 类的一个 Baire 函数([3]). Baire 本人考虑了定义在 $\mathbf{R}^n$ (主要是 $\mathbf{R}$)上的函数，并深入地研究了第一类中的函数. 他证明了一个不连续函数属于第一类的充要条件是，诱导函数在每个完满集上存在一个连续点(Baire 定理 (Baire theorem)). 这定理可应用于函数 $f: A \to \mathbf{R}$，其中 A 有 **Baire 性质**(Baire property, 见[2]). Baire 函数的概念可以自然地推广到函数 $\varphi: A \to Y$，其中 Y 为任意的距离空间.

参考文献

[1] Baire, R., Leçons sur les fonctions discontinues, professées au collège de France, Gauthier-Villars, 1905.

[2] Hausdorff, F., Set theory, Chelsea, reprint, 1978 (中译本: F. 豪斯道夫, 集论, 科学出版社, 1960).

[3] Натансон, И. П., Теория функций вещественной переменной, 2 изд., М., 1957 (中译本: И. П. 那汤松, 实变函数论, 高等教育出版社, 1958).

[4] Gagaeff, B. M., Sur les suites convergentes de fonctions measurable B, *Fund. Math.*, **18** (1932), 182–188.

И. А. Виноградова 撰

【补注】 拓扑空间的子集称为自稠密的(dense-in-itself)是指它没有相对孤立点. 有关 Baire 类的近代英文参考文献是[A1]. 关于它的理论以及应用可参见[A2].

参考文献

[A1] Rooy, A. C. M. van and Schikhof, W. H., A second course on real functions, Cambridge Univ. Press, 1982.

[A2] Boas, P. R., jr., A primer of real functions, *Math. Assoc. Amer.*, 1981.

王斯雷 译 郑维行 校

Baire 性质 [Baire property; Бэра свойство]，拓扑空间中集合 A 的

一种与集合的可测性相类似的性质. 集合 A 具有 Baire 性质(Baire property)，如果存在开集 G，使得差集 $A\backslash G$ 与 $G\backslash A$ 都是 Baire 意义下的第一范畴集(见**集合的范畴**(category of a set))；"开"也可以换成"闭". 还有其他的等价定义，例如，一个集合具有 Baire 性质，如果它是一个 G_δ 型集和一个第一范畴集之并. 具有 Baire 性质的集合类对于取可数并和可数交以及取余等运算都是封闭的. 不具有 Baire 性质的集合的例子见[1].

参考文献

[1] Kuratowski, K., Topology, Acad. Press, 1966–1968 (译自法文), Paragraph 40.

B. A. Скворцов 撰

【补注】 具有 Baire 性质的集合常称为 Baire 集(Baire set)或殆开集，第一范畴集常称为贫集(meager).

参考文献

[A1] Čech, E., Topological spaces, Wiley, 1966.

罗嵩龄、许依群、徐定宥 译

Baire 集 [Baire set; Бэра множество]，局部紧 Hausdorff 空间 X 中的

X 中紧集类生成的 σ 环中的元素，它们是 G_δ 集. Baire 集用来定义 Baire 可测函数. 在所有经典的特殊情形，其中测度理论是建立在拓扑空间，例如 Euclid 空间上的，Baire 集与 **Borel 集** (Borel set) 的概念是一致的.

参考文献

[1] Halmos, P., Measure theory, v. Nostrand, 1950 (中译本: P. 哈尔姆斯, 测度论, 科学出版社, 1958).

B. A. Скворцов 撰 王斯雷 译 郑维行 校

Baire 空间 [Baire space; Бэра пространство]

1) 使关于完全空间的 **Baire 定理** (Baire theo-

rem) 成立的任何空间.

2) 其点为自然数的无穷序列$\{n_i\}=\{n_1, n_2, \cdots\}$的度量空间，其距离由下述公式给出:

$$\rho(\{n_i\},\{m_i\}) = \frac{1}{k_0}.$$

其中 k_0 是使 $n_k \neq m_k$ 的第一个自然数 k. 这是包含任何度量可分零维空间的拓扑象的完全度量可分零维空间.

П. С. Александров 撰 许依群、徐定宥、罗嵩龄 译

Baire 定理 [Baire theorem ; Бэра теорема]

1) 关于完全空间的 Baire 定理 (Baire theorem on complete space): 在给定的完全度量空间中，处处稠密的开集的任意可数系统在这个空间里有非空的、甚至处处稠密的交. 一种等价的说法是: 非空的完全度量空间不可能表示为它的无处稠密子集的可数和. 这是由 R. Baire 指出的 ([1]).

参考文献

[1] Baire, R., *Ann. Mat. Pura Appl.*, 3 (1899), 67.

П. С. Александров 撰

【补注】 这个定理也称为 Baire 范畴定理 (Baire category theorem) (见 [A1], p. 200).

参考文献

[A1] Kelley, J. L., General topology, van Nostrand, 1955 (中译本: J. L. 凯莱, 一般拓扑学, 科学出版社, 1985).

2) 关于半连续函数的 Baire 定理 (Baire theorem on semi-continuous functions): 设 A 为度量空间 M 的子集, 且设 $f: M \to \mathbf{R}$. $f(x)$ 为 A 上的上 (或相应地下) 半连续函数的充分必要条件是对于任何数 a, 集合 $\{x: x \in A, f(x) \geq a\}$ (或相应地 $\{x: x \in A, f(x) \leq a\}$) 是 A 中闭集. R. Baire 对于 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 给出了证明 ([1]). 由这个定理推出半连续函数属于第一 **Baire 类** (Baire classes). 有一个较强的定理: 不取值 $+\infty(-\infty)$ 的上 (下) 半连续函数是一个单调不增 (不减) 连续函数序列的极限.

参考文献

[1] Baire, R., La théorie des fonctions discontinues, Gauthier-Villars, 1905.

[2] Натансон, И. П., Теория функций вещественной переменной, 2 изд., М., 1957 (中译本: И. П. 那汤松, 实变函数论, 人民教育出版社, 1958).

И. А. Виноградова 撰

【补注】 第一 Baire 类中的函数也称为 Baire 函数 (Baire function).

参考文献

[A1] Rudin, W., Principles of mathematical analysis, McGraw-Hill, 1964 (中译本: W. 卢丁, 数学分析原理, 高等教育出版社, 1979).

许依群、徐定宥、罗嵩龄 译

平衡模 [Balanced module ; сбалансированный модуль]

一个模 M, 当把它视为环 $\mathrm{End}_R M$ 上的右模时, 自然环同态 $\Phi: R \to \mathrm{End}_{\mathrm{End}_R M} M$ 是满射, 其中 φ 定义成: 对于任一 $r \in R$ 和 $m \in M$, $\varphi(r)(m) = mr$. 模 P 是 R 模范畴的生成元 (generator), 当且仅当 P 作为 R 模是平衡的、投射的且作为 $\mathrm{End}_R P$ 模是有限生成的.

参考文献

[1] Faith, C., Algebra: rings, modules and categories, 1-2, Springer, 1973-1976.

Л. А. Скорняков 撰 章璞 译

平衡环 [balanced ring ; сбалансированное кольцо], 关于左 (右)

一个环, 其上的所有左 (右) 模都是平衡的. 一个环关于左是平衡的, 当且仅当它的所有商环是 QF-1 环 (QF-1-rings), 即其上所有正合左模是平衡的. 特别地, 一个环是平衡的, 如果它的所有商环是拟 Frobenius 的. 每个平衡环可以分解成一个单列环和一个特殊类型的局部环上的矩阵环的直和. 每个平衡环是半完满的. 一个 Noether 平衡环是 Artin 环.

参考文献

[1] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 19, М., 1981, 31-134.

[2] Faith, C., Algebra, 1-2, Springer, 1973-1976.

Л. А. Скорняков 撰 彭联刚 译

平衡集 [balanced set ; уравновешенное множество]

实或复向量空间 X 中的集合 U, 它满足条件: 由 $x \in U$ 和 $|\lambda| \leq 1$ 可导出 $\lambda x \in U$. 赋范向量空间中的单位球是平衡集的例子; 更一般的例子是拓扑向量空间中的零邻域基中的零邻域 U. 这些零邻域还是吸收集, 即对于任何 $x \in X$, 存在某个 $\alpha > 0$, 使得 $x \in \lambda U$ 对于 $|\lambda| \geq \alpha$ 成立. 如果 U 是凸吸收平衡集, 那么泛函 $p_U(x) = \inf\{|\lambda| : x \in \lambda U\}$ 是**半范数** (semi-norm), 即它有下列性质:

$$p_U(x+y) \leq p_U(x) + p_U(y), \quad p_U(\lambda x) = |\lambda| p_U(x).$$

平衡集也称为有心集 (centred set).

参考文献

[1] Канторович, Л. В., Акилов, Г. П., Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977 (中译本: Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, 泛函分析, 高等教育出版社, 1982).

В. И. Соболев 撰

【补注】 上面提到的泛函 p_U 也称为凸吸收平衡集 U 的 Minkowski 泛函 (Minkowski functional).

参考文献

[A1] Yosida, K., Functional analysis, Springer, 1980 (中译本: 吉田耕作, 泛函分析, 人民教育出版社, 1980).

史树中 译

扫除法 [balayage method ; выметания метод]

解 **Laplace 方程**(Laplace equation)的 **Dirichlet 问题**(Dirichlet problem)的一种方法,由 H. Poincaré 提出([1],[2],亦见[3]),陈述如下.设 D 是 Euclid空间 $\mathbf{R}^n(n\geqslant 2)$ 中的一个有界区域,$\Gamma=\partial D$ 为 D 的边界.用 δ_y 表示集中在点 $y\in D$ 的 Dirac 测度,而 $U(x;\delta_y)$ 当 $n\geqslant 3$ 时表示测度 δ_y 的 **Newton 位势**(Newton potential),当 $n=2$ 时表示测度 δ_y 的**对数位势**(logarithmic potential).从区域 D 到边界 Γ 上的测度 δ_y 的扫除(balayage 或 sweeping)是指 Γ 上的一个测度 β_y,它的位势 $U(x;\beta_y)$ 在 D 的外部等于 $U(x;\delta_y)$,在 D 的内部不大于 $U(x;\delta_y)$;这个测度 β_y 是唯一的且等于 Γ 上关于点 $y\in D$ 的**调和测度**(harmonic measure).集中在 D 上的任何正测度的扫除类似地定义.如果 D 是一个球,质量分布 β_y 的密度,即测度 β_y 的导数恒等于 Poisson 核(见 **Poisson 积分**(Poisson integral)).一般说来,若边界 Γ 充分光滑,则测度 β_y 是绝对连续的,且质量分布 β_y 的密度恒等于 D 的 **Green 函数**(Green function)的法向导数.测度 β_y 可用来表示 Dirichlet 问题的解,即有所谓的 de la Vallée - Poussin 公式(formula of de la Vallée - Poussin):

$$U(y) = \int_{\Gamma} f(x)\,d\beta_y(x),$$

其中 $f(x)$ 是定义在 Γ 上的函数.

Poincaré 在他关于扫除法的原始论文中,先对球论证这个方法的几何构造.然后,根据 **Harnack 定理**(Harnack theorem)和区域 D 可以用球列 $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ 穷竭的事实,他构造了无穷位势列 $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$,其中每个位势 U_{n+1} 是由前一个 U_n,通过把质量从区域 $\bigcup_{k=1}^{n}B_k$ 移动到它的边界的扫除法得到的,这样就简化成对充分光滑的区域 D 解 Dirichlet 问题(扫除法适用的条件的详细讨论见[3]).

在现代位势论中(见[5],[6]),扫除问题(balayage problem)同 Dirichlet 问题一样,作为独立的问题来处理,这样就可以考虑任何集上的扫除测度.例如,最简单的扫除问题是对于在闭区域 $\overline{D}$ 内给定的质量分布 μ,求 $\Gamma=\partial D$ 上的一个质量分布 ν,使得这两个分布的位势在 $\overline{D}$ 外部相等.如果边界 Γ 是光滑的,那么对 μ 的扫除问题的解是一个绝对连续测度 ν.它的密度或导数 $\nu'(y)$ $(y\in\Gamma)$ 可借助于 D 的 Green 函数 $G(x,y)$ 表示成

$$\nu'(y) = \int \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y}\,d\mu(x),\quad \mu\geqslant 0,\quad y\in\Gamma, \qquad (*)$$

其中 $\partial G/\partial n_y$ 是 $G(x,y)$ 在点 $y\in\Gamma$ 沿 Γ 的内法向的导数.在区域 D 内位势满足不等式 $U(x;\nu)\leqslant U(x;\mu)$,即在区域内扫除使位势减少.若 $\mu=\delta_x$ 是在点 $x\in D$ 的 Dirac 测度,则由公式(*)得到 $\nu'(y)=\partial G(x,y)/\partial n_y$,即 Green 函数的法向导数是集中在点 $x\in D$ 的单位质量的扫除测度的密度.把公式(*)加以推广,就可对于任意一个区域 D,得到任意 Borel 集 $E\subset\Gamma$ 的扫除测度 $\nu(E)$ 的表达式:

$$\nu(E) = \int \omega(x;E,D)\,d\mu(x),$$

其中 $\omega(x;E,D)$ 是集合 E 在点 x 关于区域 D 的调和测度.

若 K 是 $\mathbf{R}^n$ 中的任一紧集,μ 为有界正 Borel 测度,则测度 μ 到紧集 K 上的扫除是 K 上的测度 ν,使得 $U(x;\nu)\leqslant U(x;\mu)$ 处处成立,$U(x;\nu)=U(x;\mu)$ 在 K 上拟处处(quasi - everywhere)成立,即可能在一个零外容量集上例外.用这种方式表达的扫除问题比上述通过区域来定义的扫除更一般,且可推广到其他类型的位势,例如 **Bessel 位势**(Bessel potential)或者 **Riesz 位势**(Riesz potential).同样也可考虑任意 Borel 集 K 上的测度扫除.

上调和函数(superharmonic function)的扫除问题可类似地叙述.设 ν 是区域 $D\subset\mathbf{R}^n$ 上的非负上调和函数.函数 ν 到紧集 $K\subset\overline{D}$ 上的扫除是满足下述条件的最大上调和函数 B_ν^K:1)它的关联测度集中在 K 上;2) $B_\nu^K\leqslant\nu$ 处处成立;3) $B_\nu^K=\nu$ 在 K 上拟处处成立.

在**抽象位势论**(potential theory, abstract)中,在任意一个**调和空间**(harmonic space)X内,关于集合K,上面两种方式叙述的扫除问题也都已解决;调和空间指的是一个局部紧的拓扑空间 X 赋予一个按照公理来定义的调和函数簇.这种公理法使得有可能考虑与更一般的偏微分方程关联的位势的扫除问题([7]).随机过程的扫除法见[8].

参考文献

[1] Poincaré, H., Sur les équations aux dérivees partielles de la physique mathématique, *Amer. J. Math.*, **12** (1890), 3, 211 - 294.

[2] Poincaré, H., Theorie du potentiel Newtonien, Paris, 1899.

[3] Vallée - Poussin, Ch. J. de la, Le potentiel logarithmique, balayage et représentation conforme, Gauthier-Villars, 1949.

[4] Сретенский, Л. Н., Теория ньютоновского потенциала, М. - Л., 1946.

[5] Ландкоф, Н. С., Основы современной теории потенциала, М., 1966(英译本:Landkof, N. S., Foundations of modern potential theory, Springer, 1972).

[6] Brelot, M., Eléments de la théorie classique du potentiel, Sorbonne Univ., Paris, 1959., 第 4 版, 1969.

[7] Constantinescu, C. and Cornea, A., Potential theory on harmonic spaces, Springer, 1972.

[8] Meyer, P. A., Probability and potentials, Blaisdell, 1966.

E. Д. Соломенцев 撰

【补注】 扫除也称为测度的扫除(sweeping of a mea-

sure). 有关位势论中与 Green 函数相关联的问题,[A1]是一本经典的参考书.

在概率位势论中,一个集中在 D 上的概率测度 μ 到 $\Gamma=\partial D$ 上的扫除测度 (swept measure) μ_s 正好是 $\bar{D}$ 上一个初始分布为 μ 的标准 **Brown 运动** (Brownian motion) 在首次击中 Γ 时的分布.

同概率论的另一个联系如下所述,对每个足够好的调和空间,存在一个 Hunt 过程 (Hunt process) (X_t),它的过分函数 (excessive functions) 是正超调和函数. 若 P_K 表示紧集 K 的击中分布 (hitting distribution),则对于每个正超调和函数 u 有 $p_K u = B_u^K$, 且测度 μ 在 K 上的扫除是 μp_K. 因此,函数或者测度的扫除 (balayage) 的概念也可以用一个核半群 (semi - group) 的位势核 (potential kernel) 来定义, 见 [A3].

参考文献

[A1] Tsuji, M., Potential theory in modern function theory, Chelsea, reprint, 1975.

[A2] Doob, J. L., Classical potential theory and its probabilistic counterpart, Springer, 1984.

[A3] Dellacherie, C. and Meyer, P. A., Probabilités et potentiel, 1-2, Hermann, 1975-1983.

高琪仁、吴炯圻 译 卫念祖 校

球 [ball ; шар]

Euclid 空间 E^n 中与一给定点 x_0 (球心(centre)) 的距离小于 (开球 (open ball) $V^{\circ n}$) 或不大于 (闭球 (closed ball) $\bar{V}^n$) 某一数 R (球半径 (radius)) 的点 x 的集合 V^n, 即

$$V^{\circ n}\ (\bar{V}^n) = \{x \in E^n : \rho(x, x_0) < R\ (\leq R)\}.$$

一维球 V^1 是线段 (line segment), 二维球 V^2 是圆盘 (disc), 对于 $n>3$ 的 V^n 有时称为超球 (hyperball). 球的边界 (表面) 是球面.

球的体积是

$$V^n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)} R^n = \frac{S^{n-1}}{n} R,$$

其中 S^{n-1} 是边界球面的表面, Γ 是 gamma 函数: $\Gamma(n+1) = n!$, $\Gamma(n+1/2) = 2^{-n}(1 \cdot 3 \cdots (2n-1))\pi^{1/2}$. 特别地,

$$V^1 = 2R,\ V^2 = \pi R^2,\ V^3 = \frac{4}{3}\pi R^3,\ V^4 = \frac{\pi^2 R^4}{2}.$$

随着维数的增加, 球的体积"集中"到它的表面上:

$$\frac{V^n(R_2) - V^n(R_1)}{V^n(R_2)} \to 1,\ R_1 < R_2,\ n \to \infty.$$

球是最简单的几何形体. 它的拓扑是平凡的. 在一切具有相等体积的形体中, 球的表面积最小, 而在一切具有相等表面积的形体中, 球的体积最大.

在度量空间中, 球可按同样的方式来定义. 然而, 这时的球未必是严格凸的, 它的表面可以有非光滑点等等, 即它可以有任意凸体的一切特征现象.

一个无穷维球 (infinite - dimensional ball) 是维数逐次递增而依次嵌入的球的序列的方向极限. 与有限维球不同, 它没有紧闭包. 反之, 在拓扑向量空间中, 球的紧性意味着它的维数有限性.

例如, 见球面 (sphere).

И. С. Шарадзе 撰 沈一兵 译

Banach 代数 [Banach algebra ; Банахова алгебра]

复数域上的**拓扑代数** (topological algebra) A, 其拓扑由使得 A 成为 **Banach 空间** (Banach space) 的范数来定义, 且元素的乘法对两个因子各自连续. 一个 Banach 代数称为交换的 (commutative), 是指对于所有 $x, y \in A$, 等式 $xy = yx$ 成立 (见**交换 Banach 代数** (commutative Banach algebra)). 一个 Banach 代数 A 称为具有单位元的代数 (algebra with a unit), 如果 A 包含元素 e, 使得对于任何 $x \in A$, 等式 $ex = xe = x$ 成立. 如果在一个 Banach 代数 A 中没有单位元, 那么单位元可以附加, 即有可能构造一个具有单位元的 Banach 代数 $\tilde{A}$, 它包含原来的代数 A 作为余维数为 1 的闭子代数. 在任何具有单位元 e 的 Banach 代数 A 中, 总可把范数换为另一个等价范数, 使得对于新范数来说, 关系式 $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$, $\|e\| = 1$ 成立. 在下面的叙述中, 照例都假定代数中包含单位元, 且它满足上述对于范数的条件.

例. 1) 设 X 是紧拓扑空间, $C(X)$ 是所有 X 上的连续复值函数全体. 那么 $C(X)$ 关于通常的运算和范数

$$\|f\| = \max_X |f|$$

是 Banach 代数.

2) 一个 Banach 空间上的所有有界线性算子的全体关于通常的线性算子的加法和乘法运算以及算子范数形成 Banach 代数.

3) 设 V 是 n 维复空间 $\mathbf{C}^n$ 中的有界区域. V 上的有界全纯函数关于通常的运算和范数

$$\|f\| = \sup_V |f|$$

是 Banach 代数. 这个 Banach 代数包含在 V 上有界全纯、在 V 的闭包上有连续延拓的函数全体作为闭子代数. 最简单的例子是在圆盘 $|z| \leq 1$ 上连续、在圆盘 $|z| < 1$ 中解析的函数代数.

4) 设 G 为局部紧群, $L^1(G)$ 为关于 G 上的 Haar 测度可测、且关于这个测度绝对可积的所有函数 (等价类) 的空间, 其范数为

$$\|f\| = \int_G |f(g)|\,dg$$

(左 Haar 积分).

如果把卷积运算

$$(f_1 * f_2)(h)=\int_G f_1(g) f_2(g^{-1}h)dg$$

看作是 $L^1(G)$中的乘法,那么 $L^1(G)$变为一个 Banach 代数; 如果 G 是 Abel 局部紧群,那么 Banach 代数 $L^1(G)$ 是交换的. Banach 代数 $L^1(G)$ 称为 G 的**群代数** (group algebra). 群代数 $L^1(G)$有(关于卷积的)单位元,当且仅当 G 是离散的.

当 G 是交换群时,可以构造 $L^1(G)$ 的一一表示,它由每个函数 $f\in L^1(G)$的 Fourier 变换所给出,后者即 G 的特征标群 $\hat{G}$ 上的函数

$$\hat{f}(\chi)=\int_G \chi(g)f(g)\,dg,$$

函数 $\hat{f}(X)$ 全体(关于通常的点态运算)形成某个 $\hat{G}$ 上的连续函数代数 $A(\hat{G})$,它称为局部紧 Abel 群 $\hat{G}$ 的 Fourier 代数(Fourier algebra). 特别是,如果 G 是整数群 $\mathbf{Z}$,那么 $A(\hat{\mathbf{Z}})$是圆周上的可展开为绝对收敛三角级数的连续函数的代数.

5) 设 G 是拓扑群. G 上的连续复值函数称为殆周期的(almost periodic),如果它的位移 $f(g_0 g)$ $(g_0\in G)$ 全体关于 G 上的一致收敛形成一个紧函数族. 殆周期函数全体关于点态运算和范数

$$\| f \| = \sup_{g\in G} |f(g)|$$

形成交换 Banach 代数.

6) 非交换的四元数域不构成复数域上的 Banach 代数,因为 Banach 代数 A 的元素的乘积应该与数乘相容: 对于所有 $\lambda\in\mathbf{C}$ 和 $x,\ y\in A$, 等式

$$\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$$

必须成立; 在四元数域中当取 $\lambda=i,\ x=j,\ y=k$ 时这个等式是不成立的.

任何具有单位元的 Banach 代数是有连续逆的拓扑代数. 特别是,如果 $\varepsilon(A)$是 Banach 代数 A 中的关于乘法有(双边)逆的元素全体,那么 $\varepsilon(A)$对于由嵌入 $\varepsilon(A)\subset A$ 诱导的拓扑是拓扑群. 如果 $\|e-a\|<1$,那么 $a\in\varepsilon(A)$,且

$$a^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} b^n,$$

其中 $b=e-a$,而级数绝对收敛. A 中的右(左)可逆元的全体也形成 A 中的一个开集.

如果在 Banach 代数 A 中所有元素都有逆(甚至有左逆),那么代数 A 等距同构于复数域(Гельфанд-Mazur 定理(Gel'fand-Mazur theorem)).

既然在一个 Banach 代数 A 中单位元的某个邻域可由可逆元所构成,从而任何非平凡理想的闭包是与 A 不相重合的理想. 特别是,极大(左、右、双边)理想是闭的.

Banach 代数理论中的一个重要课题是刻画 Banach 代数中的闭理想. 在若干情形中,这个问题可以简单地解决. 在代数 $C(X)$ 中(见例 1), 每个闭理想具有形式 $I=\{f\in C(X): f|_Y=0\}$,其中 Y 是 X 中的闭集. 如果 A 是可分无限维 Hilbert 空间上的所有有界线性算子的代数,那么全连续算子理想是 A 中仅有的闭双边理想.

一个元素 $a\in A$ 有左(右)逆,当且仅当它不包含在任何极大左(右)理想中. A 中的所有极大左理想的交与所有极大右理想的交相重合; 这个交集称为代数 A 的根(radical of the algebra),记作 Rad A. 元素 $a_0\in A$ 属于 Rad A,当且仅当 $e+aa_0\in\varepsilon(A)$对于任何 $a\in A$ 成立. 满足 Rad $A=0$ 的代数称为半单的(semi-simple). 代数 $C(X)$和群代数 $L^1(G)$是半单的. Banach 空间上的所有有界线性算子的代数的所有不可约的(即没有非平凡不变子空间的)闭子代数是半单的.

元素 $a\in A$ 的预解式(resolvent of an element)是函数

$$\lambda \to a_\lambda = (a-\lambda e)^{-1},$$

它定义在所有使得 $a-\lambda e$ 的(双边)逆存在的 $\lambda\in\mathbf{C}$ 的集合上. 预解式的存在域包含所有满足 $|\lambda|>\|a\|$ 的点 λ. 预解式的极大存在域是开集; 在这个集合上, 预解式是连续的、甚至是解析的,而且 $da_\lambda/d\lambda=a_\lambda^2$. 此外, Hilbert 恒等式

$$a_{\lambda_2}-a_{\lambda_1} = (\lambda_2-\lambda_1)a_{\lambda_1}a_{\lambda_2}$$

成立. 预解式存在域的余集称为元素 a 的谱 (spectrum of the element),记作 $\sigma(a)$. 对于每个 $a\in A$,集合 $\sigma(a)$ 是非空有界闭集.

如果 $a,b\in A$, 那么集合 $\sigma(ab)$ 和 $\sigma(ba)$ 不一定重合,但是

$$\sigma(ab)\cup\{0\} = \sigma(ba)\cup\{0\}.$$

数

$$|a| = \max_{\lambda\in\sigma(a)}|\lambda|$$

称为元素 $a\in A$ 的谱半径(spectral radius); 对于这个数, Гельфанд 公式 (Gel'fand formula)

$$|a| = \lim \| a^n \|^{1/n}$$

成立,这里右端的极限总存在. 如果 $a\in$ Rad A, 那么 $|a|=0$; 一般地说,逆命题仅对其根重合于广义幂零元(即 $|a|=0$的元素 a) 集的交换 Banach 代数为真. 在任何 Banach 代数中, 关系式 $|a^k|=|a|^k$, $|\lambda a|=|\lambda||a|$ 和 $|a|\leqslant\|a\|$ 成立,如果 A 是交换的, 那么 $|ab|\leqslant|a||b|$ 和 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$ 成立.

没有非零广义幂零元的非交换代数的例子是已知的. 然而,如果对于任何 $a\in A$,关系式 $\|a^2\|=\|a\|^2$成立,那么 Banach 代数 A 是交换的. 条件"对于所有 $a,b\in$

A, $\|ab\|=\|ba\|$ 成立"对具有单位元的代数 A 来说也是交换性的充分条件.

代数 A 称为具有对合的代数 (algebra with involution),如果在 A 上定义了运算 $a\to a^*$,它满足条件:对于所有 $a,b\in A$, $\lambda,\mu\in\mathbf{C}$,

$$(\lambda a+\mu b)^*=\bar{\lambda}a^*+\bar{\mu}b^*,\ (a^*)^*=a,\ (ab)^*=b^*a^*,$$

成立. 映射 $a\to a^*$ 称为 A 中的对合 (involution). 具有对合的代数 A 上的线性泛函 ψ 称为正的 (positive), 如果 $\psi(aa^*)\geqslant 0$ 对于任何 $a\in A$ 成立. 如果线性泛函 ψ 是正的,那么

$$|\psi(a)|^2\leqslant\psi(e)\psi(aa^*)$$

对于所有 $a\in A$ 成立. 如果 A 中的对合是等距映射,即 $\|a^*\|=\|a\|$ 对于所有 $a\in A$ 成立,那么

$$\psi(a^*a)\leqslant\psi(e)\,|\,a^*a\,|.$$

一个具有对合的 Banach 代数称为是完全对称的 (completely symmetric),如果 $e+a^*a\in\varepsilon(A)$ 对于任何 $a\in A$ 成立; A 称为 C^* 代数 (C^*-algebra) (完全正则代数 (completely-regular algebra)), 如果 $\|a^*a\|=\|a\|^2$ 对于任何 $a\in A$ 都成立. 任何 C^* 代数是全对称的. 全对称代数的例子包括交换群或紧群的群代数 $L^1(G)$. C^* 代数的例子包括代数 $C(X)$ ($C(X)$ 中的对合定义为对复共轭函数的转换)和 Hilbert 空间中的有界线性代数的同时包含算子及其伴随算子的闭子代数(对合定义为对伴随算子的转换). 任何 C^* 代数等距(且保持对合)同构于这种代数之一 (Гельфанд-Наймарк 定理 (Gel'fand-Naimark theorem)). 特别是,任何交换 C^* 代数 A 等距(且保持对合)同构于代数 $C(X)$ 之一 (这一定理蕴涵 Stone - Weierstrass 定理).

一个具有对合的 Banach 代数的元素 a 称为 Hermite 的 (Hermitian), 如果 $a^*=a$. 一个具有对合的 Banach 代数是 C^* 代数的充要条件为: 对于所有 Hermite 元素 a, 条件 $\|e^{ia}\|=1$ 成立. 如果在一个具有对合的 Banach 代数中, $\sup\|e^{ia}\|<\infty$ (上界对于所有 Hermite 元素来取),那么这个代数拓扑*同构于一个 C^* 代数. 如果在一个任意的 Banach 代数中, $\|e^{ita}\|=1$ 对于所有实数 t 和某个固定的元素 a 成立,那么 $\|a\|$ 重合于谱半径,即 $\|a\|=|a|$.

Banach 代数理论,特别是交换 Banach 代数理论,在泛函分析的各个分支和一些其他数学学科中都有众多应用.

参考文献

[1] Bourbaki, N., Elements of mathmatics. Spectral theories, Addison - Weslley, 1977(译自法文).

[2] Gamelin, T. W., Uniform algebras, Prentice-Hall, 1969.

[3] Gunning, R. C. and Rossi, H., Analytic functions of several complex variables, Prentice - Hall, 1965.

[4] Гельфанд, И. М., 《Мат. сб.》, 9(51) (1941), 1, 3 - 24.

[5] Gleason, A. M., Function algebras, in Proc. Sem. on analytic functions, Vol. 2, 1958, 213 - 216.

[6] Hoffman, K., Banach spaces of analytic functions, Prentice - Hall, 1962.

[7] Горин, Е. А., Максимальные подалгебры коммутативных банахов алгебр с инволюцией, 《Матем. заметки》, 1 (1967), 2, 173 - 178.

[8] Dunford, N. and Schwartz, J. T., Linear operators, 1 - 3, Interscience, 1958 - 1971.

[9] Zelazko, W., Banach algebras, Elsevier, 1973 (译自波兰文).

[10] Kaplansky, I., Functional analysis, in Surveys in applied mathematics, Vol. 4. Some aspects of analysis and probability, Wiley, 1958.

[11] Loomis, L. H., An introduction to abstract harmonic analysis, v. Nostrand, 1953.

[12] Наймарк, М. А., Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968 (英译本: Naimark, M. A., Normed rings, Reidel, 1984).

[13] Некоторые вопоросы теории приближений, М., 1963 (译自英文).

[14] Rickart, C. E., General theory of Banach algebras, v. Nostrand, 1960.

[15] Royden, H. L., Function algebras, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 69 (1963), 3, 281 - 298.

[16] Phelps, R., Lecture on Choquet's theorems, v. Nostrand, 1966.

[17] Hille, E. and Phillips, R., Functional analysis and semigroups, Amer. Math. Soc., 1957 (中译本: E. 希尔, R. 菲列普斯, 泛函分析与半群, 上海科学技术出版社, 1964).

E. A. Горин 撰

【补注】 Гельфанд 公式又称谱半径公式 (spectral radius formula).

参考文献

[A1] Kadison, R. V. and Ringrose, J. R., Fundamentals of the theory of operator algebras, 1, Acad. Press, 1983.

史树中 译

Banach 解析空间 [Banach analytic space, Банахова аналитическое пространство]

解析空间概念的无限维推广,它产生于对解析结构形变 (deformation) 的研究. 这里,局部模型是 Banach 解析集 (Banach analytic set), 即 $\mathbf{C}$ 上的 Banach 空间 (Banach space) E 的开集 U 的子集 $\mu(U,F,f)=f^{-1}(0)$, 其中 $f: U\to F$ 是映到 Banach 空间 F 的解析映射 (analytic mapping). 与有限维情形不同之处在于: 在局部模型上它没有给定一个结构层, 但有一个层集 $\Phi(W)$, 其中 W 是任意 Banach 空间 G 中的开集. 这时, $\Phi(G)$ 定义为解

析映射 $U \to G$ 的芽的层对形式为 $x \to \varphi(x)f(x)$ 的映射的芽的子层的商，其中 $\varphi: U \to \mathrm{Hom}(F, G)$ 是局部解析映射，而 $\Phi(W) \subset \Phi(G)$ 是由在 W 中取值的映射生成的．层集 $\Phi(W)$ 定义了由 Banach 空间的开集及其解析映射的范畴 K 到 $f^{-1}(0)$ 上的集合的层的范畴的函子．

一个拓扑空间 X，如果具有从范畴 K 映到 X 中的集合(其中所有点有同构于某个局部模型的邻域)的层的范畴的函子，就称为 Banach 解析空间(Banach analytic space)．

复解析空间形成 Banach 解析空间范畴的一个完全子范畴，一个 Banach 解析空间是有限维的，如果它的每一个点 x 有同构于这种模型 $\mu(U, F, f)$ 的邻域，且存在映射 $g: U \to U$，它诱导出模型的一个自同构，且有完全连续的微分 dg_x([1])．

Banach 解析空间的第二种特殊情形是 Banach 解析流形(Banach analytic manifold)，即局部同构于 Banach 空间的开集的解析空间．一个重要例子是 C 上的 Banach 空间的有闭余空间的闭线性子空间的流形．

有限确定的 Banach 解析集(finitely-defined Banach analytic sets)，即形式为 $\mu(U, C^{n}, f)$ 的模型，具有类似于经典性质的局部性质：原始分解，Hilbert 零点定理，局部描述定理，等等，都是可应用的([2])．

参考文献

[1] Douady, A., Les problèmes des modules pour les sous-espace analytique compacts d'une espace analytique donné, *Ann. Inst. Fourier* (*Grenoble*), **16** (1966), 1, 1–95.

[2] Ramis J.-P., Sous-ensembles analytiques d'une variété banachique complexe, Springer, 1970.

Д. А. Пономарев 撰　史树中 译

Banach 指标 [Banach indicatrix; Банаха индикатриса], 重数函数(multiplicity function)，连续函数 $y=f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ 的

一个取整数值的函数 $N(y, f)$ $(-\infty<y<\infty)$，它等于方程 $f(x)=y$ 的根的个数．若对于给定的 y，上述方程有无限多个根，则 $N(y, f)=\infty$；若方程无根，则 $N(y, f)=0$．函数 $N(y, f)$ 是由 S. Banach 定义的([1]，亦见[2])．他证明了，在 $[a, b]$ 上任意连续函数 $f(x)$，它的指标 $N(y, f)$ 是不高于第 2 Baire 类中的函数，并且

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} N(y, f)\,dy, \qquad (*)$$

其中 $V_a^b(f)$ 是 f 在 $[a, b]$ 上的变差．因此等式(*)可以看作是连续函数 f 的变差的定义．Banach 指标也可以对只有第一类不连续点的函数定义(且保持等式(*))，见[3]．Banach 指标的概念可以用来定义多元函数的变差([4]，[5])．

参考文献

[1] Banach, S., Sur les lignes rectifiables et les surfaces dont l'aire est finie, *Fund. Math.*, 7(1925), 225–236.

[2] Натансон, И. П., Теория функций вещественной переменной, 2 изд., М., 1957(中译本：И. П. 那汤松，实变函数论，高等教育出版社，1958)．

[3] Лозинский, С. М., 《Вестн. Ленингр. ун-та》, 7 (1958), Сер. Математика, механика, астрономия, 2, 70–87.

[4] Кронрод, А. С., 《Успехи матем. наук》, 5, (1950), 1, 24–134.

[5] Витушкин, А. Г., О многомерных вариациях, М., 1955.

В. И. Голубов 撰

【补注】 更一般地，对于映射 $f: X \to Y$，也可类似地定义 $N(y, f)$．设 X 为可分距离空间，且 $f(A)$ 对于 X 的一切 Borel 子集 A 均为 μ 可测．对一切 $S \subset X$，令 $\zeta(S)=\mu(f(S))$．再设 ψ 是根据 Carathéodory 条件由 ζ 确定的 X 上的测度，则有

$$\psi(A)=\int N(f)A\,d\mu_y$$

对一切 Borel 集 $A \subset X$ 成立．见[A1]中的第 176 页．(*)的重要推广，可见[A2]．

参考文献

[A1] Federer, H., Geometric measure theory, Springer, 1969.

[A2] Federer, H., An analytic characterization of distributions whose partial derivatives are representable by measures, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **60**(1954), 339.

王斯雷 译　郑维行 校

Banach 格 [Banach lattice; Банахова решетка]

同时是 **Banach 空间**(Banach space)的**向量格**(vector lattice)，其范数满足单调性条件：

$$|x| \leqslant |y| \Rightarrow \|x\| \leqslant \|y\|.$$

Banach 格也称为 KB 谱系(KB-lineal)，而一个任意的赋范格，即具有单调范数的向量格，称为 KN 谱系(KN-lineal)．在对一个赋范格按范数完全化时，序关系可以被延拓到所得到的 Banach 空间使其成为 Banach 格．如果有可能对一个格引入 Banach 拓扑使其成为 Banach 格，那么这种拓扑是唯一的．最简单的 Banach 格的例子是在一个任意的紧拓扑空间 Q 上的连续函数空间 $C(Q)$，其中有自然的(点态)序和通常的(一致)范数．另外的 Banach 格的例子包括 L_p 空间和 **Orlicz 空间**(Orlicz space)．在 Banach 格中，依范数收敛是对于具有单元基准的收敛性的(*)收敛．这对于赋范格是不成立的．

一个重要的特殊情形是有界元的 Banach 格．如果一个格 X 包含强单位元(strong unit)1，即如果对于每个 $x \in X$，存在这样的 λ，使得 $|x| \leqslant \lambda 1$，那么使这个不等

式成立的最小的 λ 可取作 $\|x\|$. 这样得到的赋范格称为有界元素的赋范格(normed lattice of bounded elements);如果它按范数是完全的,那么它就称为有界元的 Banach 格(Banach lattice of bounded elements).在一个有界元的 Banach 格中(甚至在一个有界元的赋范格中),依范数收敛恒同于具有单元基准的收敛,而元素集合的依范数的有界性恒同于序有界性.如果一个有界元的赋范格是条件 σ 完全的,那么它也是依范数完全的.

空间 $C(Q)$是有界元的 Banach 格,其中函数 $x(q)\equiv 1$ 取作单位元. 对于任何有界元的 Banach 格 X,存在紧 Hausdorff 空间 Q,使得 X 代数同构且格同构于空间 $C(Q)$.这是紧 Hausdorff 空间上的连续函数的 Banach 格的一个抽象特征.

在任何赋范格中,依范数连续的可加泛函是正则的,特别是,它可表示为两个依范数连续的正可加泛函之差.在 Banach 格中,每个正可加泛函是依范数连续的,这意味着正则泛函类与依范数连续的可加泛函类相重合.赋范格 X 的 Banach 意义下的对偶空间 X'是条件完全的 Banach 格.在一个赋范格中,Hahn-Banach 定理可以如下加强:对于任何 $x_0>0$,存在依范数连续的正可加泛函 f 使得 $f(x_0)=\|x_0\|$, $\|f\|=1$.

参考文献

[1] Вулих, Б. З., Введение в теорию полуупорядоченных пространств, М., 1961 (英译本: Vulikh, B. Z., Introduction to the theory of partially ordered spaces, Wolters-Noordhoff, 1967).

[2] Day M. M., Normed linear spaces, Springer, 1958.

Б. З. Вулих 撰

【补注】 关于"具有单元基准的收敛性"见 **Riesz 空间**(Riesz space).上述条目中的术语来自[1],在西方文献中一般不这样用.

向量格(vector lattice)(即同时是格的实线性(半)序向量空间)通常称为 **Riesz 空间**. 一个 Riesz 空间 L 上的范数 $\|\cdot\|$ 称为Riesz范数(Riesz norm),如果

$$|f|\leqslant|g| \Rightarrow \|f\|\leqslant\|g\|,$$

其中 $f, g\in L$ 是任意的; 这一关系式称为单调性条件.这里

$$|f|=(-f)\vee(f).$$

赋范 Riesz 空间(normed Riesz space)被理解为赋予 Riesz 范数的 Riesz 空间. Banach 格的定义现在可重述如下:Banach 格是依范数完全的赋范 Riesz 空间.

一个 Banach 格上的所有(Riesz)范数是等价的.

对于一个 Banach 格 L 来说,序对偶空间(见 **Riesz 空间**(Riesz space))与范数对偶空间是重合的(这对于赋范 Riesz 空间一般不成立).要求依范数完全的 Banach 格不一定是 Dedekind 完全的.然而,任何 Banach 格 L(甚至每个赋范 Riesz 空间)都可看作一个 Dedekind 完全 Banach 格(L的按范数的双对偶空间,见 **Banach 空间**(Banach space))的(Riesz)子空间.

参考文献

[A1] Schaefer, H. H., Banach lattices and positive operators, Springer, 1974.

[A2] Luxemburg, W. A. J. and Zannen, A. C., Riesz spaces, 1, North-Holland, 1971.

[A3] Lindenstrauss, J. and Tzafriri, L., Classical Banach spaces, 2, Springer, 1979.

[A4] Zannen, A.C., Riesz spaces, 2, North-Holland, 1983.

史树中 译

Banach-Mazur 泛函 [Banach-Mazur functional; Банаха-Мазура функционал], Banach-Mazur 算子(Banach-Mazur operator)

由 S. Banach和S. Mazur ([1])提出的可计算泛函(算子)概念,讨论从集合 M_1 到 M_2 的、将 M_1 中元素的任意可计算序列变换到 M_2 的可计算序列的泛函的可计算性(见**可计算函数**(computable function)).

设 R 是所有一元**一般递归函数**(general recursive function)的集合. 定义在 R 上的自然数值泛函 Φ 称为 Banach-Mazur 可计算的(computable according to Banach-Mazur)或 Banach-Mazur 泛函(Banach-Mazur functional), 如果对任意二元一般递归函数 g,存在一般递归函数 f, 使得

$$f(n)=\Phi(g(n, m))$$

(这里 g 对任意固定的 n 看作是 m 的函数). 所有一般递归泛函和处处有定义的能行泛函(见**构造度量空间**(constructive metric space))是 Banach-Mazur 泛函.另一方面,[2] 中提出了一个不是一般递归函数,也不是能行泛函的 Banach-Mazur 泛函. Banach-Mazur 泛函的一个重要性质是其连续性([1]): 这样一个泛函在任意一般递归函数上的值只由该函数的有限多个值所决定.

上面概述的可计算性概念可扩展到一元实变函数上.设 C 是一个可计算实数的可计算序列的集合;每个序列 $\{a_k\}\in C$ 由两个一般递归函数 f 和 g 定义, 使得对所有 n 和 k,

$$\left|a_k-\frac{f(k, n)-g(k, n)}{n+1}\right|<\frac{1}{n+1}.$$

实变函数 φ 称为 Banach-Mazur 可计算的(这样的函数集记为 $\mathfrak{R}$)如果对任意 C 的序列$\{a_k\}$, 序列$\{\varphi(a_k)\}$也属于 C. 所有函数 $\varphi\in\mathfrak{R}$在所有可计算点上是连续的([1]). 例如, $\operatorname{sgn} x\in\mathfrak{R}$. 是否所有 $\mathfrak{R}$ 中函数是可

计算连续的,仍是(1977)未解决的问题. ℜ关于分析中的运算序列是封闭的,所以在这基础上可以成功地发展可计算分析([1]).

参考文献

[1] Mazur, S., Computable analysis, PWN, 1963.

[2] Friedberg, R. M., 4-quantifier completeness: A Banach-Mazur functional not uniformly partial recursive, *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math., Astr. Phys.*, **6**(1958), 1, 1-5.

[3] Марков, А. А., 《Тр. матем. ин-та. АН СССР》, **52** (1958), 315-348.

[4] Rogers, Jr. Y., Theory of recursive functions and effective computability, McGraw-Hill, 1967.

Б. А. Кушнер 撰

【补注】 递归分析最新发展可见[A1].

参考文献

[A1] Aberth, O., Computable analysis, McGraw-Hill, 1980.

胡跃飞 译

Banach 模 [**Banach module**; **Банахов модуль**], Banach 代数 A 上的左 Banach 模

带有连续双线性算子 $m: A \times X \to X$ 的 **Banach 空间**(Banach space)X, 其中 m 在 X 上定义了代数意义下的 A 上的左模(module)结构. A 上的右 Banach 模和 Banach 双模用类似的方式定义. 两个 Banach 模之间的连续同态称为态射. A 上的 Banach 模的例子包括 A 中的闭理想和 Banach 代数 $B \supset A$. 可以表示为 Banach 模 $A_+ \hat{\otimes} E$ (其中 A_+ 是附加单位元的 A, E 是 Banach 空间 $m(a, b \otimes x) = ab \otimes x$) 的直接因子的 A 上的 Banach 模称为投射模 (projective module). 见**拓扑张量积**(topological tensor product).

参考文献

[1] Rieffel, M. A., Induced Banach representations of Banach algebras and locally compact groups, *J. Funct. Anal.*, **1** (1967), 443-491.

А. Я. Хелемский 撰 史树中 译

Banach 空间 [**Banach space**; **Банахово пространство**], B 空间(B-space)

完全**赋范向量空间**(vector space). D. Hilbert, M. Fréchet 和 F. Riesz 在 1904 年和 1918 年之间所引入的函数空间是建立 Banach 空间理论的出发点. 在这些空间中,强收敛、弱收敛、紧性、线性泛函、线性算子等基本概念已经得到初步研究. Banach 空间是用 S. Banach 的姓来命名的; Banach 在 1922 年(见[1])开始根据他所引入的公理来系统研究这些空间,并得到深刻的结果.

Banach 空间理论是与**线性拓扑空间**(linear topological space)的一般理论平行发展的. 这两种理论互相以新观念和新事实来丰富对方. 这样,来自赋范空间理论的半范数观念成为建立局部凸线性拓扑空间理论的必不可少的工具. Banach 空间中的元素和线性泛函的弱收敛的概念最终导致弱拓扑概念的形成. Banach 空间理论是泛函分析的一个得到彻底研究的领域,它对数学的各个分支都有大量的(直接的或通过算子理论的)应用.

蕴藏在 Banach 空间中的问题是形形色色的:单位球的几何,子空间的几何,线性拓扑分类, Banach 空间中的序列和级数, Banach 空间中的最佳逼近,在 Banach 空间中取值的函数,等等. 注意到 Banach 空间中的算子理论,应该指出,其中许多定理直接关系到 Banach 空间的几何和拓扑.

例. 在数学分析中遇到的 Banach 空间大多数是在一定条件下的函数或数列集合.

1) $l_p (p \geq 1)$ 是满足

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p < \infty$$

的数列 $x = \{\xi_n\}$ 的空间,其范数为

$$\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p\right)^{1/p}.$$

2) m 是有界数列空间,其范数为

$$\|x\| = \sup_n |\xi_n|.$$

3) c 是收敛数列空间,其范数为

$$\|x\| = \sup_n |\xi_n|.$$

4) c_0 是收敛于零的数列的空间,其范数为

$$\|x\| = \max_n |\xi_n|.$$

5) $C[a,b]$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数 $x = x(t)$ 的空间,其范数为

$$\|x\| = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|.$$

6) $C[K]$ 是紧统 K 上的连续函数空间,其范数为

$$\|x\| = \max_{t \in K} |x(t)|.$$

7) $C^n[a,b]$ 是有直至 n 阶的连续导数的函数的空间,其范数为

$$\|x\| = \sum_{k=0}^{n} \max_{a \leq t \leq b} |x^{(k)}(t)|.$$

8) $C^n[I^m]$ 是所有定义在 m 维正方体中的直至 n 阶连续可微的函数的空间,其范数是所有不超过 n 阶的导数的一致范数.

9) $M[a,b]$ 是有界可测函数空间,其范数为

$$\|x\| = \operatorname{ess}\max_{a \leq t \leq b} |x(t)|.$$

10) $A(D)$是在开单位圆盘 D 中解析、在闭圆盘 $\bar{D}$ 中连续的函数的空间,其范数为

$$\| x \| = \max_{z \in \bar{D}} | x(z) |.$$

11) $L_p(S;\Sigma,\mu)$ $(p \geqslant 1)$是定义在有可数可加测度 μ 的集合 S 上的函数 $x(s)$的空间,其范数为

$$\| x \| = \left[\int_S | x(s) |^p \mu(ds) \right]^{1/p}.$$

12) $L_p[a,b]$ $(p \geqslant 1)$是 $L_p(S;\Sigma,\mu)$的特殊情形.它是 p 次可和的 Lebesgue 可测函数的空间,其范数为

$$\| x \| = \left[\int_a^b | x(s) |^p \, ds \right]^{1/p}.$$

13) AP 是 Bohr 殆周期函数空间,其范数为

$$\| x \| = \sup_{-\infty < t < +\infty} | x(t) |.$$

空间 $C[a,b]$, $C^n[a,b]$, $L_p[a,b]$, c, l_p是可分的;空间 $M[a,b]$, m, AP 是不可分的;$C[K]$ 是可分的,当且仅当 K 是紧距离空间.

Banach 空间的(闭线性)子空间 Y 撇开包络空间 X 来考虑仍是 Banach 空间.赋范空间 X 对于子空间 Y 的商空间 X/Y 在范数如下定义时仍是赋范空间:设 $Y_1 = x_1 + Y$ 是一个陪集.那么

$$\| Y \| = \inf_{y \in Y} \| x_1 + y \|.$$

如果 X 是 Banach 空间,那么 X/Y 也是 Banach 空间.所有定义在赋范空间 X 上的连续线性泛函全体具有范数

$$\| f \| = \sup_{x \in X} \frac{| f(x) |}{\| x \|}, \quad x \neq 0,$$

它称为 X 的对偶空间,记作 X^*.它是一个 Banach 空间.

Banach 空间满足线性泛函延拓的 **Hahn - Banach 定理**(Hahn - Banach theorem):如果在赋范空间 X 的子空间 Y 上定义了一个连续线性泛函,那么它可以延拓到整个空间 X 上,并保持它的线性性和连续性.特别是,可使延拓后的泛函具有同样的范数:

$$\| f \|_X = \sup_{x \in X} \frac{| f(x) |}{\| x \|} = \| f \|_Y = \sup_{y \in Y} \frac{| f(y) |}{\| y \|}.$$

甚至一条更一般的定理也成立:设定义在线性空间 X 上的实值函数 $p(x)$ 满足条件

$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y),$$
$$p(\lambda x) = \lambda p(x), \quad \lambda \geqslant 0, \quad x, y \in X,$$

又设$f(x)$是定义在子空间 $Y \subset X$ 上的实值线性泛函,且满足

$$f(x) \leqslant p(x), \quad x \in Y.$$

那么存在定义在整个 X 上的线性泛函 $F(x)$,使得

$$F(x) = f(x), \quad x \in Y; \quad F(x) \leqslant p(x), \quad x \in X.$$

Hahn - Banach 定理的一个推论是有关 X 和 X^* 的范数的"逆"公式:

$$\| x \| = \max_{f \in X^*} \frac{| f(x) |}{\| f \|}, \quad f \neq 0, \quad x \in X.$$

这个公式中的最大值是对某个 $f = f_x \in X^*$ 达到的.另一个重要推论是连续线性泛函的分离集的存在,它意味着对于任何 $x_1 \neq x_2 \in X$,存在某个定义在 X 上的连续线性泛函,使得 $f(x_1) \neq f(x_2)$ (见**泛函的完全集**(complete set of functionals)).换句话说,在 X 上存在足够多的连续线性泛函.

对于许多具体的 Banach 空间来说,连续线性泛函的一般形式是已知的.例如,在 $L_p[a,b]$ $(p > 1)$上,所有连续线性泛函由下列公式给出:

$$f(x) = \int_a^b x(t) y(t) \, dt,$$

其中 $y \in L_q[a,b]$, $1/p + 1/q = 1$;同时,任何函数 $y(t) \in L_q[a,b]$也由这个公式定义了一个连续线性泛函 f,并且

$$\| f \| = \left[\int_a^b | y(t) |^q \, dt \right]^{1/q}.$$

这样,L_p的对偶空间是 L_q:$L_p^* = L_q$. $L_1[a,b]$ 上的连续线性泛函用同样的公式来定义,但是在这种情形下 $y \in M$,因而 $L_1^* = M$.

X^* 的对偶空间 X^{**} 称为*二次对偶*(second dual)空间.三次、四次对偶空间等等,可用类似的方式来定义.X 中的每个元素可看作与 X^* 上的某个线性泛函一样:

$$F(f) = f(x), \text{对一切} f \in X^* \quad (F \in X^{**}, \ x \in X),$$

这时,$\| F \| = \| x \|$.于是可把 X 看作空间 X^{**} 的子空间,以及 $X \subset X^{**} \subset X^{IV} \cdots$, $X^* \subset X^{***} \subset \cdots$.如果在所指出的包含关系中,Banach 空间与它的二次对偶重合,那么它就称为*自反的*(reflexive).在这种情形中,所有包含都是等式.如果 X 不是自反的,那么所有包含都是严格的.如果商空间 X^{**}/X 具有有限维数 n,那么 X 称为 *n 阶拟自反的*(quasi - reflexive of order n).对于任何 n,拟自反空间存在.

Banach *空间的自反准则*(reflexive criteria for Banach spaces).

1) X是自反的，当且仅当对于每个$f\in X^*$可求得$x\in X$，使得下列公式中的上确界可达到：

$$\|f\| = \sup_{x\in X}\frac{|f(x)|}{\|x\|},\quad x\neq 0.$$

2) 在自反空间中，且仅在自反空间中，每个有界集关于弱收敛是相对紧的：其每个无限子集都包含弱收敛子列（Eberlein - Шмульян定理（Eberlein - Shmul'yan theorem））。空间L_p和$l_p(p>1)$是自反的。空间L_1, l_1, C, M, c, m, AP是非自反的。

一个Banach空间称为弱完全的（weakly complete），如果其中的每个弱Cauchy序列都弱收敛于空间中的某个元素。每个自反空间是弱完全的。此外，Banach空间L_1和l_1是弱完全的。还有更广的一类Banach空间——不包含同构于c_0的子空间的Banach空间。这类空间在许多方面类似于弱完全空间。

一个Banach空间称为严格凸的（strictly convex），如果它的单位球面S不包含线段。为了定量估计单位球面的凸性，引入凸性模：局部凸性模

$$\delta(x,\varepsilon) = \inf\left\{1-\left\|\frac{x+y}{2}\right\|; y\in S,\ \|x-y\|\geqslant\varepsilon\right\},$$

$$x\in S,\quad 0<\varepsilon\leqslant 2,$$

和一致凸性模

$$\delta(\varepsilon) = \inf_{x\in S}\delta(x,\varepsilon).$$

如果对所有$x\in S$和所有$\varepsilon>0$, $\delta(x,\varepsilon)>0$成立，那么这个Banach空间称为局部一致凸的（locally uniformly convex）。如果对所有$\varepsilon>0$, $\delta(\varepsilon)>0$成立，那么这个空间称为一致凸的（uniformly convex）。所有一致凸的Banach空间是局部一致凸的；所有局部一致凸的Banach空间是严格凸的。在有限维Banach空间的情形下，它们的逆命题也成立。如果一个Banach空间是一致凸的，那么它是自反的。

一个Banach空间称为光滑的（smooth），如果对于任何线性无关的元素x和y，函数$\psi(t)=\|x+ty\|$对于所有t的值是可微的。一个Banach空间称为一致光滑的（uniformly smooth），如果它的光滑模

$$\rho(\tau) = \sup_{x,y\in S}\left\{\frac{\|x+\tau y\|+\|x-\tau y\|}{2}-1\right\},\quad \tau>0$$

满足条件

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{\rho(\tau)}{\tau} = 0.$$

在一致光滑空间中，且仅在一致光滑空间中，范数是一致Fréchet可微的。一致光滑空间是光滑的，当空间为有限维时其逆亦真。一个Banach空间X是一致凸的（一致光滑的），当且仅当X^*是一致光滑的（一致凸的）。下列关系式联系着Banach空间X的凸模与X^*的光滑模：

$$\rho_{X^*}(\tau)=\sup_{0<\varepsilon\leqslant 2}\left\{\frac{\varepsilon(\tau)}{2}-\delta_X(\varepsilon)\right\}.$$

如果一个Banach空间是一致凸的（一致光滑的），那么它的所有子空间和商空间也是如此。Banach空间L_p和$l_p(p>1)$是一致凸的和一致光滑的，且

$$\delta(\varepsilon)=\begin{cases}\varepsilon^2 (1<p\leqslant 2),\\ \varepsilon^p (2\leqslant p<\infty);\end{cases}$$

$$\rho(\tau)\simeq\begin{cases}\tau^p\ \ (1<p\leqslant 2),\\ \tau^2\ \ (2\leqslant p<\infty);\end{cases}$$

$$\left[f(\varepsilon)\simeq\varphi(\varepsilon)\Leftrightarrow a<\frac{f(\varepsilon)}{\varphi(\varepsilon)}<b\right].$$

Banach空间$M, C, A, L_1, AP, m, c, l_1$既不是严格凸的，也不是光滑的。

在Banach空间中关于线性算子的下列重要定理成立：

Banach - Steinhaus 定理（Banach - Steinhaus theorem）。如果线性算子族$\mathcal{T}=\{T_\alpha\}$在每一点上有界：

$$\sup_\alpha\|T_\alpha x\|<\infty,\quad x\in X,$$

那么它也依范数有界：

$$\sup_\alpha\|T_\alpha\|<\infty.$$

Banach逆算子定理（Banach inverse operator theorem）。如果一个线性连续算子T把Banach空间X一一映射到Banach空间Y，那么逆算子T^{-1}也是连续的。

闭图象定理（closed - graph theorem）。如果一个闭线性算子把Banach空间X映到Banach空间Y，那么它是连续的。

在Banach空间之间的等距是很少发生的。空间L_2和l_2的等距是一个经典例子。Banach空间$C[K_1]$和$C[K_2]$等距，当且仅当K_1和K_2同胚（Banach - Stone定理（Banach - Stone theorem））。同构的Banach空间的邻近程度的度量是数

$$d(X, Y)=\ln\inf_T\|T\|\cdot\|T^{-1}\|,$$

其中T取遍所有有可能实现X和Y之间的（线性拓扑）同构的算子。如果X等距于Y，那么$d(X,Y)=0$。然而，$d(X,Y)=0$但X与Y不等距的例子也是存在的；它们称为几乎等距的（almost - isometric）。在同构下保持的Banach空间的性质称为线性拓扑性质（linear topologi-

cal properties)．它们包括可分性、自反性和弱完全性．对于Banach空间的同构分类特别有下列断言：

$$L_r \neq L_s;\ l_r \neq l_s,\ r \neq s;$$

$$L_r \neq l_s,\ r \neq s;\ L_r = l_s,\ r-s=2;$$

$$M = m;\ C[0,1] \neq A(D);$$

$C[K]=C[0,1]$，只要K是有连续统基数的度量紧统：

$$C^n[I^m] \neq C[0,1].$$

每个可分的Banach空间同构于某个局部一致凸Banach空间．还不知道(1985)是否每个Banach空间都同构于它的某个超平面．已知存在不同构于严格凸空间的Banach空间．

不考虑赋范空间的线性特性，而考虑它们的拓扑分类．两个空间是同胚的，如果可以在它们的元素之间建立双方的一一连续对应(不一定是线性的)．不完全的赋范空间不同胚于任何Banach空间．所有无限维可分Banach空间是同胚的．

在可分Banach空间类中，$C[0,1]$和$A(D)$是万有的(见**万有空间**(universal space))．自反可分Banach空间类中甚至没有一个同构于通用空间．Banach空间l_1在某种不同的意义下是通用的：所有可分Banach空间同构于它的某个商空间．

在上面提到的一些Banach空间中，除了L_2和l_2以外，每个都包含没有余子空间的子空间．特别是，在m和M中，每个无限维可分子空间都是不可余的，而在$C[0,1]$中所有无限维自反子空间都是不可余的．如果在一个Banach空间中，所有子空间都是可余的，那么这个空间同构于一个Hilbert空间．还不知道(1985)是否所有Banach空间都是某两个无限维子空间的直和．X的一个子空间Y是可余的，当且仅当存在一个连续的把X映射为Y的射影．映射到Y的射影的范数的下确界称为子空间Y在X中的相对射影常数(relative projection constant)$\lambda(Y,X)$．Banach空间X的每个n维子空间Y_n是可余的，且$\lambda(Y_n,X)\leqslant\sqrt{n}$．一个Banach空间$Y$的绝对射影常数(absolute projection constant)是

$$\lambda(Y) = \sup_X \lambda(Y, X),$$

这里X取遍所有包含Y作为子空间的Banach空间．对于任何无限维可分Banach空间，总有$\lambda(Y)=\infty$．满足$\lambda(Y)\leqslant\lambda<\infty$的所有Banach空间形成空间类$\mathscr{P}_\lambda(\lambda\geqslant 1)$．空间类$\mathscr{P}_1$重合于空间类$C(Q)$，其中$Q$是极不连通的紧统(见**极不连通空间**(extremally-disconnected space))．

关于有限维Banach空间的基本定理．1)有限维赋范空间(**Minkowski空间**(Minkowski space))是完全的，即是Banach空间．2)有限维Banach空间中的所有线性算子是连续的．3)有限维Banach空间是自反的(X^*的维数等于X的维数)．4)一个Banach空间是有限维的，当且仅当它的单位球是紧的．5)所有n维Banach空间两两同构；如果在它们的集合中引入距离

$$d(X, Y) = \ln\inf_T \| T \| \cdot \| T^{-1} \|,$$

那么它就变为紧空间．

一个级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k,\quad x\in X,$$

称为收敛的(convergent)，如果部分和序列的极限S存在：

$$\lim_{n\to\infty}\left\| S-\sum_{k=1}^{n} x_k \right\| = 0.$$

如果

$$\sum_{k=1}^{\infty}\| x_k \| < \infty,$$

那么级数(*)收敛，且在这种情形下，它称为绝对收敛的(absolutely convergent)．一个级数称为无条件收敛的(unconditionally convergent)，如果当任意排列它的项时它都收敛．无条件收敛级数的和与它的项的排列无关．对于有限维空间的级数，特别是对于数值级数，无条件收敛与绝对收敛是等价的．在无限维Banach空间的情形下，由绝对收敛可推出无条件收敛，但在任何无限维Banach空间中，其逆不真．这是下述Дворецкий-Rogers定理(Dvoretskiĭ-Rogers theorem)的一个推论：对于所有满足条件$\sum a_k^2<\infty$的数列$a_k\geqslant 0$，在每个无限维Banach空间中存在一个无条件收敛级数$\sum x_k$，使得$\|x_k\|=a_k(k=1,2,\cdots)$．在空间$c_0$中(以及因而在任何包含同构于$c_0$的子空间的Banach空间中)，对于任何收敛于零的数列$a_k\geqslant 0$，存在一个无条件收敛的级数$\sum x_k$，满足$\|x_k\|=a_k$．在$L_p(S;\Sigma,\mu)$中，级数$\sum x_k$的无条件收敛性蕴涵

$$\sum_{k=1}^{\infty}\| x_k \|^s < \infty,$$

其中

$$s = \begin{cases} 2 & (1\leqslant p\leqslant 2), \\ p & (p\geqslant 2). \end{cases}$$

在具有凸性模$\delta(\varepsilon)$的一致凸Banach空间中，级数$\sum x_k$的无条件收敛性蕴涵

$$\sum_{k=1}^{\infty}\delta(\| x_k \|) < \infty.$$

一个级数$\sum x_k$称为弱绝对收敛的(weakly absolutely convergent)，如果对于每个$f\in X^*$，数值级数$\sum|f(x_k)|$收敛．X中的每个弱绝对收敛级数收敛，当且仅当X不包含同构于c_0的子空间．

一个 Banach 空间中的元素序列 $\{e_k\}_1^\infty$ 称为极小的(minimal),如果它的每一项 e_n 都在其余元素的线性包 $X^{(n)}=[e_k]_{k\neq n}$ 的闭包外.一个序列称为一致极小的(uniformaly minimal),如果

$$\rho(e_n;X^{(n)})\geqslant\gamma\|e_n\|,\quad 0<\gamma\leqslant1,\quad n=1,2,\ldots.$$

如果 $\gamma=1$,则级数称为 Auerbach 系(Auerbach system).在每个 n 维 Banach 空间中,存在完全的 Auerbach 系 $\{e_n\}_1^n$.还不知道(1985)在每个可分 Banach 空间中是否一定存在完全的 Auerbach 系.对于每个极小系存在一个伴随线性泛函系 $\{f_n\}$,它与 $\{e_k\}$ 之间由下列双正交关系相联系:$f_i(e_j)=\delta_{ij}$.在这种情形下,系 $\{e_k,f_k\}$ 称为双正交的(biorthogonal).一个线性泛函的集合称为全的(total),如果它仅在空间的零元上全部为零.在每个可分 Banach 空间中存在具有完全伴随的完全极小系.每个元素 $x\in X$ 可以按双正交系形式地展开为级数:

$$x\sim\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)e_k,$$

但在一般情形中,这个级数是发散的.

一个元素系 $\{e_k\}$ 称为 X 中的基(basis),如果每个元素 $x\in X$ 可唯一地表示为收敛级数

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}a_ke_k,\quad a_k=a_k(x).$$

Banach 空间中的每组基都是具有全伴随的完全一致极小系.反之不真,这可由 $C[0,2\pi]$ 和 $L_1[0,2\pi]$ 中的系 $\{e^{int}\}_{-\infty}^{\infty}$ 这个例子看出.

一组基称为无条件的(unconditional),如果它的重新排列还是基;否则则称为条件的(conditional).在 $L_p[0,2\pi]\,(p>1,p\neq2)$ 中,系 $\{e^{int}\}$ 是一组条件基. Harr 系是 $L_p(p>1)$ 的一组无条件基.在空间 C 和 L_1 中没有无条件基.还不知道(1985)是否每个 Banach 空间都包含一个有无条件基的无限维子空间.任何有无条件基的非自反的 Banach 空间包含一个同构于 l_1 或 c_0 的子空间.

两个 Banach 空间 X_1 和 X_2 中的两组正规基 $\{e_k'\}$ 和 $\{e_k''\}$ 称为等价的,如果对应 $e_k'\longleftrightarrow e_k''\,(k=1,2,\cdots)$ 可延拓为 X_1 和 X_2 之间的同构.在空间 l_2, l_1 和 c_0 之一中,所有正规无条件基等价于自然基.在对应用来说是重要的 Banach 空间中,所构造的基并非总适用于解决问题,例如算子理论的问题.为此引入 T 基(T-bases)或求和基(summation bases).设 $\{t_{ij}\}_1^\infty$ 是一个正则求和法(regular summation methods)矩阵.元素系 $\{e_n\}\subset X$ 称为对应给定求和方法的 T 基,如果每个 $x\in X$ 可唯一表示为级数

$$x\sim\sum_{k=1}^{\infty}a_ke_k,$$

它可用该方法求和而得到 x.在 $C[0,2\pi]$ 中三角函数系 $\{e^{int}\}_{-\infty}^{\infty}$ 是对于 Cesàro 法和 Abel 法的求和基.每个 T 基是具有完全伴随的完全极小(不一定是一致极小)系.反之不真.一直到 70 年代,Banach 本人提出的基问题(basis problem)还是 Banach 空间理论的主要问题之一:每个可分 Banach 空间是否总存在基?对一些具体的 Banach 空间的基的存在问题至今还没有解决.没有基的可分 Banach 空间的第一个例子是在 1972 年构造的;在空间 $C^\infty(I^m)$ 和 $A(D)$ 中的基已经构造出.

参考文献

[1] Banach, S., Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales, *Fund. Math.*, 3(1922), 133-181.

[2] Banach, S., Théorie des opérations linéaires, Warszawa, 1932.

[3] Dunford, N. and Schwartz, J. T., Linear operator. General theory, 1, Intersience, 1958.

[4] Day, M. M., Normed linear spaces, Springer, 1958.

[5] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Topological vector spaces, Addison-Wesley, 1977 (译自法文).

[6] Singer, I., Bases in Banach spaces, 1-2, Springer, 1970-1981.

[7] Lindenstrauss, J. and Tzafriri, L., Classical Banach spaces, 1-2, Springer, 1977-1979.

[8] Diestel, J. J., Geometry of Banach spaces. Selected topics, Springer, 1975.

[9] Beauzamy, B., Introduction to Banach spaces and their geometry, North-Holland, 1985.

М. И. Кадец, Б. М. Левитан 撰

【补注】 空间的二次对偶也称为双对偶(bidual).

参考文献

[A1] Semanedi, Z., Banach spaces of continuous function, Polish Sci. Publ., 1971.

史树中 译

Banach - Steinhaus 定理 [Banach - Steinhaus theorem; Банаха-Штейнхауза теорем]

有关一个线性拓扑空间到另一个线性拓扑空间的连续线性映射空间的拓扑性质的一系列结果的统称.设 E 和 F 为局部凸线性拓扑空间,其中 E 是桶型空间(barrelled space),或设 E 和 F 为线性拓扑空间,其中 E 是 Baire 空间(Baire space).那么,下列命题成立.1)由 E 到 F 的连续线性映射集 $L(E,F)$ 的任何按单收敛拓扑有界的子集是等度连续的(一致有界性原理(uniform boundedness principle));2)如果 $L(E,F)$ 中的滤子 P 包含一个按单收敛拓扑有界的集合,且按单收敛拓扑收敛于某个由 E 到 F 的映射 v,那么 v 是由 E 到 F 的连续线性映射,且 P 在 E 的每个紧子集上一致收敛于 v([2],[3]).

这些一般结果使得有可能把 S. Banach 和 H. Steinhaus 的经典结果([1])表达得更确切:设 E 和 F 是

Banach空间，M是E中的第二纲集的子集.于是,1)如果$H\subset L(E,F)$,且$\sup\{\|u(x)\|: u\in H\}$对于所有$x\in M$有限,那么$\sup\{\|u\|: u\in H\}<\infty$; 2)如果$u_n$是由$E$到$F$的连续线性映射序列,且对于所有$x\in M$,序列$u_n(x)$在$F$中收敛,那么$u_n$在$E$的任何紧子集上一致收敛于一个由$E$到$F$的连续线性映射$v$.

参考文献

[1] Banach, S. and Steinhaus, H., Sur le principle de la condensation de singularités, *Fund. Math.*, 9 (1927), 50-61.

[2] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Topological vector spaces, Addison - Wesley, 1977(译自法文).

[3] Schaefer, H. H., Topological vector spaces, Macmillan, 1966.

А. И. Штерн 撰

【补注】

参考文献

[A1] Köthe, G., Topological vector space, 1, Springer, 1969.

[A2] Kelley, J. L. and Namioka, I., Linear topological spaces, Springer, 1963.

史树中 译

半群的带 [band of semi-groups ; связка полугрупп], 给定族$\{S_\alpha\}$的

一个半群S,可分划成一些子半群的并，而这些子半群的(同构)类正是那些S_α,且对任何S_α, S_β,皆有某个S_γ使$S_\alpha S_\beta\subset S_\gamma$. S也称为可分解(成这些半群S_α的带)的(decomposable).换句话说,S分割成半群S_α的带,如果所有S_α是S的子半群且存在S上的同余ρ使得ρ类正是S_α,半群S_α称为给定带的分量(components).术语"半群的带"同频繁地用"带"这一名词作为"所有元素皆为幂等元的半群"的同义词是一致的,因为半群上的同余ρ使半群能分划成带,当且仅当商半群S/ρ是幂等元的半群.

很多半群可分解成半群的带,且具有某些也许是"好"的性质;例如研究它们的构造在某种程度上化为考察带的分量所属的类型及幂等元的半群(例如,参见**Archimedes 半群** (Archimedean semi-group); **完全单半群** (completely simple semi-group); **Clifford 半群** (Clifford semi-group); **周期半群** (periodic semi-group); **可分半群** (separable semi-group)).

半群S_α的带称为交换的(commutative),如果对于相应的同余ρ,商半群S/ρ是交换的;于是S/ρ是半格(这时,S常被称为半群S_α的半格;特别地,若S/ρ是链,则S称为半群S_α的链).半群的带称为矩形(rectangular)的(有时称为矩阵(matrix)的),如果S/ρ是矩形半群,见**幂等元的半群**(idempotents, semi-group of).这等价于说带的分量可用指标对记成$S_{i\lambda}$,其中i和λ分别遍历某指标集I和Λ,使得对任何$S_{i\lambda}$, $S_{j\mu}$有$S_{i\lambda}S_{j\mu}\subseteq S_{i\mu}$.半群的任何带是矩形带的半格，即它的分量可安置在子族中使得每个子族的分量的并是分量的矩形带,而且原来的半群可分解成这些并的半格(Clifford定理(Clifford theorem) [1]).由于幂等元半群的性质,半格或矩形半群由一些恒等式刻画,对每条所列举的性质θ,在任何半群S上有一个最好的同余,使得相应的商半群有性质θ,即存在S到半群的带,到半群的交换带,以及到半群的矩形带的最大分划(greatest partitions)(或最大商分划(biggest quotient partitions)).

强带(strong band)一词涉及到半群的特殊类型的带([4]):对不同分量的任意元a,b,乘积ab是这两个元中的一个的方幂.半群强带的一个重要的特殊情形(也是半群链的特殊情形)是序数和(ordinal sum)(或序列零化带(sequentially-annihilating band)):它的分量的集合$\{S_\alpha\}$是良序的,且对满足$S_\alpha<S_\beta$的任何S_α, S_β及任何$a\in S_\alpha$, $b\in S_\beta$,有$ab=ba=a$;在指定了分量和它们的序之后,在同构意义下序数和是唯一确定的.

参考文献

[1] Clifford, A. H., Bands of semi-groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 5 (1954), 499-504.

[2] Clifford, A. H. and Preston, G. B., The algebraic theory of semigroups, 1, Amer. Math. Soc., 1961.

[3] Ляпин, Е. С., Полугруппы, М., 1960 (英译本: Lyapin, E. S., Semigroups, Amer. Math. Soc., 1974).

[4] Шеврин, Л. Н., Сильная связка полугрупп, 《Изв. вузов. Матем.》, (1965), 6, 156-165.

Л. Н. Шеврин 撰

【补注】 半群S上的同余是一个等价关系，使对所有$a, b, c\in S$有

$$a\sim b\Rightarrow ac\sim bc \quad 和 \quad ca\sim cb,$$

石生明译 许以超校

坝归纳 [bar induction ; бар-индукция]

一种用于直觉主义数学(见**直觉主义**(intuitionism))中的推理的归纳方法,可描述如下:设某性质R和S是定义在自然数的有限数组(见**多元组**(tuple))上的,且使得: 1)性质R可判定,即可以能行地指出它是否满足任给的数组$\langle n_1,\cdots,n_m\rangle$; 2)对任何选择序列$\alpha$,可以找到形如$\langle\alpha(0),\cdots,\alpha(n-1)\rangle$的数组满足$R$.而且,若2)成立,则称$R$"拦住"空数组$\langle\,\rangle$(从而得此名字);3)对于任何自然数组$\pi$,若$R(\pi)$,则$S(\pi)$(所谓的坝归纳基础(basis of the bar induction));以及4)若$\langle n_1,\cdots,n_m\rangle$是一数组,使得对任何自然数$k$均有$S(\langle n_1,\cdots,n_m,k\rangle)$,则$S(\langle n_1,\cdots,n_m\rangle)$;此性质就是坝归纳步骤(step of the bar induction).

若以上条件1)-4)皆满足,则从坝归纳原理可推出$S(\langle\,\rangle)$.

坝归纳的运用是由L. E. J. Brouwer作为推理的直觉主义方法提出的,以表明自由选择序列类是不完全

的而且在一定程度上是不可数的.尤其是 S. C. Kleene 和 A. A. Марков 独立地证明从坝归纳原理(事实上,甚至从坝归纳的推论,扇定理)推出并非所有选择序列都是递归的(见扇 (fan)).

60 年代人们在数学基础中开始用到的坝归纳的形式没有用自然数数组,而是用更复杂的组,如选择序列组.

坝归纳在形式直觉主义数学分析的语言中可如下写出:

$$\forall x\,(R(x)\vee\neg R(x))\,\&\,\forall\alpha\,\exists x\,R(\overline{\alpha}(x))\,\&$$

$$\&\,\forall x\,(R(x)\supset S(x))\,\&$$

$$\&\,\forall x\,(\forall y\,S(x^{*}\hat{y})\supset S(x))\supset S(0).$$

参考文献

[1] Kleene, S. C. and Vesley, R. E., The foundations of intuitionistic mathematics: especially in relation to recurcive functions, North-Holland, 1965.

А. Г. Драгалин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Dummett, M, Elements of intuitionism, Clarendon Press, 1977.

[A2] Troelstra, A. S., Choice sequences, Clarendon Press, 1977.

宋方敏 译 莫绍揆 校

理发师悖论 [barber paradox; парикмахера парадокс] 同"乡村理发师"悖论 (antinomy).

Barbier 定理 [Barbier theorem; Барбье теорема], 在等宽曲线上的

如果一条曲线的任意两个平行支撑直线间的距离等于常数 a, 那么曲线的长度是 πa. 这是 E. Barbier 在 1860 年发现的.

А. Б. Иванов 撰

【补注】 E. Barbier 的原始工作是[A1].

参考文献

[A1] Barbier, E., Note sur le problème de láinguille et le jeu du joint couvert, *J. Math. Pure. Appl.*, 5 (1860), 273–286.

[A2] Bonnesen, T. and Fenchel, W., Theorie der konvexen Körper, Springer, 1934.

虞言林 译

桶型空间 [barrelled space; бочечное пространство]

一种没有可距性条件的显示 **Banach 空间** (Banach space) 和 **Fréchet 空间** (Fréchet space) 的许多性质的局部凸线性拓扑空间.它是使 **Banach-Steinhaus 定理** (Banach-Steinhaus theorem) 成立的最广的空间类之一.桶型空间是由 N. Bourbaki 首先引入的 ([1]).

向量空间 E 中的一个集合 A 称为平衡集 (balanced set),如果对于所有 $x\in A$ 和所有满足 $|\alpha|\leqslant 1$ 的 α, $\alpha x\in A$ 成立.一个平衡集 $A\subset E$ 称为吸收集 (absorbing set),如果它吸收 E 的每一个点,即对于每个 $x\in E$ 存在某个 $\alpha>0$, 使得 $\alpha x\in A$.

线性拓扑空间中的桶型 (barrel) 是指闭的平衡吸收凸集.桶集空间是指这样的具有局部凸拓扑的线性拓扑空间:其中每个桶型是零的邻域.Fréchet 空间,特别是 Banach 空间,是桶型空间的例子.**Montel 空间** (Montel space) 是重要的一类桶型空间,它显示许多值得注意的性质.桶型空间的商空间、桶型空间的直和以及诱导极限都是桶型空间.由一个桶型空间到另一个局部凸线性拓扑空间的连续线性映射的点态有界集是等度连续的.在一个桶型空间的对偶空间中,按弱拓扑有界的集合也按强拓扑有界,并且按弱拓扑是相对紧的.桶型空间的对偶空间中的紧集的闭凸包是紧的.

参考文献

[1] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Topological vector spaces, Addison-Wesley, 1977 (译自法文).

[2] Edwards, R. E., Functional analysis: theory and applications., Holt, Rinehardt, Winston, 1965.

В. М. Тихомиров 撰

【补注】 桶型空间是使 Banach-Steinhaus 定理可以推广的最广的局部凸空间类.它首先在 [A4] 中引入.

E 中的一个不一定平衡的集合 A 称为吸收集,如果对于每个 $x\in E$, 存在某个 α_0, 使得 $x\in\alpha A$ 对于所有 $|\alpha|\geqslant\alpha_0$ 成立.对于桶型空间的对偶,下列四个命题是等价的: 1) A 是弱有界的; 2) A 是强有界的; 3) A 是等度连续的; 4) A 是弱紧的.最后一个命题可由下列更强的命题得到:桶型空间对于任何 σ 拓扑是拟完全的.(最后一个概念见**拓扑向量空间** (topological vector space); **拓扑映射空间** (space of mapping, topological).)

参考文献

[A1] Schaefer, H. H., Topological vector spaces, Macmillan, 1966.

[A2] Kelley, J. L. and Nomioka, I., Linear topological spaces, Springer, 1963.

[A3] Köthe, G., Topological vector spaces, I, Springer, 1969.

[A4] Bourbaki, N., Sur certains espaces vectoriels topologiques, *Ann. Inst. Fourier*, 2 (1950), 5–16.

史树中 译

闸函数 [barrier; барьер], Lebesgue 闸函数 (Lebesgue barrier), 位势论中的

一个函数,其存在的充分必要条件是一个边界点关于 Dirichlet 问题的广义解在该点的性质的正则性 (见 **Perron 法** (Perron method); **正则边界点** (regular boundary point)).

设 D 是 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n(n\geqslant2)$ 中的一个区域，ξ 是其边界 $\Gamma=\partial D$ 的一点．点 ξ 的闸函数指的是任何这样的函数 $w_\xi(x)$，它在闭区域 $D\cup\Gamma$ 与某一个中心在 ξ 的球 $B=B(R,\xi)$ 的交集 $(D\cup\Gamma)\cap B$ 内连续，在 $D\cap B$ 内上调和，在 $(D\cup\Gamma)\cap B$ 内除去 ξ 外取正值，在点 ξ 为 0．例如，当 $n\geqslant3$ 且 ξ 是这样的边界点，即在 $D\cup\Gamma$ 内存在一个与 Γ 仅交于 ξ 的闭球 $\overline{B}(R,y)$ 时，则可取调和函数

$$w_\xi(x)=\frac{1}{R^{n-2}}-\frac{1}{|x-y|^{n-2}}$$

作为闸函数，这里 R 是 $\overline{B}(R,y)$ 的半径，y 是球心．

(多)复变函数论中的闸函数是指这样的函数，若它在区域的每个边界点上都存在，则可推出 D 是一个**全纯域**(domain of holomorphy)．设 D 是复空间 $\mathbf{C}^n(n\geqslant1)$ 中的一个区域，ξ 是边界 $\Gamma=\partial D$ 上的一点．那么 D 内任何以 ξ 为奇点的解析函数 $f(z)$ 都是 ξ 的一个闸函数．于是，函数 $1/(z-\xi)$ 是任何平面区域 $D\subset\mathbf{C}$ 的边界点 ξ 的一个闸函数．在球

$$D=\left\{z=(z_1,\ldots,z_n):\sum_{i=1}^n|z_i|^2<R^2\right\}$$

的边界的任何点 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ 上都存在闸函数，例如函数 $1/(\overline{\xi}_1z_1+\cdots+\overline{\xi}_nz_n-R^2)$．

在区域 D 的边界点 ξ 上存在闸函数，如果存在一个在 D 内定义的解析函数，它在 ξ 上无界，即存在某个收敛于 ξ 的点列 $\{z^{(k)}\}\subset D$，满足

$$\lim_{k\to\infty}|f(z^{(k)})|=+\infty.$$

对于区域 $D\subset\mathbf{C}^n$，有下面更强形式的逆命题成立：对于区域 D 的任何边界点集 E，若 E 的每一点都存在闸函数，则可找到一个在 D 内全纯的函数，它在 E 的所有点上都无界．若 E 在 D 的边界上处处稠密，则 D 是一个正则域．

参考文献

[1] Courant, R. and Hilbert, D., Methods of mathematical physics. Partial differential equations, 2, Interscience, 1962 (译自德文，中译本：R. 柯朗、D. 希尔伯特，数学物理方法，II，科学出版社，1977).

[2] Владимиров, В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964 (英译本：Vladimirov, V. S., Methods of the theory of functions of several complex variables, M. I. T., 1966, Chapt. 3).

[3] Шабат, Б. В., Введение в комплексный анализ, ч., 2, 2 изд., М., 1976.

Е. Д. Соломенцев, М. Ширинбеков 撰

【补注】[A1]与[A2]是关于 Lebesgue 闸函数的两本好的英文参考书．

参考文献

[A1] Hayman, W. K. and Kennedy, P. B., Subharmonic functions, 1, Cambridge Univ. Press, 1976.

[A2] Helms, L. L., Introduction to potential theory, Acad. Press, 1975 (译自德文).

高琪仁、吴炯圻 译　卫念祖 校

Bartlett 检验 [Bartlett test; Бартлетта критерий]

Behrens - Fisher 问题(Behrens - Fisher problem)中的统计检验．它涉及两组样本 $x_1,\cdots,x_{n_1}\in N(a_1,\sigma_1^2)$ 和 $y_1,\cdots,y_{n_2}\in N(a_2,\sigma_2^2)$，其样本大小相同：$n_1=n_2=n$．其临界域由下述不等式给出：

$$\frac{\sqrt{n}\,|\overline{x}-\overline{y}|}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n[(x_i-\overline{x})-(y_i-\overline{y})]^2}}>c,$$

c 为某一大于零的常数，而

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i,\quad \overline{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i.$$

这不等式的左边有自由度为 $n-1$ 的 **Student 分布**(Student distribution)，它联系着检验的显著性水平和常数 c．Bartlett 的检验是Scheffe 检验的一特例，且有着类似的极值性质，但它是在 Scheffe 的解提出之前，由 M. S. Bartlett 在[1]中提出的．Bartlett 的另一个检验与比较许多样本的方差有关．

参考文献

[1] Bartlett, M. S., The information available in small samples, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, (1), **32** (1930), 3, 560 – 566.

О. В. Шалаевский 撰　陈希孺 译

重心坐标[barycentric coordinates; барицентрические координаты]

n 维向量空间 E^n 中一点关于某个固定点组 $p_0,\cdots,p_n$ 的坐标，这个点组不落在一个 $n-1$ 维子空间中，每一点 $x\in E^n$ 都能被唯一地表示为

$$x=\lambda_0p_0+\cdots+\lambda_np_n.$$

其中 $\lambda_0,\cdots,\lambda_n$ 为适合条件 $\lambda_0+\cdots+\lambda_n=1$ 的实数．由定义可知，点 x 是置于点 $p_0,\cdots,p_n$ 处的质量 $\lambda_0,\cdots,\lambda_n$ 的重力中心．数 $\lambda_0,\cdots,\lambda_n$ 称为点 x 的重心坐标(barycentric coordinates)；重心坐标各分量均为 $\frac{1}{n+1}$ 的点称为重心(barycentre)．重心坐标是 A. F. Möbius 于 1827 年在[1]中引入的，以解答这样一个问题：置质量于一个三角形的顶点，使得一个给定点是这些质量的重力中心．重心坐标是**齐次坐标**(homogeneous coordi-

nates)的一种特殊情形，它们都是仿射不变量.

代数拓扑中用到了单形的重心坐标([2]). 一个 n 维单形 σ 的点关于其顶点 $A_0,\cdots,A_n$ 的重心坐标，是指以向量 $\overline{OA_0},\cdots,\overline{OA_n}$ 为基的 Descartes 坐标，这里 O 是在包含 σ 的 n 维子空间之外的任意一点(如果 σ 在某个 Euclid 空间中，那么这个定义不依赖于点 O)；或者，在包含 σ 的子空间射影完全化之后，是指其关于 $A_0,\cdots,A_n$ 的射影坐标. 单形的点的重心坐标是非负的，且其各分量之和等于一. 如果第 i 个重心坐标为零，这就意味着该点位于单形 σ 的顶点 A_i 所对的侧面上. 这使得考虑一个几何复形的点关于其所有顶点的重心坐标成为可能. 重心坐标常被用来构造复形的**重心重分**(barycentric subdivision).

抽象复形的重心坐标由类似的方式形式地加以定义([3]).

参考文献

[1] Möbius, A. F., Der barycentrische kalkul, in Gesammelte Werke, Vol. 1. Hirzel, Leipzig, 1885.

[2] Понтрягин, Л. С., Основы комбинаторной топологии, 2 изд., М., 1976.

[3] Spanier, E. H., Algebraic topology, MacGraw-Hill, 1966.

Е. Г. Скляренко 撰

杨 路、张景中、侯晓荣 译

重心重分[**barycentric subdivision; барицентрическоеподразделение**]，几何复形 K 的

利用下述步骤以较小的一些单形代替 K 的诸单形而获得复形 K_1. 每个一维单形(线段)被二等分；假定所有维数 $\leqslant n-1$ 的单形已被重分，那么，任一 n 维单形 σ 的重分用一些锥来定义，这些锥张在 σ 的边界单形上，且以单形 σ 的重心为公共顶点 —— 该点的**重心坐标**(barycentric coordinates)为 $1/(n+1)$. 所得复形 K_1 的顶点与复形 K 的单形是一一对应的，而复形 K_1 的单形与 K 的具有包含序的有限单形组有同样的对应关系. 对于抽象复形的情形，重心重分的形式定义与此类似.

Е. Г. Скляренко 撰

【补注】

参考文献

[A1] Lamotke, K., Semisimpliziale algebraische Topologie, Springer, 1968.

杨 路、张景中、侯晓荣 译

基[**base; база**]，拓扑空间 X 的，拓扑的基(base of a topology)，开基(open base)

X 的开子集族 $\mathfrak{B}$，使 X 的任一开子集 $G\subset X$ 是子族 $U\subset\mathfrak{B}$ 的并. 基的概念是拓扑学中的基本概念：在涉及某空间开集的许多问题中，只限定考察它的基即已足够. 一个空间可以有许多基，它的最大的一个是所有开集的族. 所有基的基数中最小者称为拓扑空间 X 的权(weight). 在权为 τ 的空间中，存在基数 $\leqslant\tau$ 的处处稠密集. 具有可数基的空间也称为满足第二可数公理(second axiom of countability)的空间. 闭基(closed base)的对偶概念由基的元素的补组成，不用任何有效外延.

空间 X 在一点 $x\in X$ 的局部基(local base)(点 x 的基(base of the point x))，是 X 中具有下列性质的开集族 $\mathfrak{B}(x)$：对 x 的任意邻域 O_x，存在 $V\in\mathfrak{B}(x)$，使 $x\in V\subset O_x$. 在每一点都具有可数局部基的空间，称为满足第一可数公理(first axiom of countability)的空间. X 中的开集族 $\mathfrak{B}$ 是基，当且仅当它是 X 的每一点 x 的局部基.

设 m，n 是基数. 空间 X 的基 $\mathfrak{B}$ 称为 m 点基(m-point base)，如果每点 $x\in X$ 至多属于族 $\mathfrak{B}$ 的 m 个元素；特别地，当 m=1 时，该基称为不相交的(disjoint)；当 m 为有限时，称为有界点有限的(bounded point finite)；且当 $m=\aleph_0$ 时，称为点可数的(point countable).

空间 X 的基 $\mathfrak{B}$ 称为 m 局部的(m-local)，如果任意点 $x\in X$ 有邻域 O_x，至多和族 $\mathfrak{B}$ 的 m 个元素相交；特别地，当 m=1 时，该基称为离散的(discrete)；当 m 为有限时，称为有界局部有限的(bounded locally finite)；且当 $m=\aleph_0$ 时，称为局部可数的(locally countable). 基 $\mathfrak{B}$ 称为(n-m)点基((n-m)-point base)(或(n-m)局部基((n-m)-local base))，如果它是 m 点(m 局部)基的基数为 n 的集合的并；例如，对于 $n=\aleph_0$，就是 σ 不相交(σ-disjoint)，σ 点有限(σ-point finite)，σ 离散(σ-discrete)，及 σ 局部有限基(σ-locally finite bases).

这些概念主要是用在可度量化空间的准则上. 例如，具有可数基或者满足第一可数公理的正则空间和具有点可数基的正则空间都是可度量化的；具有 σ 离散基或者 σ 局部有限基的正则空间是可度量化的(逆命题仅在前一种情形成立).

空间 X 的基 $\mathfrak{B}$ 称为一致的(uniform)(k 一致的(k-uniform))，如果对任一点 $x\in X$(任一紧子集 F)及其任一邻域 $O_x(O_F)$ 仅有有限个基的元素含 x(与 F 相交)且同时与补集 $(X\setminus O_x)$ $(X\setminus O_F)$ 相交. 空间 X 是可度量化的，当且仅当它是具有一致基的仿紧空间(具有 k 一致基的 Колмогоров 空间或 T_0 空间).

空间 X 的基 $\mathfrak{B}$ 称为正则的(regular)，如果对任一点 $x\in X$ 及其任一邻域 O_x，存在邻域 O_x'，使所有和 O_x' 及 $X\setminus O_x$ 都相交的基的元素的集合是有限的. 可达空间或 T_1 空间是可度量化的当且仅当它有正则基.

基的概念的推广是所谓 π 基(π-base)(格基(lattice base))，它是空间 X 的开集族 $\mathfrak{B}$，使 X 中任一非空开集包含 $\mathfrak{B}$ 的一个非空集，即按 Hausdorff 意义 $\mathfrak{B}$ 在 X 中稠密. 所有基都是 π 基，但反之不真；例如

集 $\mathbf{Z}^+$ 在自然数集的 **Stone - Čech 紧化** (Stone - Čech compactification) 中形成 Z^+ 中唯一 π 基.

参考文献

[1] Александров, П. С., Колмогоров, А. Н., Введение в общую теорию множеств и функций, М.-Л., 1948 (中译本: П. С. 亚历山大罗夫, 集与函数的泛论初阶, 高等教育出版社, 1955).

[2] Урысон, П. С., Труды по топологии и другим областям математики, т. 1-2, М.-Л., 1951

[3] Александров, П. С., Пасынков, Б. А., Введение в теорию размерности. Введение в теорию топологических пространств и общую теорию размерности, М., 1973.

[4] Архангельский, А. В., Пономарев, В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974 (英译本: Arkhangel'skiǐ, A. V. and Ponomarev, V. I., Fundamentals of general topology, problems and exercises, Reidel 1984).

[5] Bourbaki, N., Elements of mathematics. General topology, Addison - Wesley, 1966 (译自法文).

А. А. Мальцев 撰

【补注】 在紧化理论中闭基是有用的, 见紧化(compactification).

除有界点有限基和有界局部有限基的概念之外, 也用到点有限基 (point finite base) 和局部有限基 (local finite base) 的概念. 基 (或任何子集族 $\mathfrak{B}$) 称为点有限的, 如果任何点 x 都属于 $\mathfrak{B}$ 的有限个成员中, 即对任何 x, $\mathfrak{B}_x=\{B\in\mathfrak{B}:x\in B\}$ 是有限集. 注意, 族 $\mathfrak{B}_x$ 可以有任意大的有限基数, 当 $\mathfrak{B}_x$ 的基数以固定的有限数 m 为界时, 可定义有界点有限性. 类似的说明适用于局部有限性.

方嘉琳 译

换基 [**base change** 或 change of base ; **замена базы**]

一种范畴论的构造, 拓扑学中的导出纤维概念以及模论中标量环的扩张都是其特殊情况.

设 C 是一个有纤维积的范畴, 并设 $g: S_1\to S$ 是 C 的一个态射. 由 g 所作的换基是从 S 对象的范畴(即, 态射 $f: X\to S$ 的范畴, 这里 X 是 C 的一个对象)到 S_1 对象的范畴的一个函子, 它将一个 S 对象 $f: X\to S$ 变成 S_1 对象 $f_1: X_1\to S_1$, 这里 $X_1=X\times_S S_1$, 而 f_1 是到第二个因子上的射影. 于是态射 g 称为换基态射 (base - change morphism). 我们也说, X_1 是从 X 由换基而得来的.

换基的一个特殊情况是概形 S 的一个态射 $f:X\to S$ 的一个纤维的概念: 一点 $s\in S$ 上的态射 f 的纤维 (fibre of the morphism) 是概形

$$X_s = X\times_S s,$$

即 从 X 通过自然态射 $s\to S$ 由换基所得到的概形. 类似的定义给出了几何纤维(geometric fibre) $X_{\bar{s}}$: 它是通过与 S 的一个几何点相关联的态射 Spec $K\to S$ 由换基得到的, 这里的 K 是一个代数闭域. 在一个换基下, S 概形 X 的许多性质都被保留. 逆问题——从概形 X 由换基所得的概形的性质来推断概形 X 的性质——已在下降理论中被考虑了(亦见[3]).

设 $f_1: X_1\to S_1$ 是从 $f: X\to S$ 通过一个态射 $g: S_1\to S$ 所得的态射, 使有一个 Descartes 正方形

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{g_1} & X \\ f_1\downarrow & & \downarrow f \\ S_1 & \xrightarrow[g]{} & S \end{array}$$

若 F 是 X 上之集合的一个层, 则存在一个自然的层映射 $\psi: g^*f_*(F)\to f_{1*}g^{*1}(F)$. 若 F 是 Abel 群的一个层, 则对每一个 $q\geqslant 0$, 存在一个自然层同态

$$\psi_q: g^*(R^qf_*(F))\to R^qf_{1*}(g^{*1}(F)).$$

在这些条件下, ψ 与 ψ_q 也称为换基态射 (base - change morphism). 常说, 换基定理 (base - change theorem) 是有效的, 如果 ψ (或 ψ_q) 是一个同构. 换言之, 换基定理是一个关于函子 R^qf_* 与换基函子的相容性(交换性)的命题. 特别地, 如果 g 是一点 $s\in S$ 的嵌入, 那么, 换基定理说, 在层 F 的第 q 个直接映象的纤维与态射 f 的纤维的 q 维上同调群之间, 存在一个自然同构 $(R^qf_*(F))_s\simeq H^q(X_s, F|_{X_s})$. 在下列情况中, 换基定理也都是有效的: 1) f 是仿紧拓扑空间的一个正常映射, 而 S 是一个局部紧空间([1]); 2) f 是概形的一个可分拟紧的态射, g 是一个平坦态射. F 是 O_X 模的拟凝聚层(对于通常与形式的概形的上同调——见[2]——其比较定理也可以解释为一个换基定理); 或 3) f 是概形的正常态射, F 是平稳拓扑中的挠层. 还有其他一些使换基定理有效的情况在[3]中也被考虑过.

参考文献

[1] Godement, R., Topologie algébrique et théorie des faisceaux, Hermann, 1958.

[2] Grothendieck, A. and Dieudonné, J., Eléments de géometrie algébrique, *Publ. Math. IHES*, **11** (1961).

[3] Artin, M., Grothendieck, A. and Verdier, J. L. (eds.), Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, in Sem. Geom. Alg., Vol. 4, Springer, 1973.

В. И. Данилов 撰 周伯埙 译

形变的基 [**base of a deformation ; основание изгибания**]

在曲面 F 及其形变 F^* 上除它们的合同点 (point of congruence) 外的一个**共轭网** (conjugate net). 形变的基由下述事实来刻画: 形变的弯曲 (bend) (在 F 与 F^* 的等距对应点沿对应方向的法曲率 k 与 k^* 之比) 在形变基的方向达到极值.

参考文献

[1] Каган, В. Ф., Основы теории поверхностей в тензорном

изложении, ч. 2, М.-Л., 1948.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 关于形变曲面和挠曲面的其他参考文献，见**等距形变**(deformation, isometric). 沈一兵 译

基本换位子 [**basic commutator**; **базисный коммутатор**], 正则换位子(regular commutator)

以下列方式由方括号及一个给定的集合 R 的元素归纳构造出的一个对象. 依定义, R 中的元素被认为是长度为 1 的基本换位子，并且给定了它们的一个任意的全序. 长度为整数 $n>1$ 的基本换位子由下列方式定义和赋序. 如果 a, b 是两个长度小于 n 的基本换位子，那么$[ab]$被认为是一个长度为 n 的基本换位子，当且仅当满足下列条件: 1) a, b 分别是长度为 k, l 的基本换位子，且 $k+l=n$; 2) $a>b$; 3) 如果 $a=[cd]$, 则 $d\leqslant b$. 对由此得到的长度不超过 n 的基本换位子，赋予任意满足条件$[ab]>b$的序，同时保持长度小于 n 的基本换位子原有的序. 这样构造出来的基本换位子是以 R 作为自由生成子的自由 Lie 代数的一个基([1]).

参考文献

[1] Ширшов, А. И., 《Алгебра и логика》, 1 (1962), 1, 14-19.

Ю. М. Горчаков 撰

【补注】 设$M(R)$是R上的自由块字表(free magma), 即字母表 R 中所有非交换非结合的字的集合. 基本换位子可以看作 $M(R)$ 的一个子集. 这个子集通常也称为一个 P. Hall 集(Hall set). R 上的恒等映射导出一个映射 $\varphi: M(R)\to L_K(R)$, 这里 $L_K(R)$是环K上R生成的自由 Lie 代数. 设 $K(R)$ 是 $M(R)$中的一个 P. Hall 集合(即一个基本换位子的集合)，那么 $\varphi(H(R))$是自由 K 模 $L_K(R)$的一个基，称为一个 P. Hall 基. $L_K(R)$ 的其他一些有用的基是 Chen-Fox-Lyndon 基 (Chen-Fox Lyndon basis)、Ширшов 基(Shirshov basis) (这两组基基本上相同) 与 Spitzer-Foata基(Spitzer-Foata basis), 见[A4]. 设 R 的基数 $r=\#R$是有限的. 设 $l_r(n)$ 是 R 上长度为 n 的基本换位子的个数，那么

$$l_r(n)=\frac{1}{n}\sum_{d/n}\mu(d)r^{n/d},$$

这里 $\mu:\{1,2,\cdots\}\to\{-1, 0, 1\}$是 **Möbius 函数** (Möbius function), 其定义如下: $\mu(1)=1$; $\mu(k)=0$, 如果 k 是某个数的平方的倍数; $\mu(p_1\cdots p_m)=(-1)^m$, 如果 $p_1,\cdots,p_m$ 是互不相同的素数.

参考文献

[A1] Bourbaki, N., Groupes et algèbres de Lie, Hermann, 1972, Chap. 2; 3.

[A2] Hall, M., jr., The theory of groups, Macmillan, 1959 (中译本: M. 赫尔, 群论, 科学出版社, 1981).

[A3] Magnus, W., Karrass, A. and Solitar, D., Combinatorial group theory, Interscience, 1966.

[A4] Viennot, G., Algèbres de Lie libres et monoides libres, Lect. Notes in Math., 691, Springer, 1978.

邓邦明 译

基本集 [**basic set**; **базисное множество**], 线性系的

代数簇(或概形)X中属于X的给定线性系 L 的可移部分的所有除子的点的集合.

例. 设

$$\lambda_0F_n(x_0, x_1, x_2)+\lambda_1G_n(x_0, x_1, x_2)=0$$

是射影平面上的 n 次曲线束. 这个束的基本集由型F'和 G'的公共零点集组成, 其中

$$F'\cdot H=F_n,\quad G'\cdot H=G_n,$$

H是型 F_n 和 G_n 的最大公因子.

若 $\varphi_L: X\to P(L)$是由 L 定义的有理映射, L 的基本集是 φ_L 的不确定点的集合. 基本集具有 X 内闭子概形 B 的结构, 定义为线性系的可移部分所有除子的交. φ_L 的不确定点的消去可归结为子概形 B 的凝聚理想层的平凡化, 见**双有理几何学** (birational geometry).

对于光滑射影曲面 F 上的没有固定分支的线性系 L, 存在整数 n_0, 使得当 $n>n_0$ 时完全线性系 $|nL|$ 的基本集是空的 (Zariski 定理 (Zariski theorem)). 这对高维情形并不正确.

参考文献

[1] Алгебраические поверхности, М., 1965.

[2] Hartshorne, R., Algebraic geometry, Springer, 1977.

В. А. Исковских 撰 陈志杰 译

基 [**basis**; **базис**], 集合 X 的

生成 X 的一个极小子集 B. 这里的生成 (generation) 是指任一元素 $x\in X$ 都可通过把某一个类 Ω 的运算作用于 B 的元素而得到. 这个概念与相关性概念有关: X 中的元素通过 Ω 中的运算与B的元素相关. 极小性 (minimality) 是指不存在 B 的真子集 $B_1(\subset B)$ 生成 X. 在某种意义下, 这个性质引出了 B 的元素的无关性: 不存在元素 $b\in B$ 使得 b 可由 B 的其他元素生成. 例如, 所有自然数的集合 $\mathbf{Z}_0$ 有唯一的一个元素 0 作为基, 由 0 反复利用后继运算可以生成自然数集 $\mathbf{Z}_0$. 所有 >1 的自然数可由全体素数构成的基利用乘法运算生成. 如果生成运算由加法和用实数乘的运算组成, 那么四个元素的集合$\{1, i, j, k\}$是四元数代数的基 (basis of the algebra of quaternions); 如果生成运算除加法和用实数乘之外还包含四元数的乘法, 那么四元数代数的基仅由三个元素构成——$\{1, i, j\}$ (因为 $k=ij$).

k 阶自然数的基 (basis of the natural numbers of order k) 是自然数集 $\mathbf{Z}_0$的包含0 的一个子序列Ω, 使得 $\mathbf{Z}_0$ 每一元素是 Ω的 k 个元素的和(生成运算). 这就是说

任一自然数 n 可以表示为

$$n = a_1 + \cdots + a_k,$$

其中 $a_i \in \Omega$. 例如，每一个自然数是四个自然数的平方和(Lagrange 定理(Lagrange theorem))，即自然数的平方序列是 $\mathbf{Z}_0$ 的一个 4 阶基. 一般说来，自然数的 m 次幂序列是 $\mathbf{Z}_0$ 的一个基(Hilbert 定理(Hilbert theorem))，这个基的阶已用 **Виноградов** 法 (Vinogradov method)作了估计. $\mathbf{Z}_0$ 的基的概念已推广到数的任意序列的情况，即 $\mathbf{Z}_0$ 上的函数的情形.

一个集合 X 总包含一个生成集(平凡的情形是：X 生成 X)，然而要证明极小性大抵是不可能的(这种情况具有代表性的是类 Ω 中包含无限元运算，特别是在拓扑结构，格等中). 由于这个原因，极小性条件由一个较弱的条件代替：基是具有极小基数的生成集. 在这一情形，基 B 定义为一个外度量集合(或总体(population))，即定义在指标集 T 上并且取值于 X 中一个函数 $b(t)$，使得 $b(T)=B$；T 的基数有时称为 X 的基的维数(dimension)(或秩(rank)). 例如，在一个可分拓扑空间 P 中，一个可数处处稠密集合 B 可以作为它的一个基；P 可由 B 通过闭包运算生成(顺便说一下，更一般情况下的生成与此相同，见下面).

拓扑空间 X 关于拓扑的基(basis for a topology)(基(base))是 X 中的所有开子集组成的集合的一个基 $\mathfrak{B}$；其生成运算是取 $\mathfrak{B}$ 中元素的并.

Boole 代数 $\mathfrak{A}$ 的基(basis of a Boolean algebra)(Tarski 意义下 $\mathfrak{A}$ 的对偶基)是 $\mathfrak{A}$ 中的一个(极小基数的)稠密集合 S；由 S 生成 $\mathfrak{A}$(因而生成 S)是由条件 $s \to a = \vee$(等价于 $s \subset a$)确定的，其中 $s \in S$，$a \in \mathfrak{A}$，$\vee$ 是 $\mathfrak{A}$ 的单位，"$\to$"是蕴涵运算. 也可用类似的方式引入一个滤子 ∇ 的基(basis for a filter)为一个集合 S，使得对任意的 $a \in \nabla$，存在一个 $s \in S$ 具有性质 $s \subset a$.

集合 X 的基的更特殊的情况用下面的方式引入. 设 $B(X)$ 是 X 的 Boole 代数(Boolean algebra)，即 X 的所有子集的集合构成的 Boole 代数. 生成算子(generating operator)(或闭包算子(closure operator))J 是 $B(X)$ 到自身内的映射，使得如果 $A \subset B$，那么 $J(A) \subset J(B)$；$A \subseteq J(A)$；$JJ(A)=J(A)$.

一个元素 $x \in X$ 由集合 A 生成，如果 $x \in J(A)$；特别地，如果 $J(A)=X$. 就说 A 生成 X. 具有这个性质的极小集合 B 称为 X 的由算子 J 定义的基. 生成算子 J 称为有限型(finite type)的，如果对任意 $A \subset X$ 和 $x \in X$，只要 $x \in J(A)$，就存在一个有限子集 $A_0 \subset A$ 使得 $x \in J(A_0)$；生成算子 J 称为具有代换性质(property of substitution)，如果对任意 $y, z \in X$ 和 $A \subset X$，只要 $y \notin J(A)$ 并且 $y \in J(A \cup \{z\})$，那么 $z \in J(A \cup \{y\})$. 一个具有代换性质的有限型算子 J 定义 X 上一种相关关系(dependence relation)，即把 $B(X)$ 分成两类——相关集和不相关集；如果对某一 $y \in A$，$y \in J(A \setminus y)$，就说集合 A 是相关的(dependont)，如果对任意 $y \in A$，$y \notin J(A \setminus y)$，就说 A 是无关的(independent). 因此，A 是相关的(无关的)，当且仅当某一(任意)非空有限子集 $A_0 \subset A$ 是相关的(无关的).

集合 B 是集合 X 的一个基的充分必要条件是 B 是 X 的一个无关生成集，或者说 B 是 X 中的一个极大无关集合.

如果 A 是任意一个无关集合，C 是包含 A 的 X 的一个生成集合，那么在 X 中存在一个基 B 使得 $A \subset B \subset C$. 特别地，X 总有一个基，并且 X 的任意两个基有相同的基数.

在代数系统 X 中，所谓自由基(free basis) B 的概念起着重要作用，自由基由下述性质刻画：$B(\subset X)$ 到任一代数系统 Y 的映射(Y 与 X 同型)可以(唯一地)扩充为 X 到 Y 的一个态射(同态). 或者说，对任一态射(同态) $\theta: X \to Y$ 和任一集合 $A \subset X$，生成算子 J_X 和 J_Y 满足如下条件：

$$\theta\{J_X(A)\} = J_Y(\theta\{A\}).$$

具有一个自由基的代数系统称为自由的(free).

一个典型的例子是环 K 上(幺)模((unitary) module) M 的基，也就是 M 中的某些元素组成的生成 M 的一个自由族([3]). 在这里，K 模 M 的元素的族 $A=\{a_t: t \in T\}$ 称为自由的是指 A 具有性质：如果 $\sum \xi_t a_A = 0$(除有限个下标 t 外，$\xi_t=0$)，那么对所有 $t \in T$，$\xi_t = 0$. 并且生成运算是把元素 x 表示为元素 a_t 的线性组合(linear combinations)：存在(依赖于 x)元素 $\xi_t \in K$ 的一个集合，使得除有限个下指标 t 外，$\xi_t=0$，并且使得分解 $x=\sum \xi_t a_t$ 成立(即 X 是 A 的线性包络(linear envelope)). 在这个意义下，基 M 是自由基；逆命题也成立. 于是，一个复变量的双周期函数 f 的周期的集合是一个离散的Abel 群(因而是环 $\mathbf{Z}$ 上的一个模)，有一个自由基，称它为 f 的周期基(period basis)；它由两个称为原始周期的数构成. 用类似的方式定义多复变量的Abel 函数的周期基.

如果 K 是一个除环，那么它的所有基(在前面的意义下)都是自由的. 与此相反，存在没有自由基的模；例如，把整环 K 中的非主理想视为 K 上的模就包含在这种模中.

域 K 上向量空间 X 的基(basis of a vector space)是单式模(基础集 X)的一个(自由)基. 类似地，域 K 上代数 A 的基(basis of an algebra)是向量空间基础集 A 的基. 一个给定向量空间 X 的所有基有相同的基数，这个基数等于 T 的基数；称 $|T|$ 为 X 的代数维数(algebraic dimension). 每一个元素 $x \in X$ 可以唯一地

表为基元素的线性组合．元素 $\xi_t(x)$ 是 X 上的一个线性性泛函，并且称 $\xi_t(x)$ 为 x 在给定基 $\{a_t\}$ 中的分量(component)（或称坐标(coordinate)）．

集合 A 是 X 的一个基当且仅当 A 是 X 中关于包含关系的一个极大自由集(free set)．

映射

$$\Xi: x \to \xi_x(t)$$

称为基映射(basis mapping) 其中 $\xi_x(t)=\xi_t(x)$，如果 ξ_x 是 x 在基 A 中第 t 个分量的值，否则为 0；它是 X 到 K^T 内的一个线性单射，K^T 表示定义于 T 上且取值于 K 中的所有函数构成的空间．在这种情况下，象集 $\Xi(X)$ 由所有具有有限个非零值的函数(有限支柱函数)构成．这个解释容许我们定义域 K 上向量空间 X 的一个广义基(generalized basis)为 X 到空间 K^T 的某一子空间 $K(T)$ 的双射线性映射，其中 T 是某一个适当选择的集合，K^T 表示定义于 T 上且取值于 K 中的所有函数构成的空间．然而除非对 T 附加限制(如有序)和附加某种结构(如有一个拓扑)以及在 $K(T)$ 上附加上相应的相容条件，否则广义基概念在实践中难得有用．

向量空间 X 的基有时称为代数基(algebraic basis)；这方面需要强调的是这个说法与 X 上的附加结构没有联系，甚至当附加结构与向量空间结构相容时也是如此．

当把实数域 $\mathbf{R}$ 看成有理数域上的一个向量空间时，它的基称为 Hamel 基(Hamel basis)．它是 G．Hamel ([4]) 为得到函数方程 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 的一个不连续解而引入的；此方程的解的图象在平面 $\mathbf{R}^2$ 中处处稠密．为了使每一殆周期函数对应于某一可数 Hamel 基 β，使得这个函数的每一个 Fourier 指数 Λ_n 属于 β 的线性包络中，β 的元素可以选择为属于一个序列 $\{\Lambda_t\}$；集合 β 称为殆周期函数的基(basis of the almost-periodic functions)．在一个包含除环 P，并且仅以 P 的可逆元素为可逆元素的环中，可以构造一个类似的基．任意向量空间的代数基有时也称为 Hamel 基．

拓扑基(topological basis)（域 K 上拓扑向量空间 X 的基）是一个集合 $A=\{a_t: t\in T\}\subset X$，$A$ 具有类似于向量空间代数基的性质和功能，拓扑基概念是泛函分析中最重要的概念之一，它推广了关于 X 的拓扑结构的代数基的概念，并且使得 X 的每一元素 x 关于基 $\{a_t: t\in T\}$ 的分解成为可能，而且这种分解(decomposition)是唯一的，也就是把 x 表示为 a_t 的线性组合的极限(在某种意义下)：

$$x = \lim \sum \xi_t(x) a_t,$$

其中 $\xi_t(x)$ 是定义于 X 上，并且取值于 K 中的线性泛函，称 $\xi_t(x)$ 为 x 在基 A 中的分量(component)；或者称为 x 关于基 A 的分解的系数(coefficients)．显然，为了使任一元素 x 的分解存在，A 在 X 中必须是一个完全集合，并且这种分解是唯一的(即 X 的零元的所有分量必为 0)，A 必须是 X 中的一个拓扑自由集合．

拓扑基的意义及实际作用(今后拓扑基将简称为基)在于建立 X 的线性双射 Ξ，称 Ξ 为基映射(basis mapping)，Ξ 把 X 映射到某个(依赖于 X 的)空间 $K(T)$ 中，$K(T)$ 由是定义于(拓扑)空间 T 上且取值于 K 中的某些函数构成的，即

$$\Xi(x): x \in X \to \xi_x(t) \in K(T),$$

其中 $\xi_x(t)=\xi_t(x)$，这样用符号表示就是 $\{\xi_t(x)\}=K(T)$ 并且 $\{\xi_x(T)\}=X$．由于此具体有效的定义，$K(T)$ 的结构比抽象给出的 X 更简单明白．例如，无限维 Banach 空间的代数基是不可数的，然而在某些情况下，如果把代数基的概念作适当推广，那么 T 的基数实际上更小，同时可使 $K(T)$ 的结构更简单．

空间 $K(T)$ 包含所有有限支柱函数，基 $\{a_t\}$ 的元素集合是函数集合 $\{\xi_t(s)\}$ 的双射逆象，此函数集的每一函数仅有一个等于 1 的非零值：

$$a_t = \Xi^{-1}[\xi_t(s)],$$

其中 $\xi_t(s)=1$，如果 $t=s$，并且 $\xi_t(s)=0$，如果 $t\neq s$，换句话说，a_t 是一维子空间 A_t 的生成元，A_t 在 X 中的余空间是由方程 $\xi_t(x)=0$ 定义的超平面．

于是，基 $\{a_t\}$ 的作用是构成了(在某种意义下)一个可和集 $\{\xi_t(x)a_t\}$，即把空间 X 分解为一维子空间的(广义)直和：

$$X = \lim \sum \xi_t(X) A_t.$$

这个分解的分量 $\xi_t(x)$ 是 x 在基映射下的象．用类似的方式在具有一致，极限(拟拓扑)，线性(L-)逼近，或其他附加结构的向量空间中定义基．

基概念的推广是可能的，并且事实上已在各方面加以推广．在 T 上引入一个拓扑和一个度量就导致了 X 的元素的连续和(continuous sum)以及与之对应的整表示概念；空间 X 分解为分支空间(不必是一维的)已用于线性算子的谱理论；不考虑 $K(T)$，而代之以考虑域 K 上的一个任意拓扑代数(如取值于 K 或 X 中的 T 上的度量代数，射影算子代数等等)就可能使对偶子拓扑向量空间的很多抽象概念具体化，特别是能利用已充分发展的特征标理论这一工具．

可数基(countable basis)已有广泛研究，从实用的观点看，可数基的最重要例子是空间 X 的元素的序列 $\{a_t\}$，使得 X 的每一个元素 x 关于基 $\{a_t\}$ 有唯一的级数展开式：

$$\sum \xi_t(x) a_t, \quad \xi_t(x) \in K,$$

这个级数(关于 X 的拓扑)收敛于 x．此处 $T=\mathbf{Z}$，并且级数中有一个自然顺序．可数基通常简称"基"．用类似方式定义弱可数基(weak countable basis)，如果展开式的收敛理解为弱收敛．例如函数 e^{ikt} $(k\in\mathbf{Z})$ 是空间 $L_p(1<p<\infty)$ 的一个基(p 次绝对可和周期函数)；正相反，这些函数不是空间 L_1，L_∞(几乎处处与有界函数相同的可测函数)或 C^1(连续周期函数)的基．可数基存在的一个必要但远不充分的条件是 X 的可分性(例如，区间$[a, b]$上的实值可测函数空间不存在可数基)，然而有界序列空间 l_∞ (l_∞ 的拓扑不是可分的)没有可数基，但是元素 $a_i=\{\delta_{ik}\}$ 关于弱拓扑 $\sigma(l_\infty, l_1)l_\infty$ 构成一个基(其中 $\delta_{ik}=0$，如果 $i\neq k$；$\delta_{ik}=1$，如果 $i=k$)．可分 Banach 空间的可数基的存在问题(基问题(basis problem))已有否定解答([6])．对于核空间的类似问题也有了否定解答([7])．

然而，对于应用来说，可数基不总是"好用的"．例如，分量 $\xi_t(x)$ 可能不连续．x 的级数展开式不一定无条件收敛等等．由于这些原因，人们在基上加上一些限制，或者引人它的推广．

可数型基(basis of countable type)是可数基概念的一种推广，虽然 T 不是可数的．然而 x $(\in X)$ 关于基的分解有一种自然的定义：与之相应的空间 $K(T)$ 由具有可数支柱的函数构成．例如 Hilbert 空间中 H 的一个完全正交集$\{a_t\}$是一个基；如果 $x\in H$，那么对所有下标 $t\in T$(可能除去可数个 t)，$\xi_t(x)=\langle x, a_t\rangle$ (其中 $\langle\cdot, \cdot\rangle$ 是 H 中的纯量积)，并且级数 $\sum\xi_t a_t$ 收敛于 x．基映射由到所有 a_t 生成的闭子空间上的正交射影规定．$\mathbf{R}$ 上所有复殆周期函数构成的空间 AP 有一个由函数 $e^{i\lambda t}$ 构成的基；这里 $\mathbf{R}=T$，$K(T)$ 是可数值函数构成的集合，并且基映射由公式

$$\Xi[x(\lambda)] = \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{+\tau}x(\lambda)e^{it\lambda}\,d\lambda$$

定义．

无条件基(unconditional basis)是空间 X 中的一个可数基，使得任一元素 x 的分解无条件收敛(即对级数的任意多个项重新排列，级数的和不变)．例如，在 c_0(收敛于 0 的序列)和 l_p(p 次可和序列，$1\leqslant p<\infty$)中，元素 $a_i=\{\delta_{ik}\}$ 构成一个无条件基；区间 $[a, b]$ 上的连续函数空间 $C[a, b]$ 没有无条件基．Hilbert 空间的正交可数基是无条件基．有无条件基的 Banach 空间是弱完全的(因此它有一个可分对偶空间)当且仅当它不包含同构于 c_0 的子空间(或相应的 l_1)．

设$\{a_i\}$和$\{b_i\}$分别是 Banach 空间 X 和 Y 的两个基，如果存在一个线性双射 $T: a_i\to b_i$ 使得 T 可以扩充为 X 与 Y 之间的一个同构，那么就说$\{a_i\}$与$\{b_i\}$是等价的(equivalent)．如果把$\{a_i\}$与$\{b_i\}$中的一个经过对元素重新排列和规范化后，得到的基与另一个等价，那么就说$\{a_i\}$与$\{b_i\}$是拟等价的(quasi - equivalent)．空间 l_1，l_2，c_0 中的每一个的所有规范无条件基彼此等价．在 Descartes 积空间 $l_p\times l_q(1\leqslant p<q<\infty)$ 中，所有无条件基彼此等价．然而存在不等价于正交基的规范基．

可和基(summable basis)—— 无条件基的一种推广，其对应的集合 T 可以有任意的基数．当 $T=\mathbf{Z}$ 时，那么它与无条件基一致 —— 可和基是一个集合 $A=\{a_t: t\in T\}$，使得任一元素 $x\in X$，存在 A 的元素的线性组合(部分和)的一个集合，称此为 x 的一个广义分解(generalized decomposition)，对 x 来说它是可和的．这就意味着，对 0 的任意邻域 $U\subset X$，可以找到一个有限子集 $A_U\subset A$ 使得对任意有限子集 $A'\supset A_U$，关系

$$\left[\sum_{t\in A}\xi_t a_t - x\right]\in U$$

成立，即当部分和形成一个 Cauchy 系统时(Cauchy 滤子)．例如，Hilbert 空间的任一正交基是可和基．用类似的方式定义弱可和基(weakly summable basis)．全可和基(to tally summable basis)是一个可和基，并且存在一个有界集合 B 使得半范数集合$\{p_B(\xi_t a_t)\}$是可和的．全可和基至多可数，在对偶核空间中，所有弱可和基是全可和基．

绝对基(absolute basis)(绝对可和基(absolutely summable basis))是赋范域上局部凸空间的具有如下性质的可和基：对零的任意邻域 U 和每一个 $t\in T$，半范数族$\{p_U(a_t)\}$是可和的．所有无条件可数基是绝对基，即级数 $\sum|\xi_i(x)|p(a_i)$ 对所有 x 和所有连续半范数 $p(\cdot)$ 收敛．在所有 Banach 空间中，仅有 l_1 有有绝对可数基．如果一个 Fréchet 空间有一个绝对基，那么它的所有无条件基都是绝对基．在核 Fréchet 空间中，任一可数基(如果它有的话)是绝对基([13])．

Schauder 基(Schauder basis)是空间 X 的一个基$\{a_t: t\in T\}$并且具有如下性质：由这个基所定义的基映射是连续的(因此是到某一空间 $K(T)$ 上的同构)，即对任一 $x\in X$，是诸分量 $\xi_t(x)$ 为 X 上的连续泛函数的一个基，特别地，x 关于这个基的分解的系数是 X 上的连续泛函．这种基首先由 J. Schauder ([5])对 $T=\mathbf{Z}$ 的情形定义．Schauder 基概念是基概念的所有修正中最重要的．

Schauder 基由$\{a_i\}$和$\{\xi_i\}$形成一个双正交系统这一事实来刻画．于是在空间 c_0 和 $l_p(p\geqslant 1)$ 中，序列 $a_i=\{\delta_{ik}\}$ 构成一个可数 Schauder 基．空间 $C[a, b]$ 中的可数 Schauder 基形成一个 **Haar 系**(Haar system)．在完全度量向量空间中(特别是在 Banach 空间中)，所有可数基都是 Schauder 基([10])．在 Fréchet 空间中，弱基和 Schauder 基概念是一致的([11])．在

没有连续线性泛函的桶型空间 (barrelled space) 中，也没有 Schauder 基 ([8]). 然而，如果在这些空间中存在一个弱 Schauder 基，那么它就是一个通常的 Schauder 基 ([9]). 一个具有可数 Schauder 基的桶型局部凸空间是反射的，当且仅当这个基同时是一个收缩集 (shrinking set)，即如果与它对应的 $\{\xi_i\}$ 是对偶空间 X^* 的一个基，并且是有界完全的 (boundedly complete)，也就是，如果级数 $\sum_i \xi_i a_i$ 的部分和的集合有界，那么这个级数收敛 ([12]). 在 Banach 空间中，如果一个 Schauder 基是无条件基，那么它是一个收缩集 (或一个有界完全集) 当且仅当 X 不包含同构于 l_1 的子空间 (或同构于 c_0 的子空间).

在局部凸空间中，一个 Schauder 基是等度连续的 (equicontinuous)，如果对零的任意邻域 U，可以找到零的一个邻域 V 使得对所有 $x \in X$, $t \in T$,

$$|\xi_t(x)|\, p_U(a_t) \leqslant p_V(x).$$

桶型空间中的所有 Schauder 基都是等度连续的，并且每一个具有等度连续基的完全局部凸空间可以同某一个序列空间等同 ([15]). 核空间的等度连续基是绝对基.

参考文献

[1] Cohn, P. M., Universal algebra, Reidel, 1981.

[2] Мальцев, А. И., Алгебраические системы, М., 1970 (英译本: Mal'tsev, A. I.: Algebraic systems, Springer, 1973).

[3] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Algebra: Algebraic structures. Linear algebra, 1, Addison-Wesley, 1974, Chapt. 1; 2 (译自法文).

[4] Hamel, G., Eine Basis aller zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung: $f(x+y)=f(x)+f(y)$, *Math. Ann.*, **60** (1905), 459-462.

[5] Schauder, J., Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funkitionalräumen, *Math. Z.*, **26**(1927), 47-65; 417-431

[6] Enflo, P., A counterexample to the approximation problem in Banach spaces, *Acta Math.*, **130** (1973), 309-317.

[7] Zobin, N. M. and Mityagin, B. S., Examples of nuclear linear metric spaces without a basis, *Functional Anal. Appl.*, **8** (1974), 4, 304-313. (Funktsional. Analiz. i Prilozhen, **8** (1974), 4, 35-47).

[8] Edwards, R. E., Functional analysis: theory and applications., Holt, Rinehardt, Winston, 1965.

[9] Dieudonnè, J., Sur les espaces de Köthe, *J. d'analyse Math.*, **1** (1951), 81-115.

[10] Arsove, M. G., The Paley-Wiener theorem in metric linear spaces, *Pacific J. Math.*, **10** (1960), 365-379.

[11] Bessaga, C. and Pelczyński, A., Spaces of continuous functions IV, *Studia Math.*, **19** (1960), 53-62.

[12] James, R. C., Bases and reflexivity in Banach spaces, *Ann. of Math.*, (2), **52** (1950), 3, 518-527.

[13] Dynin, A. and Mityagin, B., Criterion for nuclearity in terms of approximate dimension, *Bull. Acad. Polon. Sci. Sèr Sci. Math., Astr. Phys.* **8** (1960), 535-540.

[14] Day, M. M., Normed linear spaces, Springer, 1958.

[15] Pietsch, A., Nuclear locally convex spaces, Springe, 1972 (译自德文).

[16] Singer, I., Bases in Banach spaces, 1-2, Springer, 1970-1981.

М. И. Войцеховский, М. И. Кадец 撰 卢景波 译

Bateman 函数 [Bateman function; Бейтмена функция], k 函数 (k-function)

函数

$$k_\nu(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(x\,\mathrm{tg}\,\theta - \nu\theta)\,d\theta, \qquad (1)$$

其中 x 和 ν 都是实数. 这个函数是 H. Bateman 定义的 ([1]). Bateman 函数可以表示为第二类合流超几何函数 $\Psi(a, b, x)$ 的形式:

$$\Gamma(\nu+1)k_{2\nu}(x) = e^{-x}\Psi(-\nu, 0; 2x), \quad x>0. \qquad (2)$$

把关系式 (2) 取作为具有割线 $(-\infty, 0]$ 的复平面上的 Bateman 函数的定义是很方便的. 下列关系式成立:

对于情况 (1),

$$k_\nu(-x) = k_{-\nu}(x),$$

对于情况 (2),

$$k_{2\nu}(-\xi \pm i0) = k_{-2\nu}(\xi) - e^{\pm\nu\pi i}e^{\xi}\Phi(-\nu, 0; \; 2\xi),$$

其中 $\xi>0$，而 $\Phi(a, b; x)$ 是第一类合流超几何函数.

参考文献

[1] Bateman, H., The k-function, a particular case of the confluent hypergeometric function, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **33** (1931), 817-831.

[2] Bateman, H. and Erdélyi, A (eds.), Higher transcendental functions, 1, McGraw-Hill., 1953 (中译本: A. 爱尔台里等编，高级超越函数，第一册，上海科学技术出版社，1957).

Л. Н. Кармазина 撰 张鸿林 译

Bateman 法 [Bateman method; Бейтмена метод]

一维的第二类 Fredholm 积分方程的积分算子的近似方法；它是**退化核法** (degenerate kernels, method of) 的特殊情况. 这个方法是 H. Bateman 提出的 ([1]).

参考文献

[1] Bateman, H., *Messeng. Math.*, **37** (1908), 179-187.

[2] Канторович, Л. В., Крылов, В. И., Приближенные методы высшего анализа, 5 изд., М.-Л., 1962 (英译本: Kantorovich, L. V. and Krylov, V. I., Approximate methods of higher analysis, Noordhoff, 1958).

А. Б. Бакушинский 撰

【补注】 在 Bateman 法中，退化核 $K_N(x,s)$ 按下列法则来构造:

$$K_N(x,s) = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & K(x,s_1) & \cdots & K(x,s_N) \\ K(x_1,s) & K(x_1,s_1) & \cdots & K(x_1,s_N) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K(x_N,s) & K(x_N,s_1) & \cdots & K(x_N,s_N) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} K(x_1,s_1) & \cdots & K(x_1,s_N) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ K(x_N,s_1) & \cdots & K(x_N,s_N) \end{vmatrix}}$$

其中 s_i, x_i $(i=1,\cdots,N)$ 是所考虑的积分方程的积分区间上的一些点.

参考文献

[A1] Bateman, H., *Proc. Roy. Soc.*, A(1922), 441-449.

张鸿林 译

Bayes 公式 [**Bayes formula** ; **Бейеса формула**]

一个公式，利用它可由事件(或假设)的先验概率计算其后验概率．设 $A_1,\cdots,A_n$ 是互斥事件的一个完全组: $\bigcup A_j=\Omega$, $A_i\cap A_j=\varnothing$ $(i\neq j)$. 则在给定事件 B, $\mathsf{P}(B)>0$, 发生之下，事件 A_i 的条件概率 $\mathsf{P}(A_i\,|\,B)$ 可由 Bayes 公式

$$\mathsf{P}(A_i\,|\,B)=\frac{\mathsf{P}(A_i)\mathsf{P}(B\,|\,A_i)}{\sum_{i=1}^{n}\mathsf{P}(A_i)\mathsf{P}(B\,|\,A_i)} \qquad (*).$$

求出，这里 $\mathsf{P}(A_i)$ 是 A_i 的先验概率，$\mathsf{P}(B|A_i)$ 是在给定事件 $A_i(\mathsf{P}(A_i)>0)$ 发生的条件下，事件 B 的条件概率，这公式是 T. Bayes 在 1763 年证明的．

公式(*)是下述抽象化的 Bayes 公式的一个特例．设 θ 和 ξ 为取值于可测空间 (Θ, B_Θ) 和 (X, B_X) 的随机元，且 $\mathsf{E}|g(\theta)|<\infty$，对任一集合 $A\in F_\xi=\sigma\{\omega:\xi(\omega)\}$，令

$$G(A)=\int_\Omega g(\theta(\omega))\mathsf{E}[I_A(\omega)\,|\,F_\theta](\omega)\,\mathsf{P}(d\omega),$$

这里 $F_\theta=\sigma(\omega:\theta(\omega))$，而 $I_A(\omega)$ 是集合 A 的指示函数，则测度 G 对测度 P 为绝对连续 $(G\ll\mathsf{P})$，且 $\mathsf{E}[g(\theta)|F_\xi](\omega)=(dG/d\mathsf{P})(\omega)$，后者是 G 对 P 的 Radom - Nikodym 导数．

参考文献

[1] Колмогоров, А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974 (中译本: A. H. 柯尔莫哥洛夫，概率论基本概念，商务印书馆，1952).

A. H Ширяев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Liptser, R.S. and Shiryayev, A. N., Statistics of random processes, 1, Springer, 1977, Section 7 9.

陈希孺 译

Bayes 方法 [**Bayesian approach** ; **Бейесовский подход**], 统计问题的

基于下述假定的一种方法: 对统计问题中的任何参数，可赋予一确定的概率分布．任何一般的统计决策问题由以下的要素来确定: (可能的)样本 x 的空间 $(X, \mathscr{B}_X)$，未知参数 θ 取值的空间 $(\Theta, \mathscr{B}_\Theta)$，$(X, \mathscr{B}_X)$ 上的一族概率分布 $\{\mathsf{P}_\theta:\theta\in\Theta\}$，决策空间 $(D, \mathscr{B}_D)$ 以及函数 $L(\theta, d)$，它刻画了当参数真值为 θ 而采取决策 d 时所造成的损失．决策的目的是找到在某种意义下最优的规则(决策函数) $\delta=\delta(x)$，它对每个观察结果 $x\in X$ 指定一个决策 $\delta(x)\in D$. 在 Bayes 方法中，由于假定了未知参数 θ 是一个具有给定(先验)分布 $\pi=\pi(d\theta)$ 的随机变量，最好的决策函数(**Bayes 决策函数** (Bayesian decision function)) $\delta^*=\delta^*(x)$ 确定为使最小期望损失 $\inf_\delta\rho(\pi,\delta)$ 达到的函数，此处

$$\rho(\pi,\delta)=\int_\Theta\rho(\theta,\delta)\pi(d\theta),$$

而

$$\rho(\theta,\delta)=\int_X L(\theta,\delta(x))\,\mathsf{P}_\theta(dx)$$

这样，

$$\rho(\pi,\delta^*)=\inf_\delta\int_\Theta\int_X L(\theta,\delta(x))\,\mathsf{P}_\theta(dx)\,\pi(d\theta).$$

下面的论述在寻求 Bayes 决策函数 $\delta^*=\delta^*(x)$ 时有用．设 $\mathsf{P}_\theta(dx)=p(x\,|\,\theta)\,d\mu(x)$, $\pi(d\theta)=\pi(\theta)\,d\nu(\theta)$，这里 μ, ν 都是 σ 有限测度，假如积分次序可更换，则得到

$$\int_\Theta\int_X L(\theta,\delta(x))\,\mathsf{P}_\theta(dx)\,\pi(d\theta)=$$

$$=\int_\Theta\int_X L(\theta,\delta(x))p(x\,|\,\theta)\pi(\theta)\,d\mu(x)\,d\nu(\theta)=$$

$$=\int_X d\mu(x)\left[\int_\Theta L(\theta,\delta(x))p(x\,|\,\theta)\pi(\theta)\,d\nu(\theta)\right].$$

由此可见，对一给定的 $x\in X$, $\delta^*(x)$ 的值 d^* 要使

$$\inf_d\int_\Theta L(\theta,d)p(x\,|\,\theta)\pi(\theta)\,d\nu(\theta)$$

这个极值能达到，或等价地说，要使

$$\inf_d\int_\Theta L(\theta,d)\frac{p(x\,|\,\theta)\pi(\theta)}{p(x)}\,d\nu(\theta)$$

这个极值能达到，其中

$$p(x)=\int_\Theta p(x\,|\,\theta)\pi(\theta)\,d\nu(\theta).$$

但依 **Bayes 公式** (Bayes formula)

$$\int_{\Theta} L(\theta, d)\frac{p(x \mid \theta)\pi(\theta)}{p(x)}d\nu(\theta) = \mathrm{E}[L(\theta, d) \mid x].$$

这样，对一给定的 x，$\delta^*(x)$ 就是使条件平均损失 $\mathrm{E}[L(\theta, d) \mid x]$ 达到最小的 d^* 的取值.

例(检验两个简单假设的 Bayes 方法)．设$\Theta=\{\theta_1, \theta_2\}$，$D=\{d_1, d_2\}$，$L_{ij}=L(\theta_i, d_j)(i, j=1, 2)$；$\pi(\theta_1)=\pi_1, \pi(\theta_2)=\pi_2$，$\pi_1+\pi_2=1$．如果把解 d_i 认作是接受假设 $H_i: \theta=\theta_i$，则自然应设 $L_{11}<L_{12}$，$L_{22}<L_{21}$．这样，由

$$\rho(\pi, \delta) = \int[\pi_1 p(x \mid \theta_1)L(\theta_1, \delta(x))+ + \pi_2 p(x \mid \theta_2)L(\theta_2, \delta(x))]\,d\mu(x)$$

可推出，$\inf_\delta \rho(\pi, \delta)$在下述函数处达到：

$$\delta^*(x) = \begin{cases} d_1, 若\ \dfrac{p(x \mid \theta_2)}{p(x \mid \theta_1)} \leqslant \dfrac{\pi_1}{\pi_2}\dfrac{L_{12}-L_{11}}{L_{21}-L_{22}}, \\ d_2, 若\ \dfrac{p(x \mid \theta_2)}{p(x \mid \theta_1)} \geqslant \dfrac{\pi_1}{\pi_2}\dfrac{L_{12}-L_{11}}{L_{21}-L_{22}}. \end{cases}$$

Bayes 方法的优点在于：与损失 $\rho(\theta, \delta)$ 不同，期望损失 $\rho(\pi, \delta)$是与未知参数 θ 无关的数，因而必存在解 δ_ε^*，使

$$\rho(\pi, \delta_\varepsilon^*) \leqslant \inf_\delta \rho(\pi, \delta)+\varepsilon,$$

这个解即使并非最优，至少也是 ε 最优的 ($\varepsilon>0$)．Bayes 方法的缺点在于，它必须假定未知参数有先验分布，且要给出先验分布的精确形式(这后一缺点可以在某种程度上通过采用**经验 Bayes 方法**(Bayesian approach, empirical) 来克服．

参考文献

[1] Wald, A., Statistical decision theory, Wiley, 1950.
[2] Groot, M. H. de, Optimal statistical decisions, McGraw - Hill, 1970.

A. H. Ширяев 撰　陈希孺 译

经验 Bayes 方法 [**Bayesian approach, empirical**; **Бейесовский подход эмпирический**]

Bayes 方法的一种统计解释．利用它，甚至在**先验分布**(a priori distribution)未知时，也可对不能观察的参数作出推断．设 (Y, X)为一随机向量．对随机参数 X 的任何给定值 $X=x$，Y的条件分布密度 $p(y|x)$已知，若在某一试验中仅能观察到 Y取的值，而 X 的相应取值未知，而需要估计未观察到的 X 的一个函数 $\varphi(X)$．按经验 Bayes 方法，条件数学期望 $\mathrm{E}[\varphi(x)|Y]=\psi(Y)$ 应取为 $\varphi(x)$ 之近似值，依 **Bayes 公式** (Bayes formula)，这期望由公式

$$\psi(Y) = \frac{\int\varphi(x)p(Y \mid x)p(x)\,d\mu(x)}{q(Y)} \qquad (1)$$

给出，其中

$$q(y) = \int p(y \mid x)p(x)\,d\mu(x), \qquad (2)$$

$p(x)$是 X的无条件(先验)分布的密度，$\mu(x)$是相应的 σ 有限测度，而 $q(y)$是 Y 的无条件分布的密度.

如果先验密度未知，则无法计算 ψ 和 q 之值．但是，若有为数充分多的，从具密度 $q(y)$ 的分布中抽出的随机变量现实$Y_1, \cdots, Y_k$为已知，则可以构造出仅依赖于$Y_1, \cdots, Y_k$ 的相合估计 $\hat{q}(y)$．C. H. Бернштейн ([1])提出估计 $\psi(Y)$的方法如下：以 $\hat{q}(y)$代 (2)中的 $q(y)$并求出此积分方程的解 $\hat{p}(x)$，然后以 $\hat{p}$ 和 $\hat{q}$ 取代 (1) 式右边的 p 和 q．但这种方法很困难，因为求解积分方程 (2) 是一在计算数学中难于处理的问题．

在某些特殊情况下，统计的方法不仅可用于估计 q，也可用于估计 ψ(见 [3])．这是可能的，如果包含 x 和 y 的恒等式

$$\varphi(x)p(y \mid x) = \lambda(y)r[z(y) \mid x] \qquad (3)$$

成立．在 (3) 中，$\lambda(y)$ 和 $z(y)$ 都是仅依赖于y的函数，而 $r(z \mid x)$ 作为 z 的函数是概率密度(即可视为某随机变量 Z在给定 $X=x$ 时的条件密度)．若(3)成立，则(1)式的分子等于$\lambda(Y)s[z(Y)]$，其中 $s(z)=\int r(z|x)\,p(x)\,d\mu(x)$ 为 Z 的无条件分布的密度．这样，如果有为数充分多的具密度 $s(z)$的独立随机变量现实 $Z_1, \cdots, Z_m$，则可作出 $s(z)$ 的相合估计$\hat{s}(z)$，从而也可以找到 $\psi(Y)$的一个相合估计 $\hat{\psi}(Y)$：

$$\varphi(X) \approx \psi(Y) \approx \hat{\psi}(Y) = \frac{\lambda(Y)\hat{s}[z(Y)]}{\hat{q}(Y)}. \qquad (4)$$

例如，设需要估计 $\varphi(X)=X^h$，其中 h为正整数，而 $p(y|x)=x^y e^{-x}/y!(y=0, 1, \cdots, x>0)$，则 $\varphi(x)p(y|x)=\lambda(y)\cdot p(y+h|x)$，其中 $\lambda(y)=(y+h)!/y!$，因为在此有 $r(z|x)=p(z|x)$，得到 $s(z)=q(z)$．相应地有 $\hat{\psi}(Y)=\lambda(Y)\hat{q}(Y+h)/\hat{q}(Y)$，即在确定 $\hat{\psi}(Y)$ 时只需有 $Y_1, Y_2, \cdots$ 的值．另一方面，如果 $p(y|x)=b_n(y|x)=C_n^y x^y(1-x)^{n-y}(y=0, \cdots, n$；$n$ 为正整数；$0 \leqslant x \leqslant 1$，$C_n^y=\binom{n}{y}$)，则 $\psi(x)\ p(y|x)=\lambda(y)\ r(y+h|x)$，其中 $\lambda(y)=C_n^y/C_{n+h}^{y+h}$ 而 $r(z|x)=b_{n+h}(z|x) \neq p(y|x)$．由于这个原因，在本例中为作出 $\hat{\psi}(Y)$需要两个序列试验值 Y_i和 Z_j．

这个形式的经验 Bayes 方法只能用于一个很狭小的族，其中密度 $p(y|x)$和函数 $\varphi(x)$适合条件(3)．但即使这条件确实满足，估计量(4)的构造仍取决于随机变量 Z_j的可观察性，而通常 Z_j的密度与 Y_j 的密度不同，Y_j是直接观察到的．为了实用的目的，更可取的是在一种修改过的形式下使用经验 Bayes 方法，这时不存在上述不便之处．在这个经修正的方法中，由所作的逼近得不出 $\psi(Y)$的一个相合估计(这样的估计可能根本不存

在),而只能得出此函数上下限的估计,它们是通过解出下述线性规划问题而求得的:以 $\psi_1(Y)$ 和 $\psi_2(Y)$ 分别记(1)式分子中的线性泛函在线性约束 $p(x)\geqslant 0$, $\int p(x)d\mu(x)=1$ 和 $q(Y)\equiv\int p(Y|x)p(x)d\mu(x)=\hat{q}(Y)$ 之下的最小和最大值(极值是对未知的先验分布 $p(x)$ 来取),其中 $\hat{q}(Y)$ 是前面提及的 $q(Y)$ 估计量,由观察值 $Y_1,\cdots,Y_k$ 作出.在这个情况下可证明 $\psi_1(Y)/\hat{q}(Y)\leqslant\psi(Y)\leqslant\psi_2(Y)/\hat{q}(Y)$ 成立的概率趋于 1,如果用于作估计量 $\hat{q}(Y)$ 的随机变量 Y_i 的个数无限增加(据**大数律**(law of large numbers)).也可能作出经验 Bayes 方法的其他修正——例如,在上述最后一条件 $q(Y)=\hat{q}(Y)$ 之上附加有限个形如 $q(y_i)=\hat{q}(y_i)$ 的条件,其中 y_i 是起初给定的数.若 $\hat{q}$ 用 q 的相应置信限来代替,则条件将有不等式 $q_1(y_i)\leqslant q(y_i)\leqslant q_2(y_i)$ 的形式,等等.

在某些应用上重要的场合,可找到函数 ψ_1 和 ψ_2 的适宜的优控函数,而不必通过费力的线性规划法(见**样本法**(sample method)中讨论统计控制的例子).

关于将经验 Bayes 方法用于涉及随机参数值的假设的检验,参见**判别分析**(discriminant analysis).

参考文献

[1] Бернштейн, С. Н., «Изв. АН СССР. Сер матем.», 5 (1941), 85 − 94.

[2] Большев, Л. Н., в кн., Международный конгресс математиков в ницце, 1970. Доклады советских математиков, М., 1972, 48 − 55.

[3] Robbins, H., An empirical Bayes approach to statistics, in Proc. Berkeley Symp. Math. Statist. Probab. Vol. 1, Berkeley - Los Angeles, 1956, 157 − 163.

Л. Н. Большев 撰 陈希孺 译

Bayes 决策函数 [Bayesian decision function; Бейесовская решающая функция]

一个规则(函数) $\delta(x)$,它对每个统计试验结果 x 给出一个决策 $\delta(x)$,取值于一给定的决策集内,它使期望损失达到最小,正如在统计问题的 **Bayes 方法**(Bayesian approach)框架中所定义的那样.

А. Н. Ширяев 撰 陈希孺 译

Bayes 估计量 [Bayesian estimator; Бейесовская оценка]

用 **Bayes 方法**(Bayesian approach)由观察值对一未知参数所作的估计.统计问题使用这样的方法时,一般都假定未知参数 $\theta\in\Theta\subseteq\mathbf{R}^k$ 是一具有给定先验分布 $\pi=\pi(d\theta)$ 的随机变量,决策空间 D 与集合 Θ 重合.且损失 $L(\theta,d)$ 表示变量 θ 与估计 d 的偏离.因此,函数 $L(\theta,d)$ 通常假定为有形式 $L(\theta,d)=a(\theta)\lambda(\theta-d)$,其中 λ 是误差向量 $\theta-d$ 的某个非负函数,若 $k=1$,则常取 $\lambda(\theta-d)=|\theta-d|^{\alpha}(\alpha>0)$.最有用且在数学上最方便的是平方损失函数 $L(\theta,d)=|\theta-d|^2$.对这一损失函数,Bayes 估计量(**Bayes 决策函数**(Bayesian decision function)) $\delta^*=\delta^*(x)$ 定义为使最小总损失

$$\inf_{\delta}\rho(\pi,\delta)=\inf_{\delta}\int_{\Theta}\int|\theta-\delta(x)|^2 P_{\theta}(dx)\pi(d\theta)$$

达到的函数,或与之等价,δ^* 是使最小条件损失

$$\inf_{\delta}E\{[\theta-\delta(x)]^2|x\}$$

达到的函数,由此推出,在平方损失函数的场合,Bayes 估计量与后验均值 $\delta^*(x)=E(\theta|x)$ 相等,而 Bayes 风险(Bayes risk)为

$$\rho(\pi,\delta^*)=E[D(\theta|x)].$$

此处 $D(\theta|x)$ 是后验分布的方差:

$$D(\theta|x)=E\{[\theta-E(\theta|x)]^2|x\}.$$

例 设 $x=(x_1,\cdots,x_n)$,这里 $x_1,\cdots,x_n$ 为具正态分布 $N(\theta,\sigma^2)$ 的独立同分布变量,σ^2 已知,而未知参数 θ 有正态分布 $N(\mu,\tau^2)$.因为当 x 给定时 θ 的后验分布为正态 $N(\mu_n,\tau_n^2)$,其中

$$\mu_n=\frac{n\bar{x}\sigma^{-2}+\mu\tau^{-2}}{n\sigma^{-2}+\tau^{-2}},\quad \tau_n^{-2}=n\sigma^{-2}+\tau^{-2},$$

且 $\bar{x}=(x_1+\cdots+x_n)/n$,可知在平方损失函数 $|\theta-d|^2$ 之下,Bayes 估计量为 $\delta^*(x)=\mu_n$,而 Bayes 风险则为 $\tau_n^2=\sigma^2\tau^2/(n\tau^2+\sigma^2)$.

А. Н. Ширяев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Sverdrup, E., Laws and chance variations, 1, North-Holland. 1967, Chapt. 6. Section 4.

陈希孺 译

Behnke - Stein 定理 [Behnke - Stein theorem; Бенке-Стейна теорема]

设全纯域 $G_k\subset\mathbf{C}^n$, $k=1,2,\cdots$,其中对所有的 k 有 $G_k\subset G_{k+1}$,则它们的并仍然是全纯域.Behnke - Stein 定理不仅对复 Euclid 空间 $\mathbf{C}^n$ 成立,而且对任何 **Stein 流形**(Stein manifold)也成立.如果序列 G_k 在嵌入意义下不是单调增加的,则定理不成立.例如 $\mathbf{C}^2$ 中两全纯域

$$G_1=\{(z_1,z_2):|z_1|<1,\ |z_2|<2\}$$

和

$$G_2=\{(z_1,z_2):|z_1|<2,\ |z_2|<1\}$$

的并不是全纯域.

参考文献

[1] Behnke, H. and Stein, K., Konvergente Folgen von Regularitätsbereichen und die Moromorphiekonvexität *Math. Ann.*, **116** (1983), 204−216.

[2] Владимиров, В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964 (英译本: Vladimirov, V. S., Methods of the theory of functions of several complex variables, M. I. T., 1966).

Е. М. Чирка 撰　钟同德 译

Behrens - Fisher 问题 [Behrens - Fisher problem; Беренса - Фишера проблема]

从一个统计问题所引出的分析问题．该统计问题是在方差未知(方差的比也未知)的情况下，利用试验数据去比较两个正态分布的数学期望．这问题是 W. U. Behrens 在[1]中联系到粮食作物数据的处理而提出的．Behrens - Fisher 问题的现代提法，是 R. Fisher 基于充分统计量的概念而给出的．设 $X_{11},\cdots,X_{1n_1}$ 和 $X_{21},\cdots,X_{2n_2}$ 是具正态分布的相互独立随机变量，且 $\mathrm{E}X_{1i}=\mu_1$，$\mathrm{E}(X_{1i}-\mu_1)^2=\sigma_1^2\ (i=1,\cdots,n)$，$\mathrm{E}X_{2j}=\mu_2$，$\mathrm{E}(X_{2j}-\mu_2)^2=\sigma_2^2\ (j=1,\cdots,n_2)$，设数学期望 μ_1, μ_2，方差 σ_1^2, σ_2^2 及比 σ_1^2/σ_2^2 都未知，当 n_1, $n_2\geqslant 2$ 时，四维向量($\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$, S_1^2, S_2^2)是充分统计量，此向量各分量之表达式为

$$\bar{X}_1=\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}X_{1i},\quad \bar{X}_2=\frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2}X_{2j},$$

$$S_1^2=\sum_{i=1}^{n_1}(X_{1i}-\bar{X}_1)^2,\quad S_2^2=\sum_{j=1}^{n_2}(X_{2j}-\bar{X}_2)^2,$$

且它们是相互独立的随机变量，$\sqrt{n_1}(\bar{X}_1-\mu_1)/\sigma_1$ 和 $\sqrt{n_2}(\bar{X}_2-\mu_2)/\sigma_2$ 有标准正态分布，而 S_1^2/σ_1^2 及 S_2^2/σ_2^2 有 χ^2 分布，自由度分别为 n_1-1 和 n_2-1．由于一充分统计量所含关于未知参数 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2$ 的信息量与原始的 n_1+n_2 个随机变量 X_{1i},X_{2j} 所含的一样多，因此在检验有关这些参数值的假设时，只需考虑这个充分统计量．特别地，这个概念是有关检验 $\mu_1-\mu_2=\Delta$ 的假设问题的现代提法的基础，这里 Δ 是一事前给定的数．在此，Behrens - Fisher 问题化为在随机变量 $\bar{X}_1-\bar{X}_2$, S_1^2, S_2^2 可能取值的空间中找一个集合 K_α，使当被检验的假设正确时，事件 $(\bar{X}_1-\bar{X}_2,S_1^2,S_2^2)\in K_\alpha$ 的概率与未知参数无关且确切地等于给定的数 $\alpha\ (0<\alpha<1)$．

Behrens - Fisher 问题的解的存在问题，被一些杰出的数学家长时期讨论过(主要与 R. A. Fisher 对此问题的方法有关．Fisher 方法越出了概率论的范围)．Ю. В. Линник 等在 1964 年证明，若样本大小 n_1 和 n_2 有不同的奇偶性，则 Behrens - Fisher 问题的解 K_α 存在，当 n_1 和 n_2 的奇偶性相同时，解的存在与否仍为未决问题．

Behrens - Fisher 问题常被推广和修改．特别是 A. Wald 提出过在 $(\bar{X}_1-\bar{X}_2)/S_1^2$ 和 S_1^2/S_2^2 这两个变量的样本空间中找 K_α 的问题．此问题之解是否存在仍属未决．然而，可以造出这样的集合 K_α^*，使当假设 $\mu_1-\mu_2=\Delta$ 正确时，事件 $((\bar{X}_1-\bar{X}_2)/S_1^2,S_1^2/S_2^2)\in K_\alpha^*$ 的概率尽管仍与未知的比 σ_1^2/σ_2^2 有关，将与给定的 α 偏离很小．这个事实是现代关于比较 μ_1 和 μ_2 的检验问题的实际解法的建议的基础．В. И. Романовский, M. Bartlett, H. Scheffe 及其他人提出了比较 μ_1 和 μ_2 的简单且便于计算的检验．但是，这些检验中的统计量不能通过充分统计量表出，因此，一般说来，它们的作用通常不如基于 Behrens - Fisher 问题及其推广的解的那种检验．

参考文献

[1] Behrens, W. U., *Landwirtsch. Jahresber.*, **68** (1929), 6, 807 – 837.

[2] Линник, Ю. В., Статистические задачи с мешающими параметрами, М., 1966.

[3] Линник, Ю. В., Романовский, И. В., Судаков, В. Н., 《Докл. АН СССР》, **155** (1964), 6, 1262 – 1264.

Л. Н. Большев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Linnik, Yu. V., Randomized homogeneous tests for the Behrens - Fisher problem, *Selected Transl. in Math. Stat. and Probab.*, **6** (1966), 207 – 217 (译自俄文).

陈希孺 译

钟形对策 [bell - shaped game; колоколообразная игра]

一种**单位正方形上的对策** (game on the unit square)，它的支付函数形为 $\varphi(x-y)$，其中 φ 是正解析正常 **Pólya 频率函数** (proper Pólya frequency function)，即:

1) $\varphi(u)$ 对于所有 $u\in(-\infty,\infty)$ 有定义；

2) 对于任何 n 和任何集合 $-\infty<x_1<\cdots<x_n<\infty$ 和 $-\infty<y_1<\cdots<y_n<\infty$，有不等式 $\det\|\varphi(x_i-y_j)\|\geqslant 0$;

3) 对于任何集合 $\{x_k\}$ (对应地，$\{y_k\}$)，有集合 $\{y_k\}$ (对应地，$\{x_k\}$)，使得 $\det\|\varphi(x_i-y_j)\|>0$;

4) $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(u)du<\infty$.

钟形对策的一个例子是支付函数为 $e^{-(x-y)^2}$ 的对策．在钟形对策中局中人的最优策略是唯一的，并且是有有限个阶跃的逐段常数分布．支付函数为 $\varphi(\lambda(x-y))$ 的对策的值，当 $\lambda\to\infty$ 时，趋向于零，而在最优策略的支集中的点的个数无限增长．

参考文献

[1] Karlin, S., Mathematical methods and theory in the games, programming and economics, Addison - Wesley, 1959.

В. К. Доманский 撰　史树中 译

Bellman 方程 [Bellman equation; Беллмана уравнение]

1) 为解**最优控制** (optimal control) 问题提出的一种特殊类型的偏微分方程．如果能找到 Bellman 方程 Cauchy 问题的解，那么就容易得到原问题的最优解．

2) 解离散最优控制问题的一种递推关系．借助于

Bellman 方程求得最优解的方法称为**动态规划** (dynamic programming).

参考文献

[1] Bellman, R., Dynamic programming, Princeton Univ. Press, 1957.

В. Г. Карманов 撰

【补注】 连续时间最优控制问题的 Bellman 方程也常称为动态规划方程 (dynamic programming equation). 例子和更多的细节见**最优性的充分条件** (optimality, sufficient conditions). 也还有随机控制问题的一个变形.

参考文献

[A1] Fleming, W. H. and Rishel, R. W., Deterministic and stochastic optimal control, Springer, 1975.

叶其孝 译

Bellman - Harris 过程 [Bellman - Harris process ; Беллмана-Харриса процесс]

年龄相关分支过程 (branching process, age - dependent) 的一种特殊情形. 首先由 R. Bellman 和 T. E. Harris ([1]) 加以研究. 在 Bellman - Harris 过程中, 假定诸粒子彼此独立地在 -随机时期内生存, 且在它们生存时间的终了产生随机多个新粒子. 若 $G(t)$ 为诸粒子生存时间的分布函数, $h(s)$ 为每个粒子下一代数目的母函数, 且在 $t=0$ 时粒子的年龄为 0, 则粒子数 $\mu(t)$ 的母函数 $F(t;s)=\mathsf{E}s^{\mu(t)}$ 满足非线性积分方程

$$F(t;s) = \int_0^t h(F(t-u;s))\,dG(u)+s(1-G(t)).$$

如果

$$G(t) = 1-e^{-\lambda t},\quad t\geqslant 0,$$

则 Bellman - Harris 过程是一连续时间 Марков 分支过程.

参考文献

[1] Bellman, R. and Harris, T. E., On the theory of age - dependent stochastic branching processes, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 34 (1948), 601 – 604.

Б. А. Севастьянов 撰 潘一民 译

Beltrami 坐标 [Beltrami coordinates ; Бельтрами координаты]

曲面上的坐标, 在此坐标系中一切测地线均可表示成线性方程. 能引入 Beltrami 坐标的曲面称为射影的 (projective) (这种曲面的射影变换把测地线变为测地线). 如此称谓的由来是 E. Beltrami 在 1866 年曾研究过这种曲面.

E. В. Шикин 撰

【译注】 能引入 Beltrami 坐标的曲面是且仅是 Gauss 曲率为常数的曲面 (Beltrami 定理). (见[B1], p.159.)

参考文献

[B1] 苏步青原著, 姜国英改写, 微分几何学, 新版, 高等教育出版社, 1988.

沈一兵 译

Beltrami - Enneper 定理 [Beltrami - Enneper theorem ; Бельтрами - Эннепера теорема]

给出负曲率曲面上**渐近线** (asymptotic line) 的下述性质的定理 (E. Beltrami, 1866; A. Enneper, 1870): 若一条渐近线在给定点的曲率不为零, 则这条渐近线的挠率平方等于曲面在该点的总曲率的绝对值. 这个定理也适用于渐近线在给定点的曲率为零的情形, 这时, 挠率平方用曲面的切平面沿渐近线运动时它在该点的旋转率的平方来代替. 从同一点出发的两渐近线具有绝对值相等而符号相反的挠率.

E. В. Шикин 撰

【补注】 一本有用的一般参考文献是 [A1].

参考文献

[A1] Spivak, A. M., Differential geometry, 3, Publish or Perish, 1975.

沈一兵 译

Beltrami 方程 [Beltrami equation; Бельтрами уравнение]

见 **Laplace - Beltrami 方程** (Laplace - Beltrami equation).

Beltrami 解释 [Beltrami interpretation ; Бельтрами интерпретация]

Лобачевский 平面的一部分在伪球面 —— 常负曲率曲面上的实现. 在 Beltrami 解释中, **测地线** (geodesic line) 及其在伪球面上的线段在 Лобачевский 平面上起着直线及其线段的作用. 伪球面到其自身的等距映射表示 Лобачевский 平面上保持极限圆的运动. 伪球面上的长度、角度和面积对应于 Лобачевский 平面上的长度、角度和面积. 在这些条件下, 每一个涉及部分 Лобачевский 平面的 Лобачевский 测面积学定理, 对应着一个伪球面的内蕴几何的类似定理. Beltrami 解释实现了部分 Лобачевский 平面. 但是, 完整的 Лобачевский 平面不能在三维 Euclid 空间中作为正则曲面而实现 (Hilbert 定理 (Hilbert theorem)).

Beltrami 解释是 E. Beltrami 于 1868 年在 [1] 中提出的. 它的发表标志着 Лобачевский "虚几何" 首次在三维 Euclid 空间中得到实现.

关于 Лобачевский 几何的其他解释, 见 **Klein 解释** (Klein interpretation), **Poincaré 模型** (Poincaré model).

参考文献

[1] Beltrami, E., Saggio di interpretazione della geometria noneuclidea, in Opere Mat., Vol. 1, 1868, 374 – 405.
[2] Каган, В. Ф., Основания геометрии, 1 – 2, М. - Л., 1949 – 1956.

E. В. Шикин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Klein, F., Vorlesungen über nicht - Euklidische Geometrie, Springer, 1968. 杨 路、张景中、侯晓荣 译

Beltrami 法 [Beltrami method; Бельтрами метод]

由 E. Beltrami 在 1864 年提出的求解有三个空间变量的波动方程的方法. 该方法基于以下事实, 借助于内部的微分算子, 在特征锥面上波动方程可转换成特别简单的形式, 由此可以用来得到解 $u(x,t)$

$$4\pi t_0^2 u(x_0,t_0) = \iint_{\Omega} \left[u + t_0 \frac{\partial u}{\partial n} \right] d\sigma,$$

其中 Ω 是球面: $\{x: |x-x_0| = t_0\}$, $d\sigma$ 是该球面上的曲面元, 而 $\frac{\partial}{\partial n}$ 表示在锥面 $|x-x_0|^2 = (t-t_0)^2$ 上的外法向微商. 该方法可应用于非齐次方程和具有任何奇数个空间变量的方程.

参考文献

[1] Courant, R. and Hilbert, D., Methods of mathematical physics, Partial differential equations, 2, Interscience, 1965 (译自德文) (中译本: 数学物理方法 II, 科学出版社, 1977). Ш. А. Алимов, В. А. Ильин 撰

【补注】 上面的公式称为 Beltrami 公式.

参考文献

[A1] John, F., Partial differential equations, Springer, 1978 (中译本: F. 约翰, 偏微分方程, 科学出版社, 1986). 叶其孝 译

Bendixson 准则 [Bendixson criterion; Бендиксона критерий]

用来证明由方程组

$$x' = P(x,y), \quad y' = Q(x,y) \qquad (*)$$

定义的平面动力系统不存在闭轨线的一个定理. 它首先由 I. Bendixson 表述如下([1]): 如果在单连通域 G 中, 表达式 $P'_x + Q'_y$ 的符号不变(也就是说, 保持相同的符号, 只是在一些孤立点或某一条曲线上等于零), 则动力系统(*)在区域 G 中没有闭轨线. H. Dulac 推广了这个准则([2]): 如果 G 是平面 (x,y) 上的单连通域, 函数 P 和 $Q \in C^1(G)$, 且可找到函数 $f(x,y) \in C^1(G)$, 使得对任何连通子域 $D \subset G$, 都有

$$\iint_D \left\{ \frac{\partial(fP)}{\partial x} + \frac{\partial(fQ)}{\partial y} \right\} dx\,dy \neq 0,$$

则区域 G 不包含由动力系统(*)的轨线和奇点所组成的任何简单的可求长的闭曲线. 在环形区域 G 的情况下, 一个类似的定理是说: 动力系统(*)的闭轨线如果存在, 则是唯一的. 这个准则还可推广到具有柱面相空间的动力系统(*)的情况([3]).

参考文献

[1] Bendixson, I., Sur les courbes définies par des équations différentielles, Acta Math., 24 (1901), 1–88.
[2] Dulac, H., Recherches des cycles limites, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **204** (1937), 1703–1706.
[3] Андронов, А. А., Витт, А. А., Хайкин, С. Э., Теория колебаний, 1959 (中译本: А. А. 安德罗诺夫, А. А. 维特和 С. Э. 哈依金, 振动理论, 科学出版社, 1973–1974).
Н. Х. Розов 撰

【补注】 Bendixson 准则也称为 Bendixson 定理 (Bendixson theorem).

参考文献

[A1] Андронов, А. А. и др., Качественная теория динамических систем второго порядка, М., 1966.
张鸿林 译

Bendixson 球面 [Bendixson sphere; Бендиксона сфера]

实分析中的球面, 在单复变函数论中称作 **Riemann 球面** (Riemann sphere).

设 $\Sigma: X^2+Y^2+Z^2=1$ 是 Euclid(X,Y,Z) 空间中的单位球面, $N(0,0,1)$ 和 $S(0,0,-1)$ 分别是其北极和南极; v 和 σ 分别是与 Σ 切于 N 和 S 的平面; xSy 和 uNv 是 σ 和 v 中的坐标系, 其坐标轴平行于平面 $Z=0$ 中坐标系 XOY 的相应坐标轴, 且有相同的指向; Π 是从中心 N 把 Σ 映到 σ 上的**球极平面投影** (stereographic projection), Π' 是从中心 S 把 Σ 映到 v 上的球极平面投影. 那么, Σ 即是关于平面 σ, v 中任一个的 Bendixson 球面. 它产生从 σ(在点 S 被刺穿)到 v(在点 N 被刺穿)的平面的一一映射(bijection of the plane) $\varphi = \Pi'\Pi^{-1}$. 利用这个双射可研究相平面上无穷远的一个邻域内二阶实代数常微分方程自治系统的轨道性态(方程的右边是未知函数的多项式). 该双射把这个问题化为一个在点$(0,0)$的邻域内的类似问题. 该球面以 I. Bendixson 命名.

参考文献

[1] Андронов, А. А., Леонтович, Е. А., Гордон, И. И., Майер, А. Г., Качественная теория динамических систем второго порядка, М., 1966 (英译本: Andronov, A. A., Leontovich, E. A., Gordon, I. I. and Maier, A. G., Qualitative theory of second-order dynamic systems, Wiley, 1973). А. Ф. Андреев 撰
杨 路、张景中、侯晓荣 译

Bendixson 变换 [Bendixson transformation; Бендиксона преобразование]

映射

$$u = \frac{4x}{x^2+y^2}, \quad v = \frac{4y}{x^2+y^2},$$

它把去掉点(0, 0)的 Euclid (x, y) 平面映射成一个与之类似的 Euclid (u, v) 平面．它是由 **Bendixson 球面** (Bendixson sphere)产生的双射的坐标表示．如果平面 (u, v) 和 (x, y) 重合，那么 Bendixson 变换就是平面 (x, y) 关于圆 $x^2+y^2=4$ 的反演．

参考文献

[1] Андронов, А. А., Леонтович, Е. А., Гордон, И. И., Майер, А. Г., Качественная теория динамических систем второго порядка, М., 1966 (英译本: Andronov, A. A., Leontovich, E. A., Gordon, I. I. and Maier, A. G., Qualitative theory of second - order dynamic systems, Wiley, 1973).

А. Ф. Андреев 撰

杨 路、张景中、侯晓荣 译

Bergman 核函数 [Bergman kernel function; Бергмана кернфункция], Bergman 核 (Bergman kernel)

一个具有再生核性质且定义在任意区域 $D\subset\mathbf{C}^n$ 上的复变量函数，在此区域内存在关于 Lebesgue 测度 dv 的 $L_2(D)$ 类中不为 0 的全纯函数 f. Bergman 核函数是由 S. Bergman 引进的 [1]．这些函数 f 的集合构成具有标准正交基 $\{\varphi_1, \varphi_2, \cdots\}$ 的 Hilbert 空间 $L_{2,h}(D)\subset L_2(D)$; $L_{2,h}(D)=L_2(D)\cap O(D)$，其中 $O(D)$ 是全纯函数的空间．函数

$$K_D(z,\zeta) = K(z,\zeta) = \sum_{j=1}^{\infty}\varphi_j(z)\overline{\varphi_j(\zeta)},$$

$$z=(z_1,\ldots,z_n),\ \zeta=(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)$$

称为 D 的 Bergman 核函数(或简称核函数)．右边的级数在 D 的紧子集上一致收敛，并且对每一固定的 $\zeta\in D$ 属于 $L_{2,h}(D)$，此和不依赖于标准正交基 $\{\varphi_j\}$ 的选择．Bergman 核函数依赖于 $2n$ 个复变量并定义在区域 $D\times D\subset\mathbf{C}^{2n}$ 上；它具有对称性质 (symmetry property) $K(\ ,z)=\overline{K(z,\zeta)}$，且对变量 z 是全纯的而关于 ζ 是反全纯的．如果 $D=D'\times D''$, $D'\subset\mathbf{C}^m$, $D''\subset\mathbf{C}^{n-m}$，则

$$K_D(z,\zeta) = K_{D'}(z',\zeta')K_{D''}(z'',\zeta''),$$

其中 $z'=(z_1,\cdots,z_m)$, $z''=(z_{m+1},\cdots,z_n)$.

Bergman 核函数的最重要的特性是它的再生性质 (reproducting property)：对任一函数 $f\in L_{2,h}(D)$ 和任一点 $Z\in D$，下列积分表示成立：

$$f(z) = \int_D f(\zeta)K(z,\zeta)\,dV(\zeta).$$

Bergman 核函数的极值性质 (extremal properties) 为：

1) 对任何点 $z\in D$.

$$K(z,z) = \sup\{|f(z)|^2 : f\in L_{2,h}(D),\ \|f\|_{L_2(D)}\leqslant 1\}.$$

2) 命 $\zeta\in D$ 为这样一点使得 $L_{2,h}(D)$ 类中包含满足条件 $f(\zeta)=1$ 的函数．于是函数 $K(z,\zeta)/K(\zeta,\zeta)$ 满足这条件并且具有模 $K(\zeta,\zeta)^{-1/2}$，此函数对所有这样的 f 是极小的．函数 $K(z,\zeta)/K(\zeta,\zeta)$ 称为区域 D 的极值函数(extremal function)．

Bergman 核函数在双全纯映射下的变化由下面定理表出：如果 φ 是由区域 D 到区域 D^* 上的双全纯映射，$\varphi(z)=w$, $\varphi(\zeta)=\eta$，那么

$$K_{D^*}(w,\eta) = K_D(z,\zeta)\frac{dz}{dw}\overline{\frac{d\zeta}{d\eta}},$$

其中 dz/dw 是逆映射的 Jacobi 行列式．由于这个性质 Hermite 二次型

$$ds^2 = \sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2\log K(z,z)}{\partial z_j\partial\bar z_k}dz_j d\bar z_k$$

在双全纯映射下是不变的．

在区域的内蕴几何学中起重要作用的函数 $K(z)=K(z,z)$ 也称为一核函数．在一般情形下它是非负的，而函数 $\log K(z)$ 是多重次调和的．在 $K(z)$ 是正的区域 D (例如在有界域)内，函数 $K(z)$ 和 $\log K(z)$ 是严格多重次调和的．后者相当于说在这样的区域 D 内形式 ds^2 是正定的．因此给出 D 内的一个 Hermite Riemann 度量．这个度量在双全纯映射下保持不变并称为 Bergman 度量 (Bergman metric)．它可看成是 **Kähler 度量**(Kähler metric)的一个特殊情形．由极值性质 1)可知，当趋于某些边界点时 Bergman 度量的系数增加到无穷大．如果 $D\subset\mathbf{C}^n$ 是一强伪凸域或一解析多面体，那么当 z 以任何方式趋于区域的边值点时 $K(z)$ 都增加到无穷大．Bergman 核函数的具有这种性质的任一区域是一全纯域．

对于最简单类型的区域，Bergman 核函数可以明显地计算出来．例如对于 $\mathbf{C}^n$ 中的球 $B=\{z: |z|<R\}$，Bergman 核函数具有形式：

$$K_B(z,\zeta) = \frac{n!R^n}{\pi^n}\left(R^2-\sum_{j=1}^{n}z_j\bar\zeta_j\right)^{-n-1},$$

对 $\mathbf{C}^n$ 中的多圆柱 $U=\{z: |z_j|<R_j, j=1,\cdots,n\}$，则

$$K_U(z,\zeta) = \frac{1}{\pi^n}\prod_{j=1}^{n}\frac{R_j^2}{(R_j^2-z_j\bar\zeta_j)^2}.$$

当 $n=1$ 和 $U=B$ 为复平面 z 上的圆盘 $\{|z|:|z|<R\}$ 的特殊情形时，Bergman 度量变为经典的双曲度量

$$ds^2 = \frac{2R^2}{(R^2-|z|^2)^2}|dz|^2.$$

它在共形映射下是不变的并且定义了 U 中的 Лобачевский 几何．

参考文献

[1] Bergman, S., The kernel function and conformal mapping, Amer. Math. Soc. 1950(中译本: S. 柏格曼, 核函数和共形映照,科学出版社,1958).

[2] Фукс, Б. А. Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных, М. 1963(英译本: Fuks, B. A., Special chapters in the theory of analytic functions of several complex variables, Amer. Math. Soc., 1965).

[3] Шабат, Б. В., Введение в комплексный анализ, М., 1969.

Е. М. Чирка 撰

【补注】 最近发现了 Bergman 核函数的另外一些性质. 对一大类具有 C^∞ 边界的伪凸域(pseudo-convex domains),包括强伪凸域和有限型域(domains of finite type). 在 $D\times D$ 上的核函数 $K(z,w)$ 当 w 在 D 中保持固定时它对 z 光滑到边界.这是关于 D 上复 Laplace 算子 (complex Laplacian) 的 Neumann 算子(Neumann operator) N 的紧致性和恒等式

$$P=I-\bar{\partial}^* N\bar{\partial}$$

的结果. 这里 P 是 Bergman 射影(Bergman projection), 即由对 K 积分给出的 $L_2(D)$ 到 $L_{2,h}(D)$ 上的正交射影; $\bar{\partial}$ 是 Cauchy-Riemann 算子(Cauchy-Riemann operator), $\bar{\partial}^*$ 是它的 Hilbert 空间伴随算子(Hilbert space adjoint operator). 事实上,对于这些区域 P 满足所谓"条件 R"(condition R), 即 P 将 $L_{2,s+2}(D)$ 连续映入 $L_{2,s}(D)$, 其中 $L_{2,k}(D)$ 是 k 阶 **Соболев 空间** (Sobolev space). Bergman 核函数的这个性质可以用来研究真全纯映射(proper holomorphic mappings)和双全纯映射(biholomorphic mappings)(见[A2],[A4],[A5]). 而且,$K(z,w)$ 的渐近性质已被研究; 对严格伪凸域 D, 有

$$K(z,w)=F(z,w)\ (i\psi(z,w))^{-n-1}+\\ +G(z,w)\log(i\psi(z,w)),$$

其中 F, G 和 ψ 是 $\bar{D}\times\bar{D}$ 上的 C^∞ 函数, 而 ψ 满足

a) $\psi(z,z)=\rho(z)/i$, 这里 ρ 是 D 的一严格多重次调和定义函数(strictly-plurisubharmonic, defining function);

b) $\bar{\partial}_z\psi$ 和 $\bar{\partial}_w\psi$ 在 $z=w$ 无穷阶为零; 且

c) $\psi(z,w)=-\overline{\psi(w,z)}$.

对某些弱伪凸域也得到了类似的结果, 见[A1], [A3], [A4].

对其他区域的 Bergman 核函数也已被研究,例如 Cartan 域(见[A6])和 **Siegel 域** (Siegel domain) (见[A7]).

参考文献

[A1] Boutet de Monvel, L. and Sjöstrand, J., Sur la singularité des noyaux de Bergman et de Szegö, *Astérisque*, **34-35** (1976), 123-164.

[A2] Catlin, D., Global regularity of the $\bar{\partial}$-Neumann problem, in Proc. Symp. Pure Math., Vol 41. Amer. Math. Soc., 1984, 39-49.

[A3] Diederich, K., Herbort, G. and Ohsawa, T., The Bergman kernel on uniformly extendable pseudo-convex domains, *Math. Ann.*, **273** (1986), 471-478.

[A4] Fefferman, C., The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudo-convex domains, *Invet. Math.*, **37**(1974), 1-65.

[A5] Range, R. M., Holomorphic functions and integral representations in Several complex variables, Springer, 1986, Chapt. 7.

[A6] 华罗庚,多复变数函数论中典型域的调和分析,科学出版社, 1958(英译本: Hua, L. K., Harmonic analysis of functions of several complex variables in the classical domains, Amer. Math. Soc., 1963).

[A7] Gindikin, S. G., Analysis on homogeneous domains, *Russian Math. Surveys*, **19** (1964), 1-89. (*Uspekhi Mat. Nauk*, **19** (1964), 3-92).

【译注】 关于 Bergman 核函数的性质亦见[B1],[B2].

参考文献

[B1] 陆启铿,多复变函数引论,科学出版社,1961.

[B2] 钟同德、黄沙, 多元复分析, 河北教育出版社, 1990.

钟同德 译

Bergman-Weil 表示 [Bergman-Weil representation; Бергмана-Вейля представление], Bergman-Weil 公式(Bergman-Weil formula), Weil 公式(Weil formula)

一个全纯函数的积分表示公式,它是由 S. Bergman ([1])和 A. Weil([2])得到的, 其定义如下. 命 D 为 $\mathbf{C}^n$ 中的一全纯域, 函数 $W_1,\cdots,W_j$ 在 D 中全纯并命 $V=\{z\in D:|W_k(z)|<1,\ k=1,\cdots,N\}$ 紧致地属于 D, 于是可将任何在 V 内全纯在 $\bar{V}$ 上连续的函数 f 在任一点 $z\in V$ 用公式

$$f(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\sum\int\frac{f(\zeta)\det(P_{ij_k})}{\prod_{k=1}^{n}(W_{j_k}(\zeta)-W_{j_k}(z))}d\zeta \qquad (*)$$

表示. 其中求和是对所有 $j_1<\cdots<j_n$ 进行,而积分是对适当定向的 n 维曲面 $\sigma_{j_1\cdots j_n}$ 进行,这些曲面构成了区域 V 的骨架(见**解析多面体** (analytic polyhedron)), $d\zeta=d\zeta_1\wedge\cdots\wedge d\zeta_n$. 这里函数 $P_{ij}(\zeta,z)$ 在区域 $D\times D$ 内全纯并按 Hefer 引理(Hefer's lemma) ([3])由方程

$$W_j(\zeta)-W_j(z)=\sum_{i=1}^{n}(\zeta_i-z_i)P_{ij}(\zeta,z)$$

所确定. 积分表示(*)称为 Bergman-Weil 表示(Bergman-Weil representation).

在 Bergman - Weil 表示中出现的区域 V 称为 Weil 域 (Weil domain);通常需附加一个条件,即矩阵 $\left(\frac{\partial W_{j_\nu}}{\partial z_\mu}\right)$ $(\nu=1,\cdots,k,\mu=1,\cdots,2,k\leqslant n)$ 的秩在对应的集合

$$\{z\in\overline{V}:|W_{j_1}|=\cdots=|W_{j_k}|=1\}$$

上对所有 $j_1<\cdots<j_k$ 是极大的 $(=k)$ (这样的 Weil 域称为正则的 (regular)). 在 Bergman - Weil 表示中的 Weil 区域可用紧致地属于 D 的解析多面体

$$U=\{z\in D:W_j(z)\in D_j,\ j=1,\ldots,N\}$$

来代替,其中 D_j 是平面 $\mathbf{C}$ 上具有逐块光滑边界 ∂D_j 的有界域. 用 Bergman - Weil 表示可由全纯函数 f 在骨架 σ 上的值来确定 f 在解析多面体 U 内部的值; 当 $n>1$ 时, σ 的维数严格低于 ∂U 的维数. 如果 $n=1$, 解析多面体退化为一具有光滑边界的区域, 这时骨架和边界一致、并且, 如果 $N=1$ 和 $W(z)=z$, 那么 Bergman - Weil 表示和 Cauchy 积分公式一致.

Bergman - Weil 表示的一个重要性质是它的核关于 z 是全纯的. 因此, 如果全纯函数 f 用一个在 σ 上可积的任意函数代替, 那么 Weil 表示的右边给出一函数, 它在 U 中处处全纯而在 $D\setminus\partial U$ 中几乎处处全纯; 这样的函数称为 Bergman - Weil 型积分 (integral of Bergman-Weil type). 如果 f 在 U 内全纯且在 $\overline{U}$ 上连续, 那么它的 Bergman - Weil 型积分在 $D\setminus\overline{U}$ 上几乎处处为零.

在 Weil 区域 V 上的 Bergman - Weil 表示经过代换

$$(W_{j_k}(\zeta)-W_{j_k}(z))^{-1}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{W_{j_k}^{\nu}(z)}{W_{j_k}^{\nu+1}(\zeta)}$$

后得到 Weil 分解 (Weil decomposition)

$$f(z)=$$

$$=\sum_{s_k\geqslant 0}\sum_{j_1<\cdots<j_k}Q_{j_1\cdots j_k s_1\cdots s_k}(z)(W_{j_1}^{s_1}(z)\cdots W_{j_k}^{s_k}(z))$$

它是在 D 中全纯的函数级数, 且这级数在 V 的任一紧子集上一致收敛.

参考文献

[1] Bergman, S. B., *Mat. Sb.*, **1(43)** (1936), 242–257.

[2] Weil, A., l'Intégrale de Cauchy et des fonctions de plusieurs variables, *Math. Ann.*, **111** (1935), 178–182.

[3] Владимиров, В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964 (英译本: Vladimirov, V. S., Methods of the theory of functions of several complex variables, M. I. T., 1966).

Е. М. Чирка 撰

【补注】

参考文献

[A1] Henkin, G. M. and Leiterer, J., Theory of functions on complex manifolds, Birkhäuser, 1983.

钟同德 译

Bernoulli 自同构 [Bernoulli automorphism; Бернулли автоморфизм]

测度空间上描述 **Bernoulli 试验** (Bernoulli trials) 及其推广的一种自同构. 所谓 Bernoulli 试验, 是指一列具有相同结果以及相同概率分布的相互独立的试验.

设 A 为试验可能出现的结果的全体, 又设事件 $B\subset A$ 出现的概率为测度 ν; 在 A 为可数集的情形, 用 a_i 表示它的元素, $p_i=\nu(a_i)$ 表示它的概率. 一个 Bernoulli 自同构的相空间就是集 A 中可数个样本的直积, 也就是说, 相空间的点是形如 $b=\{b_k\}$ 的序列, 其中 $b_k\in A$, 而 k 跑遍整数集. 变换 T 将每个序列中的元向左位移一位: $T\{b_k\}=\{b_{k+1}\}$, 测度 μ 定义为可数个测度 ν 的直积; 因此, 如果 A 为可数集, 则

$$\mu\{b:b_{i_1}=a_{j_1},\ldots,b_{i_k}=a_{j_k}\}=p_{j_1}\cdots p_{j_k}$$

此时、Bernoulli 自同构的熵 (entropy) 等于 $-\sum p_i\log p_i$.

Bernoulli 自同构 (或更确切地说, 由它们的迭代所生成的级联) 在遍历理论中常起着动力系统中具有统计特性的标准例子的作用. 一个 Bernoulli 自同构必为 K 自同构, 但存在这样的 K 自同构, 它们并不度量同构于 Bernoulli 自同构, 虽然已经知道有许多 K 自同构是与 Bernoulli 自同构度量同构的. 两个 Bernoulli 自同构为度量同构, 当且仅当它们有相同的熵 ([1]). 一个 Bernoulli 自同构必定是具有较大熵的 Lebesgue 空间的任一遍历自同构的商自同构 ([2]).

参考文献

[1A] Ornstein, D., Bernoulli shifts with the same entropy are isomorphic, *Adv. Math.*, **4** (1970), 337–352.

[1B] Ornstein, D., A Kolmogorov automorphism that is not a Bernoulli shift., *Matematika*, **15** (1971), 1, 131–150.

[2] Синай, Я. Г., 《Матем. сб.》, **63** (1964), 1, 23–42.

Д. В. Аносов 撰

【补注】 两个 Bernoulli 自同构的度量同构可以用有限码来表达 ([A1], 也见 [A2]).

参考文献

[A1] Keane, M. and Smorodinsky, M., Bernoulli schemes with the same entropy are finitarily isomorphic, *Ann. of Math.*, **109** (1979), 397–406.

[A2] Smorodinsky, M., Ergodic theory, entropy, Springer, 1971.

[A3] Ornstein, D., Ergodic theory, randomness, and dynamical systems, Yale Univ. Press, 1974.

[A4] Cornfeld, I. P., Fomin, S. V. and Sinai, Ya. G., Ergodic theory, Springer, 1982 (译自俄文).

王斯雷 译

Bernoulli 分布 [Bernoulli distribution; Бернулли распре-

деление]

同二项分布 (binomial distribution).

Bernoulli 方程 [Bernoulli equation ; Бернулли уравнение]

一阶常微分方程

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = f(x)y^{\alpha},$$

其中 α 是不等于 0 或 1 的实数. 这个方程首先是由 J. Bernoulli 研究的([1]). 经代换 $y^{1-\alpha}=z$, 可将 Bernoulli 方程化为一阶线性非齐次方程([2]). 如果 $\alpha>0$, 则 Bernoulli 方程的解是 $y\equiv 0$; 如果 $0<\alpha<1$, 则在某些点上, 方程的解不再是单值的. 考虑形如

$$[f(y)x + g(y)x^{\alpha}]y' = h(y), \quad \alpha\neq 0, 1,$$

的方程, 如果把其中的 y 看成自变量, 把 x 看成 y 的未知函数, 则此方程也是 Bernoulli 方程.

参考文献

[1] Bernoulli, J., *Acta Erud.*, 1695, 59–67, 537–557.

[2] Kamke, E., Differentialgleichungen; Lösungsmethoden und Lösungen, 1, Chelsea, reprint, 1971 (中译本: E. 卡姆克, 常微分方程手册, 科学出版社, 1977).

Н. Х. Розов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Ince, W. L., Ordinary differential equations, Dover, reprint, 1956.

张鸿林 译

Bernoulli 积分 [Bernoulli integral ; Бернулли интеграл], 流体动力学方程的

根据理想均匀流体或正压气体 ($p=F(\rho)$) 的定常流动的每一点上的流动速度 $\mathbf{v}$ 和单位质量的彻体力函数 $u(x, y, z)$, 确定此流动同一点上压力 p 的积分, 其形式为

$$\int\frac{dp}{\rho} = C - \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 + u. \qquad (1)$$

对于每一条流线常数 C 有特定值, 从一条流线到另一条流线其值发生变化.

对于不定常流动, 当存在速度势时, Bernoulli 积分 (有时称为 Cauchy - Lagrange 积分 (Cauchy - Lagrange integral)) 成立:

$$\int\frac{dp}{\rho} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 + u + f(t), \qquad (2)$$

式中

$$\mathbf{v} = \nabla\varphi(x, y, z, t),$$

$f(t)$ 是时间的任意函数.

对于不可压缩流体, 方程 (1), (2) 的左边化为 p/ρ 形式; 对于正压气体 ($p=F(\rho)$) 则化为如下形式:

$$\int\frac{dp}{\rho} = \int F'(\rho)\frac{d\rho}{\rho}.$$

这一积分是 D. Bernoulli 于 1738 年提出的.

参考文献

[1] Milne - Thomson, L. M., Theoretical hydrodynamics, Macmillan, 1950 (中译本: L. M. 米尔恩 - 汤姆森, 理论流体动力学, 机械工业出版社, 1984).

Л. Н. Сретенский 撰 晏名文 译

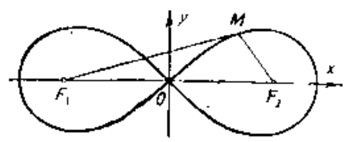
Bernoulli 双纽线 [Bernoulli lemniscate ; Бернулли лемниската]

四次平面代数曲线, 其方程为: 在直角 Descartes 坐标系中,

$$(x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2) = 0;$$

在极坐标系中

$$\rho^2 = 2a^2\cos 2\varphi.$$



Bernoulli 双纽线关于坐标原点是对称的 (见图), 坐标原点是具有切线 $y=\pm x$ 的结点和拐点. 曲率半径为 $r=2a^2/3\rho$. 每个回线围成的面积为 $S=a^2$. 从 Bernoulli 双纽线上任何一点 M 到给定的两点 $F_1(-a, 0)$ 和 $F_2(a, 0)$ 的距离之积, 等于点 F_1 和 F_2 之间的距离的平方. Bernoulli 双纽线是 **Cassini 卵形线** (Cassini oval)、**双纽线** (lemniscates) 和**正弦螺线** (sinusoidal spiral) 的特殊情况.

Bernoulli 双纽线因 Jakob Bernoulli 而得名, 他在 1694 年给出这条曲线的方程.

参考文献

[1] Савелов, А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Brieskorn, E. and Knörrer, H., Plane algebraic curves, Birkhäuser, 1986 (译自德文).

张鸿林 译

Bernoulli 法 [Bernoulli method ; Бернулли метод]

求如下类型的代数方程

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \qquad (*)$$

具最大模 (绝对值) 的实根的方法. 这个方法是 D. Bernoulli ([1]) 提出的, 它基于以下原理. 设 $y(0), \cdots, y(n-1)$ 是任意给定的数, $y(n)$, $y(n-1)$, $\cdots$ 的值由差分方程

$$a_0y(m+n)+a_1y(m+n-1)+\cdots+a_ny(m)=0$$

计算．一般来说，当 $m\to\infty$ 时，表示式 $y(m+1)/y(m)$ 就趋向于方程(*)的具最大模的根．

参考文献

[1] Bernoulli, D., *Comm. Acad. Sci. Imper. Petropolitanae*, **3** (1732), 62–69, Petropolis.

[2] Уиттекер, Э., Робинсон, Г., Математическая обработка результатов наблюдений, Л.-М., 1935 (译自德文).

Л. Н. Довбыш 撰

【补注】 表示式 $y(m+1)/y(m)$ 趋向于具最大模的根，仅当这个根是单根，并且没有其他的根具有同样的最大模．否则进行如下（见[A1]）．设 x_p 为具有最大模的 p 重根(不必是实的)．则当 $m\to\infty$ 时，关于 $y(m)$ 的线性差分方程的解是

$$y(m)\approx\sum_{j=0}^{p-1}C_j\begin{bmatrix}p\\j\end{bmatrix}x_p^m.$$

这个表示式是以 $(x-x_p)^p$ 为特征多项式的线性差分方程的解，以致当 $m\to\infty$ 时，$y(m)$ 满足线性差分方程

$$y(m)\approx\sum_{j=0}^{p-1}x_p^j\begin{bmatrix}p\\j\end{bmatrix}y(m-j),\qquad\text{(A1)}$$

如果 $p\leqslant 2$，则这个方程关于 x_p 可以显式求解，否则用 $m-1,m-2,\cdots$ 代替 m，重写(A1)，对 x_p，$x_p^2,\cdots$ 求解即得方程．

如果有两个具有同样最大模的根 x_p 和 x_q（重数分别是 p 和 q），则当 $m\to\infty$ 时，$y(m)$ 满足特征多项式是 $(x-x_p)^p(x-x_q)^q$ 的线性差分方程，(A1)必须用对应的 $p+q$ 阶差分方程代替．

参考文献

[A1] Hildebrand, F., Introduction to numerical analysis, McGraw-Hill, 1956.

郭祥东 译

Bernoulli 数 [Bernoulli numbers; Бернулли числа]

J. Bernoulli 在计算自然数同次幂之和

$$\sum_{k=0}^{m-1}k^n=\frac{1}{n+1}\sum_{s=0}^{n}\begin{pmatrix}n\\s\end{pmatrix}B_sm^{n+1-s}$$

$$n=0,1,\ldots,\quad m=1,2,\ldots$$

时发现的有理数序列 B_0, B_1, B_2, $\cdots$([1])．前几个 Bernoulli 数的值是

$$B_0=1,\ B_1=-\frac{1}{2},\ B_2=\frac{1}{6},\ B_3=0,$$

$$B_4=-\frac{1}{30},\ B_5=0,\ B_6=\frac{1}{42},\ B_7=0,$$

$$B_8=-\frac{1}{30},\ B_9=0,\ B_{10}=\frac{5}{66},\ B_{11}=0.$$

一切奇指标的 Bernoulli 数，除了 B_1 以外，都是零，B_{2n} 的符号交替变化．Bernoulli 数是 **Bernoulli 多项式**(Bernoulli polynomials) 当 $x=0$ 时的值：$B_n=B_n(0)$；它们也常常作为某些初等函数的幂级数展开式的系数．例如

$$\frac{x}{e^x-1}=\sum_{\nu=0}^{\infty}B_\nu\frac{x^\nu}{\nu!},\quad |x|<2\pi$$

(所谓 Bernoulli 数的生成函数)；

$$x\operatorname{cotg}x=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu B_{2\nu}\frac{2^{2\nu}}{(2\nu)!}x^{2\nu},\quad |x|<\pi,$$

$$\operatorname{tg}x=\sum_{\nu=1}^{\infty}|B_{2\nu}|\frac{2^{2\nu}(2^{2\nu}-1)}{(2\nu)!}x^{2\nu},\quad |x|<\frac{\pi}{2}.$$

L. Euler 于 1740 年指出了 Bernoulli 数与 Riemann ζ 函数 $\zeta(s)$ 对应偶数 $s=2m$ 的值之间的关系：

$$\zeta(2m)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^{-2m}=\frac{(2\pi)^{2m}}{2(2m)!}|B_{2m}|.$$

Bernoulli 数可以用来表示许多广义积分，例如

$$\int_0^\infty\frac{x^{2n-1}dx}{e^{2\pi x}-1}=\frac{1}{4n}|B_{2n}|,\quad n=1,2,\ldots.$$

有关 Bernoulli 数的一些关系式为：

$$B_0=1,\ \sum_{k=0}^{n-1}\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}B_k=0,\ n\geqslant 2$$

(递推公式)；

$$B_{2n}=(-1)^{n-1}4n\int_0^\infty\frac{x^{2n-1}}{e^{2\pi x}-1}dx,\quad n\geqslant 1;$$

$$B_{2n}=(-1)^{n-1}\frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s^{2n}},\quad n\geqslant 1.$$

估计式为

$$\frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}}<(-1)^{n-1}B_{2n}\leqslant\frac{\pi^2(2n)!}{3(2\pi)^{2n}},\quad n\geqslant 1.$$

关于 Bernoulli 数已有大量数表，例如[2]包含了对于 $n\leqslant 90$ 的 B_{2n} 的精确值，和对于 $n\leqslant 250$ 的近似值．

Bernoulli 数已被广泛应用于数学分析、数论和近似计算等许多方面．

参考文献

[1] Bernoulli, J., Ars conjectandi, Basle, 1713.

[2] Bavis, H. T., Tablas of the higher mathematical functions, 2, Bloomington, 1935.

[3] Saalschuetz, L., Vorlesungen über die Bernoullischen Zahlen, Berlin, 1893.

[4] Чистяков, И. И., Бернуллиевы числа, М., 1895.

[5] Nielsen, N., Traité élémentaire de nombres de Bernoulli, Paris, 1923.

[6] Кудрявцев, В. А., Суммирование степеней чисел натурального ряда и числа Бернулли, М.-Л., 1936.

[7] Nörlung, N. E., Vorlesungen über Differenzenrechnung, Berlin, 1924.

[8] Гельфонд, А. О., Исчисление конечных разностей, 3 изд., М. 1967.

[9] Hardy, G. H., Divergent series, Clarendon, 1949.

Ю. Н. Субботин 撰

【补注】Bernoulli 数在割圆域理论和 Fermat 最后定理中起着重要作用，见[A1], pp.40－41，和[A2]. 例如，如果 p 是不能整除 $B_2, B_4, \cdots, B_{p-3}$ 的分子的奇素数，则 $x^p+y^p=z^p$ 不存在解 $x, y, z \in \mathbf{N}$. (亦见**分圆域** (cyclotomic field)；**Fermat 大定理** (Fermat great theorem)).

参考文献

[A1] Lang, S., Cyclotomic fields, Springer, 1978.

[A2] Ribenboim, P., Thirteen lectures on Fermat's last theorem, Springer, 1979.

张鸿林 译

Bernoulli 多项式 [Bernoulli polynomials; Бернулли многочлены]

多项式

$$B_n(x) = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} B_s x^{n-s} \quad (n=0, 1, \ldots),$$

其中 B_s 是 **Bernoulli 数** (Bernoulli numbers). 例如，对于 $n=0, 1, 2, 3$, 有

$$B_0(x) = 1, \quad B_1(x) = x-\frac{1}{2}, \quad B_2(x) = x^2-x+\frac{1}{6},$$

$$B_3(x) = x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x.$$

Bernoulli 多项式可以按下列递推公式来计算:

$$\sum_{s=0}^{n-1} \binom{n}{s} B_s(x) = nx^{n-1}, \quad n=2, 3, \ldots.$$

J. Bernoulli 于 1713 年为了计算和

$$\sum_{k=0}^{m} k^n$$

最先研究了自变量 x 取自然数 $(x=m)$ 的 Bernoulli 多项式. L. Euler 最先研究了 x 取任意值的 Bernoulli 多项式([1]). "Bernoulli 多项式"这个名称是 J. L. Raabe 于 1851 年引入的. 这种多项式的基本性质是，它们满足有限差分方程

$$B_n(x+1)-B_n(x) = nx^{n-1},$$

因此，它们在有限差分法中所起的作用与幂函数在微分法中所起的作用是相同的.

Bernoulli 多项式属于 **Appell 多项式** (Appell polynomials) 的类型，也就是说，它们满足条件

$$B_n'(x) = nB_{n-1}(x)$$

并且同 **Euler 多项式** (Euler polynomials)

$$E_{n-1}(x) = \frac{2}{n}\left[B_n(x)-2^n B_n\left(\frac{x}{2}\right)\right].$$

有着密切的联系.

Bernoulli 多项式的生成函数是

$$\frac{te^{tx}}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} t^n.$$

Bernoulli 多项式可以展开为 **Fourier 级数** (Fourier series)：对于 $n=1$,

$$B_1(x) = x-\frac{1}{2} = -\sum_{s=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi sx}{s\pi}, \quad 0<x<1,$$

对于 $n=2, 3, \cdots$,

$$B_n(x) = -2n!\sum_{s=1}^{\infty} \frac{\cos\left(2\pi sx-\frac{n\pi}{2}\right)}{(2\pi s)^n}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Bernoulli 多项式满足下列关系式:

$$B_n(mx) = m^{n-1}\sum_{s=0}^{m-1} B_n\left(x+\frac{s}{m}\right)$$

(乘法定理);

$$B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$$

(互补定理);

$$B_n(x+y) = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} B_s(y) x^{n-s}$$

(自变量加法定理).

Bernoulli 多项式可用来表示 **Euler-MacLaurin 公式** (Euler-MacLaurin formula) 的余项，和用于函数的级数展开. Bernoulli 数的许多重要性质都是 Bernoulli 多项式的性质的结果. Bernoulli 多项式可用于可微周期函数的积分表示:

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_k(t) f^{(k-1)}(x+\pi-t)\,dt,$$

$$\varphi_k(t) = \frac{2^{k-1}\pi^k}{k!} B_k\left(\frac{\pi+t}{2\pi}\right),$$

并且在这种函数的三角多项式逼近或其他逼近的理论中起着重要的作用，见 **Favard 问题** (Favard problem).

已经提出 Bernoulli 多项式的各种推广. N. E.

Nörlund 引入了 ν 阶 n 次广义 Bernoulli 多项式：

$$B_n^{(\nu)}(x\mid\omega) = B_n^{(\nu)}(x\mid\omega_1,\ldots,\omega_\nu)$$

(以前，B. Г. Имшенецкий, Н. Я. Сонин 和 Д. М. Синцов 曾考虑过这种多项式的某些特殊情况)．设

$$\Delta_\omega f(x) = \frac{f(x+\omega)-f(x)}{\omega}$$

和

$$B_n^{(0)}(x\mid\omega) = x^n,\quad n=0,1,\ldots;$$

则 $B_n^{(\nu)}(x\mid\omega)$ 作为下述有限差分方程的 n 次多项式解而依次确定：

$$\Delta_{\omega_\nu} B_n^{(0)}(x\mid\omega_1,\ldots,\omega_\nu) = nB_{n-1}^{(\nu-1)}(x\mid\omega_1,\ldots,\omega_{\nu-1}),$$

$\nu=1, 2, \cdots$, 具有初始条件

$$B_n^{(\nu)}(0\mid\omega_1,\ldots,\omega_\nu) = B_n^{(\nu)}[\omega_1,\ldots,\omega_\nu],$$

其中 $B_n^{(\nu)}[\omega_1,\cdots,\omega_\nu]$ (广义 Bernoulli 数) 可由下列递推关系式求出：

$$\sum_{s=1}^{n}\binom{n}{s}\omega_\nu^s B_{n-s}^{(\nu)} = \omega_\nu^n B_{n-1}^{(\nu-1)}$$

$(B_n^{(1)}[\omega_1] = \omega_1^n B_n,\ B_0^{(\nu)} = 1,\ B_n^{(0)} = 0,\ B_0^{(\nu)} = 1)$.

参考文献

[1] Euler, L., Institutiones calculi differentialis, Teubner, 1980.

[2] Nörlund, N. E., Vorlesungen über Differenzenrechnung, Berlin, 1942.

[3] Bateman, H. and Erdélyi, A., Higher transcendental functions. The Gamma function. The hypergeometric function. Legendre functions, Vol. 1, McGraw-Hill, 1953 (中译本：A. 爱尔台里等编，高级超越函数，第一册，上海科学技术出版社，1957).

[4] Лихин, В. В., В сб.: Историко-математические исследования, в. 12, М., 1959, 59–134.

Ю. Н. Субботин 撰　张鸿林 译

Bernoulli 随机游动 [Bernoulli random walk; Бернулли блуждание]

由 **Bernoulli 试验** (Bernoulli trials) 生成的**随机游动** (random walk). Bernoulli 随机游动的例子可以用来解释更一般的随机游动的某些基本特性. 甚至在这种最简单的概型中还表现出一些与直观相悖的“随机”性质.

Bernoulli 随机游动可以用如下术语来描述：一个质点沿着 x 轴在格点 kh (k 是整数, $h>0$) 上随机地运动，运动从时刻 $t=0$ 开始，只记录在离散时刻 $0, \Delta t, 2\Delta t, \cdots$ 质点的位置．质点每一步的坐标值分别以概率 p 或 $q=1-p$ 增长或减少一个量 h，而且这种增减与以前的运动状况无关．因此，向正方向或负方向的位移(“成功”或“失败”)可用一个成功概率为 p 的 Bernoulli 试验概型来描述．Bernoulli 随机游动通常的几何表述为：取 t 轴作为横坐标，x 轴作为纵坐标(见图 1，它表示从零点开始运动的质点的随机游动的图象的初始片段)．

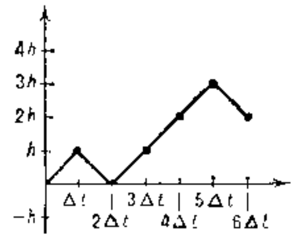


图 1．进行 Bernoulli 随机游动的质点运动的图象的初始片段．

设 X_j 表示质点在第 j 步的位移，则 $X_1, X_2, \cdots$ 是独立随机变量序列．随机运动着的质点在时刻 $n\Delta t$ 的坐标等于 $S_n=X_1+\cdots+X_n$. 因此，Bernoulli 随机游动的图象是随机变量的累积和的性态的直观表示．此外，起伏的许多典型的特性对更一般的随机变量和也保持．图 1 还可表示在古典输光问题中赌徒手中赌本的变化情况(寻求 Bernoulli 随机游动中许多事件的概率的公式正是同这一问题相联系的)．

在物理中，Bernoulli 随机游动用于一维**扩散过程** (diffusion process) 和在分子碰撞下质点的 **Brown 运动** (Brownian motion) 的粗糙描述．

与 Bernoulli 随机游动有关的重要事实叙述如下(这时假定 $\Delta t=1$, $h=1$)：

返回概率 (probabilities of returning)：设游动从零开始，至少有一次回到零的概率是 $1-|p-q|$，即在 $p=q=1/2$ 的对称情形是 1，而在 $p\neq q$ 时小于 1. 在对称情形，量 τ_1 (第一次回到零时所经历的时间) 和 τ_2 (第一次和第二次回到零之间的时间) 等等是具有无穷的数学期望的独立随机变量．到第 N 次返回零时所经历的时间，即 $\tau_1+\cdots+\tau_N$，同 N^2 一样增长；而在 $2n$ 步中返回零的次数 N_{2n} 的平均值由公式

$$\mathrm{E}(N_{2n}) = \frac{2n+1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} - 1$$

给出，它与 $\sqrt{n}$ 增长速度相同：

$$\mathrm{E}(N_{2n}) \sim 2\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}.$$

结论是直观所想象不到的：在对称 Bernoulli 随机游动中，在图上接连两次返回零的时间间隔长得惊人(图 2)．

与此有关的另一个特征是 Σ/n (图形在横轴之上的时间与总时间的比)的最小可能值接近于 1/2. 更精确地

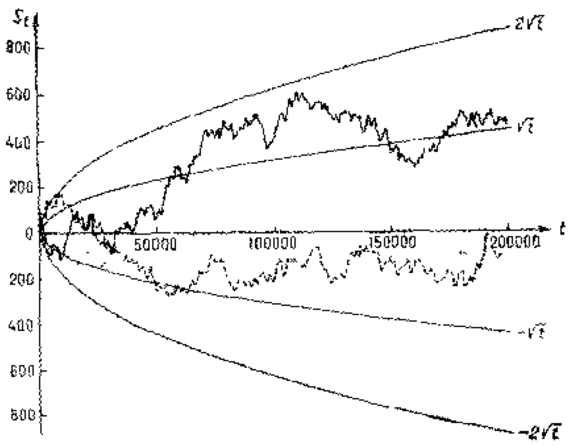


图 2. 三个 Bernoulli 随机游动的图象，每一个观察了 200 000 个单位时间.

说，下述定理成立：当 $k\to\infty$, $n-k\to\infty$ 时，公式

$$p_{2n,2k}\sim\frac{1}{\pi n\sqrt{x(1-x)}}$$

给出了等式 $T_{2n}=2k$ 成立的概率 $p_{2n,2k}$，其中 $x=x_{n,k}=k/n$. 一个称为**反正弦律** (arcsine law) 的推论是：对每一 $0<\alpha<1$，不等式 $T_n/n<\alpha$ 成立的概率趋向于

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\alpha}\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\alpha}.$$

从这一事实出发可以证明，10 000 步之中质点以 $\geqslant 0.1$ 的概率有多于 9 930 个单位时间处于横轴之上. 粗略地说，观察到这种图形的频繁程度不小于在十个当中取其一. 初看起来，这似乎是荒谬的.

最大偏差 (maximum deviation)：如果 $p>q$ 或 $p<q$，则随机游动的质点将以概率 1 移向 $+\infty$ 或 $-\infty$. 因此，如果 $p<q$，可定义随机变量

$$M^{+}=\max_{0\leqslant j<\infty}S_j,$$

则 $M^{+}=x$ 的概率是

$$\left(1-\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p}{q}\right)^{x}.$$

具有边界的 Bernoulli 随机游动：人们常考虑具有吸收壁或反射壁的随机游动. 例如，设游动从零开始，在 a 点存在一个吸收壁是指当到达该点时质点停止运动. 在点 $a=(k+1/2)$ ($k\geqslant 0$ 是一整数)，存在一个反射壁是指当质点到达 k 时以概率 q 从 k 到 $k-1$，以概率 p 保持在 k 处. 在计算吸收概率和到达指定点的概率时，有限差分方程是主要的工具. 例如，设吸收壁位于点 $-a$ ($a>0$) 处，若 $z_{t,x}$ 是在时刻 t 位于 x 处的质点在时刻 n 或 n 以前被吸收的概率，则下述方程成立：

$$z_{t,x}=qz_{t+1,x-1}+pz_{t+1,x+1},\quad x>-a,$$

其边界条件显然是

$$z_{t,-a}=1,\quad 0\leqslant t\leqslant n,$$

$$z_{n,x}=0,\quad x>-a.$$

在 $p=q=1/2$ 的情形，这个问题的解由 A. de Moivre 和 P. Laplace 发现. **Laplace 公式** (Laplace formula) 是：

$$z_{t,x}=1-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(a+x)\varphi}{\sin\varphi}(\cos\varphi)^{\nu}\,d\varphi,\qquad (*)$$

其中

$$\nu=a+x+2\left[\frac{n-t-x-a}{2}\right]+1.$$

向扩散过程 (diffusion processes) **的转化**. 作为一个例子，设 $p=q=1/2$, $\Delta t=1/N$, $h=1/\sqrt{N}$，则 Bernoulli 随机游动要计算的许多概率，当 $N\to\infty$ 时，其极限等于 Brown 运动中相应的概率. 例如，考虑从零开始的一个质点在 T 时刻或 T 时刻以前到达位于点 $-\alpha$ 处的壁的概率. 对 $n/N=T$, $t=0$, $a/\sqrt{N}=\alpha$ 由公式 (*) 取极限得到

$$1-\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\alpha/\sqrt{T}}e^{-z^2/2}\,dz=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha/\sqrt{T}}^{\infty}e^{-z^2/2}\,dz.$$

它等于进行 Brown 运动的质点的坐标 $X(v)$ 满足不等式

$$\min_{0\leqslant v\leqslant T}X(v)\leqslant-\alpha$$

的概率，亦即质点在壁 $-\alpha$ 被吸收的概率. 为了比较完全地描述这类极限关系，采用一般的观点并考虑从累积和的离散过程过渡到连续随机过程是适宜的（见**极限定理** (limit theorems)）.

Bernoulli 随机游动概型在解释随机变量和的特征性态，诸如**强大数律** (strong law of large numbers) 和**重对数律** (law of the iterated logarithm) 时是非常有用的.

参考文献

[1] Feller, W., An introduction to probability theory and its applications, 1, Wiley 1957 – 1971, Chapt. 3, 14 (中译本：W. 费勒，概率论及其应用，科学出版社，上册，1964；下册，1979).

Ю. В. Прохоров 撰 刘秀芳 译

Bernoulli 方案 [Bernoulli scheme; Бернулли схема]

同 **Bernoulli 试验** (Bernoulli trials).

Bernoulli 定理 [Bernoulli theorem; Бернулли теорема]

(弱) **大数律** (law of large numbers) 在历史上

的原始形式. 这个定理出现在 Jakob Bernoulli 的《猜度术》(Ars conjectandi) 一书的第四部分. 这一部分可以看作概率论的最初的严格研究. 本书于 1713 年由 Nikolaus Bernoulli (Jakob 之侄)出版. 这个定理讨论独立试验序列(见 **Bernoulli 试验** (Bernoulli trials)), 在其每次试验中某事件("成功")出现的概率等于 p. 设 n 是试验的次数, m 是一随机变量, 它等于成功事件出现的次数. Bernoulli 定理是说: 给定不论多么小的正数 ε 和 η, 对于一切足够大的 n $(n>n_0)$, 不等式

$$-\varepsilon \leqslant \frac{m}{n}-p \leqslant \varepsilon$$

的概率 P 将大于 $1-\eta$. 这个定理的证明是 Jakob Bernoulli 给出的, 而且仅仅基于对二项分布中当偏离最大可能值时概率减小这一特性的研究; 伴随定理的证明有一个不等式, 在给定 ε 和 η 后, 它可能给出上述 η_0 的某一上界. 例如, Bernoulli 求出: 如果 $p=2/5$, 则当 $n \geqslant 25\,550$ 时, 不等式

$$-\frac{1}{50} \leqslant \frac{m}{n}-\frac{2}{5} \leqslant \frac{1}{50}$$

的概率大于 0.999. 对 Jacob Bernoulli 原来的推理稍作一些改进, 便可得知: 只要选取满足条件

$$n > \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon^2}\log\frac{1}{\eta}+\frac{1}{\varepsilon}$$

的 n 值就足够了, 由此还可进一步对不等式

$$\left|\frac{m}{n}-p\right| > \varepsilon$$

的概率 $1-P$ 给出形如

$$2\exp\left\{-\frac{1}{2}n\varepsilon^2\right\}$$

的估计值. 对于上面所举的例子得到的条件是 $n \geqslant 17\,665$ (更精确的估计表明, 只要取 $n \geqslant 6\,502$ 就足够了; 为了进行比较, 可以指出: de Moivre - Laplace 定理给出 6 498 作为 n_0 的近似值). 利用 **Бернштейн 不等式** (Bernshtein inequality) 及其类似的结果, 可以得到 $1-P$ 的另一些估计. (亦见**二项分布** (binomial distribution).)

参考文献

[1] Bernoulli, J., Ars conjectandi, Vol. 4, Basle, 1713.

[2] Марков, А. А., Исчисление вероятностей, 4 изд., М., 1924.

[3] Бернштейн, С. Н., Теория вероятностей, 4 изд., М.-Л., 1946.

Ю. В. Прохоров 撰 张鸿林 译 蒋正新 校

Bernoulli 试验 [Bernoulli trials; Бернулли испытания]

这样的独立试验: 每次试验只有两个结果("成功"和"失败"), 且其结果的概率在各次试验中是不变的. Bernoulli 试验是概率论所考虑的基本方案之一.

设 p 是成功的概率, $q=1-p$ 是失败的概率, 并且设 1 表示出现成功, 0 表示出现失败. 这时, 一个给定的成功或失败事件序列, 例如

$$1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ \cdots\ 1$$

出现的概率等于

$$p\,q\,q\,p\,p\,q\,p\,q\ \cdots\ p = p^m q^{n-m},$$

其中 m 是所考虑的 n 次试验序列中成功事件出现的次数. 许多经常出现的概率分布都与 Bernoulli 试验方案有关. 设 S_n 是一个随机变量, 它等于 n 次 Bernoulli 试验中出现成功的次数. 这时, 事件 $\{S_n=k\}$ 的概率是

$$\binom{n}{k}p^k q^{n-k},\quad k=0,\ldots,n,$$

也就是说, S_n 具有**二项分布** (binomial distribution). 当 $n\to\infty$ 时, 这个分布可以用**正态分布** (normal distribution) 或 **Poisson 分布** (Poisson distribution) 来近似. 设 Y_1 是首次出现成功以前所进行的试验的次数. 这时, 事件 $\{Y_1=k\}$ 的概率等于

$$q^k p,\quad k=0,1,\ldots,$$

也就是说, Y_1 具有**几何分布** (geometric distribution). 设 Y_r 是第 r 次出现成功以前出现失败的次数, 则 Y_r 具有所谓**负二项分布** (negative binomial distribution). 在 n 次 Bernoulli 试验中成功的次数 S_n 可以表示为独立随机变量之和 $X_1+X_2+X_n$, 其中如果第 j 次试验出现成功, 则 $X_j=1$, 反之, 则 $X_j=0$. 这就说明为什么概率论中许多关于独立随机变量之和的重要定律最初都是针对 Bernoulli 试验方案确立的 (见 **Bernoulli 定理** (Bernoulli theorem) ((弱) **大数律** (law of large numbers)); **强大数律** (strong law of large numbers); **迭对数律** (law of the interated logarithem); **中心极限定理** (central limit theorem); 等).

为了对 Bernoulli 试验的无穷序列进行严格的研究, 要求在由 0 和 1 组成的无穷序列的空间中引入**概率测度** (probability measure). 这可以直接进行, 也可以利用下面就 $p=q=1/2$ 的情况说明的方法来进行. 设 ω 是在具有均匀分布的区间 $(0,1)$ 上任意选取的一个数, 并且设

$$\omega = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{X_j(\omega)}{2^j}$$

是 ω 按二进位分式的展开式. 这时, X_j $(j=1,2,\cdots)$ 是独立的, 且以概率 1/2 分别取值 0 和 1, 也就是说, 在这个 ω 的展开式中的 0 和 1 的序列是由 $p=1/2$ 的 Bernoulli 试验方案来描述的. 但是, 也可适当给出 $(0,1)$ 上的测度, 以得到具有任何 p 的 Bernoulli 试验 (当 $p\neq 1/2$

时得到测度相对 Lebesgue 测度是奇异的).

常常用几何方法来处理 Bernoulli 试验 (见 **Bernoulli 随机游动** (Bernoulli random walk)). 在概率论发展的初期,为了解决破产问题,计算了与 Bernoulli 试验有关的一系列随机事件的概率.

参考文献

[1] Гнеденко, Б. В., Курс теории вероятностей, 5 изд., М., 1969(中译本:Б. В. 格涅坚科, 概率论教程, 高等教育出版社, 1955).

[2] Feller, W., An introduction to probability theory and its applications, 1-2 Wiley, 1957-1971(中译本: W. 费勒,概率论及其应用,科学出版社, 1964, 1979).

[3] Kac, M., Statistical independence in probability, analysis and number theory, Math. Assoc. Amer., 1963.

A. B. Прохоров 撰 张鸿林 译

Бернштейн 不等式 [Bernstein inequality; Бернштейна неравенство]

1) 概率论中的 Бернштейн 不等式是比 **Чебышев 不等式(概率论中的)** (Chebyshev inequality (in probability theory)) 更精确的公式, 1911 年由 С. Н. Бернштейн 提出([1]), 它使我们能用一单调递减指数函数来估计**大偏差的概率** (probability of large deviations). 事实上,若独立随机变量 $X_1, \cdots, X_n$ 满足

$$\mathrm{E}X_j = 0, \ \mathrm{E}X_j^2 = b_j, \ j=1, \ldots, n,$$

$$\mathrm{E}|X_j|^l \leqslant \frac{b_j}{2} H^{l-2} l!$$

(其中 $l>2$, H 是与 j 无关的常数)则对和 $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ 下述 Бернштейн 不等式成立:

$$\mathrm{P}\{|S_n| > r\} \leqslant 2\exp\left\{-\frac{r^2}{2(B_n + Hr)}\right\}, \qquad (1)$$

其中 $r>0$, $B_n = \sum b_j$. 对同分布有界随机变量 X_j($\mathrm{E}X_j = 0$, $\mathrm{E}X_j^2 = \sigma^2$ 且 $|X_j| \leqslant L$ $(j=1, \cdots, n)$) 不等式 (1) 取其最简单的形式:

$$\mathrm{P}\{|S_n| > t\sigma\sqrt{n}\} \leqslant 2\exp\left\{-\frac{t^2}{2(1+a/3)}\right\}, \qquad (2)$$

其中 $a = Lt/\sqrt{n}\sigma$. А. Н. Колмогоров 对(1)中的概率给出一个下界估计. 特别地, Бернштейн - Колмогоров 估计用在**重对数律** (law of the iterated logarithm) 的证明中. 关于(2)的准确度,可以通过与由**中心极限定理** (central limit theorem) 给出的(2)的左端的近似值

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_t^\infty e^{-u^2/2}\,du = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\,t}\left[1 - \frac{\theta}{t^2}\right]e^{-t^2/2},$$

进行比较而得到, 其中 $0<\theta<1$. 1967 年以后, Бернштейн 不等式被推广到多维和无穷维情形.

参考文献

[1] Бернштейн, С. Н., Теория вероятностей, 4 изд., М.-Л., 1946.

[2] Kolmogorov, A. N., Ueber das Gesetz des iterierten Logarithmus, *Math. Ann.*, **101** (1929), 126-135.

[3] Hoeffding, W., Probability inequalities for sums of independent random variables, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **58** (1963), 13-30.

[4] Юринский, В. В., 《Теория вероят. и ее примен.》, **15** (1970), 1, 106-107.

A. B. Прохоров 撰

2) **关于三角多项式或代数多项式的导数的 Бернштейн 不等式**. 根据多项式本身给出其导数的估计. 若 $T_n(x)$ 是阶数不超过 n 的三角多项式且

$$M = \max_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} |T_n(x)|,$$

则下述不等式对一切 x 成立(见 [1]):

$$|T_n^{(r)}(x)| \leqslant Mn^r, \ r=1, 2, \ldots.$$

这些估计不能改进,因为对于

$$T_n(x) = \cos n(x - x_0),$$

$M=1$, 而

$$\max_x |T_n^{(r)}(x)| = n^r.$$

三角多项式的 Бернштейн 不等式是下述定理的特殊情形([2]): 如果 $f(x)$ 是阶数 $\leqslant \sigma$ 的整函数且

$$M = \sup_{-\infty < x < \infty} |f(x)|,$$

则有

$$\sup_{-\infty < x < \infty} |f^{(r)}(x)| \leqslant M\sigma^r \ (r=1, 2, \ldots).$$

关于代数多项式的 Бернштейн 不等式具有下述形式([1]): 如果多项式

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

满足条件

$$|P_n(x)| \leqslant M, \ a \leqslant x \leqslant b,$$

则其导数 $P_n'(x)$ 具有性质

$$|P_n'(x)| \leqslant \frac{Mn}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}, \ a<x<b.$$

这一估计不能再改进. 正如 С. Н. Бернштейн 指出, 这个不等式是由 А. А. Марков 给出的 **Марков 不等式** (Markov inequality) 证明的一个推论(见 [1]).

Бернштейн 不等式在函数逼近论中用于证明逆定

理. Бернштейн 不等式有许多推广,特别是关于多变量整函数的.

参考文献

[1] Bernstein, S. N. (Bernshtein, S. N.), sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynômes, *Acad. R. Belgique, Cl. Sci. Mém. Coll.* 4. *Sér.* II, **4** (1922).

[2] Bernstein, S. N. (Bernshtein, S. N.), Sur une propriété des fonctions entieres, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **176** (1923), 1603 – 1605.

[3] Никольский, С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М., 1969 (英译本: Nikol'skiĭ, S. M., Approximation of functions of several variables and imbedding theorems, Springer, 1975).

Н. П. Корнейчук, В. П. Моторный 撰

【补注】

参考文献

[A1] Natanson, I. P., Constructive theory to functions, 1–3, Ungar, 1964 – 1965 (译自俄文).

[A2] Lorentz, G. G., Approximation of functions, Holt, Rinehart and Winston, 1966.

刘秀芳 译

Бернштейн 插值法 [**Bernshtein interpolation method**; **Бернштейна интерпоряционный процесс**]

在区间 $[-1,1]$ 上一致收敛于函数 $f(x)$ 的代数多项式序列,$f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上是连续的. 更确切地说, Бернштейн插值法指的是代数多项式序列

$$P_n(f;x) = \frac{\sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)} T_n(x)}{T_n(x_k^{(n)})(x - x_k^{(n)})}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

其中

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

是 **Чебышев 多项式** (Chebyshev polynomials);

$$x_k^{(n)} = \cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right]$$

是插值结点;而如果 $k \neq 2ls$, l 是任意正整数, $n = 2lq + r$, $q \geqslant 1$, $0 \leqslant r < 2l$, $s = 1, \cdots, q$, 则

$$A_k^{(n)} = f(x_k^{(n)});$$

否则

$$A_{2ls}^{(n)} = \sum_{i=0}^{l-1} f(x_{2l(s-1)+2i+1}^{(n)}) - \sum_{i=1}^{l-1} f(x_{2l(s-1)+2i}^{(n)}).$$

多项式 $P_n(f;x)$ 的次数与使得 $P_n(f;x)$ 等于 $f(x)$ 的那些点的个数之比是 $(n-1)/(n-q)$, 当 $n \to \infty$ 时, 它趋向于 $2l/(2l-1)$; 如果 l 足够大, 则这个极限任意接近 1. 这种插值法是 С. Н. Бернштейн 于 1931 年提出的 ([1]).

参考文献

[1] Бернштейн, С. Н., в кн.: Собр. соч., т. 2, М., 1954, 130 – 140.

П. П. Коровкин 撰

【补注】 这种插值法在西方似乎不很熟悉. 但是, 有一种对于 $[0,1]$ 上的有界函数采用特殊的插值结点 $k/n(k=0,\cdots,n)$ 的众所周知的 Bernshtein 法. 这种方法是通过 **Бернштейн 多项式** (Bernshtein polynomials) 给出的. 对于 $[0,1]$ 上的有界函数 $f(x)$ 构造的 Бернштейн 多项式序列 $B_n(f;x)$ 在 $f(x)$ 的每个连续点 $x \in [0,1]$ 上收敛于 $f(x)$. 如果 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上是连续的, 则这个序列在 $[0,1]$ 上一致收敛(于 $f(x)$). 如果 $f(x)$ 是可微的, 则(在 $f(x)$ 的每个连续点上) $B_n'(f;x) \to f'(x)$, 见[A1].

这种 Бернштейн 法常常用来证明(关于逼近的) **Weierstrass 定理** (Weierstrass theorem). 关于这种方法的推广(单调算子定理 (monotoneoperator theorem)), 见[A2], 第 3 章, 第 3 节. 也可参阅**函数逼近线性方法** (approximation of functions, linear methods).

参考文献

[A1] Davis, P. J., Interpolation and approximation, Dover, reprint, 1975.

[A2] Cheney, E. W., Introduction to approximation theory, Chelsea, reprint, 1982.

张鸿林 译

Бернштейн 法 [**Bernstein method**; **Бернштейна метод**]

辅助函数法 (method of auxiliary functions)

线性和非线性偏微分方程理论中采用的一种方法. Бернштейн 法在于引入某个依赖于所求解的新的(辅助)函数, 使得有可能建立所需要的解的各阶导数的最大模的先验估计.

应用 Бернштейн 法的一个简单例子是获得非线性(拟线性)椭圆型方程 Dirichlet 问题

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \equiv \\ &\equiv a\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + c\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \\ &+ 2d\frac{\partial z}{\partial x} + 2e\frac{\partial z}{\partial y} + g, \text{在圆盘} D \text{中}, \\ &z|_C = 0, \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

解的导数的最大模的先验估计, 其中 a, b, c, d, e, g 是 x, y, z 的光滑函数, C 是圆周, 是半径为 R 的圆域的边界 (假定 D 是圆域以及 $z|_C = 0$ 是不重要的, 因为对于任意单连通区域以及非齐次边界条件的一般情形容易通过一个函数变换以及区域的保角变换化为这里所考虑的情形).

如果 $f_z' \geqslant 0$, 则由最大值原理立即得到问题 (*) 的

解的最大模估计 n,

$$n = \max_{(x,y)\in D\cup C} |z(x,y)|.$$

为了证明(*)有一个正则(光滑)解,只需有解的直到三阶导数的最大模的先验估计(见连续方法 (continuation method)).为估计 $\max_C|\partial z/\partial x|$ 和 $\max_C|\partial z/\partial y|$,只要估计 $\max_C|\partial z/\partial \rho|$ 就够了(因为 $z|_C=0$),其中 ρ,θ 是圆域的极坐标.现在引入由公式

$$z = \varphi_1(u) = -n-\alpha+\alpha\ln u,$$

给出的新的(辅助)函数 u,其中 $\alpha>0$ 将在后面选定.函数 $u=u(x,y)$ 在同一个方向上像 $z(x,y)$ $(-n\leqslant z\leqslant n)$ 一样从 e 变化到 $e^{(2n+\alpha)/\alpha}$.因为

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\alpha}{u}\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\alpha}{u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\alpha}{u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2.$$

还有关于 y 的导数的类似的结果,由此得到 u 满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{u}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]+$$

$$+\frac{\alpha}{u}\left[a\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2b\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+c\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]+$$

$$+2d\frac{\partial u}{\partial x}+2e\frac{\partial u}{\partial y}+g\frac{u}{\alpha} \equiv Q.$$

设 M 是 $|a|,|b|,|c|$ 在 D 中的上界,又设 $\alpha=1/(8M)$.如果把 $\partial u/\partial x$ 和 $\partial u/\partial y$ 看作是平面上的流动坐标,而把 x,y,z 看作参数,则方程 $Q=0$ 是一个椭圆的方程,这是因为行列式 $a_1c_1-b_1^2>3/(4u^2)$,其中

$$a_1 = \frac{1}{u}\left(1+\frac{a}{8M}\right),\ b_1 = \frac{b}{8Mu},\ c_1 = \frac{1}{u}\left(1+\frac{c}{8M}\right).$$

因此,对任何 $\partial u/\partial x$ 和 $\partial u/\partial y$,Q 不可能小于某个负数 $-P$,即 $Q\geqslant -P$(容易得到数 P 的显式表示式).如果引入由公式

$$u_1 = u+\frac{P}{4}(x^2+y^2)$$

表示的函数 u_1,就得到

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = Q+P\geqslant 0.$$

从而 u_1 在区域 D 的边界 C 上达到其最大值,又因 u_1 在 C 上是常数,所以在 C 上有

$$\frac{\partial u_1}{\partial \rho}\geqslant 0 \quad 和 \quad \frac{\partial u}{\partial \rho}\geqslant -\frac{1}{2}PR,$$

其中 R 是圆周 C 的半径.由此有可能求得 $\partial z/\partial\rho$ 的一个负下界

$$\frac{\partial z}{\partial \rho} = \frac{\alpha}{u}\frac{\partial u}{\partial \rho}\geqslant -\frac{\alpha PR}{2e^{(2n+\alpha)/\alpha}}.$$

如果同样的推理用于第二个辅助函数 u,

$$z = \varphi_2(u) = -n-\alpha+\alpha\ln\frac{1}{1-u},$$

就可得到一个上界估计

$$\frac{\partial z}{\partial \rho}\leqslant \frac{\alpha P_1R}{2}e^{(n+\alpha)/\alpha}.$$

于是,估出了 $\max_C|\partial z/\partial\rho|$,这就是说也估计出了 $\max_C|\partial z/\partial x|$ 和 $\max_C|\partial z/\partial y|$.一阶导数在区域 D 内的最大模估计可用类似的方式得到:引入一个由公式

$$z = \varphi_3(u) = -n+\alpha\ln\ln u$$

给出的辅助函数 u.像 z 一样函数 u 在同样的方向上从 e 变到 $e^{e^{2n/\alpha}}$.由于(*),可写下 u 的表达式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{u\ln u}\left[(1+\ln u+\alpha a)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\right.$$

$$\left.+2ab\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+(1+\ln u+\alpha c)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]$$

$$+2d\frac{\partial u}{\partial x}+2e\frac{\partial u}{\partial y}+g\frac{u\ln u}{\alpha} \equiv Q_1.$$

和前面类似的做法证明了,如果函数

$$w = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

在区域 D 内取到最大值,则该最大值不超过某个数,其值只依赖于 n 和 M.这就给出了所需要的估计 $\max_D|\partial z/\partial x|$ 和 $\max_D|\partial z/\partial y|$.

Бернштейн 方法也可以一种类似的方式用来估计解的所有最高阶导数在区域 $D\cup C$ 上的最大模(只需对原来方程作微商运算).

这个方法首先是由 С. Н. Бернштейн 在 [1] 中应用的.该方法逐渐得到推广并系统地应用于研究椭圆和抛物型微分算子的各种问题([3],[4],[5]).

参考文献

[1A] Bernstein, S. N., Sur la généralisation du problème de Dirichlet (première partie), *Math. Ann.*, **62** (1906), 253–271.

[1B] Bernstein, S. N., Sur la généralisation du problème de Dirichlet (deuxième partie), *Math. Ann.*, **69** (1910), 82–136.

[2] Бернштейн, С. Н., Собр. соч. т. 3, М., 1960.

[3] Ладыженская, О. А., Уральцева, Н. Н., Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, М.,

1964（中译本：О. А. 拉迪任斯卡娅，Н Н. 乌拉利采娃，线性和拟线性椭圆型方程，科学出版社，1987）.

[4] Погорелов, А. В., Изгибание выпуклых поверхностей, М.-Л., 1951.

[5] Олейник, О. А., Кружков, С. Н., 《Успехи матем. наук》, 16(1961), 5, 115–155.

И. А. Шишмарёв 撰 叶其孝 译

Бернштейн 多项式 [Bernshtein polynomials; Бернштейна многочлены]

由下列公式定义的代数多项式：

$$B_n(f;x) = B_n(x) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}, \quad n=1,2,\ldots$$

是 С. Н. Бернштейн 于1912年引入的（见[1]）. Бернштейн 多项式序列在区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上一致收敛于函数 $f(x)$，如果 $f(x)$ 在这个区间上是连续的. 对于在点 $C\ (0<C<1)$ 处有界且具有第一类间断性的函数，有

$$B_n(f;C)\to\frac{f(C_-)+f(C_+)}{2}.$$

如果函数 $f(x)$ 在点 c 处二次可微，则等式

$$B_n(f;c)-f(c) = \frac{f''(c)c(1-c)}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

成立. 如果函数 $f(x)$ 的 k 阶导数 $f^{(k)}(x)$ 在区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上是连续的，则在这个区间上一致地有

$$B_n^{(k)}(f;x)\to f^{(k)}(x).$$

如果 $f(x)$ 在区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上是解析的，则对 Бернштейн 多项式在复平面上的收敛性也进行过研究（[1]，т. 2, с.310, [5]）.

参考文献

[1] Бернштейн, С. Н., Собр. соч., т. 1, М., 1952, 105–106; т. 2, М., 1954, 310–348.

[2] Гончаров, В. Л., Теория интерполирования и приближения функций, 2 изд., М., 1954.

[3] Баскаков, В. А., 《Докл. АН СССР》, 113(1957), 2, 249–251.

[4] Коровкин, П. П., Линейные операторы и теория приближений, М., 1959, 117–124（英译本：Korovkin, P. P., Linear operators and approximation theory, Hindushtan Publ. Comp., Delhi, 1960）.

[5] Канторович, Л. В., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, 1931, 8, 1103–1115.

П. П. Коровкин 撰

【补注】 还有多变量情况的推广：广义 Бернштейн 多项式由完全类似的公式

$$B_n(f,x_1,\cdots,x_k)=$$
$$=\sum_{i_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{i_k=0}^{n_k} f\left(\frac{i_1}{n_1},\cdots,\frac{i_k}{n_k}\right)\binom{n_1}{i_1}\cdots\binom{n_k}{i_k}\times$$
$$\times\ x_1^{i_1}(1-x_1)^{n_1-i_1}\cdots x_k^{i_k}(1-x_k)^{n_k-i_k}.$$

来定义. 这里 n 表示多重指标 $n=(n_1,\cdots,n_k)$.

正如在单变量情况那样，这些给出了多变量 Weierstrass 逼近的显式多项式逼近，以及 Stone-Weierstrass 定理. 关于复平面上 Бернштейн 多项式的性质，以及对运动问题的应用，亦见[A3].

参考文献

[A1] Davis, P. J., Interpolation and approximation, Dover, reprint, 1975, 108–126.

[A2] Rivlin, Th. J., An introduction to the approximation of functions, Dover, reprint, 1981.

[A3] Lorentz, G. G., Bernstein polynomials, Univ. of Toronto Press, 1953.

张鸿林 译

Бернштейн-Rogosinski 求和法 [Bernshtein-Rogosinski summation; Бернштейна-Рогозинского метод суммирования]

Fourier 级数求和法之一；记为 (BR,α_n). 三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\equiv\sum_{k=0}^{\infty}A_k(x) \quad (*)$$

在点 x_0 上按 Бернштейн-Rogosinski 法是可和的，其和为数 S，如果下列条件成立：

$$\lim_{n\to\infty}B_n(x_0;\alpha_n)\equiv\lim_{n\to\infty}\frac{S_n(x_0+\alpha_n)+S_n(x_0-\alpha_n)}{2} =$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}A_k(x_0)\cos k\alpha_n = S,$$

其中 $\{\alpha_n\}$ $(\alpha_n>0,\alpha_n\to 0)$ 是一个数列，$S_n(x)$ 是级数 $(*)$ 的部分和.

W. Rogosinski（[1]）首先（1924）研究了 $\alpha_n=p\pi/2n$（其中 p 为奇数）的情况，后来（1925）又研究了一般情况，С. Н. Бернштейн（S. N. Bernstein, [2], 1930）研究了 $\alpha_n=\pi/(2n+1)$ 的情况. 在 $\alpha_n=p\pi/2n$ 和 $\alpha_n=\pi/(2n+1)$ 的情况下，可以应用 (BR,α_n) 法求函数 $f\in L[0,2\pi]$ 的 Fourier 级数之和，在这个函数的连续点上得到它的值，这种方法是**正则求和法**（regular summation methods）之一.

Бернштейн-Rogosinski 和 $B_n(x,\alpha_n)$ 可以用作为一种逼近过程. 在上述两种情况下，它们能够实现与 Lip α 类和 W^1Lip α 类函数的最佳逼近具有同样阶数的逼近.

参考文献

[1] Rogosinski, W. W., Ueber die Abschnitte trigonometis-

cher Reihen, *Math. Ann.*, **95** (1925), 110–134.

[2] Бернштейн, С. Н., Собр. соч., т. 1, М., 1952, 523–525.

[3] Hardy, G. H., Divergent series, Clarendon, 1949.

A. A. Захаров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Beekmann, W. and Zeller, K., Theorie der Limitierungsverfahren, Springer, 1970.

张鸿林 译

Бернштейн定理[Bernstein theorem; Бернштейна теорема], 极小曲面的

若极小曲面F由方程$z=f(x, y)$给出，其中f关于一切实的x和y均有一阶和二阶偏导数，则F是平面．这个定理属于С.Н.Бернштейн(S. N. Bernshtein, [1])，它的证明是关于非正曲率曲面性态的一个更一般定理的结果．Бернштейн定理有各种各样的推广，大体上有下列三种类型：1) 定量地改进；例如得到这样的先验估计：$|K(0)|\leqslant$常数$/R^2$，其中R是极小曲面$z=f(x,y)$上圆盘的半径，$K(0)$是曲面在圆盘中心的Gauss曲率．2) 寻找其他的先验几何条件，使得在这种条件下，极小曲面将是一类特殊曲面——平面、悬链面等；例如，若完全极小曲面的球面象不包含球面上的一个开集，则此极小曲面为平面．3) Бернштейн定理在n维Euclid空间E^n的k维极小曲面F^k上的推广；例如，若$k=n-1$，则当$n\leqslant 8$时，所有E^{n-1}上的任何极小曲面唯一确定，并且是超平面，而当$n>8$时，存在着非平面的极小曲面；若$k<n-1$，则对于$n\geqslant 4$可找到定义在所有E^k上的非线性极小曲面F^k．

参考文献

[1] Bernstein, S. N. (S. N. Bernshtein), Über ein geometrisches Theorem und seine Anwendung auf die partiellen Differentialgleichungen vom elliptischen Typus, *Math. Z.*, **26** (1927), 551–558 (译自法文).

[2] Nitsche, J. C. C., Vorlesungen über Minimalflächen, Springer, 1975.

[3] Osserman, R., Minimal varieties, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **75** (1969), 1092–1120.

[4] Osserman, R., A survey of minimal surfaces, v. Nostrand, 1969.

[5] Fomenko, A. T., Plateau's problem, Gordon and Breach, 1987 (译自俄文).

И. Х. Сабитов 撰

【补注】 Bombieri - de Giorgi - Giusti 的文章[A1]是一篇关于Bernstein定理推广的重要参考文献．[1]的原文是[A2]．

参考文献

[A1] Bombieri, E., Giorgi, E. de and Giusti, E., Minimal cones and the Bernstein theorem, *Invent. Math.*, **7** (1969), 243–269.

[A2] Bernstein, S. N., Sur une théorème de géometrie et ses applications aux équations dérivées partielles du type elliptique, *Comm. Soc. Math. Kharkov*, **15** (1915–1917), 38–45.

【译注】 关于Бернштейн定理的第2种推广，所举的例子原是L. Nirenberg的一个猜想，1958年被R. Osserman证得([B1])．这方面的最佳结果是由H. Fujimoto得到的([B2])：若E^3中完全极小曲面F的Gauss象不取球面上5个点的值，则F是平面．与此相关的定量形式(Бернштейн定理的第1种推广)，可见[B3]．

参考文献

[B1] Osserman, R., Proof of a conjecture of Nirenberg, *Comm. Pure Appl. Math.*, **12** (1959), 229–232.

[B2] Fujimoto, H., On the number of exceptional value of the Gauss map of minimal surfaces, *J. Math. Soc. Japan*, **40** (1988), 235–247.

[B3] Fujimoto, H., Modified defect relations for the Gauss map of minimal surfaces, Ⅰ; Ⅱ, *J. Diff. Geom.*, **29** (1989), 245–262; **31** (1990), 365–385.

沈一兵 译

Berry - Esseen 不等式[Berry - Esseen iniquality; Бэрри-Эссеена неравенство]

给出独立随机变量和的分布函数与正态分布函数之偏差的估计的不等式．设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是独立同分布的随机变量且满足

$$\mathsf{E}X_j=0,\ \mathsf{E}X_j^2=\sigma^2>0,\ \mathsf{E}|X_j|^3<\infty.$$

令

$$\rho=\frac{\mathsf{E}|X_j|^3}{\sigma^3}$$

和

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}\,dt;$$

则对任意n，

$$\sup_x\left|\mathsf{P}\left\{\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}X_j\leqslant x\right\}-\Phi(x)\right|\leqslant A\frac{\rho}{\sqrt{n}},$$

其中A是一正的常数．这一结果由A. C. Berry([1])和C. G. Esseen([2])独立地得到．

参考文献

[1] Berry, A. C., The accuracy of the Gaussian approximation to the sum of independent variables, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **49** (1941), 122–136.

[2] Esseen, C. G., On the Liapunoff limit of error in the theory of probability, *Ark. Mat. Astr. Fysik*, **28A** (1942), 2, 1–19.

[3] Петров, В. В., Суммы независимых случайных величин,

M., 1972 (英译本: Petrov, V. V., Sums of independent random variables, Springer, 1975).

B. B. Петров 撰

【补注】 常数 A 可取作 3, 见 [A1], 514 页.

参考文献

[A1] Feller, W., An Introduction to probability theory and its applications, 2, Wiley, 1971.

刘秀芳 译

Bertini 定理 [Bertini theorems; Бертини теоремы]

属于 E. Bertini ([1]) 的关于代数簇上线性系 (linear system) 性质的两个定理.

设 V 是特征 0 的代数闭域 k 上的代数簇, L 是 V 上无固定分支的线性系, W 是簇 V 在 L 所给出的映射下的象. 以下两个定理就分别第一和第二称为 Bertini 定理.

1) 若 $\dim W>1$, 则线性系 L 的几乎所有的除子 (即除去参量空间 $P(L)$ 中一个真闭子集外) 都是不可约约化代数簇.

2) 除去线性系 L 的基点以及簇 V 的奇点外, L 的几乎所有的除子都没有奇点.

当域的特征不是 0 时, 两个 Bertini 定理都无效.

当域的特征有限时, 在怎样的条件下 Bertini 定理有效已在 [3], [6] 中研究过. 当 $\dim W=1$ 时, Bertini 定理被以下定理代替: 如果在嵌入 $\varphi_L^*: k(W)\to k(V)$ 之下函数域 $k(W)$ 在域 $k(V)$ 中是代数闭的, 那么映射 $\varphi_L: V\to W$ 的几乎所有的纤维都是不可约且约化的. 如果 k 的特征有限, 当扩张 $k(V)/k(W)$ 可分时相应定理正确 ([3], [6]). 当 Bertini 定理被应用于超平面截口的线性系时, 对域的特征没有限制 ([5]).

参考文献

[1] Bertini, E., Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi, 2 ed., Messina, 1923.

[2] Алгебраические поверхности, М., 1965.

[3] Baldassarri, M., Algebraic varieties, Springer, 1956.

[4] Akizuki, Y., Theorems of Bertini on linear systems, *J. Math. Soc. Japan*, **3** (1951), 1, 170-180.

[5] Nakai, Y., Note on the intersection of an algebraic variety with the generic hyperplane, *Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto Ser. A Math.*, **26** (1950), 2, 185-187.

[6] Zariski, O., The theorem of Bertini on the variable singular points of a linear system of varieties, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **56** (1944), 130-140.

[7] Hartshorne, R., Algebraic geometry, Springer, 1977.

B. A. Исковских 撰 陈志杰 译

Bertrand 准则 [Bertrand criterion; Бертрана признак]

数项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

的收敛性判别准则. 如果

$$B_n=\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right]\ln n$$

并且极限 (有限的或无限的)

$$B=\lim_{n\to\infty} B_n$$

存在, 则当 $B>1$ 时级数 (*) 收敛, 当 $B<1$ 时发散, 是由 J. Bertrand 证明的.

参考文献

[1] Фихтенгольц, Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2, 7 изд., М., 1970 (中译本: Г. М. 菲赫金哥尔茨, 微积分学教程, 人民教育出版社, 1962).

Л. Д. Кудрявцев 撰 张鸿林 译

Bertrand 曲线 [Bertrand curves; Бертрана кривых], 共轭曲线 (conjugate curves), Bertrand 对 (Bertrand pair)

具有公共主法线的两条空间曲线 L 和 L^*. 设 k_1 和 k_2 分别为 L 的曲率和挠率. 为使曲线 L 和 L^* 是共轭的, 其必要和充分条件是

$$ak_1\sin\omega+ak_2\cos\omega=\sin\omega$$

成立. 这里, a 是常数, ω 是 L 和 L^* 的切向量之间的夹角. 如果对于曲线 L, 存在共轭曲线 L^*, 则曲线 L 也称为 Bertrand 曲线. J. Bertrand 于 1850 年研究过这些曲线.

E. B. Шикин 撰

【补注】 Bertrand 的原始文章是 [A2]. 一般文献是 [A1].

参考文献

[A1] Blaschke, W. and Leichtweiss, K., Elementare Differentialgeometrie, Springer, 1973.

[A2] Bertrand, J., Mémoire sur la théorie des courbes à double courbure, *Liouvilles Journal*, **15** (1850).

张鸿林 译

Bertrand 悖论 [Bertrand paradox; Бертрана парадокс], 概率论中的

概率论中解问题时同初始假设的不准确陈述相联系的悖论. 由 J. Bertrand 指出 ([1]). Bertrand 问题 (Bertrand problem) 涉及下述事件的概率: 从一个半径为 1 的圆盘中随机地选取一根弦, 其长度大于内接等边三角形的边. Bertrand 依赖刻画该弦位置的参数找出了这一未知概率的三个不同的值 (1/2, 1/3, 1/4). (第一种情形, 利用到圆心的距离 ρ 和弦的法向同 x 轴的夹角 θ; 第二种利用弦和圆周两个交点的角坐标 α 和 β; 第三种利用从圆心所引垂线的垂足的 Descartes 坐标 (x, y). 在所有三种情形中, 坐标原点都与圆盘的中心重合.) H. Poincaré ([2]) 指出悖论的根源在于, 无论三种

情形中的哪一种，都假定各自的一对参数均匀地分布在给定的区域里，因此事实上三个不同的问题都被解出．如果某一对参数(例如 α 和 β)的分布固定，所有其他参数的分布可以唯一地算出(且不必是均匀分布，即使 α 和 β 是均匀分布)．从几何的观点，最自然的假设是：ρ 和 θ 独立且在区间 $0\leqslant\rho\leqslant1, 0\leqslant\theta\leqslant2\pi$ 中均匀分布(见[3])．

参考文献

[1] Bertrand, J. L., Calcul des probabilités, Gauthier-Villars, 1907.

[2] Poincaré, H., Calcul des probabilités, Gauthier - Villars, 1912.

[3] Kendall, M. G. and Moran, P. A. P., Geometric probability, Griffin, 1963. А. В. Прохоров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Székely, G. G., Paradoxes in probability theory and mathematical statistics, Reidel, 1986, 43 – 48.

陈培德 译

Bertrand 假设 [Bertrand postulate; Бертрана постулат]

对于任何自然数 $n>3$，存在大于 n、小于 $2n-2$ 的一个**素数** (prime number)．Bertrand 假设的较弱的表述是：对于任何 $x>1$，在区间 $(x,2x)$ 中存在一个素数．这个假设是 J. Bertrand 于 1845 年依赖表列数据提出，而由 П. Л. Чебышев 证明的(**Чебышев 定理(关于素数的)** (Chebyshev theorems (on prime numbers))．

参考文献

[1] Чебышев, П. Л., Полн. собр. соч., т. 1, М - Л, 1946. Б. М. Бредихин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hardy, G. H. and Wright, E. M., An introduction to the theory of numbers, Clarendon Press, 1965, p. 343ff.

张鸿林 译

Besicovitch 殆周期函数 [Besicovitch almost - periodic functions; Безиковича почти периодические функции]

一类殆周期函数 (B^p - a.p.)，在其中一个与 Riesz - Fischer 定理类似的定理成立：任意一个满足条件

$$\sum_n |a_n|^2 < \infty$$

的三角级数

$$\sum_n a_n e^{i\lambda_n x}$$

必是某个 B^2 殆周期函数的 Fourier 级数．这类函数的定义([1],[2])以**殆周期** (almost - period) 概念的推广为基础，而且必须引进某些附加的概念．实数集 E 称为充分齐性的，如果存在数 $L>0$，使得 E 的元素落在长度为 L 的区间中的最多个数与落在长度也是 L 的区间中的最少个数之比小于 2．充分齐性集也是相对稠密的．在实轴的任意有限区间上 p 次幂可积的复值函数 $f(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ 称为 Besicovitch 殆周期函数，如果对任意 $\varepsilon>0$，相应有一个充分齐性的数集(所谓函数 $f(x)$ 的 (B^p,ε) 殆周期)：

$$\cdots<\tau_{-2}<\tau_{-1}<\tau_0<\tau_1<\cdots,$$

使得对每一个 i 有

$$\overline{M}_x\{|f(x+\tau_i)-f(x)|^p\}<\varepsilon^p,$$

并且对任意 $c>0$ 有

$$\overline{M}_x\overline{M}_i\frac{1}{c}\int_x^{x+c}|f(\xi+\tau_i)-f(x)|^p\,d\xi<\varepsilon,$$

其中，

$$\overline{M}_x\{F(x)\}=\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}F(x)\,dx,$$

$$\overline{M}_i\{F(i)\}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{2n+1}\sum_{i=-n}^{n}F(i).$$

这里的 $F(x)$ 是一个实值函数，分别对实变量及整数变量定义．

参考文献

[1] Besicovitch, A. S., On mean values of functions of a complex and of a real variable, *Proc. London Math Soc.* (2), **27**(1927), 373 – 388.

[2] Besicovitch, A. S., On Parseval's theorem for Dirichlet series, *Proc. London Math. Soc.*(2), **26**(1927), 25 – 34.

[3] Левитан, Б. М., Почти - периодические функции, М., 1953 (中译本：Б. М. 列维坦，概周期函数，高等教育出版社，1956)． Е. А. Бредихина 撰

【补注】 与其说 Besicovitch 是在[1]和[2]中还不如说是在[A1]中提出了他的理论．

正是在这篇文章中隐含了，对每一个 $p\geqslant1$ 存在一类殆周期函数，记为 B^p．文章的第一部分讨论 B^2，其余部分讨论更一般的情形．比较全面的参考文献见**殆周期函数** (almost - periodic function)．

参考文献

[A1] Besicovitch, A.S., On generalized almost periodic functions, *Proc. London Math. Soc.* (2), **25** (1926), 495 – 512.

朱学贤 译 潘文杰 校

Bessel 方程 [Bessel equation; Бесселя уравнение]

二阶线性常微分方程

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0,\quad \nu=\text{常数},\qquad(1)$$

或自伴形式(self-adjoint form):

$$(xy')'+\left[x-\frac{\nu^2}{x}\right]y=0.$$

数 ν 称为 Bessel 方程的阶(order);在一般情况下,x,y 和 ν 都取复数值,经过代换 $y=ux^{-1/2}$,可以得到方程(1)的约化形式(reduced form):

$$u''+\left[1+\frac{1-4\nu^2}{4x^2}\right]u=0. \qquad (2)$$

Bessel 方程是**汇合型超几何方程**(confluent hypergeometric equation);如果把 $x=z/2i$ 代入方程(2),则方程(2)化为 **Whittaker 方程**(Whittaker equation).在方程(1)中,点 $x=0$ 是弱奇点,而点 $x=\infty$ 是强奇点.因此,Bessel 方程不属于 **Fuchs 方程**(Fuchsian equation)的类型.F. Bessel首先系统地研究了方程(1)([1]),但是在此之前,这类方程就曾在 D. Bernoulli, L. Euler 和 J. L. Lagrange 等人的著作中出现过.

在许多数学物理问题中,特别是在对于圆柱域的势论的边值问题中,经过分离变量都会得到 Bessel 方程.

Bessel方程的解称为**柱函数**(cylinder functions).这些函数可以分为三类:第一类柱函数(**Bessel 函数**(Bessel functions))$J_\nu(x)$,第二类柱函数(**Weber 函数**(Weber function)或 **Neumann 函数**(Neumann function))$Y_\nu(x)$ 和第三类柱函数(**Hankel 函数**(Hankel functions))$H_\nu^{(1)}(x)$, $H_\nu^{(2)}(x)$.如果阶 ν 固定,则所有这些函数都是复变量 x 的解析函数;对于这些函数,除了整数阶的函数 $J_n(x)$ 以外,都以 $x=0$ 为**分支点**(branch point).如果自变量 x 固定,则所有这些函数都是复数 ν 阶的单值整函数([3]).

如果阶 ν 不是整数,则方程(1)的通解可以写为

$$y=C_1J_\nu(x)+C_2J_{-\nu}(x),$$

其中 C_1, C_2 是任意常数.对于一个给定的阶,函数 $J_\nu(x)$, $Y_\nu(x)$, $H_\nu^{(1)}(x)$, $H_\nu^{(2)}(x)$ 中的任何两个都线性无关的,都可以作为方程(1)的基本解组.因此,方程(1)的通解实际上可以表示为下列形式:

$$y=C_1J_\nu(x)+C_2Y_\nu(x),\quad y=C_1H_\nu^{(1)}(x)+C_2H_\nu^{(2)}(x).$$

下列方程同方程(1)密切相关:方程

$$z^2y''+zy'-(z^2+\nu^2)y=0$$

经过代换 $z=ix$ 可以化为方程(1),且变形柱函数(modified cylinder functions)(虚变元的 Bessel 函数(Bessel functions of imaginary argument))可作为其基本解组;方程

$$z^2y''+zy'-(iz^2+\nu^2)y=0$$

经过代换 $z=\sqrt{i}\,x$ 可以化为方程(1),且 **Kelvin 函数**(Kelvin functions)可作为其基本解组.许多其他二阶线性常微分方程(例如 **Airy 方程**(Airy equation))经过未知函数和自变量的变换也可化为方程(1).一系列高阶线性方程的解可以写成 Bessel 函数的形式([4]).

方程(1)经过代换 $y=x^\nu w$ 可以化为 **Laplace 方程**(Laplace equation):

$$xw''+(2\nu+1)w'+xw=0;$$

因此,可以通过复平面上的围道积分来表示方程(1)的解.

在应用中往往需要求下列方程的特征值:

$$x^2y''+xy'+(\lambda x^2-\nu^2)y=0, \qquad (3)$$

其中 ν 是固定的,λ 是参数.在区间 $0\leqslant x\leqslant a$ 上,如果方程(3)具有边界条件

当 $x\to 0$ 时 $y(x)$ 有界, $y(a)=0$,

则是离散谱问题的一个例子(特征值通过 Bessel 函数的零点由条件 $J_\nu(a\sqrt{\lambda})=0$ 来确定).如果方程(3)具有边界条件

在半轴 $0\leqslant x<\infty$ 上 $y(x)$ 有界,

则是一个连续谱的问题(特征值 $\lambda\geqslant 0$).

非齐次 Bessel 方程(inhomogeneous Bessel equation)

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=f(x) \qquad (4)$$

具有特解

$$y=\frac{\pi}{2}Y_\nu(x)\int xJ_\nu(x)f(x)\,dx-\frac{\pi}{2}J_\nu(x)\int xY_\nu(x)f(x)\,dx.$$

对于方程(4)的右端 $f(x)$ 具有特殊形式的情况,其解已详细地研究过.例如,如果 $f(x)=x^\rho$,则 **Lommel 函数**(Lommel function)满足方程(4);如果

$$f(x)=\frac{4(x/2)^{\nu+1}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1/2)},$$

则 **Struve 函数**(Struve function)满足方程(4);如果

$$f(x)=\frac{1}{\pi}(x-\nu)\sin\nu\pi,$$

则 **Anger 函数**(Anger function)满足方程(4);而如果

$$f(x)=-\frac{1}{\pi}[(x+\nu)+(x-\nu)\cos\nu\pi],$$

则 **Weber 函数**(Weber function)满足方程(4).

有些高阶线性方程,其解的性质同 Bessel 函数类似.一般的 n 阶 Bessel 型方程(n-th order equation of Bessel type)具有下列形式:

$$\prod_{i=1}^{n}\left(x\frac{d}{dx}+c_i\right)y+x^n y=0,$$

$$c_i = 常数,\quad \sum_{i=1}^{n}c_i=0,$$

其解依赖于 $n-1$ 个参数.特别是,三阶 Bessel 型方程(它具有含两个参数的解)可以表示为下列形式:

$$x^3y'''+3x^2y''+[1+9\alpha\beta-3(\alpha+\beta)^2]xy'+$$

$$+[x^3-9\alpha\beta(\alpha+\beta)+2(\alpha+\beta)^3]y=0,$$

$$\alpha,\beta = 常数,$$

参考文献

[1] Bessel, F., *Abhandl. der Königlichen Akad. Wiss. Berlin*, 1824, 1-52.

[2] Gray, A. and Mathews, G. B., A treatise on Bessel functions and their application to physics, Macmillan, 1931.

[3] Watson, G. N., A treatise on the theory of Bessel functions, 1-2, Cambridge Univ. Press, 1952.

[4] Kamke, E., Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen, 1, Chelsea, 1971(中译本: E. 卡姆克,常微分方程手册,科学出版社,1986).

H. X. Розов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Lebedev, N. N., Special functions and their applications, Dover, reprint, 1972 (译自俄文).

张鸿林 译

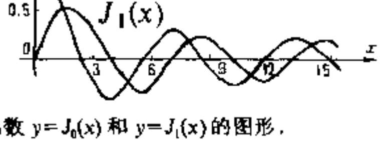
Bessel 函数 [**Bessel functions; Бесселя функции**]

第一类**柱函数**(cylinder functions). p 阶 Bessel 函数可以定义为级数

$$J_p(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+p+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{p+2k}=$$

$$=\left(\frac{z}{2}\right)^{p}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+p+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k},\quad (*)$$

它在整个平面上收敛. p 阶 Bessel 函数是相应的 **Bessel 方程**(Bessel equation)的解.如果自变量和阶 v 都是实数,则 Bessel 函数是实函数,它的图形具有衰减振动的形式(见图);如果阶 v 是偶数,则 Bessel 函数是偶函数,如果阶 v 是奇数,则 Bessel 函数是奇函数.



函数 $y=J_0(x)$ 和 $y=J_1(x)$ 的图形.

Bessel 函数在原点 0 的邻域内的性状,由级数(*)的首项给出;对于大的 x 值,渐近表示式

$$J_\nu(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)$$

成立.Bessel 函数的零点(即方程 $J_\nu(x)=0$ 的根)都是单的, $J_\nu(x)$ 的零点处于 $J_{\nu+1}(x)$ 的零点之间."半整数"阶 $\nu=n+1/2$ 的 Bessel 函数可以通过三角函数来表示;特别是

$$J_{1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x,$$

$$J_{-1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x.$$

Bessel 函数 $J_\nu(\mu_n^\nu l^{-1}x)$(其中 μ_n^ν 是 $J_\nu(x)(\nu>-1/2)$ 的正的零点)在区间 $(0,l)$ 上构成以 x 为权的正交系.在某些条件下,下列展开式成立:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_nJ_\nu\left(\frac{\mu_n^\nu}{l}x\right),$$

$$c_n=\frac{2}{l^2J_{\nu+1}^2(\mu_n^\nu)}\int_0^l f(x)J_\nu\left(\frac{\mu_n^\nu}{l}x\right)x\,dx,\quad 0<x<l.$$

在无限区间上,这个展开式由 Fourier-Bessel 积分

$$f(x)=\int_0^\infty c_\lambda J_\nu(\lambda x)d\lambda,\quad c_\lambda=\int_0^\infty f(x)J_\nu(\lambda x)x\,dx,$$

$$0<x<\infty$$

来代替.下列公式在 Bessel 函数的理论和应用中起着重要作用:

1)积分表示

$$J_n(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos(z\sin\varphi-n\varphi)d\varphi,$$

2)生成函数

$$e^{z(\xi-\xi^{-1})/2}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(z)\xi^n,$$

3)零阶 Bessel 函数的加法定理

$$J_0(\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\varphi})=$$

$$=J_0(a)J_0(b)+2\sum_{k=1}^{\infty}J_k(a)J_k(b)\cos k\varphi,$$

4)递推公式

$$J_{p-1}(z)+J_{p+1}(z)=\frac{2p}{z}J_p(z),$$

$$[J_p(z)]'=\frac{1}{2}[J_{p-1}(z)-J_{p+1}(z)].$$

参考文献，见**柱函数**(cylinder functions)．

П．И．Лизоркин 撰　张鸿林 译

Bessel 不等式 [**Bessel inequality**; **Бесселя неравенство**] 不等式

$$\|f\|^2 = (f,f) \geqslant \sum_{\alpha\in A}\frac{|(f,\varphi_\alpha)|^2}{(\varphi_\alpha,\varphi_\alpha)} =$$

$$= \sum_{\alpha\in A}\left|\left(f,\frac{\varphi_\alpha}{\|\varphi_\alpha\|}\right)\right|^2,$$

其中 f 是(准)Hilbert 空间 H 中的一个元素，(f,φ) 是 H 上的数量积，$\{\varphi_\alpha:\alpha\in A\}$ 是 H 中非零元素的正交系．无论指标集 A 的基数是多少，Bessel 不等式的右边都至多含有可数个非零项．Bessel 不等式是从 Bessel **恒等式** (Bessel identity)

$$\left\|f-\sum_{i=1}^{n}x^{\alpha_i}\varphi_{\alpha_i}\right\|^2 \equiv |f|^2-\sum_{i=1}^{n}\lambda_{\alpha_i}|x^{\alpha_i}|^2$$

推得的，此式对于任意有限个元素的集合 $\{\varphi_{\alpha_i}: i=1,\cdots,n\}$ 成立．在恒等式中，x^{α_i} 是向量 f 关于正交系 $\{\varphi_{\alpha_1},\cdots,\varphi_{\alpha_n}\}$ 的 Fourier 系数，即

$$x^{\alpha_i} = \frac{1}{\lambda_{\alpha_i}}(f,\varphi_{\alpha_i}),\ \lambda_{\alpha_i} = (\varphi_{\alpha_i},\varphi_{\alpha_i}).$$

Bessel 不等式的几何意义在于：元素 f 在元素 φ_α $(\alpha\in A)$ 所生成的线性子空间上的正交投影的模不超过 f 的模(即，直角三角形的斜边长不小于直角边的长)．向量 f 属于向量 $\varphi_\alpha(\alpha\in A)$ 所生成的闭线性子空间的充分必要条件是 Bessel 不等式成为等式．如果对于任意 $f\in H$ 都有上述情况出现，则称 **Parseval 等式** (Parseval equality) 对于 H 中的正交系 $\{\varphi_\alpha:\alpha\in A\}$ 成立．

对于 H 中线性无关的(不一定是正交的)元素系 $\{\varphi_\alpha:\alpha=1,2,\cdots\}$，Bessel 恒等式及 Bessel 不等式分别取形式

$$\left\|f-\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}b_n^{\alpha\beta}(f,\varphi_\beta)\varphi_\alpha\right\|^2 \equiv$$

$$\equiv \|f\|^2-\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}b_n^{\alpha\beta}(f,\varphi_\alpha)(f,\varphi_\beta),$$

及

$$\|f\|^2 \geqslant \sum_{\alpha,\beta=1}^{n}b_n^{\alpha\beta}(f,\varphi_\alpha)(f,\varphi_\beta),$$

其中 $b_n^{\alpha\beta}$ 是最初的元素系中前 n 个向量的 Gram 矩阵(见 **Gram 行列式** (Gram determinant)) 的逆矩阵中的元素．

这个不等式是由 F. W. Bessel 在 1828 年对三角函数系导出的．

参考文献

[1] Кудрявцев, Л. Д., Математический анализ, 2 изд., т. 2, М., 1973.

Л. П. Купцов 撰

【补注】 通常，把元素的正交系 $\{\varphi_\alpha\}$ 规格化，即，令 $\psi_\alpha=\varphi_\alpha/\|\varphi_\alpha\|$．这时，Bessel 不等式取形式

$$\sum_{\alpha\in A}|(f,\psi_\alpha)|\leqslant\|f\|^2,$$

它比较容易记住．Bessel 不等式以这种形式用于逼近论、Fourier 分析及正交多项式理论等．

参考文献

[A1] Yosida, K., Functional analysis, Springer, 1980(中译本：吉田耕作，泛函分析，人民教育出版社，1980).

[A2] Cheney, E. W., Introduction to approximation theory, Chelsea, reprint, 1982(中译本：E. W. 切尼，逼近论导引，上海科学技术出版社，1981).

[A3] Davis, P. J., Interpolation and approximation, Dover, reprint, 1975.

[A4] Hewitt, E. and Stomberg, K., Real and abstract analysis, Springer, 1965.

朱学贤 译　潘文杰 校

Bessel 插值公式 [**Bessel interpolation formula**; **Бесселя интерполяционная формула**]

作为 Gauss 前向插值公式与同阶的 Gauss 后向插值公式(见 **Gauss 插值公式** (Gauss interpolation formula)) 之和的一半而得到的公式．关于结点

$$x_0,\ x_0+h,\ x_0-h,\ \ldots,\ x_0+nh,\ x_0-nh,\ x_0+(n+1)h$$

的 Gauss 前向插值公式为：在点 $x=x_0+th$ 上

$$G_{2n+2}(x_0+th) = f_0+f_{1/2}^1t+f_0^2\frac{t(t-1)}{2!}+ \tag{1}$$

$$+\cdots+f_{1/2}^{2n+1}\frac{t(t^2-1)\cdots(t^2-n^2)}{(2n+1)!},$$

关于结点 $x_1=x_0+h$，即关于结点

$$x_0+h,\ x_0,\ x_0+2h,\ x_0-h,\ \ldots,\ x_0+(n+1)h,\ x_0-nh$$

的同阶的 Gauss 后向插值公式为

$$G_{2n+2}(x_0+th) = f_1+f_{1/2}^1(t-1)+f_1^2\frac{t(t-1)}{2!}+\cdots+$$

$$+f_{1/2}^{2n+1}\frac{t(t^2-1)\cdots[t^2-(n-1)^2](t-n)(t-n-1)}{(2n+1)!} \tag{2}$$

设

$$f_{1/2}^{2k} = \frac{(f_0^{2k}+f_1^{2k})}{2},$$

Bessel 插值公式取下列形式([1], [2])：

$$B_{2n+2}(x_0+th) = \tag{3}$$

$$= f_{1/2}+f_{1/2}^1\left(t-\frac{1}{2}\right)+f_{1/2}^2\frac{t(t-1)}{2!}+\cdots+$$

$$+f_{1/2}^{2n}\frac{t(t^2-1)\cdots[t^2-(n-1)^2](t-n)}{(2n)!}+$$

$$+f_{1/2}^{2n+1}\frac{t(t^2-1)\cdots[t^2-(n-1)^2](t-n)(t-1/2)}{(2n+1)!}.$$

与 Gauss 公式(1),(2)相比,Bessel 插值公式具有某些优点;特别是,如果在区间的中点,即在点 $t=1/2$ 上插值,则一切奇数阶差分的系数都等于零.如果把公式(3)右边最后一项略去,则所得到的多项式 $B_{2n+1}(x_0+th)$ 虽然不是一个适当的插值多项式(它仅在 $2n$ 个结点 $x_0-(n-1)h,\cdots,x_0+nh$ 上等于$f(x)$),但是给出了比同次插值多项式更好的余项估计(见**插值公式**(interpolation formula)).例如,如果 $x=x_0+th\in(x_0,x_1)$,则使用关于结点 $x_0-h,\ x_0,\ x_0+h,\ x_0+2h$ 写出的最常用的多项式

$$B_3(x_0+th)=f_{1/2}+f_{1/2}^1\left(t-\frac{1}{2}\right)+f_{1/2}^2\frac{t(t-1)}{2},$$

得到的余项估计,比关于结点 $x_0-h,\ x_0,\ x_0,h$ 或 $x_0,\ x_0+h,\ x_0+2h$ 写出的插值多项式给出的估计几乎要好 8 倍.

参考文献

[1] Березин, И. С., Жидков, Н. П., Методы вычислений, 3 изд., т. 1, М., 1966 (英译本: Berezin, I. S. and Zhidkov, N. P., Computing methods, 1., Pergaman Press, 1973).

[2] Бахвалов, Н. С., Численные методы. М., 1973 (英译本: Bakhvalov, N. S., Numerical methods: analysis, algebra, ordinary differential equations, Mir, 1977).

М. К. Самарин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Abramowitz, M. and Stegun, I. A., Handbook of mathematical functions, Nat. Bur. Stard., Appl. Math. Ser., 55, Dover, 1970.

[A2] Hildebrand, F., Introduction to numerical analysis, Addison-Wesley, 1956.

张鸿林 译

Bessel 位势 [Bessel potential; Бесселев потенциал]

形如

$$P_\alpha(x)=\int_{\mathbf{R}^n}G_\alpha(x-y)\,d\mu(y),\quad \alpha>0$$

的位势,其中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 是 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 中的两点;$d\mu$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的 Borel 测度;

$$G_\alpha(x)=2^{(2-n-\alpha)/2}\pi^{-n/2}\left[\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]^{-1}\times$$

$$\times K_{(n-\alpha)/2}(|x|)\,|x|^{(\alpha-n)/2},$$

$$|x|=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i^2|\right)^{1/2},$$

而$K_\nu(z)$是第二类ν阶修正柱函数(或 Bessel 函数,见**柱函数**(cylinder functions)),或ν阶 Macdonald 函数(Macdonald function);$G_\alpha(x)$ 称为 Bessel 核(Bessel kernel).

Bessel 核 $G_\alpha(x)$ 的基本性质与 Riesz 核相同(见 **Riesz 位势**(Riesz potential)),即它们是正的,当 $x\neq0$ 时是连续的,能够合成

$$\int_{\mathbf{R}^n}G_\alpha(x-y)G_\beta(y)\,dy=G_{\alpha+\beta}(x).$$

但是,与 Riesz 位势不同,Bessel 位势对于一切 $\alpha>0$ 都适用,因为当 $|x|\to\infty$ 时,有

$$G_\alpha(x)\sim$$

$$\sim 2^{(1-n-\alpha)/2}\pi^{(1-n)/2}\left[\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]^{-1}|x|^{(\alpha-n-1)/2}e^{-|x|}.$$

如果$\alpha>2m$,这里 m 是自然数、并且测度 $d\mu$ 是绝对连续的,具有平方可积密度$f(y)\in L_2(R^{2m})$,则 Bessel 位势满足恒等式

$$(1-\Delta)^m P_\alpha(x)=P_{\alpha-2m}(x),$$

和

$$(1-\Delta)^m P_{2m}(x)=f(x).$$

其中 Δ 是 R^{2m} 上的 **Laplace 算子**(Laplace operator).换句话说,函数 $G_{2m}(x)$ 是算子 $(1-\Delta)^m$ 的**基本解**.

参考文献

[1] Никольский, С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М., 1969, гл. 8 (英译本: Nikol'skii, S. M., Approximation of functions of several variables and imbedding theorems, Springer, 1975).

[2] Aronszajn, M. and Smith, K. T., Theory of Bessel potentials I, *Ann. Inst. Fourier* (Grenoble), 11 (1961), 385–475.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 函数 $k_\nu(z)$ 通常称为第三类修正 Bessel 函数.

张鸿林 译

Bessel 系 [Bessel system; Бесселева система]

正交系理论中的一个概念.设$\{\psi_n\}$和$\{g_n\}$是 $L_2(a,b)=L_2$ 中的函数(即在区间$[a,b]$上平方可积的可测函数)的两个完全系,它们构成函数的**双正交系**(biorthogonal system).函数系$\{\psi_n\}$称为 Bessel 系(Bessel system),如果对于任何函数$f\in L_2$,级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n^2$$

都收敛;这里$c_n=(f,g_n)$是函数f关于函数系$\{\psi_n\}$的展开式

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n$$

的系数．为了使函数系$\{\psi_n\}$是 Bessel 系，其必要和充分条件为：可以在空间 L_2 中定义一个有界线性算子 A，使得由等式 $A\psi_n = \varphi_n (n=1,2,\cdots)$ 定义的函数系$\{\varphi_n\}$是完全正交系．如果函数系$\{\psi_n\}$是 Bessel 系，则存在常数 M，使得对于任何 $f \in L_2$，有

$$\sum_{n=1}^{\infty} (f, g_n)^2 \leqslant M \| f \|_{L_2}^2 .$$

参考文献

[1] Kaczmarz, S. and Steinhaus, H., Theorie der Orthogonalreihen, Chelsea, reprint, 1951.

П. И. Лизоркин 撰　张鸿林 译

最佳逼近 [**best approximation**; **наилучшее приближение**]，以固定集合 F 中的函数 $u(t)$ 对函数 $x(t)$ 的数量表达式

$$E(x, F) = \inf_{u \in F} \mu(x, u),$$

其中 $\mu(x, u)$ 为逼近误差（见**函数逼近度**（approximation of functions, measure of））．在任意度量空间 X 中，当 $\mu(x,u)$ 定义为 x 与 u 之间的距离时，最佳逼近是有意义的；此时，$E(x,F)$ 便是 x 到集合 F 的距离．如果 X 是赋范线性空间，则对固定的 $F \subset X$，最佳逼近

$$E(x, F) = \inf_{u \in F} \| x - u \| \qquad (1)$$

可看作是定义于 X 上的泛函（最佳逼近泛函（functional of best approximation））．

无论 F 是何种集合，最佳逼近泛函总是连续的．如果 F 是一个子空间，则最佳逼近泛函便是一个半范数，即

$$E(x_1 + x_2, F) \leqslant E(x_1, F) + E(x_2, F)$$

且对任何 $\lambda \in \mathbf{R}$

$$E(\lambda x, F) = |\lambda| E(x, F)$$

若 F 是一个有限维子空间，则对任何 $x \in X$，存在 $u_0 \in F$（最佳逼近元（element of best approximation））使 (1) 达到下确界：

$$E(x, F) = \| x - u_0 \|.$$

在范数为严格凸的空间 X 中，最佳逼近元是唯一的．

使用对偶定理，便可借助于共轭空间 X^* 中某些泛函值的上确界来表示赋范线性空间 X 中的最佳逼近（见 [5]，[8]）．如果 F 是 X 的闭凸子集，则对任何 $x \in X$，有

$$E(x, F) = \sup_{\substack{f \in X^* \\ \|f\| \leqslant 1}} \left[f(x) - \sup_{u \in F} f(u) \right]; \qquad (2)$$

特别地，若 F 是一个子空间，则有

$$E(x, F) = \sup_{\substack{f \in F^\perp \\ \|f\| \leqslant 1}} f(x), \qquad (3)$$

其中 $F^\perp$ 是 X^* 中满足对任一 $u \in F$，$f(u)=0$ 的泛函 f 所组成的集．在函数空间 C 或 L_p 中，可根据线性泛函的形式而具体写出 (2) 与 (3) 右端的表达式．在 Hilbert 空间 H 中，n 维子空间 F_n 对 $x \in H$ 的最佳逼近即为 x 在 F_n 上的正交投影：

$$E(x, F_n) = \sqrt{\frac{G(x, u_1, \ldots, u_n)}{G(u_1, \ldots, u_n)}},$$

其中 $u_1, \cdots, u_n$ 是 F_n 的基底，$G(u_1, \cdots, u_n)$ 是 Gram 行列式，它的（第 i 行第 j 列）元素为标量积 (u_i, u_j)，$i, j = 1, \cdots, n$．若 $\{u_k\}$ 是正交基，则

$$E^2(x, F_n) = \| x \|^2 - \sum_{k=1}^{n} (x, u_k)^2.$$

在空间 $C = C[a,b]$ 中，n 维 Чебышев 子空间 $F_n \subset C$ 对函数 $x(t) \in C$ 的最佳一致逼近具有如下估计（de la Vallée-Poussin 定理（de la Vallée-Poussin theorem））：如果对某个函数 $u(t) \in F_n$，存在 $n+1$ 个点 $t_k (a \leqslant t_1 < \cdots < t_{n+1} \leqslant b)$，使得差式

$$\Delta(t) = x(t) - u(t)$$

在这些点取符号交错的值，则有

$$E(x, F_n) \geqslant \min_{1 \leqslant k \leqslant n+1} |\Delta(t_k)|.$$

关于 $L_1(a,b)$ 中的最佳逼近，见 **Марков 准则**（Markov criterion）．对于某些重要情形，有限维子空间对给定函数的最佳逼近的上界可借助于被逼近函数或其导数的微分差分性质（如连续模）来估计．

用多项式对连续函数进行最佳一致逼近的概念应归功于 П. Л. Чебышев，1854 年，他为此概念奠定了理论基础并建立了度量空间 C 中最佳逼近多项式的判别准则，见**最佳逼近多项式**（polynomial of best approximation）．

函数类的最佳逼近（best approximation of a class of functions）指的是固定函数集 F 对给定的类 $\mathfrak{M}$ 中函数 f 的最佳逼近的上确界，即

$$E(\mathfrak{M}, F) = \sup_{f \in \mathfrak{M}} E(f, F) = \sup_{f \in \mathfrak{M}} \inf_{\varphi \in F} \mu(f, \varphi).$$

$E(\mathfrak{M}, F)$ 这个数刻画了函数类 $\mathfrak{M}$ 与逼近集 F（在特定度量下）的最大偏差并指明了用 F 中的函数逼近任一函数 $f \in \mathfrak{M}$ 时可能得到的最小误差．

令 $\mathfrak{M}$ 为赋范线性空间 X 的子集，$U=\{u_1(t),u_2(t),\cdots\}$ 是 X 中的某个线性无关函数系，$F_n(n=1,2,\cdots)$ 是由此无关系的前 n 个元素生成的子空间．通过研究序列 $E(\mathfrak{M},F_n)$ $(n=1,2,\cdots)$ 便可得到一系列 $\mathfrak{M}$ 中函数的结构和光滑特征以及函数系 U 关于 $\mathfrak{M}$ 的逼近性质．如果 X是 Banach 空间，U 是 X 中的闭集，即 $\overline{\bigcup F_n}=X$，则 $E(\mathfrak{M},F_n)\to 0$ $(n\to\infty)$ 当且仅当 $\mathfrak{M}$ 是 X 的紧子集．

在许多重要场合下，例如，当 F_n 是三角多项式或周期样条的子空间且通过对某阶导数 $f^{(r)}$ 的范数或 $f^{(r)}$ 的连续模施加若干条件以定义函数类 $\mathfrak{M}$ 时，$E(\mathfrak{M},F_n)$ 便可以明显地算出(见[5])．在非周期情形下，也可得到一些有关 $n\to\infty$ 时 $E(\mathfrak{M},F_n)$ 的渐近性态．

参考文献

[1] Чебышев, П. Л., Полн. собр. соч., 2 (1947), М. - Л.,

[2] Ахиезер, Н. И., Лекции по теории аппроксимации, 2 изд., М., 1965 (中译本：Н. И. 阿赫叶惹尔，逼近论讲义，科学出版社，1957).

[3] Дзядык, В. К., Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами, М., 1977.

[4] Гончаров, В. Л., Теория интерполирования и приближения функций, 2 изд., М., 1954 (中译本：В. Л. 冈察洛夫，函数插补与逼近理论，科学出版社，1958).

[5] Корнейчук, Н. П., Экстремальные задачи теории приближения, М., 1976 (中译本：Н. П. 考涅楚克，逼近论的极值问题，上海科学技术出版社，1982).

[6] Никольский, С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, 2 изд., М., 1977 (英译本：Nikol'skiĭ, S. M., Approximation of functions of several variables and imbedding theorems, Springer, 1975).

[7] Тиман, А. Ф., Теория приближения функций действительного переменного, М., 1960 (英译本：Timan, A. F., Theory of approximation of functions of a real variable, Pergamon, 1963).

[8] Тихомиров, В. М., Некоторые вопросы теории приближений, М., 1976.

[9] Laurent, P. J., Approximation et optimisation, Herman, 1972.

Н. П. Корнейчук В. П. Моторный 撰

【补注】 在西文文献中，最佳逼近元、最佳逼近泛函或最佳逼近多项式也可称为**最佳逼近**(best approximation).

参考文献

[A1] Lorentz, G. G., Approximation of functions, Holt, Rinehart and Winston, 1966.

[A2] Cheney, E. W., Introduction to approximation theory, Chelsea, reprint, 1982.

[A3] Rice, J. R., The approximation of functions, 1. Linear theory, Addison-Wesley, 1964.

[A4] Pinkus, A., n-widths in approximation theory, Springer, 1985.

王仁宏、檀结庆 译 杨应辰 校

最佳平均逼近 [best approximation in the mean; наилучшее приближение в среднем]

用积分度量的形式表示误差时用某个固定集合 F 中的函数 u 对函数 x 所作的**最佳逼近**(best approximation)(亦见**平均逼近**(approximation in the mean)).

Н. П. Корнейчук В. П. Моторный 撰

王仁宏、檀结庆 译 杨应辰 校

最佳逼近序列 [best approximations, sequence of; наилучших приближений последовательность]

数列 $\{E(x,F_n)\}$ $(n=1,2,\cdots)$，其中 $E(x,F_n)$ 是用满足 $F_1\subset F_2\subset\cdots$ 的 n 维子空间 $F_n\subset X$ 对赋范线性空间 X 中的元素 x 所作的**最佳逼近**(best approximation)，显然有 $E(x,F_1)\geqslant E(x,F_2)\geqslant\cdots$．通常，$F_n$ 是由 X 中某个固定的线性无关元素系 $\{u_1,u_2,\cdots\}$ 中前 n 个元素线性张成的子空间．

19 世纪 50 年代，П. Л. Чебышев 首次研究了当 $X=C[a,b]$，且 $F_n=F_n^A$ 为 $n-1$ 次代数多项式子空间时的最佳逼近序列；实际上，1885 年 K. Weierstrass 证明了，对任何函数 $x(t)\in C[a,b]$ 有

$$E(x,F_n^A)\to 0 \text{ 当 } n\to\infty \text{ 时}.$$

在一般情形下，当子空间 $F_n(n=1,2,\cdots)$ 的并集在 X 中处处稠密，即

$$\lim_{n\to\infty}E(x,F_n)=0,\text{对一切}x\in X$$

时，关系式

$$\overline{\bigcup F_n}=X$$

对所有 $x\in X$ 总是成立的(实际上，这是一个等价的陈述)．然而，序列 $\{E(x,F_n)\}$可以任意慢地收敛于零．这个结论来源于Бернштейн定理(Bernshtein theorem)：如果$\{F_n\}$是赋范线性空间 X 中的 n $(n=1,2,\cdots)$ 维子空间序列，且 $F_1\subset F_2\subset\cdots$，$\overline{\bigcup F_n}=X$，则对任何单调递减趋于零的非负实数列$\{\mu_n\}$，存在 $x\in X$ 使得 $E(x,F_n)=\mu_n$ $(n=1,2,\cdots)$．在函数空间 C 和 L_p 中，最佳逼近序列趋于零的速度既依赖于子空间系$\{F_n\}$又依赖于被逼近函数 x 的光滑性(连续模，指定至某阶导数的存在性，等等)，收敛速度可借助于这些特征进行估计．反之，如果已知序列$\{E(x,F_n)\}$收敛于零的速度，就可得到关于 $x(t)$ 的光滑性方面的论断(见**函数逼近，正定理和逆定理**(approximation of functions, direct and inverse theorems)).

参考文献

[1] Бернштейн, С. Н., Собр. соч., 2, М., 1954.

[2] Гончаров, В. Л., Теория интерполирования и приближения функций, 2 изд., М., 1954 (中译本：В. Л. 冈察洛夫，函数插补与逼近理论，科学出版社，1958).

[3] Тиман, А. Ф., Теория приближения функций действительного переменного, М., 1960 (英译本: Timan, A. F., Theory of approximation of functions of a real variable, Pergamon, 1963).

Н. П. Корнейчук В. П. Моторный 撰

【补注】 由 $E(x, F_n)$ 的性质推出函数 $x\in C$ 或 L_p 的光滑性的定理是由 D. Jackson 在 1911 年就代数逼近或三角逼近首次给出的，见 **Jackson 定理**(Jackson theorem). 与此相反的定理，即：由函数 x 的光滑性推出 $E(x, F_n)$ 的某些性质，已被 S. N. Bernstein 和 A. Zygmund 所证明，见 **Бернштейн 定理**(Bernshtein theorem). 亦见[A2]的第 4 章第 6 节以及第 6 章第 3 节.

参考文献

[A1] Natanson, I. P., Constructive function theory, 1 – 3, F. Ungar, 1964 – 1965 (译自俄文).

[A2] Cheney, E. W., Introduction to approximation theory, Chelsea, reprint, 1982.

王仁宏、檀结庆 译 杨应辰 校

最佳完全逼近 [**best complete approximation; наилучшее полное приближение**]

用代数多项式或三角多项式对 k $(k\geqslant 2)$ 个变量的函数 $f(x_1,\cdots,x_k)$ 所作的最佳逼近. 令 X 为 k 维周期方体(其棱长为 2π)上连续或 p 幂 $(p\geqslant 1)$ 可和的各变量周期为 2π 的函数 $f(x_1,\cdots,x_k)$ 所组成的空间 C 或 L_p.

三角多项式对函数 $f(x_1,\cdots,x_k)\in X$ 所作的最佳完全逼近指的是

$$E_{n_1,\ldots,n_k}(f)_X=\inf_{T_{n_1,\ldots,n_k}}\|f-T_{n_1,\ldots,n_k}\|_X,$$

其中下确界取自所有 x_i 的次数 n_i $(1\leqslant i\leqslant k)$ 的三角多项式. 除最佳完全逼近外，还可考虑最佳部分逼近.

一个函数 $f(x_1,\cdots,x_k)\in X$ 的最佳部分逼近(best partial approximation)是指用关于变量 $x_{\nu_1},\cdots,x_{\nu_r}$ 的次数分别为 $n_{\nu_1},\cdots,n_{\nu_r}$ $(1\leqslant r<k)$ 的三角多项式函数 $T_{n_{\nu_1},\cdots,n_{\nu_r}}(x_1,\cdots,x_k)\in K$ 对 $f(x_1,\cdots,x_k)$ 所作的最佳逼近，即

$$E_{n_{\nu_1},\ldots,n_{\nu_r},\infty}(f)_X=\inf_{T_{n_{\nu_1},\ldots,n_{\nu_r}}}\|f-T_{n_{\nu_1},\ldots,n_{\nu_r}}\|_X.$$

其中变量 $x_{\nu_1},\cdots,x_{\nu_r}$ 的系数依赖于其余 $k-r$ 个变量. 显然

$$E_{n_1,\ldots,n_r,\ldots,n_k}(f)_X\geqslant E_{n_1,\ldots,n_r,\infty}(f)_X.$$

С. Н. Бернштейн 在 [1] 中就两个变量的连续函数证明了下述不等式:

$$E_{n_1,n_2}(f)_C\leqslant \qquad (1)$$

$$\leqslant A\ln(2+\min\{n_1,n_2\})(E_{n_1,\infty}(f)_C+E_{n_2,\infty}(f)_C),$$

其中 A 是绝对常数. 文献[3]指出：当 $\min\{n_1,n_2\}\to\infty$ 时，上述不等式(以及关于空间 L_1 的类似关系式)中的项 $\ln(2+\min\{n_1,n_2\})$ 不能用增大得更慢的变量因子来代替.

在空间 $L_p(p>1)$ 中，下述不等式成立:

$$E_{n_1,\ldots,n_k}(f)_{L_p}\leqslant A_{p,k}\sum_{i=1}^{k}E_{n_i,\infty}(f)_{L_p}, \qquad (2)$$

其中常数 $A_{p,k}$ 仅依赖于 p 和 k.

类似地定义了关于有界闭域 $\Omega\subset\mathbf{R}^k$ 上的函数借助于代数多项式的最佳完全逼近和最佳部分逼近，并已建立类似于(1)和(2)的不等式.

参考文献

[1] Бернштейн, С. Н., Собр. соч., М., 2 (1954).

[2] Тиман, А. Ф., Теория приближения функций действительного переменного, М., 1960 (英译本: Timan, A. F., Theory of approximation of functions of a real variable, Pergamon, 1963).

[3] Темляков, В. Н., 《Докл. АН СССР》, 223 (1975), 1079 – 1082.

Н. П. Корнейчук В. П. Моторный 撰

【补注】

参考文献

[A1] Lorentz, G. G., Approximation of functions, Holt, Rinehart and Winston, 1966.

王仁宏、檀结庆 译 杨应辰 校

最佳线性方法 [**best linear method; наилучший линейный метод**]

作用于给定的被逼近元素集 $\mathfrak{M}$ 上的所有线性方法中具有最小误差的线性逼近方法. 在赋范线性空间 X 中，用固定子空间 $F\subset X$ 的元素对元素 $x\in\mathfrak{M}\subset X$ 进行逼近的线性方法，指的是把整个空间 X 或某个包含 $\mathfrak{M}$ 的线性流形映射到 F 的线性算子. 如果 $\mathscr{L}$ 是所有这样的算子集，则 $\mathfrak{M}$ 的最佳线性方法(如果存在的话)由满足

$$\sup_{x\in\mathfrak{M}}\|x-\tilde{A}x\|=\inf_{A\in\mathscr{L}}\sup_{x\in\mathfrak{M}}\|x-Ax\|$$

的算子 $\tilde{A}\in\mathscr{L}$ 所定义. 如果对所有 $x\in\mathfrak{M}$,

$$\|x-Ax\|\leqslant\sup_{x\in\mathfrak{M}}E(x,F)$$

($E(x,F)$ 是 F 对 x 的**最佳逼近**(best approximation)), 且对所有 $x\in X$,

$$\|x-Ax\|=E(x,F),$$

则由 $\mathscr{L}$ 中算子 A 所定义的方法显然是 $\mathfrak{M}$ 关于逼近集 F 的最佳线性方法. 如果 X 是 Hilbert 空间，$F=F_n$ 是 X 的 n 维子空间 $(n=1,2,\cdots)$ 且 A 是 F_n 上的正交投影，即

$$Ax=\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k,$$

其中 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 是 F_n 中的正交基，则

$$\| x-Ax \| = E(x, F)$$

肯定成立.

令 X 为定义在全实轴上的 Banach 空间，其范数具有平移不变性，即：$\| x(\cdot+\tau) \| = \| x(\cdot) \|$（例如，周期为 2π 的函数空间 $C=C[0, 2\pi]$ 及 $L_p=L_p(0, 2\pi)$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$ 中的范数即满足此条件）. 令 $F=T_n$ 为 n 阶三角多项式子空间. 任取 $\alpha\in\mathbf{R}$，如果 X 既包含 $x(t)$ 又包含 $x(t+\alpha)$，则对 $x(t)$ 组成的函数类 $\mathfrak{M}$，存在（关于 T_n 的）最佳线性方法. 例如，线性方法

$$A(x;t;\mu,\nu) = \frac{\mu_0 a_0}{2}+ \qquad (*)$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\{\mu_k(a_k\cos kt+b_k\sin kt)+\nu_k(a_k\sin kt-b_k\cos kt)\}$$

便是最佳的，其中 a_k 和 b_k 为 $x(t)$ 关于三角系的 Fourier 系数，μ_k 和 ν_k 为某些给定的数.

现在考虑周期为 2π 的函数 $x(t)$ 所组成的类 $W_\infty^r M$（及 $W_1^r M$）$(r=1,2,\cdots)$，其导数 $x^{(r-1)}(t)$ 局部绝对连续，$x^{(n)}(t)$ 在 L_∞ 中（相应地在 L_1 中）的范数囿于上界 M. 对于这些函数类，形如(*)的最佳线性方法在 C（相应地在 L_1）的度量意义下（于整个函数类上）与子空间 T_n 所作的最佳逼近具有同样的误差；如果 $r>0$ 为任意有理数，则对这些函数仍成立类似的结论（$x^{(r)}(t)$ 应理解为 Weyl 意义下的导数）. 对整数 $r=1,2,\cdots$，只要借助于系数 μ_k（所有 $\nu_k=0$）便可建立(*)型的最佳线性方法.

若 $F=S_n^r$ 为关于剖分 $k\pi/n\ (k=0,\pm1,\cdots)$ 的 r 阶亏数为 1 的 2π 周期多项式样条子空间，则可采用于点 $k\pi/n+[1+(-1)^r]\pi/4n$ 处插值函数 $x(t)$ 的 S_n^r 中的样条作为 $L_p(1\leqslant p\leqslant\infty)$（相应地 L_1）中关于函数类 $W_\infty^{r+1}M$（及 W_1^{r+1}）$(r=1,2,\cdots)$ 的最佳线性方法.

参考文献

[1] Ахиезер, Н. И., Лекции по теории аппроксимации, 2 изд., М., 1965（英译本：Achiezer, N. I., Theory of approximation, F. Ungar, 1956）.

[2] Корнейчук, Н. П., Экстремальные задачи теории приближения, М., 1976.

[3] Тихомиров, В. М., Некоторые вопросы теории приближений, М., 1976.

Н. П. Корнейчук, В. П. Моторный 撰

【补注】

参考文献

[A1] Kiesewetter, H., Vorlesungen über lineare Approximation, Deutsch, Verlag Wissenschaft., 1973.

[A2] Rice, J. R., The approximation of functions, 1, linear theory, Addison-Wesley, 1964.

王仁宏、檀结庆 译　杨应辰 校

最佳求积公式 [best quadrature formula; наилучшая квадратурная формула]，最优求积公式（optimal quadrature formula）

对于给定的函数类，在某一特定类型的所有公式中使误差达到极小的近似积分公式. 例如，考虑求积公式

$$\int_a^b \rho(x)f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{m}p_{ki}f^{(i)}(x_k)+R(f), \qquad (*)$$

其中 $\rho(x)$ 为权函数. 余项（误差项）$R(f)=R(f, X_n, P_{nm})$ 既依赖于函数 $f(x)$，又依赖于由插值节点 x_k（通常假定 $x_k\in[a, b]$）和系数 $p_{ki}(k=1,\cdots,n;\ i=0,\cdots,m)$ 组成的向量 (X_n, P_{nm}). 固定 $n\geqslant1$ 和 $m\geqslant0$，令 A 表示向量 (X_n, P_{nm}) 的某个集合（因此也是求积公式的某个集合），它是通过施加于插值节点和系数上的某些限制定义的（特别地，可考虑当固定某一节点向量 $\bar{X}_n$ 时系数 p_{ki} 的集合 $A=A(\bar{X}_n)$）. 设 $\mathfrak{M}$ 为某一类函数 $f(x)$，假定对于 $f\in\mathfrak{M}$，(*)中的积分及和数都存在. 对于函数类 $\mathfrak{M}$，相对于集合 A 的(*)型最佳求积公式由向量 (X_n^*, P_{nm}^*) 定义，它使得

$$\sup_{f\in\mathfrak{M}} | R(f, X_n^*, P_{nm}^*) | =$$

$$= \inf_{(X_n,P_{nm})\in A}\ \sup_{f\in\mathfrak{M}} | R(f, X_n, P_{nm}) |.$$

最佳求积公式的构造与**样条逼近**（spline approximation）中的某些问题有密切联系；在许多情形中，它归结为极小化单项样条函数的范数（见[1]）. 对于许多类连续函数和可微函数，最佳求积公式连同余项的精确估计已经知晓. 从更一般的观点来看，寻求对于函数类 $\mathfrak{M}$ 的最佳求积公式及相应的误差的问题可视为在信息 $\{f^{(i)}(x_k)\}(k=1,\cdots,n;\ i=0,\cdots,m)$ 的基础上最优地复制泛函

$$J(f) = \int_a^b \rho(x)f(x)\,dx$$

的问题，其中 $f\in\mathfrak{M}$. 最佳求积公式的概念可自然地推广到多元函数（求体积公式）.

参考文献

[1] Никольский, С. М., Квадратурные формулы, 3 изд., М., 1979（英译本：Nikol'skii, S. M., Quadrature formulae, H. M. Stationery Office, London, 1966）.

[2] Крылов, В. И., Приближенное вычисление интегралов, 2 изд., М., 1967（英译本：Krylov, N. M., Approximate calculation of integrals, Macmillan, 1962）.

[3] Laurent, P. J., Approximation et optimisation, Hermann, 1972.

[4] Женсыкбаев, А. А., Моносплайны минимальной нормы и наилучшие квадратурные Формулы,《Успехи матем. наук》, 36 (1981), 4, 107－159.

Н. П. Корнейчук, В. П. Моторный 撰

【补注】"最佳公式"这一术语在数值分析的文献中经常遇到，但是，正如在[A2]中第 75 页所看到的，对它应有所保留，因为，无论权系数 p_{ki} 和节点 x_k 如何选取，

任何求积公式毕竟是对某无穷维的函数族精确地积分.

下面列出几本最近的教科书.

参考文献

[A1] Brass, H., Quadraturverfahren, Vandenhoek & Ruprecht, 1977.

[A2] Davis, P. J. and Rabinowitz, P., Methods of numerical integration, Acad. Press, 1984.

[A3] Engels, H., Numerical quadrature and cubature, Acad. Press, 1980.

李家楷 译

B分布 [beta-distribution; бета-распределение]

集中在(0,1)区间内且有密度

$$\beta_{m,n}(x)=\frac{1}{B(m,n)}x^{m-1}(1-x)^{n-1} \qquad (1)$$

的连续概率分布,这里参数 m, n 都是正数,而规则化因子 $B(m,n)$ 是 Euler的 B函数

$$B(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}.$$

$\Gamma(n)$是Γ**函数**(gamma function). 此分布函数可表为一不完全B函数

$$B_{m,n}(x)=\frac{1}{B(m,n)}\int_0^x y^{m-1}(1-y)^{n-1}dy,\quad 0<x<1$$

(这函数已列表,见[1],[2]). B分布的矩由公式

$$m_k=\frac{B(m+k,n)}{B(m,n)},\quad k=1,2,\ldots$$

给出,特别地,数学期望和方差分别是 $m/(m+n)$ 和 $mn/\{(m+n)^2(m+n+1)\}$. 若 $m>1, n>1$, 则密度曲线 $\beta_{m,n}(x)$ 在点 $x=(m-1)/(m+n-2)$ 处有唯一的众数,且在区间的端点处为零. 若 $m<1$ 或 $n<1$, 则图形一端的纵坐标为无穷. 若 $m<1$ 且 $n<1$, 则区间两端的纵坐标皆为无穷而曲线呈U形. 若 $m=n=1$, 则B分布转化为(0,1)区间上的**均匀分布**(uniform distribution). B分布的另一特例是所谓的**反正弦分布**(arcsine distribution):

$$\beta_{1/2,1/2}(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$$

若以 $x=1/(1+t)$代入(1), 则得到一个具密度

$$\beta'_{m,n}(t)=\frac{1}{B(m,n)}\cdot\frac{t^{m-1}}{(1+t)^{m+n-2}},\quad 0<t<\infty \qquad (2)$$

的分布,它称为第二类B分布,以与B分布(1)相区别. 分布(1)和(2)相应于 **Pearson 曲线** (Pearson curves) 族中的"I型"和"VI型". 产生B分布的一重要情况如下: 设 X_1, X_2 独立且具有 **Γ分布** (gamma-distribution), 分别带参数 m 和 n, 则随机变量 $X_1/(X_1+X_2)$ 将有具密度 $\beta_{m,n}(x)$ 的B分布. 这个事实在很大程度上说明了B分布在种种应用中的作用,特别是在数理统计学中:有好几个重要统计量的分布可转化为B分布. 例如 F统计量

$$F_{m,n}=\frac{n\chi_m^2}{m\chi_n^2}$$

的分布(随机变量 χ_k^2有自由度 k 的 χ^2 分布)可表为公式

$$\mathrm{P}(F_{m,n}<x)=B_{m/2,n/2}\left(\frac{mx}{n+mx}\right)$$

(F分布的值通常是借助于B分布表计算). 利用关系式

$$B_{n-m,m+1}(1-p)=\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

也可以由B分布函数去计算**二项分布**(binomial distribution)函数. 数理统计学以外的领域中也用到B函数. 比如说, B分布的密度是正交 **Jacobi 多项式** (Jacobi polynomials)系的权函数.

参考文献

[1] Большев, Л. Н., Смирнов, Н. В., Таблицы математической статистики, 2 изд., М., 1968.

[2] Pearson, K., Tables of incomplete beta-function, Cambridge Univ. Press, 1932.

А. В. Прохоров 撰 陈希孺 译

B函数 [beta-function; Бета-функция], Euler B 函数 (Euler B-function), 第一类 Euler 积分 (Euler integral of the first kind)

两个变量 p 和 q 的函数, 当 $p,q>0$ 时, 由下式来定义:

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx. \qquad (*)$$

对于变量 p 和 q 的不同的值, 在B函数的值之间存在下列关系式:

$$B(p,q)=B(q,p),$$

$$B(p,q)=\frac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1),\quad q>1.$$

下列公式成立:

$$B(p,1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi},\quad 0<p<1.$$

如果 p 和 q 是复数, 则当 $\mathrm{Re}\,p>0$, $\mathrm{Re}\,q>0$ 时, 积分(*)收敛. B函数可以通过 **Γ函数** (gamma-function)来表示:

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

В. И. Битюцков 撰 张鸿林 译

Betti 群 [Betti group; Бетти группа]

就宽泛的意义而言，它与**同调群**（homology group）相同；就狭窄的意义而言，它是以整数群 **Z** 为系数域的同调群的自由部分，如果这个同调群是有限生成的．以 E. Betti (1823－1892) 的名字命名．

参考文献

[1] Seifert, H. and Threlfall, W., Lehrbuch der Topologie, Chelsea reprint, 1980（中译本：H. 沙爱福，W. 施雷发，拓扑学，高等教育出版社，1959）．

[2] Александров, П. С., Введение в гомологическую теорию размерности и общую комбинаторную топологию, М., 1975. М. И. Войцеховский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Spanier, E. H., Algebraic topology, McGraw-Hill, 1966（中译本：E. H. 斯潘尼尔，代数拓扑学，上海科学技术出版社，1987）． 张 平 译 沈信耀 校

Betti 数 [Betti number; Бетти число]，复形 K 的 r 维 Betti 数 p^r (r-dimensional Betti number p^r of a complex K)

整系数 r 维 **Betti 群**（Betti group）的秩．对每个 r，Betti 数 p^r 是实现复形 K 的多面体的拓扑不变量，它反映了该多面体中（在有理数域上）互不同调的闭链个数．例如，对球面 S^n：

$$p^0=1,\ p^1=\cdots=p^{n-1}=0,\ p^n=1;$$

对射影平面 $P^2(\mathbf{R})$：

$$p^0=1,\ p^1=p^2=0;$$

对环面 T^2：

$$p^0=p^2=1,\ p^1=2.$$

对 n 维复形 K^n，和

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k p^k$$

等于其 **Euler 示性数**（Euler characteristic）．Betti 数是由 E. Betti 引入的（[1]）．

参考文献

[1] Betti, E., *Ann. Mat. Pura. Appl.*, **4** (1871), 140－158. М. И. Войцеховский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Spanier, E. H., Algebraic topology, McGraw-Hill, 1966（中译本：E. H. 斯潘尼尔，代数拓扑学，上海科学技术出版社，1987）． 张 平 译 沈信耀 校

Bezout 环 [Bezout ring; Безу кольцо]

一个含单位元的**整环**（integral domain），其中任何有限型的理想都是主理想．任何主理想整环和赋值环都是 Bezout 环．Bezout 环是整闭的，并且它的局部化（即它对于乘法系 S 的分式环，见**交换代数的局部化**（localization in commutative algebra））仍是 Bezout 环．对于 Bezout 环 A 的任意有限多个元素 $a_1,\cdots,a_n$，存在着最大公因子（此最大公因子形如 $\sum b_i a_i$ ($b_i\in A$)，称为 Bezout 恒等元（Bezout identity））和最小公倍．任何 Noether 环（甚至只是主理想满足升链条件的环），如果是 Bezout 环，则它必是主理想环．如同主理想环的情形一样，Bezout 环上的有限型模必是扭模与自由模的直和． В. И. Данилов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Gilmer, R., Multiplicative ideal theory, M. Dekker, 1972. 赵春来 译

Bezout 定理 [Bezout theorem; Безу теорема]

1) 多项式被线性二项式相除的 Bezout 定理：多项式

$$f(x)=a_0x^n+\cdots+a_n$$

被二项式 $x-a$ 除的余数等于 $f(a)$．这里假定多项式的系数被包含在某个有单位元的交换环内，例如实数或复数域．Bezout 定理的推论是：数 α 为多项式 $f(x)$ 的根当且仅当二项式 $x-\alpha$ 能除尽 $f(x)$．

2) 齐次方程组的 Bezout 定理：如果含 $n+1$ 个未知量的 n 个齐次方程的方程组

$$f_i(x_0,\ldots,x_n)=0,\quad i=1,\ldots,n \qquad (*)$$

在包含方程组系数的代数闭域内只有有限多个不成比例的非零解，则考虑重数的解的个数等于方程次数之积．作为定义，解的重数（multiplicity of the solution）是超曲面 $(*)$ 在相应点处的**相交指数**（intersection index）（在代数几何学内）．定理因 E. Bezout（[1]）而得名，他研究了高次代数方程组．

参考文献

[1] Bezout, E., Théorie générale des équations algébriques, Paris, 1779. В. Н. Ремесленников, В. Е. Воскресенский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Шафаревич, И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972（英译本：Shafarevich, I. R., Basic algebraic geometry, Springer, 1977）． 陈志杰 译

Bianchi 线汇 [Bianchi congruence; Бианки конгруэнция]，B 线汇（B-congruence）

一个直线汇，使得在线汇中同一直线上的点处焦曲面的曲率相等且为负．B 线汇的主曲面与其共轭

线系相交于它的焦曲面上，线汇的直线把焦曲面上的渐近网映为球面上的正交网．Bianchi 线汇之焦曲面的曲率可用渐近参数 u 和 v 表示为下列公式：

$$K = \frac{1}{(\varphi(u)+\psi(v))^2}.$$

曲率满足此条件的曲面称为 Bianchi 曲面[B 曲面（B - surface），见 **Bianchi 曲面**(Bianchi surface)].

Bianchi 线汇为 L. Bianchi ([1]) 所研究.

参考文献

[1] Bianchi, L., *Ann. Mat. Pura Appl.*, **18**(1890), 301－358.

[2] Фиников, С. П., Теория конгруэнций, М. - Л., 1950.

[3] Фиников, С. П., Изгибание на главном основании и связанные с ним геометрические задачи, М. - Л., 1937.

[4] Шуликовский, В. И., Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении, М., 1963.

В. Т. Базылев 撰 沈一兵 译

Bianchi 恒等式 [Bianchi identity；Бианки тождество]

关于 Riemann 空间**曲率张量**(curvature tensor) R^h_{ijk} 的共变导数分量的一个关系式：

$$R^h_{ijk,l}+R^h_{ikl,j}+R^h_{ilj,k} = 0,$$

其中 $h, i, j, k, l=1,\cdots,n$．它是 L. Bianchi ([1]) 在 1902 年首先建立的.

参考文献

[1] Bianchi, L., Lezioni di geometria differenziale, 1－2, Zanichelli, Bologna, 1923－1927.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 这里 $R^h_{ijk,l}$ 显然表示 R^h_{ijk} 关于第 l 个坐标的共变导数.

上述恒等式通常称为第二 Bianchi 恒等式 (second Bianchi identity)．第一 Bianchi 恒等式 (first Bianchi identity)是(见[A1], [A2])

$$R^i_{jkl}+R^i_{klj}+R^i_{ljk}=0.$$

关于有挠联络的曲率形式和曲率张量，在[A2]中给出了这些恒等式的各种推广.

参考文献

[A1] Hicks, N. J., Notes on differential geometry, v. Nostrand, 1965.

[A2] Kobayashi, S. and Nomizu, K., Foundations of differential geometry, 1. Wiley (interscience), 1963.

沈一兵 译

Bianchi 曲面 [Bianchi surface；Бианки поверхность]

Gauss 曲率 K 为负的一种曲面，通过渐近参数 (u, v) K 可表为

$$K = \frac{1}{[U(u)+V(v)]^2},$$

其中 $U(u)$ 和 $V(v)$ 是任意函数；因此，Bianchi 曲面可刻画为：函数 $(-K)^{-1/2}$ 关于其渐近网是对角化的，即

$$\frac{\partial^2(-K)^{-1/2}}{\partial u\partial v} = 0.$$

例如，直纹 Bianchi 曲面是**劈锥曲面**(conoid)——附属于 **Peterson 曲面**(Peterson surface)的曲面．若已给定 Bianchi 曲面，则能够确定通过**主基上的形变**(deformation over a principal base)所得的曲面类，并对它们进行分类．于是，若主基包含两族测地线，则函数 U 和 V 均为常数，且变形曲面为 **Voss 曲面**(Voss surface)(B_0 类).

B_1 类曲面的特征如下所述：只有一族主基曲线是测地线(函数 U 和 V 中只有一个为常数)；劈锥曲面便是一例．B_2 类曲面对应于 U 和 V 都是它们各自变量的非平凡函数．也见 **Bianchi 线汇**(Bianchi congruence).

И. Х. Сабитов 撰

【补注】 "主基上形变"的概念在西方著作中不太通用，并且这种类型的形变尚无标准名称．最好把它表征为保持共轭网的形变.

参考文献

[A1] Bianchi, L., Lezioni di geometria differenziale, 2, Zanichelli, Bologna, 1927, Chapt. 1.

[A2] Finikov, S. P., Theorie der Kongruenzen, Akademie - Verlag, 1959 (译自俄文).

【译注】 也可参考[B1]的第三章.

参考文献

[B1] 苏步青原著，姜国英改写，微分几何学，新版，高等教育出版社，1988.

沈一兵 译

Bianchi 变换 [Bianchi transformation；Бианки преобразование]

从 Bianchi 线汇的一个焦曲面 S 到同一线汇的另一焦曲面 S' 的变换(见 **Bianchi 线汇**(Bianchi congruence))．若 S 是伪球面，则 S' 也是伪球面．设伪球面 S' 是 S 的 Bianchi 变换曲面，则 S' 是下述圆线汇的正交轨面：它们位于 S 的切平面上，并且具有与 S 相同的半径.

В. Т. Базылев 撰

【补注】 也见[A2]，第Ⅲ卷中的条目 803, 804.

参考文献

[A1] Eisenhart, L. P., A treatise on the differential geometry of curves and surfaces, Boston, 1909.

[A2] Darboux, G., Leçons sur la théorie générale des surfaces, Chelsea, reprint, 1972.

沈一兵 译

有偏估计量 [biased estimator；смещенная оценка]

其期望不与被估计量相等的统计估计量.

设 X 为取值于概率空间 $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, P_\theta)(\theta\in\Theta)$ 的随机变量,$T=T(X)$ 是定义于 Θ 上的函数 $f(\theta)$ 的一个统计点估计. 假定 T 的数学期望 $\mathrm{E}_\theta(T)$ 存在. 如果函数

$$b(\theta) = \mathrm{E}_\theta\{T\}-f(\theta) = \mathrm{E}_\theta\{T-f(\theta)\}$$

不恒等于零,即 $b(\theta)\not\equiv 0$,称 T 为 $f(\theta)$ 的**有偏估计量**,而 $b(\theta)$ 称为 T 的**偏倚**(bias)或**系统误差**(systematic error).

例 设 $X_1,\cdots,X_n$ 为相互独立的随机变量,具有同一正态分布 $N_1(a,\sigma^2)$,而

$$\bar{X} = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n},$$

则统计量

$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

为方差 σ^2 的有偏估计量,因为

$$\mathrm{E}\{S_n^2\} = \frac{n-1}{n}\sigma^2 = \sigma^2-\frac{\sigma^2}{n},$$

即估计量 S_n^2 有偏差 $b(\sigma^2)=-\sigma^2/n$. 这个有偏估计量的均方误差为

$$\mathrm{E}\{(S_n^2-\sigma^2)^2\} = \frac{2n-1}{n^2}\sigma^4.$$

σ^2 的**最优无偏估计量**(unbiased estimator)是

$$s_n^2 = \frac{n}{n-1}S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2,$$

其均方误差为

$$\mathrm{D}\{s_n^2\} = \mathrm{E}\{(s_n^2-\sigma^2)^2\} = \frac{2}{n-1}\sigma^4.$$

当 $n>2$ 时,有偏估计量 S_n^2 的均方误差比最优无偏估计量 s_n^2 的均方误差为小.

在有些情形下,无偏估计不存在,例如,正态律 $N_1(a,\sigma^2)$ 的期望的绝对值 $|a|$ 没有无偏估计,就是说,只可能去构造 $|a|$ 的有偏估计量.

参考文献

[1] Cramér, H., Mathematical methods of statistics, Princeton Univ. Press, 1946.

М. С. Никулин 撰 陈希孺 译

双范畴 [bicategory; бикатегория]

一个范畴 $\mathfrak{K}$,其中确定了某些满态射的子范畴 $\mathfrak{E}$ 与单态射的子范畴 $\mathfrak{M}$,使满足下列条件:

1) $\mathfrak{K}$ 中所有的态射 α 都可以分解成积 $\alpha=\nu\mu$,其中 $\nu\in\mathfrak{E}$, $\mu\in\mathfrak{M}$;

2) 若 $\nu\mu=\rho\tau$, 这里 ν, $\rho\in\mathfrak{E}$, μ, $\tau\in\mathfrak{M}$, 则存在一个同构 θ,使 $\rho=\nu\theta$,且 $\tau=\theta^{-1}\mu$;

3) $\mathfrak{E}\cap\mathfrak{M}$ 与范畴 $\mathfrak{K}$ 中的同构的类相重合.

$\mathfrak{E}$ 中的满态射($\mathfrak{M}$ 中的单态射)称为双范畴中的**容许满态射**(permissible epimorphism)(**单态射**(monomorphism)).

双范畴的概念用公理的形式提出了将一个任意的映射分解成一个满态射与一个单态射的乘积的可能性. 集合的范畴,有一个作了记号的点的集合的范畴、以及群的范畴都是具有唯一的双范畴结构的双范畴. 在所有的拓扑空间的范畴中, 与在所有的结合环的范畴中, 有一整类不同的双范畴的结构.

参考文献

[1] Цаленко, М. Ш., Шульгейфер, Е. Г., Основы теории категорий, М., 1974.

М. Ш. Цаленко 撰

【补注】 在文献中, 名词"双范畴", "两范畴", "2 范畴"等常易混淆. 由于目前名词尚未确定, 读者必须当心. 在本百科全书中, 双范畴一词总是用于上述所定义的概念.

周伯埙 译

次特征 [bicharacteristic; бихарактеристика], **次特征带**(bicharacteristic strip)

线性偏微分算子的次特征为其任意两个特征(characteristic)

$$\varphi(x_1,\dots,x_n) = 0,\ \psi(x_1,\dots,x_n) = 0$$

沿以相切的曲线. 若在次特征带上引进参数 s,则其方程 $x_i=x_i(s)(i=1,\cdots,n)$ 可由求解下面一组 $2n$ 个常微分方程来确定:

$$\dot{x}_i(s) = Q_{\xi_i},\ \dot{\xi}_i = -Q_{x_i},\ i=1,\dots,n. \qquad (*)$$

这里 $Q(\xi_1,\cdots,\xi_n;x_1,\cdots,x_n)$ 是此线性偏微分算子的主象征,上方加点表示对参数 s 求导,而若 $\xi_i=\varphi_{x_i}$,则方程 $Q=0$ 即此微分算子的特征方程. 于是方程组(*)的适合 $Q=0$ 的解 $x_i=x_i(s)$, $\xi_i=\xi_i(s)(i=1,\cdots,n)$ 就定义了 $Q=0$ 的次特征带. 此特征带位于特征 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)=0$ 上,即是说,若方程

$$\varphi(x_1(s),\dots,x_n(s)) = 0$$

与

$$\xi_i(s) = \varphi_{x_i}(x_1(s),\dots,x_n(s)),\ i=1,\dots,n$$

对 s 的至少一个值成立,则对 s 的一切值恒有 $\varphi(x_1(s),\cdots,x_n(s))\equiv 0$.

参考文献

[1] Courant, R., Methods of mathematical physics. Partial differential equations, 2, Interscience, 1965 (译自德文) (中译本:柯朗,希尔伯特,数学物理方法,卷 II,科学出版社,1977).

Б. Л. Рождественский 撰

【补注】 次特征带在 x 空间中的投影 $x_i=x_i(s)$ 称为次

特征曲线(bicharacteristic curves)(或射线). 由于主象征作为$(\xi_1,\cdots,\xi_n)$的函数是齐性的,其阶数等于该偏微分算子的阶数,所以次特征曲线切于特征超曲面$\varphi(x_1,\cdots,x_n)=0$ (亦见**微分算子的主部**(principal part of a differential operator),**算子的象征**(symbol of an operator)).

这些材料现在的标准参考书是[A1]或其较早的也更简要的版本[A2].

参考文献

[A1] Hormänder, L., The analysis of linear partial differential operators, 1, Springer, 1983, 271; 302.

[A2] Hormänder, L., Linear partial differential operators, Springer, 1963, 29; 31(中译本, L. 霍曼德尔, 线性偏微分算子, 科学出版社, 1980).

齐民友 译

双复形 [**bicomplex** 或 double complex, binary complex; **бикомплекс**]

一个分次模, 即可以表示成其子模 $A^{m,n}$ 的直和 $\sum A^{m,n}$ 的模, 连同一对微分

$$d_1: A^{m,n} \to A^{m+1,n},$$

$$d_2: A^{m,n} \to A^{m,n+1},$$

并满足下述条件:

$$d_1 \cdot d_1 = 0,\ d_2 \cdot d_2 = 0,\ d_2 d_1 + d_1 d_2 = 0.$$

代替直和, 也可以考虑集合$\{A^{m,n}\}$以及满足上述条件的微分:

$$d_1: A^{m,n} \to A^{m-1,n},$$

$$d_2: A^{m,n} \to A^{m,n-1}.$$

В. Е. Говофов 撰

【补注】

参考文献

[A1] MacLane, S., Homology, Springer, 1963.

周伯埙 译

双连通空间 [**biconnected spaces**; **бисвязное пространство**]

不能分解为两个含有多于一点的连通不相交真子集之并的空间.

А. А. Мальцев 撰 方嘉琳 译

双循环半群 [**bicyclic semi-group**: **бициклическая полугруппа**]

具有单位元和两个生成元 a, b 并服从单个生成关系 $ab=1$ 的半群. 双循环半群的一个实现是 Descartes 乘方 $\mathrm{N}\times\mathrm{N}$, 其中 N 是非负整数集, 运算是

$$(k, l)*(m, n) = (k+m-\min(l, m), l+n-\min(l, m)).$$

双循环半群是**逆半群**(inversion semi-group)且是单演的(monogenic), 即由单个元素生成的. 双循环半群的**幂等元**(idempotent)形成一个链, 它按正数的类型排序. 双循环半群是双单的, 见**单半群**(simple semi-group).

双循环半群常出现在半群理论的研究中, 不仅作为某种重要的半群类的代表, 而且也作为确定单个半群结构的"建筑块". 例如, 对一个 0-单的, 但非完全 0-单的半群 S 的任何幂等元 e, 在 S 中存在一个包含 e 作为单位元素的双循环子半群(见[1], 2.7 段). 前面定义中的双循环半群 B 的元素 a 和 b 分别是它的左和右乘元(multiplying elements)(即在 B 中存在真子集 X 和 Y 使 $aX=B, Yb=B$). 而且在有单位元素的半群 S 中, 元素 c 是左乘元, 当且仅当 S 包含一个双循环半群, 它的单位元素与 c 一致. 相似的定理对右乘元也成立, 从而, S 有左乘元, 当且仅当它也有右乘元.

参考文献

[1] Clifford, A. H. and Preston, G. B., The algebraic theory of semigroups, 1-2, Amer. Math. Soc., 1961-1967.

[2] Ляпин, Е. С., Полугруппы, М., 1960(英译本: Lyapin, E. S., Semigroups, Amer. Math. Soc., 1974).

Л. Н. Шеврин 撰 石生明 译 许以超 校

双柱面坐标 [**bicylindrical coordinates**; **бицилиндрические координаты**]

三个数 τ, σ 和 z, 它们同 Descartes 直角坐标 x, y 和 z 之间存在下列关系式:

$$x = \frac{a\sinh\tau}{\cosh\tau-\cos\sigma},\quad y = \frac{a\sin\sigma}{\cosh\tau-\cos\sigma},\quad z = z,$$

其中 $0\leqslant\sigma<\pi$, $-\infty<\tau<\infty$. 坐标曲面是一对具有平行轴的圆柱面族(τ=常数)、与其正交的圆柱面族(σ=常数)和平面(z=常数). 双柱坐标系是作为平面 Oxy 上的双极坐标系沿 Oz 轴平行移动的结果而得到的.

Lamé 系数(Lamé coefficients)是

$$L_\sigma = L_\tau = \frac{a^2}{(\cosh\tau-\cos\sigma)^2},\quad L_z = 1.$$

Laplace 算子是

$$\Delta f = \frac{1}{a^2}(\cosh\tau-\cos\sigma)^2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial\sigma^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial\tau^2}\right]+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Д. Д. Соколов 撰 张鸿林 译

双柱域 [**bicylindrical domain**; **бицилиндрическая область**]

复空间 $\mathbf{C}^2$ 中这样的区域 D, 它可表为两个平面区域 D_1 和 D_2 的 Descartes 积的形式, 即

$$D = \{(z_1, z_2): z_1\in D_1,\ z_2\in D_2\}.$$

双柱域的一个特例是半径 $r=(r_1, r_2)$, 中心在 $a=(a_1,$

a_2)的双圆盘(bidisc)(双柱域(bicylinder))$B(a,r)=\{(z_1,z_2):|z_1-a_1|<r_1,|z_2-a_2|<r_2\}$. $n(n\geqslant3)$个平面区域的 Descartes 积称为多柱域(polycylindrical domain). 用类似的方法可定义多圆盘(多柱).

M. Ширинбеков 撰 钟同德 译

双柱截线 [bicylindrics; бицилиндрика]

当两个圆柱的轴垂直相交时,作为两个圆柱面的交线而得到的两条闭曲线,双柱截线的参数方程是

$$x=a\cos t,\ y=\pm\sqrt{b^2-a^2\sin^2 t},\ z=a\sin t,$$

$$b\geqslant a,$$

其中 a 和 b 分别是两个圆柱的半径,t 是参数. 如果 $a=b$,则双柱截线是一对共轭椭圆.

E. B Шикин 撰 张鸿林 译

Bieberbach 猜想 [Bieberbach conjecture; Бибербаха гипотеза]

L. Bieberbach 在 1916 年提出的一个假说([1]):对于 S 类(class S)的所有函数 $f(z)$,即对于在圆盘 $|z|<1$ 内正则单叶并且在该圆盘内具有展开式

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}c_nz^n$$

的函数 $f(z)$,有估计式 $|c_n|\leqslant n$, $n\geqslant2$;而且只对于 Koebe 函数(Koebe function)

$$f_\theta(z)=z(1-e^{i\theta}z)^{-2}$$

有 $|c_n|=n$,其中 θ 是实数. Bieberbach 就 $n=2$ 的情况证明了他的猜想. 对于 S 类函数寻求系数的精确估计的问题是系数问题(coefficient problem)的一种特殊情况.

由于表述简单而意义重大,Bieberbach 猜想引起许许多多数学家的关注,并刺激了复变函数几何理论中一些不同方法的发展. 在撰写本文时(1977),对于 $n\leqslant6$, Bieberbach 猜想的正确性已被证实. 1923 年, K. Loewner 引入参数法(见参数表示法(parametric representation method)),首先证实了 $n=3$ 的情况;接着又相继出现了估计式 $|c_3|\leqslant3$ 的其他证明,这些证明基于变分方法、参数法和极值度量法. 1955 年,通过同时运用变分方法与参数法给出了关于 $n=4$ 的 Bieberbach 猜想的第一个证明. 而 1960 年借助 Grunsky 单叶性条件得出估计式 $|c_4|\leqslant4$ 就简单得多了. 这一估计式也曾先后通过变分方法和几何方法给出;并运用矩阵形式的 Grunsky 不等式再次推得. 1968 年,借助于 Grunsky 不等式证明了当 $n=6$ 时 Bieberbach 猜想的正确性;而 $n=5$ 的情况则是在 1972 年用变分方法证明的. 至于在试图证明 Bieberbach 猜想的过程中所得到的其他结果,下面这些值得一提.

W. Hayman 得到了关于 $|z|<1$ 内 p 叶函数,特别是 S 类函数系数的渐近性质的一系列结果([4]). 他证明极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|c_n|}{n}=\alpha_f$$

存在,并且 $\alpha_f\leqslant1$,等号只对于 Koebe 函数成立.

有一系列研究是关于局部 Bieberbach 猜想(local Bieberbach conjecture)的,即下述猜想: Koebe 函数至少对于 S 类中就相应拓扑而言接近于它的那些函数给出 $\max|c_n|$(见单叶函数(univalent function)). 已经发现对于任何 $n=3, 4, \cdots$, 存在充分小的 $\varepsilon_n>0$, 使得对于满足条件 $|c_2-2|<\varepsilon_n$ 的函数 $f(z)\in S$, 估计式 $\mathrm{Re}\,c_n\leqslant n$ 成立,并且只对于 $f_0(z)$ 有 $\mathrm{Re}\,c_n=n$.

1925 年, J. E. Littlewood 通过把系数估计归结为对模的(均值)积分的估计首先给出对所有 n 的一个系数估计,就依赖于 n 的阶而言是精确的. И. Е. Базилевич 在 1951 年得到的估计($|c_n|<(e/2)n+$ 常数)及 И. М. Милин 在 1965 年得到的估计($|c_n|<1.243n$, $n\geqslant2$)则更为精密.

至今(1977)的最好估计是 1972 年([7])得到的

$$|c_n|<\sqrt{\frac{7}{6}}\,n<1.081n,\quad n\geqslant2$$

和 1976 年([10])得到的

$$|c_n|<1.0691n,\quad n\geqslant2.$$

关于这一课题研究的回顾,见[2], [3], [9].

参考文献

[1] Bieberbach, L., Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys-Math. Kl*, 1916, 940–955.

[2] Голузин, Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966 (英译本: Goluzin, G. M., Geometric theory of functions of a complex variable, Transl. Math. Monographs, 26, Amer. Math. Soc., 1969).

[3] Милин, И. М., Однолистные функции и ортонормированные системы, М., 1971 (英译本: Milin, I. M., Univalent functions and orthonormal systems, Transl. Math. Monographs, 49, Amer. Math. Soc., 1977).

[4] Hayman, W. K., The asymptotic behaviour of p-valent functions, *Proc. London Math. Soc.* (3), 5 (1955), 257–284.

[5A] Ozawa, M., On the Bieberbach conjecture for the sixth coefficient, *Kodai Math. Sem. Rep.*, **21** (1969), 97–128.

[5B] Ozawa, M., An elementary proof of the Bieberbach conjecture for the sixth coefficient, *Kodai Math. Sem.*

Rep., **21** (1969), 129 – 132.

[6] Pederson, R. N. and Schiffer, M. M., A proof of the Bieberbach conjecture for the fifth coefficient, *Arch. Rat. Mech. and Anal.*, **45** (1972), 161 – 193.

[7] FitzGerald, C. H., Quadratic inequalities and coefficient estimates for the fifth coefficient, *Arch. Rat. Mech. and Anal.*, **46** (1972), 356 – 368.

[8] Широков, Н. А.,《Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР》, **24** (1972), 182 – 200.

[9] Базилевич, И. Е., Математика в СССР за 40 лет. 1917 – 1957, М., **1** (1959), 444 – 472.

[10] Horowitz D., A refinement estimate for univalent functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **54** (1976), 176 – 178.

Е. Г. Голузина 撰

【补注】 事实上，Bieberbach 证明了 $|c_2|\leqslant 2$，然后在脚注中问是否普遍地有 $|c_n|\leqslant n$，见[1].

从 1950 至 1975 年在证明 Bieberbach 猜想的艰苦进程中，M. Schiffer 的变分方法起着主要作用.其详细历史，见 Duren 的著作 [A3].

$n=4$ 的情况是 P. R. Garabedian 和 M. M. Schiffer 在 1955 年证明的.

1984 年，Bieberbach 猜想被出生于法国的美国数学家 Louis de Branges 完全证明 ([A1], [A2]). 事实上，他证明了苏联数学家 Н. А. Лебедев 和 И. М. Милин 的一个著名假设，它甚至比 Bieberbach 猜想更强，见 [3], [A3]. Лебедев - Милин 假设断言，对于 $n=2, 3, \cdots$, 有

$$\Omega_n(0)=\sum_{k=1}^{n-1}\left\{k|\gamma_k|^2-\frac{1}{k}\right\}(n-k)\leqslant 0. \qquad (*)$$

其中数 γ_k 是 $f(z)$ 的对数系数，由下式来定义

$$\frac{1}{2}\log\frac{f(z)}{z}=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k z^k.$$

S 类中每个函数 $f(z)$ 是 Loewner 单叶函数参数族 $\{f(z, t)\}$ $(t\geqslant 0)$的起点 $f(z, 0)$. 该函数族把单位圆盘映射为一个以 C 为极限的连续递增区域族. 标准化使 $f(z, t)/e^t$ 属于 S, Loewner 族的函数满足 Loewner 偏微分方程

$$\frac{\partial f}{\partial t}=z\frac{\partial f}{\partial z}p(z, t),$$

其中 $\mathrm{Re}\, p(z, t)>0$ ([A4], [A3]). De Branges 引入对应于 $f(z, t)/e^t$ 的对数系数 $\gamma_k(t)$ 的函数 $\Omega_n(t)$ 把 (*) 中的权因子 $n-k$ 代以待定的权 $\sigma_{nk}(t)$，其初值为 $n-k$. 他巧妙地运用 Loewner 偏微分方程证明可以选取权 $\sigma_{nk}(t)$，使得对所有 $t\geqslant 0$ 和所有 n，有 $\Omega_n'(t)\geqslant 0$. 该证明也用到 R. Askey 和 G. Gasper 的关于超几何函数的一个复杂的正性结果.因为当 $t\to\infty$ 时，$\Omega_n(t)\to 0$，由此推出 $\Omega_n(0)\leqslant 0$. 后一不等式证明了 Лебедев - Милин 假设 (*)，因而也证明了 Bieberbach 猜想 $|c_n|\leqslant n$. de Branges ([A2])及 C. H. FitzGerald 和 C. Pommerenke ([A5])都对等号的情形作了讨论.

参考文献

[A1] Branges, L. de, A proof of the Bieberbach conjecture, Preprint E - 5 - 84. Steklov Math. Inst. Leningrad (1984), 1 – 21.

[A2] Branges, L. de, A proof of the Bieberbach conjecture, *Acta. Math.*, **154** (1985), 137 – 152.

[A3] Duren, P. L., Univalent functions, Springer, 1983.

[A4] Pommerenke, C., Univalent functions, Vanderhoeck and Ruprecht, 1975.

[A5] FitzGerald, C. H. and Pommerenke, C., The de Branges theorem on univalent functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **290** (1985), 683 – 690.

【译注】

参考文献

[B1] 龚升，比贝尔巴赫猜想，科学出版社，1989.

杨维奇 译

Bieberbach - Eilenberg 函数 [Bieberbach - Eilenberg functions; Бибербаха - Эйленберга функции]，在圆盘 $|z|<1$ 内的

在圆盘 $|z|<1$ 内正则，具有形如

$$f(z)=c_1z+\cdots+c_nz^n+\cdots \qquad (1)$$

的展开式，并且满足条件

$$f(z_1)f(z_2)\neq 1,\quad |z_1|<1,\quad |z_2|<1,$$

的函数 $f(z)$，这些函数组成的类记作 R. 这一函数类是函数类 B 的自然推广，B 中的函数 $f(z)$ 在圆盘 $|z|<1$ 内正则，具有展开式(1)，且对于 $|z|<1$ 有 $|f(z)|<1$. R 中的**单叶函数** (univalent function) 子类记为 $\widetilde{R}$. R 中的函数以 L. Bieberbach([1])的姓命名，他证明对于 $f(z)\in\widetilde{R}$，不等式

$$|c_1|\leqslant 1 \qquad (2)$$

成立，且仅当函数 $f(z)=e^{i\theta}z$ 时等号成立，其中 θ 是实数. R 中的函数也以 S. Eilenberg([2])的姓命名，他证明不等式 (2) 对整个类 R 也成立. W. Rogosinski([3]) 证明: R 中每个函数从属 (见**从属原理** (subordination principle)) 于 $\widetilde{R}$ 中某个函数. 不等式 (2) 蕴涵对于 $f(z)\in R$ 有下列精确不等式

$$|f'(z)|\leqslant\frac{|1-f^2(z)|}{1-|z|^2},\quad |z|<1. \qquad (3)$$

已得到关于 R 中函数的模的如下界限: 若 $f(z)\in R$，则

$$|f(z)|\leqslant\frac{r}{(1-r^2)^{1/2}},\quad |z|=r,\quad 0<r<1, \qquad (4)$$

且仅对于函数 $\pm f(ze^{i\theta}; r)$，式 (4) 成为等式，此处 θ 是

实数且

$$f(z;r)=\frac{(1-r^2)^{1/2}z}{1+irz}.$$

极值度量法 (extremal metric, method of the) 给出 $\widetilde{R}$ 内在展开式(1) 中有定值 $|c_1|=c\ (0<c\leqslant 1)$ 的函数类 $\widetilde{R}(c)$ 的函数模 $|f(z)|$ 的最大值和最小值问题的解: 对于 $f(z)\in\widetilde{R}(c)$, $0<c<1$, 下列精确不等式成立:

$$\operatorname{Im}H(ir;r,c)\leqslant |f(re^{i\theta})|\leqslant \operatorname{Im}F(ir;r,c). \qquad (5)$$

此处函数 $w=H(z;r,c)$ 和 $w=F(z;r,c)$ 把圆盘 $|z|<1$ 映射成关于 w 平面的虚轴对称的区域,其边界属于 w 平面中零点和极点分布具有某种对称性的一个二次微分 (quadratic differential) 的某些轨道或正交轨道的闭包的并集([4],[5]). 通过极值度量法与对称化法的联合运用已得到关于 $\widetilde{R}(c)$ 中函数的某些最佳结果([4]).

关于类 $\widetilde{R}$ 和 R 中函数的许多已有结果是关于把圆盘 $|z|<1$ 映射成不相交区域的函数组的相应结果的推论([6]). 对于无孤立边界点且不含有点 $z=\infty$ 的有限连通区域 G, 与 R 类似的函数类是族 $R_a(G)\ (a\in G)$, 该类函数 $f(z)$ 在 G 内正则且满足条件 $f(a)=0, f(z_1)f(z_2)\neq 1$, 其中 z_1 和 z_2 是 G 内任意点. 类 $R_a(G)$ 又是类 $B_a(G)$ 的推广, $B_a(G)$ 内函数 $f(z)$ 在 G 内正则且使得 $f(a)=0$, 在 G 内 $|f(z)|<1$. 下面的精确估计是 Bieberbach-Eilenberg 结果到 $R_a(G)$ 类函数的推广,也是不等式(3)到 $R_a(G)$ 类函数的推广: 若 $f(z)\in R_a(G)$, 则

$$|f'(z)|\leqslant |1-f^2(z)|\,F'(z,z),\quad z\in G.$$

其中 $F(z,b)\ (b\in G)$ 是 $B_b(G)$ 中满足 $F'(b,b)=\max|f'(b)|$ 的函数.

参考文献

[1] Bieberbach, L., Ueber einige Extremalprobleme im Gebiete der konformen Abbildung, *Math. Ann*, 77 (1916), 153–172.

[2] Eilenberg, S., Sur quelques propriétés topologiques de la surface de sphère, *Fund. Math.*, **25** (1935), 267–272.

[3] Rogosinski, W., On a theorem of Bieberbach-Eilenberg, *J. London Math. Soc.* (1), **14** (1939), 4–11.

[4] Jenkins, J. A., Univalent functions and conformal mappings, Springer, 1958.

[5] Jonkins, J. A., On Bieberbach-Eilenberg functions III, *Trans. Amer. Soc.*, **119** (1965) 2, 195–215.

[6] Лебедев, Н. А., Принцип площадей в теории однолистных функций, М., 1975.

Г. В. Кузьмина 撰

【补注】

参考文献

[A1] Duren, P. L., Univalent functions Springer, 1983.

杨维奇 译

Bieberbach 多项式 [Bieberbach polynomials; Бибербаха многочлены]

逼近于一个函数的极值多项式, 该函数将给定的单连通区域共形映射成一个圆盘. L. Bieberbach([1]) 在讨论共形映射的近似计算问题的过程中首次研究了这种多项式.

设 G 是由曲线 Γ 围成的平面之有限部份中的一个单连通区域, 函数 $w=\varphi(z)$ 把该区域单叶共形地映射成圆盘 $|w|<r_0$ 并满足条件 $\varphi(z_0)=0$ 及 $\varphi'(z_0)=1$, 其中 z_0 是 G 内任意固定的一点, r_0 取决于 z_0. 在由所有满足 $F_n(z_0)=0$ 和 $F_n'(z_0)=1$ 的 n 次多项式 $F_n(z)$ 组成的函数族中, 使积分

$$J(F_n)=\iint_G |F_n'(z)|^2\,dx\,dy$$

达到最小值的多项式 $\pi_n(z)$, 称为 Bieberbach 多项式 (Bieberbach polynomial). 在区域 G 内满足同样条件的所有解析函数组成的函数族中, 映射函数 $w=\varphi(z)$ 使这一积分达到最小值. 如果周线 Γ 满足某些附加的光滑性条件, 则序列 $\{\pi_n(z)\}$ 在闭区域内一致收敛, 并且收敛的速率取决于 Γ 的光滑程度.

参考文献

[1] Bieberbach, L., Zur Theorie und Praxis der konformen Abbildung, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **38** (1914), 98–112.

[2] Келдыш, М. В., 《Матем. сб.》, **5** (47) (1939), 2, 391–401.

[3] Мергелян, С. Н., Некоторые вопросы конструктивной теории функций, М., 1951.

[4] Суетин, П. К., 《Тр. матем. ин-та АН СССР》, 1971, т. 100.

П. К. Суетин 撰

【补注】 添入一篇较好的参考文献 [A1].

参考文献

[A1] Gaier, D., Uorlesungen über Approximation im Komplexen, Birkhäuser, 1980.

杨维奇 译

双因子映射 [bifactorial mapping; бифакторное отображение]

拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的映射 f, 对于每个点 $y\in f(X)$ 的原象 $f^{-1}(y)$, 在 X 的任意开覆盖中, 可选择有限个集合, 使 y 位于它们并的象的内部. 重要的是, 任意多个双因子映射的积是双因子映射. 双因子映射构成因子映射 (factorial mapping) 的一个扩张类, 仍然保持着空间良好的拓扑性质. 于是, 连续双因子 s 映射保持点态可数基, 且具有点态可数基的空间到点态可数型空间上的因子 s 映射是双因子的.

В. В. Филиппов 撰 方嘉琳 译

双函子 [bifunctor; бифунктор]

定义于两个范畴 $\mathfrak{A}$ 与 $\mathfrak{B}$ 的 Descartes 积上并取值于 $\mathfrak{C}$ 中的一个映射 $T:\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}$, 它对每一对对象 A

$\in\mathfrak{A}$, $B\in\mathfrak{B}$ 指定一个对象 $C\in\mathfrak{C}$ 与之对应，并对每一对态射

$$\alpha: A\to A', \ \beta: B\to B'$$

指定一个态射

$$T(\alpha,\beta): T(A',B)\to T(A,B'). \qquad (1)$$

条件

$$T(1_A,1_B)=1_{T(A,B)},$$
$$T(\alpha'\circ\alpha,\beta'\circ\beta)=T(\alpha,\beta')\circ T(\alpha',\beta) \qquad (2)$$

必须满足．在这种情况下，函子 T 对第一个变量是反变的，对第二个是共变的． В. Е. Говоров 撰

【补注】 上面所描述的双函子对第一个变量是反变的，对第二个变量是共变的．更基本的概念是对两个变量都是共变的([A1])，这需要将(1)与(2)换成

$$T(\alpha,\beta): T(A,B)\to T(A',B') \qquad (1')$$

$$T(\alpha'\alpha,\beta'\beta)=T(\alpha',\beta')\circ T(\alpha,\beta). \qquad (2')$$

类似地，我们可以定义对两个变量都是反变的双函子，也可定义对第一个变量共变对第二个变量反变的双函子．

参考文献

[A1] Mitchell, B., Theory of categories, Acad Press, 1965.

周伯埙 译

分歧 [bifurcation; бифуркация]

某些数学分支应用于下列情形时所用的一个术语，在这些情形中某个对象 $\mathscr{D}=\mathscr{D}(\lambda)$ 依赖于一个(不一定是纯量的)参数 λ，并使得在该参数的某个值 λ_0(分歧值 (bifurcation value)或分歧点(bifurcation point))的任何邻域内所考虑的对象 $\mathscr{D}(\lambda)$ 的定性性质并非对所有的 λ 都是一样的．相应的严格的定义随不同的情形而不同，但主要遵从(以一种多多少少修正过的形式)下面两条稍有不同的原则．

A) 所研究的对象 $\mathscr{D}$ 的定性性质是以某种方式与 $\mathscr{D}$ 有联系的其他对象 $\mathscr{O}$ 的存在性．分歧是由以下事实来表征的，即当 λ 变化时，对象 $\mathscr{O}$ 出现或消失(特别是这些对象可以重合，或者某个对象又可以生成 (generate) 几个对象)，见下面第一节．

B) 第一步是决定在什么情况下认为两个对象 $\mathscr{D}(\lambda)$ 是等价的(这个定义必须使所有人们感兴趣的定性性质对等价对象来说是同一的)．在分歧点邻域的 $\mathscr{D}(\lambda)$ 的定性性质的改变，按定义，意味着在该分歧点附近可求得使 $\mathscr{D}(\lambda)$ 不等价的 λ 值．见下面第二节．

1) 在算子理论中原先的对象 $\mathscr{D}(\lambda)$ 是实 Banach 空间中定义在点 $x=0$ 的一个邻域中的依赖于一个实参数 λ 的一个非线性算子 $\Phi(x,\lambda)$，并使得 $\Phi(0,\lambda)\equiv 0$．对每个固定的 λ，对这个 Φ 来说有一些新的对象 $\mathscr{O}$ 与之相联系；它们是非线性算子方程 $\Phi(x,\lambda)=x$ 的解 x．分歧点就是这样一个点，在该点，产生这个方程的一个新的非平凡解．事实上，分歧点是一点 λ_0，使得对任意 $\varepsilon>0$，存在 λ，$|\lambda-\lambda_0|<\varepsilon$，方程 $\Phi(x,\lambda)=x$ 有一个满足条件 $0<\|x(\lambda)\|<\varepsilon$ 的解 $x(\lambda)$．如果 $\Phi(x,\lambda)\equiv\lambda Ax$，其中 A 是一个线性全连续算子 (complete-continuous operator)，则分歧点的概念与 A 的特征值的概念一致．

如果 $\Phi(x,\lambda)$ 是一个非线性全连续算子，它是连续 Fréchet 可微的，并使 $\Phi_x(0,\lambda)\equiv\lambda A$，则只有 A 的特征值才可能是 Φ 的分歧点．由拓扑方法 ([1]，[2]) 可发现 A 的每个奇数重(特别地，单重)特征值是 Φ 的一个分歧点．利用向量场旋转的概念可对偶数重特征值的情形阐述类似的充分条件．

如果 $x=0$ 是方程 $x=\Phi(x,\lambda_0)$ 的一个非孤立解，则 λ_0 是 Φ 的一个分歧点．用变分法 ([1]，[2]) 可证明，如果 $\Phi(x)$ 是 Hilbert 空间中一个非线性全连续算子，它是一个弱连续泛函的梯度，而且 $A=\Phi'(0)$ 是一个全连续自共轭算子，则 A 的所有特征值都是 Φ 的分歧点．在大解情况下，即当 $\lambda\to\lambda_0$ 时，$x(\lambda)\to\infty$，分歧点的概念要作修正．这些概念和结果的重要性在于以下事实，在服从相对弱的限制下，可以建立解 $x=0$ 的分支；特别是，有可能证明非线性问题的解不是唯一的．非线性方程解的分支 (branching of solutions) 理论的解析方法常能给出更精确的信息．

2) 光滑动力系统理论研究单参数(有时也研究双参数 ([6])) 流族(以及串联流族；这里只考虑单参数流族的情形)，以及使分歧为"典型的"的那种条件，亦即在问题中族的小的改变下仍保持自己的特征的条件 ([9])．前述两个原则 A) 和 B) 都是有用的．就原则 B) 而言，认为两个流是等价的，如果存在相空间的同胚把一个流中的轨道转换成另一个流中的轨道，且保持运动的方向．对具有二维相空间的单参数流族的分歧已有一个完全满意的理论 ([7]，[9])，也存在 n 维情形时在一个平衡位置或一个周期解的邻域中的稍有不同的局部理论 ([6])．

在原则 A) 的情形，所研究的与给定的动力系统相联系的对象 $\mathscr{O}$ 是平衡点或周期解，有时是某些不变流形 (主要是环面) 或双曲不变集．对这样一些对象的"产生"——无论是"局部地"源于平衡点或周期解附近的"产生"，还是"半局部地"源于当 $t\to\pm\infty$ 时趋于平衡位置，或周期解的一些轨道所构成的"闭围线"的邻域的"产生"——都研究过了．还有一种分歧也是可能的，它在某种意义下与类似的围线是有联系的，但这时(随着参数 λ 的变化) 围线产生以前分歧已出现了 ([8])．通过以积分方程的形式重写微分方程及周期性条件，并应用适当的

方法([5])常可方便地研究周期解的发展.

3) 不同对象的各种分歧(原先对象的以及与之相联系的对象的分歧)在映射的奇点理论中都会碰到.结果是,分歧这一术语(毋宁说是由此导出的术语)以几种不同的方式应用着(见[10], [6], [11]),但对相应的概念赋予独立的名称更为普遍.这些名称中,例如有通用族(versal families)(或变形)(见[6], [11], [12]),它描述了在某种意义下在所考虑的对象的小的变形下可能发生的所有的分歧.特别是,七种初等突变(elementary catastrophes)([12]),它们是由"典型的" k 参数($k \leqslant 4$)族函数表示的,这些函数中含有具有一个退化临界点的函数,这些函数都定义在该点的邻域中;因此它们描述了相应的分歧.在关于奇点理论的非苏联文献中,"突变"这个术语常用来表示分歧.

参考文献

[1] Красносельский, М. А., Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, М., 1956.

[2] Функциональный анализ, М., 1964.

[3] Красносельский, М. А., Положительные решения операторных уравнений, М., 1962.

[4] Вайнберг, М. М., Вариационные методы исследования нелинейных операторов, М., 1956.

[5] Вайнберг, М. М., Треногин, В. А., Теория ветвления решений нелинейных уравнений, М., 1969.

[6] Арнольд, В. И., 《Успехи матем. наук》, **27** (1972), 5, 119–184.

[7] Андронов, А. А., Леонтович, Е. А., Гордон, Е. Е., Майер, А. Г., Теория бифуркаций динамических систем на плоскости, М., 1967.

[8] Гаврилов, Н. К., Шильников, Л. П., 《Матем. сб.》, **88** (1972), 4, 475–492.

[9] Peixoto, M. M., On bifurcations of dynamical systems, in Proc. Internat. Congress Mathematicians Vancouver, 1974, Vol. 2, Vancouver, 1974, 313–319.

[10] Том, Р., 《Успехи матем. наук》, **27** (1972), 5, 51–57.

[11] Арнольд, В. И., 《Успехи матем. наук》, **30**(1975), 5, 3–65.

[12] Bröcker, P., Lander, L., Differentiable germs and catastrophes, Cambrige Univ. Press, 1975.

Д. В. Аносов, В. А. Треногин 撰

【补注】 分歧理论的一本标准参考书是[A1].分歧问题中对称的出现常常是一种有力的工具([A2]).关于方程解的分歧的情形的更确切的细节,见**解的分支**(branching of solutions).

参考文献

[A1] Chow, S.-N. and Hale, J. K., Methods of bifurcation theory, Springer, 1982.

[A2] Sallinger, D. H., Branching in the presence of symmetry, SIAM, 1983.

叶其孝 译

双调和函数 [**biharmonic function; бигармоническая функция**]

定义在 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n(n \geqslant 2)$ 的一个区域 D 内的实变数函数 $u(x)=u(x_1, \cdots, x_n)$,它具有直到四阶连续的偏导数,且在 D 内满足方程

$$\Delta^2 u \equiv \Delta(\Delta u) = 0,$$

其中 Δ 是 Laplace 算子.这个方程称为双调和方程(biharmonic equation).双调和函数类包括了调和函数类,是多调和函数的一个子类(见**调和函数**(harmonic function);**多调和函数**(poly-harmonic function)).每个双调和函数是坐标 x_i 的解析函数.

在实际应用上,两个变数的双调和函数 $u(x_1, x_2)$ 最为重要.它可用调和函数 u_1, u_2 或 v_1, v_2 表示成

$$u(x_1, x_2) = x_1 u_1(x_1, x_2) + u_2(x_1, x_2)$$

或

$$u(x_1, x_2) = (r^2 - r_0^2) v_1(x_1, x_2) + v_2(x_1, x_2),$$

其中 $r^2 = x_1^2 + x_2^2$, r_0^2 是常数.双调和函数主要的边值问题是:求区域 D 内的一个双调和函数,这个函数及其一阶导数在闭区域 $\bar{D} = D \cup C$ 上连续且在边界 C 上满足条件

$$u\Big|_C = f_1(s), \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_C = f_2(s), \qquad (*)$$

其中 $\partial u / \partial n$ 是在 C 上的法向导数,$f_1(s)$, $f_2(s)$ 是在围道 C 上给定的关于弧长 s 的连续函数.当 D 是圆盘时,由调和函数的 Poisson 积分出发,上述双调和函数的表示式给出了问题(*)的显式解([1]).

两个变数的双调和函数也可用复变数 $z = x_1 + ix_2$ 的两个解析函数 $\varphi(z)$, $\chi(z)$ 表示成:

$$u(x_1, x_2) = \operatorname{Re}\{\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)\} =$$

$$= \frac{1}{2}\{\bar{z}\varphi(z) + z\overline{\varphi(z)} + \chi(z) + \overline{\chi(z)}\}, \quad \bar{z} = x_1 - ix_2,$$

采用这种表示法,可能把任意区域 D 的边值问题(*)化成解析函数的边值问题组,对此,Г. В. Колосов 和 Н. И. Мусхелишвили 详细地给出了一种解法.这种解法在解弹性理论的各种平面问题中得到发展(见**弹性理论的平面问题**(elasticity theory, planar problem of)),其中最重要的双调和函数是应力函数或 **Airy 函数**(Airy functions)([2], [3]).

参考文献

[1] Тихонов, А. Н., Самарский, А. А., Уравнения математической физики, 3 изд., М., 1966 (中译本: А. Н 吉洪诺夫、А. А. 萨马尔斯基, 数学物理方程, 高等教育出版社, 1956).

[2] Мусхелишвили, Н. И., Некоторые основные задачи математической теории упругости, 5 изд., М., 1966 (中译本: Н. И. 穆斯海里什维里, 数学弹性力学的几个基本问题, 科学出版社, 1958).

[3] Лаврентьев, М. А., Шабат, Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, 3 изд., М., 1965 (中译本: М. А. 拉甫伦捷夫、Б. В. 沙巴特, 复变函数论方法, 上下册, 高等教育出版社, 1956).

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 双调和函数的公理法处理类似于调和函数, 由 [A1], [A2] 给出.

参考文献

[A1] Smyrnelis, E. P., Axiomatique des fonctions biharmoniques, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **25** (1975), 1, 35 – 97.

[A2] Smyrnelis, E. P., Axiomatique des fonctions biharmoniques, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **26** (1976), 3, 1 – 47.

吴炯圻、高琪仁 译 卫念祖 校

双全纯映射 [**biholomorphic mapping**; **биголоморфное отображение**], 全纯同构 (holomorphic isomorphism), 全纯 (holomorphism), 伪共形映射 (pseudo - conformal mapping)

单叶共形映射 (conformal mapping) 在多复变量情形的推广. 一区域 $D \subset \mathbf{C}^n$ 到一区域 $D' \subset \mathbf{C}^n$ 上的**全纯映射** (holomorphic mapping) 称为一双全纯映射 (biholomorphic mapping), 如果它是一对一的. 双全纯映射在 D 内是非退化的; 它的逆映射仍然是双全纯映射.

在一双全纯映射下**全纯域** (domain of holomorphy) 映为一全纯域; 全纯函数, 多重调和函数与多重次调和函数在双全纯映射下也都是不变的. 如果 $n>1$, 双全纯映射不是保角的 (除了许多线性映射以外) 并且 **Riemann 定理** (Riemann theorem) 对双全纯映射是不成立的 (例如 $\mathbf{C}^2$ 中的球和多圆盘不能双全纯地相互映射). 一区域 D 到自身上的双全纯映射称为一 (全纯) 自同构 (holomorphic automorphism); 如果 $n>1$, 存在单连通区域, 它们除了恒同映射外都不自同构.

参考文献

[1] Шабат, Б. В., Введение в комплексный анализ, ч. 1 – 2, 2 изд., М., 1976.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 关于双全纯映射的边界性质得到了下列结果. C. Fefferman 定理 (C. Fefferman theorem): 在具有 C^∞ 光滑边界的强伪凸域 (strongly pseudo - convex domains) 之间的双全纯映射可以 C^∞ 光滑扩张成两区域的闭包之间的一个微分同胚, 见 [A3]. 这个结论对如下情形也成立: 区域仅仅是伪凸的, 但其中一个满足关于 Bergman 射影的条件 R (condition R for Bergman projection), 见 [A2]. 对具有 $\mathbf{C}^k$, $k>2$ 边界的强伪凸域, $C^{k-1-\varepsilon}$ ($\varepsilon>0$, 如果 $k=2, 3, \cdots$, 否则 $\varepsilon=0$) 的可扩张性是由 L. Lempert 和 S. Pinčuk 得到的. 对具有实解析边界的 (弱) 伪凸域甚至可全纯扩张到闭包的一个邻域, 见 [A1]. 对真全纯映射 (proper holomorphic mapping) 也有类似的结果.

一个双全纯映射是真的 (即一紧集的原象是紧的), 这是因为 f^{-1} 是连续的. Riemann 定理在下述意义下不成立: 从 $\mathbf{C}^n$ 中的多圆盘到 $\mathbf{C}^m$ 中的球上不存在真全纯映射, 其中任何 $n, m>1$, 见 [A4]. 因此 $\mathbf{C}^n$ ($n \geqslant 1$) 中的函数论强烈地依赖于函数的定义域. 关于 $\mathbf{C}^n$ 中 (单位) 球内的函数论见 [A5]; 关于多圆盘内的函数论见 [A6]. 关于整全纯映射 (entire holomorphic mappings) 和它们的值分布见 [A7].

参考文献

[A1] Baouendi, M. S., Jacobowitz, H. and Treves, F., On the analyticity of CR mappings, *Ann. of Math.*, **122** (1985), 356 – 400.

[A2] Bell, St., Biholomorphic mappings and the $\bar{\partial}$ problem, *Ann. of Math.*, **114** (1981), 103 – 113.

[A3] Fefferman, C., The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudoconvex domains, *Inv. Math.*, **26** (1974), 1 – 65.

[A4] Krantz, S. G., Function theory of several complex variables, Wiley, 1982, Chapt. 10.

[A5] Rudin, W., Function theory in the unit ball in $\mathbf{C}^n$, Springer, 1980.

[A6] Rudin, W., Function theory in polydiscs, Benjamin, 1969.

[A7] Griffiths, Ph. A., Entire holomorphic mappings in one and several variables, Princeton Univ. Press, 1976.

钟同德 译

一一映射 [**bijection** 或 bijective mapping; **биекция**], 亦称双射, 集合 A 到集合 B 的

映射 $f: A \to B$, 使得 A 中不同的元素在 $f(A)=B$ 中有不同的象. 换言之, f 是 A 到 B 上的一对一映射, 即 f 既是**内射** (injection) 也是**满射** (surjection). 一一映射建立了集合 A 和 B 的元素之间的**一一对应** (one - to - one correspondence). 集合 A 到自身的一一映射也称为 A 的置换 (permutation).

О. А. Иванова 撰 张锦文、赵希顺 译

双线性微分 [**bilinear differential**; **билинейный дифференциал**]

Riemann 曲面上的解析微分 (见 **Riemann 曲面上的微分** (differential on a Riemann surface)), 依赖于两点 P, Q, 且有形式

$$f(z, \zeta)\, dz\, d\zeta,$$

其中 z 和 ζ 分别是 P 和 Q 在一个邻域内的局部单值化参数，而 $f(z,\zeta)$ 是 z 和 ζ 的解析函数. 双线性微分用来表示**有限 Riemann 曲面**(finite Riemann surface)上的许多泛函.

参考文献

[1] Schiffer, M. and Spencer, D. C., Functionals of finite Riemann surfaces, Princeton Univ. Press, 1954.

Е. Д. Соломенцев 撰 侯纪欣 译

双线性型 [**bilinear form; билинейная форма**]，在模积 $V\times W$ 上的

双线性映射 (bilinear mapping) $f:V\times W\to A$，其中 V 是一个左单式 A 模，W 是一个右单式 A 模，且 A 是有单位元的环，它亦可视为一个 (A,A) 双模. 如果 $V=W$，则 f 称为模 V 上的双线性型，且亦称 V 有一个由 f 给出的度量结构. 涉及到双线性映射的诸定义亦对双线性型有意义. 因此，我们可以论及关于 V 与 W 中选定基的一个双线性型的矩阵，关于双线性型的元素与子模的正交性，正交直和，非退化性，等等. 例如，如果 A 是域，且 $V=W$ 是 A 上有基 $e_1,\cdots,e_n$ 的有限维向量空间，则对向量

$$v=v_1e_1+\cdots+v_ne_n$$

与

$$w=w_1e_1+\cdots+w_ne_n,$$

该型的值将为

$$f(v,w)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}v_iw_j,$$

这里 $a_{ij}=f(e_i,e_j)$. 变量 $v_1,\cdots,v_n,w_1,\cdots,w_n$ 的多项式 $\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}v_iw_j$ 有时与 f 视为一样的，且称为 V 上的双线性型. 如果环 A 是可换的，则双线性型是(有恒等自同构的)**半双线性型**(sesquilinear form)的特殊情形.

设 A 为可换环. 这时，A 模 V 上的双线性型称为对称的(symmetric)(或反对称的(anti-symmetric)或斜对称的(skew-symmetric))，如果对所有 $v_1,v_2\in V$ 都有 $f(v_1,v_2)=f(v_2,v_1)$ (或 $f(v_1,v_2)=-f(v_2,v_1)$)，而且如果 $f(v,v)=0$，则该双线性型称为交错的(alternating). 一个交错的双线性型是反对称的；但仅当对任意 $a\in A$，由 $2a=0$ 可推得 $a=0$ 时，逆命题亦真. 如果 V 有一有限基，则 V 上的对称(或反对称或交错)型且只有这些双线性型关于这个基有对称(反对称，交错)矩阵. V 上关于对称或反对称型的正交关系是对称的.

V 上的双线性型 f 同 W 上的双线性型 g 称为等距的(isometric)，如果存在 A 模同构 $\varphi:V\to W$ 使得对所有 $v\in V$，

$$g(\varphi(v),\varphi(w))=f(v,w).$$

这个同构称为双线性型的等距同构(isometry of the bilinear form)，且如果 $V=W$ 与 $f=g$，则它称为模 V 的度量自同构(metric automorphism of the module)(或双线性型 f 的自同构(automorphism of the bilinear form)). 一个模的所有度量自同构组成群(双线性型 f 的自同构群(group of automorphisms of the bilinear form f)). 这种群的实例有正交群或者辛群.

设 A 是一可除环，且 f 是 $V\times W$ 上的双线性型；又设 $V/W^{\perp}$ 与 $W/V^{\perp}$ 为 A 上有限维空间. 这时，有

$$\dim V/W^{\perp}=\dim W/V^{\perp},$$

且这个数称为 f 的秩(rank). 如果 V 为有限维的，且 f 为非退化的，则

$$\dim V=\dim W,$$

且对 V 中每组基 $v_1,\cdots,v_n$ 存在 W 中关于 f 对偶的(dual)基 $w_1,\cdots,w_n$；此基由条件 $f(v_i,w_j)=\delta_{ij}$ 来确定，这里 δ_{ij} 为 Kronecker 符号. 如果还有 $V=W$，则子模 $V^{\perp}$ 与 $W^{\perp}$ 分别称为 f 的右核(right kernel)与左核(left kernel)；对于对称与反对称型，右核与左核是相同的，这时简称为核(kernel).

设 f 为 V 上对称或反对称的双线性型. 这时满足 $f(v,v)=0$ 的元素 $v\in V$ 称为迷向元(isotropic element)；子模 $M\subset V$ 称为迷向的(isotropic)如果 $M\cap M^{\perp}\neq\{0\}$，而 M 称为全迷向的(totally isotropic)如果 $M\subset M^{\perp}$. 在双线性型结构的研究中，全迷向子模起着重要的作用(见 **Witt 分解** (Witt decomposition)；**Witt 定理** (Witt theorem)；**Witt 环** (Witt ring)). 亦见对于双线性型结构的**二次型** (quadratic form).

设 A 为可换的，$\mathrm{Hom}_A(V,W)$ 为从 V 到 W 内所有 A 线性映射组成的 A 模，又设 $L_2(V,W,A)$ 为 $V\times W$ 上所有双线性型组成的 A 模. 这时，对 $V\times W$ 上每个双线性型 f 且对每个 $v_0\in V$，公式

$$l_{f,v_0}(w)=f(v_0,w),\ w\in W$$

确定 W 上一个 A 线性型. 对 $w_0\in W$，公式

$$r_{f,w_0}(v)=f(v,w_0),\ v\in V$$

亦相应地确定 V 上一个 A 线性型. 映射 $l_f:v_0\to l_{f,v_0}$ 是 $\mathrm{Hom}_A(V,\mathrm{Hom}_A(W,A))$ 的元素. $\mathrm{Hom}_A(W,\mathrm{Hom}_A(V,A))$ 中映射 r_f 可按类似的方式定义. 映射 $f\to l_f$ 与 $f\to r_f$ 确定 A 模之间的两个同构

$$L_2(V,W,A)\to\mathrm{Hom}_A(V,\mathrm{Hom}_A(W,A))$$

与

$$L_2(V,W,A)\to\mathrm{Hom}_A(W,\mathrm{Hom}_A(V,A)).$$

双线性型 f 称为左非奇异的(left-non-singular)(相应地，右非奇异的(right-non-singular))，如果 l_f (相应地，r_f)是同构；如果 f 既是左非奇异的又是右非奇异的，则称它为非奇异的(non-singular)，否则称为奇异

的(singular)．一非退化的双线性型可能是奇异的．对于相同有限维数的自由模 V 与 W，$V\times W$ 上双线性型 f 是非奇异的当且仅当 f 关于 V 与 W 中任意基的矩阵的行列式是环 A 的可逆元．如下由非奇异双线性型 f 给出的两个同构

$$\mathrm{Hom}_A(V,V)\xrightarrow{l}L_2(V,W,A)$$

与

$$\mathrm{Hom}_A(W,W)\xrightarrow{r}L_2(V,W,A)$$

分别由下列公式

$$l(\varphi)(v,w)=f(\varphi(v),w)$$

与

$$r(\psi)(v,w)=f(v,\psi(w))$$

确定．

两个自同态 $\varphi\in\mathrm{Hom}_A(V,V)$ 与 $\psi\in\mathrm{Hom}_A(W,W)$ 称为关于双线性型 f 共轭的(conjugate)，如果 $\psi=(r^{-1}\circ l)(\varphi)$．

参考文献

[1] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Algebra: Algebraic structures. Linear algebra, 1, Addison-Wesley, 1974, Chapt. 1; 2 (译自法文).

[2] Lang, S., Algebra, Addison-Wesley, 1974.

[3] Artin, E., Geometric algebra Interscience, 1957.

В. Л. Попов 撰 陈公宁 译

双线性泛函 [bilinear functional; билинейный функционал]

从交换环 K 上的模到 K 自身(视为 K 模)的一个**双线性映射** (bilinear mapping)．

М. И. Войцеховский 撰 章 璞 译

双线性积分形式 [bilinear integral form; Билинейная интегральная форма]

二重积分

$$J(\varphi,\psi)=\int_a^b\int_a^b K(x,s)\varphi(x)\overline{\psi(s)}\,dx\,ds,$$

其中 $K(x,s)$ 是给定的实变量的平方可积函数(通常是复值的)，$\varphi(x)$, $\psi(x)$ 是任意平方可积函数(也是复值的)，而 $\overline{\psi(s)}$ 是 $\psi(s)$ 的复共轭函数．如果 $\psi(s)=\varphi(s)$，则 $J(\varphi,\varphi)$ 称为二次积分形式 (quadratic integral form)．

Б. В. Хведелидзе 撰 张鸿林 译

双线性映射 [bilinear mapping; билинейное отображение]，双线性函数 (bilinear function)

一个从 $V\times W$ 到一个 (A,B) 双模 (bimodule) H 的映射 f，并满足条件：

$$f(v+v',w)=f(v,w)+f(v',w);$$

$$f(v,w+w')=f(v,w)+f(v,w');$$

$$f(av,w)=af(v,w);$$

$$f(v,wb)=f(v,w)b;$$

这里 A,B 是有单位元的环，V 是一个左幺 A 模，W 是一个右幺 B 模；$v,v'\in V$, $w,w'\in W$, $a\in A$, $b\in B$ 是任意选取的元素．$\mathbf{Z}$ 上的张量积 $V\otimes W$ 具有自然的 (A,B) 双模结构．设 $\varphi:V\times W\to V\otimes W$ 是一个典型映射，那么任意双线性映射 f 将导出一个 (A,B) 双模同态 $\tilde{f}:V\otimes W\to H$，并且有 $f=\tilde{f}\circ\varphi$．如果 $A=B$ 是交换的，那么所有 $V\times W$ 到 H 的双线性映射的集合 $L_2(V,W,H)$ 关于对 A 中元素逐点定义的加法和乘法运算是一个 A 模，而对应 $f\to\tilde{f}$ 导出 A 模 $L_2(V,W,H)$ 与 A 模 $L(V\otimes W,H)$ 的一个典型同构，这里 $L(V\otimes W,H)$ 是由 $V\otimes W$ 到 H 的所有线性映射构成的集合．

设 V,W 是自由模，它们的基分别为 $v_i(i\in I)$ 与 $w_j(j\in J)$．一个双线性映射 f 由所有 $f(v_i,w_j)(i\in I,j\in J)$ 完全决定，这是因为对任意的有限子集 $I'\subset I$, $J'\subset J$，下列公式成立：

$$f\left[\sum_{i\in I'}a_iv_i,\sum_{j\in J'}w_jb_j\right]=\sum_{\substack{i\in I',\\ j\in J'}}a_if(v_i,w_j)b_j.\qquad(*)$$

反之，在任意选定元素 $h_{ij}\in H(i\in I,j\in J)$ 之后，公式(*)定义了一个从 $V\times W$ 到 H 的双线性映射，这里 $f(v_i,w_j)=h_{ij}$．当 I,J 有限时，矩阵 $\|f(v_i,w_j)\|$ 称为 f 关于给定基的矩阵．

假设给定了一个双线性映射 $f:V\times W\to H$．两个元素 $v\in V$, $w\in W$ 称为关于 f 是正交的，如果 $f(v,w)=0$．两个子集 $X\subset V$ 与 $Y\subset W$ 称为关于 f 是正交的，如果任意 $x\in X$ 与任意 $y\in Y$ 是正交的，如果 X 是 V 的一个子模，那么

$$X^{\perp}=\{w\in W:f(x,w)=0,\ 对一切\ x\in X\}$$

是 W 的一个子模，称为 X 的正交子模 (orthogonal submodule) 或 X 的正交补 (orthogonal complement)．类似地，可以定义 W 的子模 Y 的正交补 $Y^{\perp}$．映射 f 称作右退化的 (right-degenerate) (左退化的 (left-degenerate))，如果 $V^{\perp}\neq\{0\}$ ($W^{\perp}\neq\{0\}$)．子模 $V^{\perp}$ 与 $W^{\perp}$ 分别称作双线性映射 f 的左核 (left kernel) 与右核 (right kernel)．如果 $V^{\perp}=0$ 且 $W^{\perp}=0$，那么 f 称为非退化的 (non-degenerate)；否则，f 称为退化的 (degenerate)．映射 f 称为零映射，如果 $V^{\perp}=W$, $W^{\perp}=V$．

设 $V_i(i\in I)$ 是左 A 模的一个集合，$W_i(i\in I)$ 是右 B

模的一个集合，f_i 是从 $V_i \times W_i$ 到 H 的双线性映射，并且设 V 是 A 模 V_i 的直和，W 是 B 模 W_i 的直和．由下述法则定义的映射 $f:V\times W \to H$，是一个双线性映射：

$$f\left[\sum_{i\in I} v_i, \sum_{i\in I} w_i\right]=\sum_{i\in I} f_i(v_i, w_i),$$

称为映射 f_i 的直和(direct sum of mappings)．这是一个正交(orthogonal)和，即如果 $i\neq j$，则子模 V_i 与子模 W_j 是关于 f 正交的．

双线性映射 f 是非退化的，当且仅当对所有的 $i\in I$，f_i 是非退化的．而且，如果 f 是非退化的，则有

$$V_i^{\perp}=\sum_{j\neq i} W_j,\quad W_i^{\perp}=\sum_{j\neq i} V_j.$$

当 $A=B=H$ 时，一个双线映射称为一个**双线性型**(bilinear form)．

参考文献

[1] Bourbaki, N., Elements of mathematics, Algebra: Algebraic structures. Linear algebra, 1, Addison-Wesley, 1974, Chapt. 1; 2. (译自法文).

[2] Lang, S., Algebra, Addison-Wesley, 1974.

В. Л. Попов 撰　邓邦明 译

双矩阵对策 [**bimatrix game**; **биматричная игра**]

一种两个局中人之间的有限非合作对策(non-cooperative game)．双矩阵对策是由两个维数同为 $m\times n$ 的矩阵 $A=\|a_{ij}\|$ 和 $B=\|b_{ij}\|$ 给定的；这两个矩阵分别是局中人Ⅰ和Ⅱ的支付矩阵(或增益矩阵)．局中人Ⅰ的策略是矩阵的行的选择，而局中人Ⅱ的策略是列的选择．如果局中人Ⅰ选取 i $(1\leqslant i\leqslant m)$，局中人Ⅱ选取 j $(1\leqslant j\leqslant n)$，那么他们的支付(增益)将是分别 a_{ij} 和 b_{ij}；如果 $a_{ij}+b_{ij}=0$ 对于所有 i，j 成立，那么双矩阵对策就变为**矩阵对策**(matrix game)．双矩阵对策理论是非合作对策一般理论中的最简单的分支，但是即使是双矩阵对策，也并非总是 Nash 意义下可解的或强可解的．有各种算法可用来求得双矩阵对策的平衡解：有描述产生平衡解集的所有极值点的 A, B 的子矩阵的方法([1]，[2])；也有把求双矩阵对策的平衡解的问题归结为**二次规划**(quadratic programming)问题的方法([3]，[4]，[5])．

参考文献

[1] Воробьев, Н. Н., 《Теория вероятностей и её применения》, 3 (1958), 3, 318－331.

[2] Kuhn, H. W., An algorithm for equilibrium points in bimatrix games, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 47 (1961), 1657－1662.

[3] Mills, H., Equilibrium points in infinite games, *J. Soc. Ind. Appl. Math.*, 8 (1960), 2, 397－402.

[4] Mangasarian, O. L., Equilibrium points of bimatrix games, *J. Soc. Ind. Appl. Math.*, 12 (1964), 4, 778－780.

[5] Lemke, C. E. and Howson, jr., J. T., Equilibrium points of bimatrix games, *J. Soc. Ind. Appl. Math.*, 12 (1964), 2, 413－423.

Е. Б. Яновская 撰　史树中 译

双峰分布 [**bimodal distribution** 或 doubly-peaked distribution; **бимодальное распределение**]

有两个峰的分布，其概率曲线有两个局部极大点的概率分布．这些局部极大点相应于两个众数值(见**众数**(mode))．这种分布常是"混合"两个**正态分布**(normal distribution)的结果．亦见**多峰分布**(multimodal distribution)；**单峰分布**(unimodal distribution)．

А. В. Прохоров 撰　陈希孺 译

双模 [**bimodule**，或 **double module**; **бимодуль**]

一个 Abel 群 B，它是一个环 R 上的左模和一个环 S 上的右模，并且使得对所有的 $r\in R$, $b\in B$, $s\in S$，有 $(rb)s=r(bs)$．称 B 为一个 (R,S) 双模，或者记 B 为 ${}_RB_S$．双模 B 可以被视为左 $R\otimes S^*$ 模，这里 S^* 是对偶同构(反同构)于 S 的环，$\otimes$ 表示整数环上的张量积，并且 $(r\otimes s)b=rbs$．对每个左 R 模 M，都有 ${}_RM_E$，这里 E 是 M 的自同态环．可以给任意的环 A 一个自然的 (A, A) 双模结构．

Л. А. Скорняков 撰

【补注】一个双模态射(bimodule morphism)是从双模 ${}_RB_S$ 到双模 ${}_RC_S$ 的一个映射，它是左 R 线性的和右 S 线性的．带双模射的 (R,S) 双模范畴是 **Grothendieck 范畴**(Grothendieck category)．

一个 (R,R) 双模(也称为 R 双模) ${}_RB_R$ 的中心被定义为集合 $Z_R(B)=\{x\in B: rb=br$, 对所有 $r\in R\}$．显然 $Z_R(B)$ 是一个双边 $Z_R(R)$ 模．

彭联刚 译

双态射 [**bimorphism**; **биморфизм**]，范畴中的一一态射(bijective morphism in a category)

集合之间的一一映射的概念在范畴理论中的推广之一．在一个范畴 C 中，一个态射 u 称为一个一一态射，如果它既是 C 中的一个**单态射**(monomorphism)又是 C 中的一个**满态射**(epimorphism)．一一态射之积仍为一一态射，即，所有的一一态射组成一个子范畴，它包含所有的同构．在集合的范畴以及在群的范畴中，每一个一一态射都是一个同构．可是，在环的范畴，拓扑空间的范畴，以及无挠的 Abel 群的范畴中，都包含不是同构的一一态射．

И. В. Долгачев, М. Ш. Цаленко 撰　周伯埙 译

二进制计算系统 [**binary computing system**; **двоичная система счисления**]，二进制(binary system)

基为 2 的位值记数系统(见**数的表示法**(numbers, representation of))．在这种系统中，算术运算非常

容易进行．例如，通常的一位加法和乘法在此记数制中可以简化到：$1+1=10$；$1\cdot 1=1$． В. И. Нечаев 撰

【补注】 亦称为二进制算术(binary arithmetic)．

杨东屏 译

二元型 [**binary form**；**бинарная форма**]

两个变量的齐式，即齐次多项式 (polynomial)

$$f=f(x,y)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^{n-k}y^k,$$

这里诸系数 $a_k, k=0,\cdots,n$ 属于一个给定的具有单位元的**交换环** (commutative ring)．这个环可以是整数环 $\mathbf{Z}$、某个代数数域的整数环、实数域 $\mathbf{R}$ 或者复数域 $\mathbf{C}$．数 n 称为二元型的次数 (degree of the binary form)．如果 $n=2$，则 f 称为**二元二次型** (binary quadratic form)．

二元型的理论可以分为代数的 (不变量理论)、算术的 (用型表示数) 及几何的 (二元型的算术极小理论) 方面．($\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$ 中的) 二元型的代数理论之目的，是要构造这种型在系数属于同一域的线性变换下的一组不变量完全系 (见**不变量理论** (invariants, theory of)；亦见 [2] 第 5 章)．二元型的算术理论研究的是形如

$$f(x,y)=b$$

的 Diophantius 方程，其中 $a_0,\cdots,a_n,b\in\mathbf{Z}$，研究它们在环 $\mathbf{Z}$ 中的可解性及解数．其中最重要的结论是 Thue 定理以及它的推广和改进 (见 **Thue - Siegel - Roth 定理** (Thue - Siegel - Roth theorem))．关于这种方程在域 $\mathbf{Q}$ 中的可解性及可能的解数，见 [5]，第 9 章－第 17 章，亦见 **Mordell 猜想** (Mordell conjecture)．二元型的算术极小理论是**数的几何** (geometry of numbers) 的一部分．二元型 f 的算术极小值 (arithmetical minimum) 定义为量

$$m(f)=\inf_{(x,y)\in\mathbf{Z}^2\setminus(0,0)}|f(x,y)|.$$

对 $n=3$ 的情形，证明了

$$m(f)\leqslant\begin{cases}|D/49|^{1/4}, 若\ D>0,\\ |D/23|^{1/4}, 若\ D<0,\end{cases}$$

这里 D 是 f 的判别式，此时它等于

$$18a_0a_1a_2a_3+a_1^2a_2^2-4a_0a_2^3-4a_3a_1^3-27a_0^2a_3^2.$$

这些估计式不可能再改进了．

参考文献

[1] Боревич, З. И., Шафаревич, И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972 (英译本: Borevich, Z. I. and Shafarevich, I. R., Number theory, Acad. Press, 1966).

[2] Гуревич, Г. Б., Основы теории алгебраических инвариантов, М. - Л., 1948.

[3] Landau, E. and Walfisz, A., Diophantische Gleichungen mit endlich vielen Lösungen, Deutsch. Verlag Wissenschaft., 1959.

[4] Lekkerkerker, C. G., Geometry of numbers, Wolters-Noordhoff, 1969.

[5] Mordell, L. J., Diophantine equations, Academic Press, 1969.

А. В. Малышев 撰 张明尧 译 潘承彪 校

二元 Lie 代数 [**binary Lie algebra**；**бинарно лиева алгебра**], BL 代数 (BL-algebra)

域 F 上的线性代数且其中每两个元素生成一个 Lie 子代数．F 上所有二元 Lie 代数组成的类成为一个簇，如果 F 的特征不为 2，这个簇由下面一组等式给出：

$$x^2=J(xy,x,y)=0,\qquad(*)$$

其中

$$J(x,y,z)=(xy)z+(yz)x+(zx)y.$$

如果 F 的特征为 2 且其基数不小于 4，则二元 Lie 代数类不仅可由 $(*)$ 定义，还可由等式

$$J([(xy)y]x,x,y)=0$$

定义．一个解析的局部交错圈的正切代数是二元 Lie 代数，反之亦然．

参考文献

[1] Мальцев, А. И., 《Матем. сб.》, **36** (**78**) (1955), 569－575.

[2] Гайнов, А. Т., 《Алгебра и логика》, **8** (1969), 5, 505－522.

А. Т. Гайнов 撰 章 璞 译

二元 p 进群 [**binary p-adic group**；**бинарная p-адическая группа**]

二阶方阵

$$\begin{Vmatrix}a & b\\ c & d\end{Vmatrix}$$

的无限群 G，其中 a,b,c 及 d 是满足条件

$$ad-bc=1,\ c\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,p),\ d\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,p)$$

的 p 进整数，见 **p 进数** (p-adic number)．设 N 是 G 的下中心列的第 n 个成员或导出列 (G 的高次换位子序列) 的第 n 项，则这种群的形为 G/N 的商群是具有某些极端性质的有限 p 群的例子． А. И. Кострикин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Huppert, B., Endliche Gruppen, 1, Springer, 1979.

石生明 译 许以超 校

二元二次型 [**binary quadratic form** ; **бинарная квадратичная форма**]

两个变量的二次型,即形如

$$f = f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 \qquad (*)$$

的型. 如果 a, b, c 都是整数,则此二元二次型称为整的(integral). 表达式 $d = ac - b^2/4$ 称为二元二次型的判别式(discriminant)或行列式(determinant). 有时表达式 $b^2 - 4ac$ 也称为判别式. 二元二次型的算术理论是由 P. Fermat 首创的,他证明了:任何形如 $4k+1$ 的素数均可表为两个整数的平方和. 二元二次型的理论是由 J. L. Lagrange 及 C. F. Gauss 完成的. 二元二次型理论是 n 个变量的二次型理论的特殊情形;它的算术理论等价于二次域的理想论,是代数数论的渊源之一(见**二次型**(quadratic form); **二次域** (quadratic field)).

判别式为 d 的二元二次型的种数等于 2^{s-1},其中 s 为 d 的不同素因子的个数,这要去掉 $d \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$ 及 $d \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 8)$ 的情形,在这两种情形时 s 要增加 1;如果 $-d$ 是平方数,则不同的二元二次型的个数要加倍. 数 m 在用所有判别式为 d 的二元二次型组成的一个完全组表出时,本质上不同的本原表示的个数 $r(d, m)$ 等于同余式

$$x^2 \equiv -d \ (\mathrm{mod}\, m).$$

的解数. 就一般情形而言,存在一种算法,它把求解给定的二元二次 Diophantine 方程(特别是方程 $f(x, y) = m$)的问题归结为两个二元二次型的算术等价问题.

$a \neq 0$ 的原型 f 的所有整自同构可以表成

$$\left\|\begin{matrix} t - bu/2 & -cu \\ au & t + bu/2 \end{matrix}\right\|,$$

的形状,其中 $t^2 + du^2 = 1$,而 $2t$ 与 u 为整数(见 **Pell 方程** (Pell equation)). 因此,两个型的等价性问题可用二元二次型的约化理论予以解决. H. Minkowski 指出,二元二次正定型的约化理论是二次正定型约化理论的特例. 整二元二次不定型的约化理论可以归结为二次无理数的约化理论(见[2] p. 97－103 及 [3] p. 170－180).

算术函数 $h(d)$(判别式为 d 的整二元二次原型的类数)在数论中起着重要的作用. 已知 $h(d) < +\infty$. 由 Siegel 定理 (Siegel theorem) 可对函数 $h(d)$ 的增长率得出某种结果:令 $d > 0$,则对于任给的 $\varepsilon > 0$ 存在常数 c_ε 及 $c'_\varepsilon > 0$,使得

$$c'_\varepsilon d^{1/2-\varepsilon} < h(d) < c_\varepsilon d^{1/2+\varepsilon}$$

(对 $d < 0$ 也有类似的公式成立).

令 Δ 为一个整数,$\Delta \equiv 1$ 或 $0 (\mathrm{mod}\, 4)$,设若 $s^2 | \Delta$,则 $s = 1$ 或 $s = 2$,又设 $F = \mathbf{Q}(\sqrt{\Delta})$ 是有理数域添加 $\sqrt{\Delta}$ 所得到的二次域. 在域 F 的整理想 $[\alpha_1, \alpha_2]$ 与判别式为 $-\Delta/4$ 的整二次型

$$f(x, y) = \frac{N(\alpha_1 x + \alpha_2 y)}{N[\alpha_1, \alpha_2]}$$

之间可以建立一种对应关系. 由此导出域 F 的理想类和二元二次型的类之间的一个一一对应(不计变为共轭理想类的变换,这个对应是唯一的). 在此对应之下,理想类的乘法确定了二元二次型类的复合.

如同 n 个变数的型的情形一样,二元二次型的理论可以加以推广,把系数 a, b, c 在一个给定的代数数域中的型(*)也包括在内.

关于整型、型的判别式、型的等价、型的类和种,有各种不同的定义. 上面给出的整型的定义属于 L. Kronecker. Gauss ([1])规定 b 是偶数. 在确定等价性(以及型的类)时,只有行列式为 +1 的代换可以考虑;在其他问题中考虑了行列式为 ±1 的代换. [6] 中给出的种的定义比 Gauss 的定义更为广泛.

参考文献

[1] Gauss, C. F., Disquisitiones arithmeticae, Yale Univ. Press, 1966 (译自拉丁文).

[2] Венков, Б. А., Элементарная теория чисел, М.-Л., 1937 (英译本: Venkov, B. A., Elementary number theory, Wolters - Noordhoff, 1970).

[3] Jones, B. W., The arithmetic theory of quadratic forms, Math. Assoc. Amer., 1950.

[4] Гельфонд, А. О., Линник, Ю. В., Элементарные методы в аналитической теории чисел, М., 1962 (英译本: Gel'fond, A. O. and Linnik, Yu. V., Elementary methods in the analytic theory of numbers, M. I. T., 1966).

[5] Landau, E., Vorlesungen über Zahlentheorie, 3, Hirzel, 1927.

[6] Боревич, З. И., Шафаревич, И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972 (英译本: Borevich, Z. I. and Shafarevich, I. R., Number Theory, Acad. Press, 1966).

[7] O'Meara, O. T., Introduction to quadratic forms, Springer, 1973.

А. В. Малышев 撰 张明尧 译 潘承彪 校

二元关系 [**binary relation** ; **бинарное отношение**]

已知集合上的二目谓词(predicate). 该术语有时用来表示由已知集合 A 中元素的序对 (a, b) 组成的集合 $A \times A$ 的子集. 二元关系是**关系**(relation)的特殊情况. 设 $R \subseteq A \times A$. 如果 $(a, b) \in R$,则称元素 a 与元素 b 有二元关系 R. $(a, b) \in R$ 的另一种记号为 aRb.

$A \times A$ 的空子集 $\varnothing$ 和 $A \times A$ 自身,分别称为集合 A 中的空关系 (null relation) 和全关系 (universal relation). 集合 $A \times A$ 的对角线,即集合 $\Delta = \{(a, a): a \in A\}$,是 A 中的相等关系(equality relation) 或恒等

二元关系 (identity binary relation).

设 R, R_1, R_2 是 A 中的二元关系. 除了并 $R_1 \cup R_2$, 交 $R_1 \cap R_2$ 和补 $R'=(A\times A)\setminus R$ 等集合论运算之外, 还有逆运算 (inversion)

$$R^{-1}=\{(a, b): (b, a)\in R\},$$

以及乘法(multiplication)运算

$$R_1\circ R_2=\{(a, b): (\exists c\in A)\ (aR_1c \text{ 和 } cR_2b)\}.$$

二元关系 R^{-1} 称为 R 的逆 (inverse). 二元关系的乘法满足结合律, 但不满足交换律.

集合 A 中的二元关系 R 称为: 1) 自反的 (reflexive), 如果 $\Delta\subseteq R$; 2) 传递的 (transitive), 如果 $R\circ R\subseteq R$; 3) 对称的 (symmetric), 如果 $R^{-1}\subseteq R$; 4) 反对称的 (anti-symmetric), 如果 $R\cap R^{-1}\subseteq\Delta$. 如果二元关系满足 1), 2), 3) 或 4) 中的某些性质, 则其逆关系也满足这些性质. 如果 $R^{-1}\circ R\subseteq\Delta$, 则称二元关系 $R\subseteq A\times A$ 是函数的 (functional).

最重要的几种二元关系是**等价** (equivalence) 关系; **序关系** (order relation) (全序和偏序) 和**函数关系** (functional relation).

Д. М. Смирнов 撰 张锦文、赵希顺 译

二进制单位 [binary unit; двоичная единица], 信息论中的

同比特 (bit).

二项式 [binomial; Бином]

两个代数表达式之和或差, 而这两个代数表达式称为二项式的项, 例如 $a+b$, $5x-y^2/(1+x^2)$, 等等. 关于二项式的幂, 即形如 $(x+y)^n$ 的表达式, 见 **Newton 二项式** (Newton binomial).

张鸿林 译

二项式系数 [binomial coefficients; биномиальные коэффициенты]

Newton 二项式 (Newton binomial) $(1+z)^N$ 的展开式中 z 的各次幂的系数. 二项式系数用

$$\begin{bmatrix}N\\n\end{bmatrix}$$

或 C_N^n 来表示, 并且由下式给出:

$$\begin{bmatrix}N\\n\end{bmatrix}=C_N^n=\frac{N!}{n!(N-n)!}= \tag{1}$$
$$=\frac{N(N-1)\cdots(N-n+1)}{n!},\quad 0\leqslant n\leqslant N.$$

第一种表示法 $\binom{N}{n}$ 是 L. Euler 首先采用的; 第二种表示法 C_N^n 出现在 19 世纪, 可能同把二项式系数解释为从 N 个不同对象中取 n 个对象形成一个**组合** (combination) 而得到的无序组合数有关. 把二项式系数写成算术三角形即 **Pascal 三角形** (Pascal triangle) 的形式是非常方便的, 这个三角形的构造根据二项式系数的下列性质:

$$\begin{bmatrix}N\\n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}N\\n+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}N+1\\n+1\end{bmatrix}. \tag{2}$$

二项式系数以及算术三角形, 在不同程度的发展形式下, 古代数学家已有所了解. B. Pascal (1665) 详细地研究了二项式系数的性质. 除了关系式(2)以外, 在二项式系数之间还有许多其他有用的关系式, 例如,

$$\left.\begin{aligned}
&\begin{bmatrix}N\\n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}N\\N-n\end{bmatrix};\\
&\begin{bmatrix}N\\n\end{bmatrix}=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}m\\k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}N-m\\n-k\end{bmatrix},\quad n\leqslant m\leqslant N-n;\\
&\sum_{k=0}^{N}(-1)^k k^m\begin{bmatrix}N\\k\end{bmatrix}=0,\quad m=0,\dots,N-1;\\
&\sum_{k=0}^{N}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}2n\\n\end{bmatrix};\\
&\sum_{k=0}^{N}\begin{bmatrix}N\\k\end{bmatrix}k(k-1)\cdots(k-r+1)=\\
&=N(N-1)\cdots(N-r+1)2^{N-r};\\
&\sum_{k=0}^{N}(-1)^k\begin{bmatrix}N\\k\end{bmatrix}k(k-1)\cdots(k-r+1)=0.
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

特别是, 由 (3) 可以得到

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{N}\begin{bmatrix}N\\k\end{bmatrix}=2^N;\\
&\sum_{k=0}^{N}(-1)^k\begin{bmatrix}N\\k\end{bmatrix}=0.
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

利用 **Stirling 公式** (Stirling formula) 可以得到二项式系数的近似表达式. 例如, 当 N 远大于 n 时, 有

$$\begin{bmatrix}N\\n\end{bmatrix}\sim\frac{N^n}{n!}.$$

在复数 α 的情况下, 可以把二项式系数按下列公式推广:

$$\begin{bmatrix}\alpha\\n\end{bmatrix}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!},\quad n>0;\quad \begin{bmatrix}\alpha\\0\end{bmatrix}=1.$$

这时, (2)-(4) 中的某些关系式仍然成立, 但是一般地说, 形式有所改变. 例如,

$$\begin{bmatrix}\alpha\\n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\alpha\\n+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha+1\\n+1\end{bmatrix};$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\begin{bmatrix}\alpha\\k\end{bmatrix}=2^\alpha,\quad \mathrm{Re}\,\alpha>-1;$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\begin{bmatrix}\alpha\\k\end{bmatrix}=0,\quad \mathrm{Re}\,\alpha>0.$$

关于二项式系数表,见[2], [3].

参考文献

[1] Korn, G. A. and Korn, T. M., Mathematical handbook for scientists and engineers, McGraw - Hill. 1968.

[2] Большев, Л. Н., Смирнов, Н. В., Таблицы математической статистики, 2 изд., М., 1968.

[3] Table of binomial coefficients, Cambridge, 1954.

Е. Д. Соломенцев 撰 张鸿林 译

二项分布 [**binomial distribution** ; **биномиальное распределение**], Bernoulli 分布 (Bernoulli distribution)

以概率

$$\mathsf{P}\{X=x\} = b_x(n,p) = \binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x}$$

取整数值 $x=0,\cdots,n$ 的随机变量 X 的概率分布,这里 $\binom{n}{x}$ 为二项式系数,p为二项分布的参数,称为正面结果的概率,取值于区间 $0\leqslant p\leqslant 1$. 二项分布是与独立试验序列有关的基本概率分布之一. 设 $Y_1, Y_2,\cdots$ 为一串独立随机变量,各自分别以概率 p 和 $1-p$ 取值 1 和 0 (即所有 Y_i 都有 $n=1$ 时的二项分布). Y_i 之值可视为独立试验的结果,如果第 i 次试验结果为"正面"则 $Y_i=1$,若为"反面"则 $Y_i=0$. 如果总试验次数 n 固定,则这一方案称为 **Bernoulli 试验** (Bernoulli trials),而正面结果的总数

$$X=Y_1+\cdots+Y_n,\quad n\geqslant 1$$

就是带有参数 p 的二项分布.

数学期望 $\mathsf{E}z^X$(二项分布的**生成函数** (generating function))为多项式 $[pz+(1-p)]^n$,若用 Newton 的二项级数表示,则有形式

$$b_0+b_1z+\cdots+b_nz^n$$

("二项分布" 因此得名). 二项分布的**矩** (moment) 由以下公式给出:

$$\mathsf{E}X = np,$$

$$\mathsf{D}X = \mathsf{E}(X-np)^2 = np(1-p),$$

$$\mathsf{E}(X-np)^3 = np(1-p)(1-2p).$$

对任何实数 $y(0<y<n)$,二项分布函数由公式

$$F(y) = \mathsf{P}\{X\leqslant u\} = \sum_{x=0}^{[y]}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$$

所确定,这里 $[y]$ 为 y 的整数部分,

$$F(y)\equiv\frac{1}{B([y]+1,n-[y])}\int_p^1 t^{[y]}(1-t)^{n-[y]-1}\,dt,$$

$\mathrm{B}(a,b)$ 是 Euler 的 B 函数 (beta - function),而右边的积分称为不完全 B 函数 (incomplete beta - function).

当 $n\to\infty$ 时,通过渐近公式 (de Moivre - Laplace 定理 (de Moivre - Laplace theorem))

$$F(y) = \Phi\left[\frac{y-np+0.5}{\sqrt{np(1-p)}}\right]+R_n(y,p),$$

可用标准正态分布函数 Φ 表出二项分布函数,这里对一切实数 y 一致地有

$$R_n(y,p) = O(n^{-1/2}).$$

二项分布的更高阶正态逼近也存在.

如果独立试验次数 n 大而概率 p 小,则概率 $b_x(n,p)$ 可通过 **Poisson 分布** (Poisson distribution) 近似地表达:

$$b_x(n,p) = \binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}\approx\frac{(np)^x}{x!}e^{-np}.$$

当 $n\to\infty$ 而 $0<c\leqslant y\leqslant C$ (c 和 C 都是常数) 时,有渐近公式

$$F(y) = \sum_{x=0}^{[y]}\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}+O(n^{-2}),$$

此处 $\lambda=(2n-[y])p/(2-p)$. 此式对 $0<p<1$ 中的所有 p 一致地成立.

多项分布 (multinomial distribution) 是二项分布的多维推广.

参考文献

[1] Гнеденко, Б. В., Курс теории вероятностей, 5 изд., М., 1969.

[2] Fellew, W. An introduction to probability theory and its applications, 1 - 2, Wiley, 1957 - 1971.

[3] Прохоров, Ю. В., Розанов, Ю. А., Теория Вероятностей, 2 изд., М., 1973.

[4] Прохоров, Ю. В., 《Успехи математических наук》, **8** (1953), 3, 135 - 142.

[5] Большев, Л. Н., Смирнов, Н. В., Таблицы математической статистики, 2 изд., М., 1968.

Л. Н. Большев 撰 陈希孺 译

二项级数 [**binomial series** ; **биномиальный ряд**]

形式为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}z^n = 1+\binom{\alpha}{1}z+\binom{\alpha}{2}z^2+\cdots,$$

的幂级数,其中 n 是整数,α 是任意固定数 (一般地说,是复数),$z=x+iy$ 是复变量,而

$$\binom{\alpha}{n}$$

是**二项式系数** (binomial coefficients). 对于整数 $\alpha=m\geqslant 0$,二项级数化为含 $m+1$ 项的有限和

$$(1+z)^m = 1+mz+\frac{m(m-1)}{2!}z^2+\cdots+z^m,$$

它称为 **Newton 二项式**(Newton binomial). 对于其他 α 值, 当 $|z|<1$ 时二项级数绝对收敛, 当 $|z|>1$ 时二项级数发散. 在单位圆 $|z|=1$ 的边界点上, 二项级数的性状如下所述: 1) 如果 $\mathrm{Re}\,\alpha>0$, 则在一切点上二项级数绝对收敛; 2) 如果 $\mathrm{Re}\,\alpha\leqslant-1$, 则在一切点上发散; 3) 如果 $-1<\mathrm{Re}\,\alpha\leqslant0$, 则在点 $z=-1$ 上发散, 在其他各点上条件收敛. 在使得二项级数收敛的一切点上, 二项级数表示函数 $(1+z)^\alpha$ 的主值, 当 $z=0$ 时, 它等于 1. 二项级数是**超几何级数** (hypergeometric series)的特殊情况.

如果 $z=x$ 和 α 是实数, 并且 α 不是非负整数, 则二项级数的性状如下所述: 1) 如果 $\alpha>0$, 则当 $-1\leqslant x\leqslant1$ 时二项级数绝对收敛; 2) 如果 $\alpha\leqslant-1$, 则当 $-1<x<1$ 时绝对收敛, 当 x 取其他值时发散; 3) 如果 $-1<\alpha\leqslant0$, 则当 $-1<x<1$ 时绝对收敛, 当 $x=1$ 时条件收敛, 当 $x=-1$ 时发散; 当 $|x|>1$ 时, 二项级数总是发散的.

二项级数可能是 I. Newton 在 1664－1665 年首先提出. N.H. Abel 对二项级数进行了彻底的研究([1]), 这是复幂级数理论的起点.

参考文献

[1] Abel, N. H., Untersuchungen über die Reihe $1+m/2x+m(m-1)/2\cdot1x^2+\cdots$, *J. Reine Angew. Math.*, 1(1826), 311－339.

[2] Knopp, K., Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, Springer, 1964 (英译本: Blackie, 1951).

[3] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т 1, М., 1967 (英译本: Markushevich, A. I., Theory of functions of a complex variable, 1, Chelsea, reprint, 1977).

Е Д Соломенцев 撰　张鸿林 译

副法线 [binormal; бинормаль]

过曲线 L 上一点 M_0 且垂直于 L 在 M_0 的密切平面的直线. 若 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ 是 L 的参数表达式, 且 M_0 所对应的参数 t 的值为 t_0, 则过 M_0 的副法线的向量方程为

$$\mathbf{S}(\lambda)=\mathbf{r}(t_0)+\lambda[\mathbf{r}'(t_0),\mathbf{r}''(t_0)].$$

Е. В. Шикин 撰

【补注】 这个定义仅对 $\mathbf{r}''(t_0)$ 与 $\mathbf{r}'(t_0)$ 线性无关的空间曲线(space curve)成立, 即曲线的曲率应不为零.

对于高维 Euclid 空间的曲线, 副法线由 Frénet 标架(见 **Frénet 三面体**(Frénet trihedron))的第二法向量生成, 它垂直于由 $\mathbf{r}'(t_0)$ 和 $\mathbf{r}''(t_0)$ 张成的平面, 并且是 $\mathbf{r}'(t_0)$, $\mathbf{r}''(t_0)$, $\mathbf{r}'''(t_0)$ 的线性组合(见[A1]).

参考文献

[A1] Spivak, M., Differential geometry, 2, Publish or Perish, 1970.

【译注】 在上述副法线向量方程中, 记号 $[\mathbf{r}'(t_0),\mathbf{r}''(t_0)]$ 常记为 $\mathbf{r}'(t_0)\times\mathbf{r}''(t_0)$ 或 $\mathbf{r}'(t_0)\wedge\mathbf{r}''(t_0)$, 它表示 $\mathbf{r}'(t_0)$ 与 $\mathbf{r}''(t_0)$ 的向量积.　沈一兵 译

双正交系 [biorthogonal system; биортогональная система]

一对集合 $\{a_t\}$ 和 $\{\xi_t\}(t\in T)$, 其中 $\{a_t\}$ 是一个(拓扑)向量空间 X 的元素集, $\{\xi_t\}$ 是 X 的(拓扑)对偶空间 X^* 的元素集, 它们满足条件: 当 $t\neq s$ 时,

$$\xi_t(a_s)=\langle\xi_t,a_s\rangle=0,$$

当 $t=s$ 时, $\xi_t(a_t)\neq0$ (这里 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是耦合 X 和 X^* 的典范双线性型). 例如, 一个双正交系可由一组 Schauder 基(Schauder basis)和 x 按它展开的系数所形成的集合来构成. 在一个有标量积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 和基 $\{a_t\}$ 的 Hilbert 空间 H 中, 满足条件

$$\langle a_t,b_s\rangle=\delta_{st}$$

的集合 $\{b_s\}$ 也是一组基, 这里当 $t=s$ 时, $\delta_{st}=1$; 当 $t\neq s$ 时, $\delta_{st}=0$. 这组基称为 $\{a_t\}$ 的对偶(dual)基, 且因为 $H=H^*$, 集合 $\{a_t\}$ 和 $\{b_s\}$ 形成双正交系. 特别是, H 中的基称为规范正交的(orthonormal), 如果它对偶于自身.

然而, 也存在甚至不形成弱基的双正交系; 一个例子是在赋以范数 $\|f\|=\sup|f(x)|$ 的周期连续函数空间中的函数集 e^{ikx}, 其中 $k\in\mathbf{Z}$, $x\in\mathbf{R}$.

М. И. Войцеховский 撰　史树中 译

双平面空间 [biplanar space; бипланарное пространство]

具有两个不相交的 n 维子空间的 $(2n+1)$ 维实射影空间, 这两个子空间可以是实的(双曲型双平面空间)或复共轭的(椭圆型双平面空间), 它的基本群由将每个子空间变换到自身的射影变换所组成. 这两个 n 维子空间称为绝对平面(absolute plane). 与这两个绝对平面相交的实直线的线汇称为绝对线汇(absolute congruence). 这个线汇可作为二重数或复数的代数上 n 维射影空间的一个实模型. 若 $n=1$, 则双平面空间称为双轴空间(bi-axial space). 研究双平面空间中几何图形在基本群运算下不变的性质是双平面几何学(biplanar geometry)的课题. 讨论曲线、曲面和直线线丛理论的双轴几何学(bi-axial geometry)已被详细研究过.

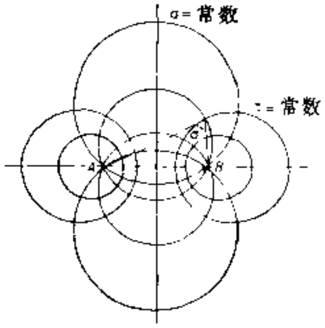
А. П. Широков 撰　沈一兵 译

双极坐标 [bipolar coordinates; биполярные координаты]

两个数 τ 和 σ, 它们同 Descartes 直角坐标 x 和 y 之间存在下列关系式:

$$x=\frac{a\sinh\tau}{\cosh\tau-\cos\sigma},\quad y=\frac{a\sin\sigma}{\cosh\tau-\cos\sigma},$$

其中 $0\leqslant\sigma<\pi$, $-\infty<\tau<\infty$. 坐标曲线是以点 A 和 B 为极点的两个圆族($\tau=$常数), 以及与其正交的一个圆族($\sigma=$常数).



Lamé 系数是

$$L_\tau = L_\sigma = \frac{a^2}{(\cosh\tau - \cos\sigma)^2}.$$

Laplace 算子是

$$\Delta f = \frac{1}{a^2}(\cosh\tau - \cos\sigma)^2 \left\{\frac{\partial^2 f}{\partial\sigma^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial\tau^2}\right\}.$$

空间中的双极坐标(双球坐标(bispherical coordinates))是三个数 σ, τ 和 φ,它们同 Descartes 直角坐标 x, y 和 z 之间存在下列关系式:

$$x = \frac{a\sin\sigma\cos\varphi}{\cosh\tau - \cos\sigma},$$

$$y = \frac{a\sin\sigma\sin\varphi}{\cosh\tau - \cos\sigma},$$

$$z = \frac{a\sinh\tau}{\cosh\tau - \cos\sigma},$$

其中 $-\infty < \sigma < \infty$, $0 \leqslant \tau < \pi$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. 坐标曲面是球面($\sigma$ = 常数), 由圆弧旋转而得到的曲面 (τ = 常数) 和通过 Oz 轴的半平面. 空间中的双极坐标系是由平面 Ozy 上的双极坐标系绕 Oz 轴旋转而形成的.

Lamé 系数是

$$L_\sigma = L_\tau = \frac{a^2}{(\cosh\tau - \cos\sigma)^2},$$

$$L_\varphi = \frac{a^2\sin^2\sigma}{(\cosh\tau - \cos\sigma)^2}.$$

Laplace 算子是

$$\Delta f = \frac{(\cosh\tau - \cosh\sigma)^3}{a^2\sin\sigma}\left[\frac{\partial}{\partial\tau}\left\{\frac{\sin\sigma}{\cosh\tau - \cos\sigma}\frac{\partial f}{\partial\tau}\right\} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial\sigma}\left\{\frac{\sin\sigma}{\cosh\tau - \cos\sigma}\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\} + \frac{1}{\sin\sigma(\cosh\tau - \cos\sigma)}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}\right].$$

参考文献

[1] Madelung, E., Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers, Springer, 1957.

Д. Д. Соколов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Veblen, O. and Whitehead, J. H. C., The foundations of differential geometry, Cambridge Univ Press, 1932.

张鸿林 译

双二次方程 [**biquadratic equation**; **биквадратное уравнение**]

形式为

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

的方程,其中 a, b, c 是已知复数,而 $a \neq 0$. 通过代换 $y = x^2$ 可将双二次方程化为**二次方程** (quadratic equation).

张鸿林 译

双有理几何学 [**birational geometry**; **бирациональная геометрия**]

代数几何学的一个分支,其主要问题是在双有理等价意义下代数簇的分类(见**双有理映射** (birational mapping)). 在一个固定的常数域 k 上,每个双有理等价簇的类定义 k 上一个有限生成域,它同构于这个类中任一簇上有理函数域. 反之,每一个这样的域对应双有理等价簇的类,就是这个域的模型. 因此代数簇的双有理分类等价于 k 上正则的有限生成域(在 k 同构下)分类.

最常见的双有理不变量 (birational invariant) 是代数簇的维数. 对于一维代数簇 —— 不可约代数曲线,每个双有理等价类包含一个非奇异模型 —— 光滑射影曲线,它在 k 同构意义下唯一. 因此,代数曲线的双有理分类归结为光滑射影曲线在 k 同构下的分类,这就导致了**参模问题** (moduli problem). 当维数 $\geqslant 2$ 时问题变得更加复杂. 光滑模型的存在性归结为代数簇的**奇点的化解** (resolution of singularities) 问题, 到目前为止 (1986) 只对曲面以及特征 0 的域上任意维数的簇有了肯定的解决. 在这种情形下,如果这种模型存在,那么在双有理等价簇的类中它们有无穷多个. 在这些模型中**极小模型** (minimal model) 占有特殊的地位. 它们的双有理分类往往等同于 k 同构分类, 就像曲线的情形那样. 不过在一般的情形,甚至对(有理而且直纹)曲面并不正确.

代数曲面分类的主要结果是意大利学派的几何学家得到的 ([1]). 迄今为止 (1986) 对于维数 $\geqslant 3$ 的簇只得到一些孤立的结果 ([3], [7], [8]).

在特征为零的域 k 上,光滑完全代数簇的主要离散双有理不变量包括算术亏格,几何亏格,多重亏格,正则微分形式空间的维数, Severi 挠率, 基本群及 Brauer 群.

双有理几何学的最重要问题之一是代数簇的有理性问题,即**有理簇**(rational variety)的描述问题. 有理簇是双有理等价于射影空间的簇.

当常数域不是代数闭时,双有理几何学的问题与**代数簇的算术**(algebraic varieties, arithmetic of)密切相关. 这种情形的重要问题是对域 k 上给定的簇 V 的双有理 k 形式的描述, 特别是 $V=P_k^n$ 为 k 上射影空间时([2]). 对于簇 V 上双有理变换群的描述是这个问题重要的部分.

参考文献

[1] Алгебраические поверхности, М., 1965.

[2] Манин, Ю. И., Кубические формы, М., 1972 (英译本: Manin, Yu. I., Cubic forms. Algebra, geometry, arithmetic, North - Holland, 1974).

[3] Roth, L., Algebraic threefolds, Springer, 1955.

[4] Шафаревич, И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972 (英译本: Shafarevich, I. R., Basic algebraic geometry, Springer, 1977).

[5] Baldassarri, M., Algebraic varieties, Springer, 1956.

[6] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 12, М., 1974.

[7] *J. Soviet Math.*, 13 (1980), 6.

[8] Iitaka, S., Algebraic geometry, Springer, 1982.

[9] Hartshorne, R., Algebraic geometry, Springer, 1977.

И. В. Долгачев, В. А. Исковских 撰

【补注】 域扩张 K/k 是正则的(regular), 如果 k 在 K 内代数闭, 且 K 与 k 的代数闭包 $\bar{k}$ 是在 k 上线性无缘的. 若 k 代数闭, 则 k 的任意扩张都是正则的, 从而在 k 上簇和支配有理映射的范畴与有限生成域扩张的范畴之间有一个范畴的逆射等价关系, 见 [8], 1.4 节. 对于 3 维的代数簇(双有理)分类, 有许多新的结果, 见 [A1].

参考文献

[A1] Conte, A., (ed.) Algebraic threefolds, Lect. Notes in Math., Vol. 947, Springer, 1982.

【译注】 近年来高维代数簇的双有理分类有突破性进展, 可参见[B1].

参考文献

[B1] Mori, S., Classification of higher - dimensional varieties, *Proc. of Symp. in Pure Math.*, 46 (1987), 269 −331.

陈志杰 译

双有理映射 [birational mapping; бирациональное отображение], 双有理同构 (birational isomorphism)

代数簇之间的有理映射, 它诱导了其有理函数域间的同构. 在更一般的情形, 概形的有理映射 $f: X \to Y$ 称为双有理映射 (birational mapping), 如果它满足以下等价条件之一: 1) 存在稠密开集 $U \subset X$ 以及 $V \subset Y$, 使 f 在 U 上有定义, 并且实现为子概形的同构 $f|_U: U \to V$; 2) 如果 $\{x_i\}_{i\in I}$ 和 $\{y_j\}_{j\in J}$ 分别是概形 X 和 Y 的不可约分支的一般点的集合, f 诱导了集合间的一个一一对应 $\alpha: I \to J$ 以及局部环的同构 $\mathscr{O}_{X,x_i} \to \mathscr{O}_{Y,y_{\alpha(i)}}$, 对每个 $i \in I$.

当概形 X 和 Y 为不可约且约化时, 它们的一般点的局部环分别等同于 X 和 Y 上的有理函数域. 这时根据条件 2), 双有理映射 $f: X \to Y$ 诱导了有理函数域的同构: $R(Y) \simeq R(X)$.

如果存在双有理映射 $f: X \to Y$, 这两个概形 X 和 Y 就称为双有理等价的 (birationally equivalent) 或双有理同构的 (birationally isomorphic). **双有理态射** (birational morphism) 是双有理映射的特殊情形.

最简单的双有理映射是有非奇异中心的**单项变换** (monoidal trans formation). 对于维数 ≤2 的光滑完全簇, 任何双有理映射可被表示成这种变换及其逆变换的复合. 在一般情形, 这个问题至今仍没有解决(1986).

参考文献

[1] Шафаревич, И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972 (英译本: Shafarevich, I. R., Basic algebraic geometry, Springer, 1977).

[2] Hartshorne, R., Algebraic geometry, Springer, 1977.

И. В. Долгачев, В. А. Исковских 撰 陈志杰 译

双有理态射 [birational morphism; бирациональный морфизм]

概形的态射, 它同时又是双有理映射. 双有理态射的最重要的例子有. 正规化、爆发以及单项变换. 正则二维概形间的正常双有理变换可分解为一些具有非奇异中心的**单项变换** (monoidal transformation) (见[2]). 这个结论对高于二维的情形不正确.

参考文献

[1] Grothendieck, A., Dieudonné, J., Eléments de géometrie algébrique, *Publ. Math. IHES*, 8 (1960).

[2] Shafarevich, I. R., Lectures on minimal models and birational transformations of two - dimensional schemes, Tata Inst. Fundam. Res., 1966.

[3] Шафаревич, И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972 (英译本: Shafarevich, I. R., Basic algebraic geometry, Springer, 1977).

[4] Hartshorne, R., Algebraic geometry, Springer, 1977.

И. В. Долгачев, В. А. Исковских 撰 陈志杰 译

双有理变换 [birational transformation; бирациональное преобразование]

代数簇(或概形)到自身的**双有理映射** (birational mapping). 有时也称为**双有理自同构** (birational automorphism). 代数簇的所有双有理变换的群典范地同构于它的常数域上有理函数域的自同构群. 双有理变换的例子有 **Cremona 变换** (Cremona transforma-

tion),特别是射影平面的标准二次变换,它由以下公式给出:

$$(x_0, x_1, x_2) \to (x_1x_2, x_0x_2, x_0x_1),$$

其中 (x_0, x_1, x_2) 是射影平面的齐次坐标.

参考文献

[1] Iskovskikh, V. A., Birational automorphisms of three-dimensional algebraic varieties, *J. Soviet Math.*, 13 (1960), 6, 815-868.

И. В. Долгачев, В. А. Исковских 撰 陈志杰 译

Birkhoff 遍历定理 [Birkhoff ergodic theorem; Биркгофа эргодическая теорема]

遍历理论 (ergodic theory) 中最重要定理之一. 关于具有 σ 有限测度 μ 的空间 X 上的自同态 T, Birkhoff 的遍历定理是指, 对于任意函数 $f \in L_1(x, \mu)$, 极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) = \bar{f}(x)$$

(时间平均值 (time average) 或沿轨道平均值 (average along a trajectory)) 几乎处处存在 (对几乎所有 $x \in X$). 此外, $\bar{f} \in L_1(X, \mu)$; 且若 $\mu(X) < \infty$, 则有

$$\int_X f d\mu = \int_X \bar{f} d\mu.$$

关于具有 σ 有限测度 μ 的空间 X 上的可测流 (measurable flow) $\{T_t\}$, Birkhoff 的遍历定理说,对于任意函数 $f \in L_1(X, \mu)$, 极限

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(T_t x)dt = \bar{f}(x)$$

几乎处处存在,且和 $\bar{f}$ 有相同的性质.

Birkhoff 的定理首先由 G. D. Birkhoff 提出和证明 ([1]). 接着有各种不同的改进和推广 (有一些定理,它们包含 Birkhoff 定理作为特例,还包含一些在概率论中被称为遍历定理的稍许不同类型的命题 (见**遍历定理**) (ergodic theorem); 此外,还有关于变换半群的更一般的遍历定理 ([2])). Birkhoff 的遍历定理及其推广,由于它们考虑的是沿着几乎每一个别轨道所取平均的存在性,因此被称为个体遍历定理 (individual ergodic theorems), 以区别于统计遍历定理 (statistical ergodic theorems)——von Neumann 遍历定理 (von Neumann ergodic theorem) 及其推广. (在非俄文文献中,名词"逐点遍历定理"经常用来强调,平均是几乎处处收敛的.)

参考文献

[1] Birkhoff, G. D., Proof of the ergodic theorem, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 17 (1931), 656-660.

[2] Каток, А. Б., Синай, Я. Г., Стёпин, А. М., в сб., Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 13, М., 1975.

Д. В. Аносов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Krengel, U., Ergodic theorems, W. de Gruyter, 1985.

[A2] Peterson, K., Ergodic theory, Cambridge Univ. Press, 1983.

王斯雷 译 郑维行 校

Birkhoff-Witt 定理 [Birkhoff-Witt theorem; Биркгофа-Витта теорема], Poincaré-Birkhoff-Witt 定理 (Poincaré-Birkhoff-Witt theorem)

一个关于 Lie 代数在结合代数中的表示的定理. 设 G 是一个域 R 上的一个 Lie 代数, $U(G)$ 是它的**泛包络代数** (universal enveloping algebra). 设 $B = \{b_i: i \in I\}$ 是 G 的一组基, 并且以某种方式给定了 B 的一个全序. 那么所有可能的有限积 $b_{\alpha_1}\cdots b_{\alpha_r}$ 构成了 $U(G)$ 的一组基, 这里 $\alpha_1 \leqslant \cdots \leqslant \alpha_r$, 因此标准同态 $G \to U(G)$ 是一个单同态.

对于任意结合代数 R, 能够用换位子运算

$$[xy] = xy - yx$$

来取代 R 中的乘法运算构造一个 Lie 代数 $L(G)$. Birkhoff-Witt 定理有时叙述如下: 对于任意域 k 上的任意 Lie 代数 G, 存在域 k 上的一个结合代数 R, 使得 G 能够同构地嵌入到 $L(R)$ 中.

这个定理中的第一个形式由 H. Poincaré 得到([1]), 后来此定理由 E. Witt ([2]) 与 G. D. Birkhoff ([3]) 完全证明. 如果 k 是一个主理想整环, 特别对于没有算子的 Lie 环, 即 $\mathbf{Z}$ 上的 Lie 环, 定理仍然正确 ([4]). 但是对于任意算子整环上的 Lie 代数的一般情形, 这个定理是不成立的 ([5]).

参考文献

[1] Poincaré, H., Sur les groupes continus, *Trans. Cambr. Philos. Soc.*, 18 (1990), 220-225.

[2] Witt, E., Treue Darstellung Liescher Ringe, *J. Reine Angew. Math.*, 177 (1937), 152-160.

[3] Birkhoff, G. D., Representability of Lie algebras and Lie groups by matrices, *Ann. of Math.* (2), 38 (1937), 2, 526-532.

[4] Lazard, M., Sur les algèbres enveloppantes universelles de certain algèbres de Lie, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 234 (1952), 788-791.

[5] Ширшов, А. И., 《Успехи матем. наук》, 8 (1953), 5, 173-175.

[6] Cohn, P. M., Universal algebra, Reidel, 1981.

[7] Курош, А. Г., Лекции по общей алгебре, *2* изд., М., 1973 (中译本: А. Г. 库洛什, 一般代数讲义, 上海科学技术出版社, 1964).

[8] Serre, J.-P., Lie algebras and Lie groups, Benjamin, 1965 (译自法文).

[9] Cartan, H. and Eilenberg, S., Homological algebra, Pri-

nceton Univ. Press, 1956.

T. C Фофанова 撰 邓邦明 译

生灭过程 [birth - and - death process; рождения и гибели процесс]

具有状态 0, 1, … 的一种 Марков 过程,在时间区间 $(t, t+h)$ 中发生从状态 n 到状态 $n+1$ 和 $n-1$ 的转移的概率分别是 $\lambda_n(t)h+o(h)$ 和 $\mu_n(t)h+o(h)$,而发生其他转移的概率是 $o(h)$. 对于特别选定的再生系数 $\lambda_n(t)$ 和死亡系数 $\mu_n(t)$,可以得到用来满意地描述各种现实过程的特殊实例,例如放射性蜕变、电话局的呼唤流、生物群体的演化等等.生灭过程在应用中得到广泛的利用这一事实,应归因于转移概率方程的简单性,它常常可以显式地解出.例如,在 Poisson 过程的情形,$\lambda_n(t)=\lambda$, $\mu_n(t)=0$,概率 $P_n(t)$ ($P_n(t)$ 是从状态 0 出发的过程在时刻 t 处于状态 n 的概率)满足方程组

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t)$$

$$P_n'(t) = -\lambda P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t), \quad n \geqslant 1,$$

其中

$$P_n(0) = \begin{cases} 1, & 若 n=0, \\ 0, & 若 n\neq 0. \end{cases}$$

这组方程的解是:

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}, \quad n=0, 1, \ldots.$$

更一般的过程是这样的过程,其中 $\lambda_n(t)=n\lambda$, $\mu_n(t)=0$. 这种类型的过程首先被 G. Yule (1924)联系着演化的数学理论进行研究. Yule 过程(Yule process)是从一般生灭过程中假定 $\lambda_n(t)=\lambda_n$, $\mu_n(t)=0$ 所得到的纯生过程(pure birth process)的特例.如果 λ_n 增长非常迅速,那么在有限的时间内可能以正概率通过所有状态,这时

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) < 1.$$

对一个纯生过程,条件

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) = 1$$

成立,当且仅当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n$ 发散.如果 $\lambda_n(t)=n\lambda+\nu$, $\mu_n(t)=n\mu$,那么这样的生灭过程是一个带迁移的**分支过程** (branching process),其中状态 n 表示粒子的个数.每一个粒子在时间区间 $(t, t+h)$ 内以 $\mu h+o(h)$ 的概率死亡,以 $\lambda h+o(h)$ 的概率分裂成两个粒子.此外,一个粒子从外部移入的概率为 $\nu h+o(h)$. 如果 $\nu=0$,便得到最简单的无迁移的分支过程 (branching process without immigration).如果 $\lambda=0$ 和 $\nu>0$,这种类型的带迁移的过程可以用来描述具有无穷多条线路的电话局的作用.这里状态是占线的个数.再生系数 $\lambda_n(t)=\nu$ 刻画了输入电话呼唤的速度,而 μ 是通话的平均时间.

参考文献

[1] Feller, W., An introduction to probability theory and its applications, 1-2, Wiley, 1957-1971 (中译本: W. 费勒, 概率论及其应用,科学出版社, 1964, 1979).

[2] Севастьянов, Б. А., Теория ветвящихся процессов, в кн.: Итоги науки. Серия Математика, т. 14-Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, 1967. М., 1968, 5-46.

[3] Saaty, R. L., Elements of queueing theory with applications, McGraw - Hill, 1961.

В. П. Чистяков 撰

【补注】

参考文献

[A1] Athreya, K. B. and Ney, P. E., Branching processes, Springer, 1972.

【译注】

参考文献

[B1] 王梓坤, 生灭过程与马尔科夫链,科学出版社, 1980 (Wang Zikun and Yang Xianggun, Birth and death processes and Markov chains, Science Press & Springer - Verlag, 1992).

陈培德 译

平分面 [bisector plane; биссекторная плоскость], 二面角的

通过二面角的棱并把二面角平分的平面.

张鸿林 译

平分线 [bisectrix; биссектриса], 角的

从角的顶点发出且平分这个角的半直线(射线).换言之,角平分线是那些位于角内部且到角的两边距离相等的点的集合.三角形的平分线(bisectrix of a triangle)是从一个顶点到其内角平分线与对边交点的线段(也指其长度).三角形的平分线把三角形的一条边分成和其两邻边成比例的线段.三角形的诸平分线交于一点,这个点是三角形内切圆的圆心.设 A, B 为三角形 ABC 的两个顶点,K 为角 C 的平分线和 AB 的交点,L 为角 C 的外角平分线和 AB 的交点,则四元点组 A, B, K, L 形成一个**调和四元组** (harmonic quadruple).

А. Б. Иванов 撰

杨 路、张景中、侯晓荣 译

比特 [bit; бит]

信息的二进制单位,数值上等于两个互不相容事件作等概率 ($p_1=p_2=1/2$) 二择一试验所得到的信息量: $I(p_1, p_2)=-p_1\log_2 p_1-p_2\log_2 p_2=\log_2 2=1$ "比特",其中对数以 2 为底.比特是最常用的单位,但也使用其他的信息单位,如"哈特莱"或"奈特",它们的定义分别取十进对数与自然对数.

А. В. Прохоров 撰

【补注】 这个定义出自信息论．在计算机科学中术语"比特"通常指"0"或"1"的表示，这种表示可以由能够产生两个不相容的状态的适当的物理设备来实现．有时术语"比特"甚至指设备本身．奈特或哈特莱在西方是不知道的． 沈世镒 译

Бицадзе方程 [Bitsadze equation; Бицадзе уравнение]
一个偏微分方程，其复形式为

$$4w_{\bar z\bar z} \equiv w_{xx}+2iw_{xy}-w_{yy} = 0,$$

其中 $w(z)=u+iv$，$z=x+iy$，它可化为具有实的自变量 x 和 y 的椭圆方程组：

$$u_{xx}-u_{yy}-2v_{xy}=0,$$

$$v_{xx}-v_{yy}+2u_{xy}=0.$$

在半径 ε(ε充分小)的圆盘 $C:|z-z_0|<\varepsilon$ 上 Бицадзе方程(及他的共轭方程)的齐次 Dirichlet 问题有无穷多个线性无关正则解(见[1])．非齐次方程 $w_{\bar z\bar z}=f$ 在圆盘 C 上的 Dirichlet 问题，由于既非 Fredholm 型又非 Noether 型，因此，按 Hausdorff 意义正规可解；这同一问题在其边界包含直线 $y=0$ 的某一段的域中不是一个 Hausdorff 问题，虽然齐次问题仅有零解(见[2])．

参考文献

[1] Бицадзе. А. В.,《Успехи матем. наук》, 3(1948), 6(28), 211－212.

[2] Бицадзе. А. В., Красвые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М., 1966(英译本：Bitsadze, A.V., Boundary value problems for second - order elliptic equations, North - Holland, 1968).

[3] Miranda, C., Partial differential equations of elliptic type, Springer, 1970(译自意大利文).

[4] Berş, L., John, F. and Schechter, M., Partial differential equations, Interscience, 1964.

A. M. Нахушев 撰 孙和生 译 陆柱家 校

双向量 [bivector; бивектор]

仿射空间 A 的从一公共原点出发的有序向量对 **u**,**v** 的类[**u**,**v**](在基础空间的一组基中考虑)．一个双向量被认为等于零，指它的组成向量 **u** 和 **v** 共线．一个非零双向量生成 A 中唯一的一个二维空间，即其承载平面，两个双向量称为平行的，指它们的承载平面是平行的．如果 A 具有有限维数 n，且关于 A 的基础空间的某组基 $e=(\mathbf{e}_1,\cdots,\mathbf{e}_n)$，**u** 的反变坐标为 $(u^1,\cdots,u^n)$，而 **v** 的反变坐标为 $(v^1,\cdots,v^n)$，那么量

$$a_{ij}=\begin{vmatrix} u^i & v^i \\ u^j & v^j \end{vmatrix}=2!u^{[i}v^{j]},\ 1\leqslant i,j\leqslant n,$$

称为对 **u**, **v** 的 Plücker 坐标(Plücker coordinates)．两对向量在同一类中，指它们关于某组基的 Plücker 坐标一致(因而它们在任何基下都相等)．这个类的坐标称为在基 e 下双向量[**u**,**v**]的坐标(coordinates of the bivector)．这些坐标关于它们的指标是反对称的；它们包含 $\binom{n}{2}$ 个独立坐标．在向 A 的另一组基的变换下，双向量的坐标像二次反变张量的坐标一样变化．双向量也称为自由双向量(free bivector)．在 A 中引进内积之后，向量代数的一些度量概念可以推广到双向量．一个双向量的测度是由向量 **u**, **v**, －**u**, －**v** 首尾相接而形成的平行四边形的面积．这个面积仅依赖于所在的类，而与具体的表示 **u**, **v** 无关．两个双向量的内积是一个数，它等于各因子测度与两承载平面之间夹角余弦之积．这个积是其因子坐标的一个双线性型，其系数由空间 A 的度量张量单独定义．

如果 A 的维数为 3，那么双向量[**u**, **v**]可以等同于 A 的一个向量，与纯量积的概念对照，它称之为向量 **u**, **v** 的**向量积**(vector product)．

在张量分析(tensor calculus)中，一个双向量是一任意二阶反变反对称张量(即一(2, 0)型张量)．每个这种张量可以表示为一些张量的和，在上述意义下，它们对应于具有不同承载平面的非零双向量．这些平面定义了双向量的叶(sheets of the bivector)．由一个双向量的坐标组成的 $n\times n$ 维反对称矩阵的秩是一偶数 2ρ，其中 ρ 是该双向量的叶数．在一实仿射空间 A 中，这个矩阵相似于矩阵

$$\begin{Vmatrix} J_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & J_\rho & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 0 \end{Vmatrix}$$

其中分块

$$J_j=\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix},\ 1\leqslant j\leqslant\rho.$$

亦见**外积**(exterior product)，**多向量**(poly - vector)，**Plücker 坐标**(Plücker coordinates)．

参考文献

[1] Schouten, J. A., Tensor analysis for physicists, Cambridge Univ. Press, 1951.

Л. П. Купцов 撰

【补注】 如果指定非零双向量(**u**, **v**)为它所生成的平面，即在 A(的基础向量空间)中二平面的 Grassmann 对应点，那么在该 **Grassmann 流形**(Grassmann manifold)中，这个元素的 Plücker 坐标可等同于该双向量的 Plücker 坐标．

参考文献

[A1] Cartan, E., Geometry of Riemannian spaces (With

notes and appendices by R. Hermann) Math. Sci. Press, 1983 (译自法文).
[A2] Golab, S., Tensor calculus, Elsevier Sci. Publ (译自波兰文).
[A3] Rashewski, P. K., Riemannsche Geometrie und Tensoranalyse, Deutsch. Verlag Wissenschaft., 1959 (译自俄文).

杨 路、张景中、侯晓荣 译

双向量空间 [bivector space ; бивекторное пространство]

一个**中心仿射空间**(centro - affine space) E_N(这里 $N=n(n-1)/2$). 它可以被指派给具有一仿射联络的空间 A_n(特别地,一个 Riemann 空间 V_n)的每一点. 考虑所有这样的张量,它们在空间 A_n(或 V_n)的一点具有偶的共变和反变阶;这些共变和反变指标划分为不同的对,对于其中的每一对,该张量是反对称的. 具有这样两个性质的张量称为双张量(bitensors). 如果把每个反对称的对看作是一个共同的指标,那么新指标的个数就是 $N=n(n-1)/2$. 最简单的双张量是**双向量**(bivector)

$$v_{\alpha\beta}=-v_{\beta\alpha}=v_a,\ \alpha,\ \beta=1,\ \cdots,\ n;\ a=1,\ \cdots,\ N.$$

如果在 A_n 的一点 P,

$$A^{\alpha}_{\beta}=\left[\frac{\partial\overline{x}^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}\right]_P,\ A^a_b=2A^{[\alpha}_{\gamma}A^{\beta]}_{\delta}=A^{[\alpha}_{[\gamma}A^{\beta]}_{\delta]},$$

$$v^a=v^{\alpha\beta},\ v^b=v^{\gamma\delta},$$

那么 $\overline{v}^a=A^a_b v^b$,并且在一给定点指派给 A_n(或 V_n)的双向量集定义了一维数为 N 的向量空间,使得分量满足条件

$$\overline{v}^b=A^b_a v^a,\ v^a=\overline{A}^a_b\overline{v}^b$$

$$|A^a_b|\neq 0,\ A^a_b\overline{A}^b_c=\delta^a_c$$

即这个集定义了中心仿射空间 E_N,称为在给定点的**双向量空间**(bivector space). 在 V_n 中双向量空间可借助于如下度量张量度量化

$$g_{ab}=g_{\alpha\beta\gamma\delta}\overset{\text{def}}{=}g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}-g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma},$$

这样,E_N 就成了一个度量空间 R_N.

双向量空间可用于 Riemann 几何和广义相对论中. 双向量空间 R_N 构造于空间 V_n 的一给定点,并且具有分支 $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$, $R^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}$, $R^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}$ 的曲率张量的不同表示分别与具有分支 R_{ab}, R^a_b, R^b_a 的第二阶双张量相联系. 从而对曲率张量代数结构的研究可化为研究二次型束 $R_{ab}-\lambda g_{ab}$,其中第二个是非退化的($|g_{ab}|\neq 0$). 对这个对的初等因子的研究导致了空间 V_n 的一种分类. 如果 $n=4(N=6)$ 且形式 $g_{\alpha\beta}$ 有符号($---+$),那么可以证明仅存在三种 Einstein 空间.

一个双向量可指派于 V_n 中的每个旋转;这意味着在 R_N 中对应着一个向量,它对于无穷小变换的研究是方便的. 尤其是,一个双向量空间等同于一个**双平面空间**(biplanar space) ([2]).

参考文献

[1] Петров, А. З., Новые методы в общей теории относительности, М., 1966.
[2] Норден, А. П., 《Уч. зап. Каз. ун-та》, **114** (1954), 45 – 53.

А. З. Петров 撰

【补注】 考虑一个如在[A1],[A4]或在条目**双向量**(bivector)中由一个有序向量对(**u**, **v**)所表示的双向量. 如果(**u**, **v**)的 Plücker 坐标 $p^{ij}=u^iv^j-u^jv^i$,则如同上条目中的内容所述,(**u**, **v**)构成一个双向量. 设 $\overline{\mathbf{u}}=A\mathbf{u}$, $\overline{\mathbf{v}}=A\mathbf{v}$,即 $\overline{u}^i=A^i_ju^j$ 且对 v 类似,则 p^{ij} 如 $p^{ij}=2A^{[i}_kA^{j]}_lp^{kl}$ 而变换. 前面的公式即由此而来. 上面 $A^{[i}_kA^{j]}_l$ 中的方括号是表示取一交错的平均的记号. 因此 $A^{[1}_kA^{2]}_l=(A^1_kA^2_l-A^2_kA^1_l)/2$. 如果某些指标被挑出,即免除参加这个平均过程,那么就用 ‖ 来标明. 因而

$$A^{[i|j|k|l]}_m=(A^{ijkl}_m-A^{ikjl}_m-A^{ilkj}-A^{ljki}_m+A^{lkji}_m+A^{likj}_m)/6,$$

$$g_{ab}=2g_{\alpha[\gamma}g_{|\beta|\delta]},$$

见上. 这里由 R. Bach[A5]引入的记号. 亦见**交错**(alternation).

用更现代的术语来说,这里所叙述的内容是 A_n 上的双向量丛.

中心仿射空间是具有一奇异点的仿射空间,即实际上是一个向量空间. 它不是一个仍很有用的术语.

参考文献

[A1] Cartan, E., Geometry of Riemannian spaces (With notes and appendices by R. Hermann), Math. Sci. Press, 1963 (译自法文).
[A2] Golab, S., Tensor calculus, Elsevier Sci. Publ., 1974 (译自波兰文).
[A3] Rashewski, P. K., Riemannsche Geometrie und Tensoranalyse, Deutsch. Verlag Wissenschaft., 1959 (译自俄文).
[A4] Schouten, J. A., Ricci - calculus, Springer, 1954.
[A5] Bach, R., Zur Weylschen Relativitätstheorie und der Weylschen Erweiterung des Krümmungsbegriffs, *Math. Zeitschr.*, **9** (1921), 110 – 135.

杨 路、张景中、侯晓荣 译

Björling 问题 [Björling problem ; Бьёрлинга задача]

极小曲面(minimal surface)理论中的一个问题,即求过已知的非封闭解析曲线 L,且沿 L 有给定切平面的极小曲面. 极小曲面的 Björling 问题类似于微分方程的 Cauchy 问题. 这个问题由 E. G. Björling 提出

并解决([1]). 这个问题的解总是存在、唯一的, 且可用极小曲面的 Schwarz 公式来显式表达. Björling 问题的解使我们只要知道所求极小曲面上的一条测地线, 或一条渐近线, 或一条曲率线, 就可求出这个极小曲面. 若给定曲线 L 是平面曲线, 并且是所求极小曲面上的测地线, 则曲线 L 所在的平面是该极小曲面的对称平面.

参考文献

[1] Björling, E. G., Arch Grunert, IV (1844), 290.

[2] Darboux, G., Leçons sur la theorie génerale des surfaces et ses applications géometriques du calcul infinitesimal, 1, Gauthier - Villars, 1887.

[3] Blaschke, W., Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie, 1, Springer, 1921.

[4] Nitsche, J. C. C., Vorlesungen über Minimalflächen, Springer, 1975.

И. Х. Сабитов 撰 沈一兵 译

Blaschke 积 [Blaschke product ; Бляшке произведение], Blaschke 函数(Blaschke function)

单位圆 $K=\{z:|z|<1\}$ 内的单复变数 z 的正则解析函数, 它由下述有限或无穷乘积所定义:

$$B(z) = z^n \prod_k \frac{|a_k|}{a_k}\frac{a_k - z}{1-\bar{a}_k z}, \qquad (*)$$

其中 n 为非负整数, $a_k \in K\setminus\{0\}(k=1,2,\cdots)$ 点列 $\{a_k\}$ 使得 (*) 右边的乘积为收敛(收敛条件仅对无穷乘积是必须的). Blaschke 积由 W. Blaschke ([1]) 所引入并且他证明了下述定理: 点 $a_k \in K\setminus\{0\}$ 的序列 $\{a_k\}$ 定义一形如 (*) 的函数, 当且仅当级数 $\sum_k(1-|a_k|)$ 收敛. 形如

$$b_k(z) = \frac{|a_k|}{a_k}\frac{a_k - z}{1-\bar{a}_k z}$$

的因子称为关于 a_k 的 Blaschke 因子 (Blaschke factor), 它定义圆 K 到自身的一个单叶共形映射, 并将 $z=a_k$ 变为零, 且满足正规化条件 $b_k(-a_k/|a_k|)=1$. 形如 $b_0(z)=z$ 的因子能理解为关于 $z=0$ 的 Blaschke 因子且正规化条件为 $b_0(1)=1$. Blaschke 因子和 Blaschke 积的定义能容易地转移到任意半径的圆盘, 亦能转移到任意的共形等价于一圆的单连通域.

序列 $0,\cdots,0,a_1,a_2,\cdots$($n$ 个零) 通常按照 $|a_k|$ 的非减顺序写出, 它们是 Blaschk 积 (*) 的所有零点 (每一零点按其重级写出次数). 因此, Blaschke 定理刻画所有可能的 Blaschke 积的零点序列. 积 (*) 能考虑作圆盘 K 内具有给定零点序列的最简单的有界全纯函数. 它在 K 内绝对一致收敛, 表示 K 内一个有界全纯函数 $|B(z)|<1$, 且在 ∂K 上几乎处处具有模为 1 的角边界值. K 内有界全纯函数 $f(z)$ (满足 $|f(z)|<1$) 是 Blaschke 积的充要条件是

$$\lim_{r\to 1}\int_0^{2\pi}\ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta = 0.$$

Blaschke 积能用来给出单位圆 K 内一类重要全纯函数的乘积表示. 于是可以给出下述 Blaschke 定理 (Blaschke theorem) 的一个证明: 单位圆盘 K 内的点列 $\{a_k\}$ 是某个有界全纯函数 $f(z)$ (满足 $|f(z)|<1$) 的所有零点的序列, 当且仅当级数 $\sum_k(1-|a_k|)$ 收敛, 并且 $f(z)$ 能表为一个乘积

$$f(z)=B_f(z)g(z),$$

其中 $B_f(z)$ 是 $f(z)$ 的零点构成的 Blaschke 积, 而 $g(z)$ 是 K 内无零点的全纯函数, $|g(z)|\leq 1$ 且能用积分公式简单地表示. 从有界函数出发, 对于有界型函数和 **Hardy 类** (Hardy classes) ([2]-[4]) 能构造类似的表示 (见**有界型函数** (function of bounded form)).

М. М. Джрбашян 大大地推广了上述理论 ([5], [6]), 他构造了更广泛的无穷乘积, 适合于相当大一类亚纯函数的因子分解. 此外, 对于双连通区域 ([7]), 甚至一般地, 对多连通区域 ([8]), 建立类似的 Blaschke 积和 Blaschke 定理的问题亦已得到解决. 对于多复变数的全纯函数构造适当的类似 Blaschke 积的问题, 由于这类函数的零点不是孤立的, 因而处理非常困难.

参考文献

[1] Blaschke, W., Eine Erweiterung des Satzes von Vitali über Folgen analytischer Funktionen, *Berichte Math.-Phys. Kl., Sächs. Gesell. der Wiss. Leipzig*, **67** (1915), 194-200.

[2] Привалов, И. И., Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.-Л., 1950 (中译本: И. И. 普里瓦洛夫, 解析函数的边界性质, 科学出版社, 1956).

[3] Nevanlinna, R., Analytic functions, Springer, 1970.

[4] Collingwood, E. F. and Lohwater, A. J., The theory of cluster sets, Cambridge University Press, 1966.

[5] Джрбашян, М. М., Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., 1966.

[6] Джрбашян, М. М., 《Успехи матем. наук》, **28** (1973), 4, 3-14.

[7] Касьянюк, С. А., 《Матем. сб.》, **42** (1957), 3, 301-326.

[8] Тамразов, П. М., 《Докл. АН СССР》, **161** (1965), 2, 308-311.

П. М. Тамразов 撰

【补注】 关于 Blaschke 积和相关问题的一些标准的参考文献是 [A1], [A2] 和 [A3].

参考文献

[A1] Duren, P. L., Theory of H^p spaces, Acad Press, 1970.

[A2] Rudin, W., Real and complex analysis, McGraw-Hill, 1974.

[A3] Garnett, J. B., Bounded analytic functions, Acad

Press, 1981.

何育赞 译 容尔谦 校

Blaschke 选择定理 [**Blaschke selection theorem** ; **Бляшке теорема выбора**], Blaschke 紧性原理(Blaschke compactness principle)

凸体构成的度量空间是局部紧的. 这就是说, 包含在一个给定立方体内的凸体的无穷集合中, 可以选出一个序列, 它收敛于这个立方体内的某个凸体.

这个定理在 1916 年为 W. Blaschke ([1]) 所证明.

参考文献

[1] Blaschke, W., Kreis und Kugel, Chelsea, reprint, 1949.

А. Б. Иванов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Kelly, P. J. and Weiss, M. L., Geometry and convexity, Wiley, 1979.

虞言林 译

Blaschke - Weyl 公式 [**Blaschke - Weyl formula** ; **Бляшке - Вейля формула**]

Green 公式(Green formulas) 的一种变体:

$$2\iint_{G}\left(\mathbf{x}\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial u}\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial v}\right)du\,dv = \oint_{\partial G}(\mathbf{x}\mathbf{y}\,d\mathbf{y}).$$

这里 **x** 是曲面的位置向量, **y** 是曲面**无穷小形变**(infinitesimal deformation)的旋转场. 利用 Blaschke - Weyl 公式证明卵形面刚性的思想属于 W. Blaschke ([1])和 H. Weyl([2]). 其他应用见[3]. **Herglotz 公式**(Herglotz formula)类似于 Blaschke - Weyl 公式. 这个公式已被推广到常曲率空间中曲面无穷小形变的情形.

参考文献

[1] Blaschke, W., Ein Beweis für die Unverbiegbarkeit geschlossener konvexer Flächen, *Gött. Nachr.* (1912), 607 – 610.

[2] Weyl, H., Ueber die Starrheit der Eiflächen und konvexer Polyeder, *Sitzungsber. Akad. Wiss. Berlin* (1917), 250 – 266.

[3] Ефимов, Н. В., 《Успехи матем. наук》, 3 (1948), 2 (24), 47 – 158.

[4] Blaschke, W., Einführung in die Differentialgeometrie, Springer, 1950.

М. И. Войцеховский 撰 沈一兵 译

Bloch 常数 [**Bloch constant** ; **Блоха константа**]

一个由 Bloch 定理(Bloch theorem) 确定其存在的绝对常数. 设 H 是单位圆 $|z|<1$ 内所有满足 $f'(0)=1$ 的全纯函数 $f(z)$ 所成的类. 函数 $f(z)$ 的 Riemann 曲面在其一叶上包含一个半径为 $B_f>0$ 的最大开圆盘. A. Bloch 指出([1])

$$\inf\{B_f: f\in H\} = B > 0.$$

已知的最精确的估计是 $\sqrt{3}/4 \leqslant B \leqslant 0.472$([2]). 由 Bloch 定理导出一个整函数的 Riemann 曲面包含任意大半径的单叶圆; 这等价于 **Picard 定理**(Picard theorem).

参考文献

[1] Bloch, A., Les théorèmes de M. Valiron sur les fonctions entières et la théorie de l'uniformisation, *Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse* (3), 17 (1925), 1 – 22.

[2] Ahlfors, L. V. and Grunsky, H., Über die Blochsche Konstante, *Math. Z.*, 42 (1937), 671 – 673.

[3] Голузин, Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966 (中译本: Г. М. 戈鲁辛, 复变函数的几何理论, 科学出版社, 1956).

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 关于 Bloch 定理与 Picard 定理的关系见 [A1].

参考文献

[A1] Heins, M., Selected topics in the classical theory of functions of a complex variable, Holt, Rinehart and Winston, 1962.

【译注】 关于 Bloch 常数 B 的下界估计 M. Heins ([B1]) 和 Ch. Pommerenke ([B2]) 曾证明 $B>\sqrt{3}/4$, 即 [2] 的结果只保留不等号.

参考文献

[B1] Heins, M., A class of conformal metrics, *Bull. Amer. Soc.*, 67 (1961), 475 – 478.

[B2] Pommerenke, Ch., On Bloch functions, *J. London Math. Soc.*, 2 (1970), 689 – 695.

何育赞 译

区组设计 [**block design** ; **блок - схема**]

有限集的一个子集系, 它满足关于集合的元素偶在该系的子集中出现的频数的某些条件. 区组设计的概念产生于 20 世纪 20 年代和 30 年代的(统计)试验的设计(计划)理论, 但早在 19 世纪中叶就以战术构形的名称而被研究了. 区组设计的概念是超图、网和复形等概念的不同说法. 通常对子集族要加上一系列限制. 一个区组设计可以定义为一个集偶 (V, B), 其中

$$V = \{a_1, \dots, a_v\},\ B = \{B_1, \dots, B_b\},$$
$$B_i \subseteq V,\ i=1, \dots, b.$$

集合 V 的元素称为区组设计的点(point), 或处理(treatment), 或品种(variety), 或元素(element), 而集合 B 的元素则称为它的区组(block). 若 $a_i\in B_j$, 则元素 a_i 和区组 B_j 是关联的(incident). 与 B_j 关联的元素个数 $|B_j|$ 通常记为 k_j, 而与 a_i 关联的区组个数则记为 r_i. 数

$$|\{B_j: a_i\in B_j,\ a_l\in B_j\}|$$

记为 λ_{jl}. 这组数 $v, b, r_i, k_j, \lambda_{il}(i,l=1,\cdots,v;\ j=1,\cdots,b)$ 称为这个区组设计的参数(parameters of the block design). 如果对所有 $i=1,\cdots,v$ 有 $r_i=r$, 对所有 $j=1,\cdots,b$ 有 $k_j=k$, 并且对所有 $i\neq l$ 有 $\lambda_{il}=\lambda$, 则 (V,B) 是一个参数为 v, b, r, k, λ 的平衡不完全区组设计(balanced incomplete block design), 简记为 BIB 设计. "平衡"一词的意思是所有元素和元素偶在区组中出现的频数分别相同, 而"不完全"一词所指的是, 一般来说, 并非所有的 k 元集都在 B 中.

设数 $\lambda_{il}(i,l=1,\cdots,v)$ 中恰有 m 个不同的数, 并设在集合 V 的元素上引进 m 个对称的结合关系(association relation), 它们满足下述条件:

1) V 的不同元素组成的所有元素偶的集合 V^2 可分成 m 个互不相交的子集 $V_1^2,\cdots,V_m^2$. 并且若 $(a,a')\in V_j^2$, 则 a 和 a' 称为 j 结合的;

2) $|\{B_j: a\in B_j,\ a'\in B_j,\ (a,a')\in V_i^2\}|=\lambda_i,\ i=1,\cdots,m,\ j=1,\cdots,b$;

3) $|\{a:\exists a',\ (a,a')\in V_i^2\}|=n_i,\ i=1,\cdots,m$;

4) $|\{a'':\ (a'',a)\in V_j^2,\ (a'',a')\in V_k^2,\ (a,a')\in V_i^2\}|=p_{jk}^i$, 而且由于对称性, 有 $p_{jk}^i=p_{kj}^i$. $i,j,k=1,\cdots,m$.

具有性质 1)－4) 的区组设计称为具有 m 类型关系的部分平衡不完全区组设计(partial balanced incomplete block design with m types of relations)或 PBIB(m) 设计. 指明结合关系的法则称为结合设计(association design). 一个 BIB 设计是一个 PBIB(1) 设计. PBIB(2) 设计的一个例子是可以表示成表

1	1	1	2	2	2	3	3	3
4	5	6	4	5	6	4	5	6
7	8	9	9	7	8	8	9	7
10	11	12	11	12	10	12	10	11

的区组设计, 其中同一列的任意二数是 1 结合的, 而不同列的任意二数是 2 结合的, 这里的 $v=12$, $b=9$, $r=3$, $k=4$, $\lambda_1=1$, $\lambda_2=0$, $n_1=9$, $n_2=2$.

$$P^1=\|p_{jk}^1\|=\begin{Vmatrix}6&2\\2&0\end{Vmatrix},\quad P^2=\|p_{jk}^2\|=\begin{Vmatrix}9&0\\0&1\end{Vmatrix}.$$

每个 v 元 b 区组的区组设计对应于一个关联矩阵(incidence matrix) $A=\|c_{ij}\|$, 其中当 $a_i\in B_j$ 时 $c_{ij}=1$, 否则 $c_{ij}=0$, $i=1,\cdots,v$; $j=1,\cdots,b$. 区组设计理论研究具有给定参数的区组设计的存在和分类问题以及与构造这种设计有关的问题. 区组设计的诸参数以一定方式互相联系着. BIB 设计的参数满足下述方程:

$$vr=kb, \tag{1}$$
$$\lambda(v-1)=r(k-1).$$

PBIB(m) 设计的参数则除满足方程(1)外还满足关系式

$$\sum_{i=1}^{m}n_i=v-1,$$
$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i n_i=r(k-1),$$
$$\sum_{k=1}^{m}p_{jk}^i=\begin{cases}n_j & 若\ i\neq j,\\ n_j-1 & 若\ i=j,\ i,j=1,\ldots,m,\end{cases}$$
$$n_i p_{jk}^i=n_j p_{ik}^j=n_k p_{ij}^k,\quad i,j,k=1,\ldots,m,$$

BIB 设计的关联矩阵满足基本矩阵关系(fundamental matrix relation)

$$AA^T=(r-\lambda)E+\lambda J, \tag{2}$$

其中 E 是 v 阶单位阵, J 是 v 阶元素都是 1 的矩阵. 存在满足条件(2)的 (0, 1) 矩阵是存在具有给定参数的 BIB 设计的一个充分条件. 从(2)可得不等式 $b\geqslant v$. 当 $b=v$(亦即 $r=k$)时的 BIB 设计称为对称区组设计或 (v,k,λ) 构形((v,k,λ)-configuration). 下述定理适用于对称区组设计: 如果存在具有参数 v, k, λ 的对称区组设计, 则: 1) 当 v 是偶数时, $k-\lambda$ 是完全平方; 2) 当 v 是奇数时, 方程

$$z^2=(k-\lambda)x^2+(-1)^{(v-1)/2}\lambda y^2$$

具有 x, y, z 不全是零的一组整数解. 这个定理的条件对于存在满足方程(2)的有理矩阵 A 来说也是充分的.

涉及存在 BIB 设计的一类特殊问题是这样产生的: 给出 b 个区组, 找出把它们补足成为一个 BIB 设计的条件. 这些条件的最一般形式可表为某二次型 Q 的正定性要求, 即把 Q 表为一些具有非负系数的线性形式的平方和.

对 BIB 设计的下述子类研究得最多: Steiner 系(Steiner system, 即 $\lambda=1$ 时的 BIB 设计), 尤其是 Steiner 三元系(Steiner triple system, 即 $k=3$ 的情形); Hadamard 构形(Hadamard configuration, 即 $v=b=4t-1$, $r=k=2t-1$, $\lambda=t-1$, $t\geqslant2$ 的情形), 其关联矩阵从 **Hadamard 矩阵**(Hadamard matrix)得出; 仿射有限几何和射影有限几何([1]). 在 PBIB 设计类中研究得最多的是 PBIB(2) 设计, 按照其结合设计的情况还可再分成可分组区组设计(group-divisible block design), 三角形区组设计(triangular block design), 拉丁方型区组设计(Latin square block design), 循环区组设计(cyclic block design)等.

构造区组设计的方法通常分成直接的(direct)和递推的(recursive)两种. 后一方法可以利用较小参数的设计来构造较大参数的设计. 而直接方法则常利用有限域的性质或某些几何性质.

区组设计被用于试验设计, 博奕论, 图论以及构作纠错码.

参考文献

[1] Ryser, H. J., Combinatorial mathematics, Wiley, 1963.

[2] Hall, M., Combinatorial theory, Waltham (MA), 1967.

[3] Широкова, С. А., 《Успехи матем. наук》, 23 (1968), 5, 51 – 98.

B. E. Тараканов 撰

【补注】 给出以 v, k, λ 为参数的对称 BIB 设计存在条件的定理称为 Bouck - Ryser - Chowla 定理 (Bouck - Ryser - Chowla theorem).

【译注】

参考文献

[B1] 魏万迪, 组合论(下册), 科学出版社, 1987.

李 乔 译 钟 集 校

分块对角算子 [block - diagonal operator ; диагонально клеточный оператор], 关于 Hilbert 空间 H 的一个给定的正交分解 $H=\sum_{k\geqslant 1}\oplus H_k$ 的

H 上一个线性算子 A, 它对每个子空间 $H_k(k\geqslant 1)$ 是不变的. A 的谱是诸"分块" $A|_{H_k}=A_k$ $(k\geqslant 1)$ 的谱的并的闭包, $\|A\|=\sup_{k\geqslant 1}\|A_k\|$. 在广泛的意义下, 一个分块对角算子是在 Hilbert 空间的直接积分中乘以函数 λ 的算子 A:

$$H=\int_M \oplus H(t)\,d\mu(t),\quad (Af)(t)=\lambda(t)f(t),\quad t\in M.$$

这里 $\lambda(t)$ 是作用于空间 $H(t)$ 上的线性算子. 每个与一个正规算子交换的算子, 关于这个正规算子的谱分解, 是一个分块对角算子. 亦见**对角算子** (diagonal operator).

参考文献

[1] Наймарк, М. А., Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968 (英译本: Naimark, M. A., Normed rings, Reidel, 1984).

Н. К. Никольский Б. С. Павлов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Halmos, P. R., A. Hilbert space problem book, Springer, 1982.

李炳仁 译

Blotto 对策 [Blotto games ; Блотто игры]

一类正规形式的**二人零和对策** (two - person zero - sum game), 其中局中人的纯策略(见**策略(对策论中的)** (strategy (in game theory))) 是有限资源 (可分割的或不可分割的) 在多个对象上的分配, 而增益或支付等于个体对象的增益或支付之和. 这一对策是以一个虚构的 Blotto 上校来命名的, 据说他是第一个参预这种类型的对策的人物.

И. Н. Врублевская 撰 史树中 译

Bochner 殆周期函数 [Bochner almost - periodic functions ; Бохнера почти периодические функции]

与 **Bohr 殆周期函数** (Bohr almost - periodic functions) 类等价的函数类, 由 S. Bochner 定义 ([1]). 在区间 $(-\infty,\infty)$ 上连续的函数 $f(x)$ 称为 Bochner 殆周期函数, 如果函数族 $\{f(x+h):-\infty<h<\infty\}$ 按照在 $(-\infty,\infty)$ 上一致收敛的意义是紧的, 即, 在每一个无穷序列 $f(x+h_k)$ $(k=1,2,\cdots)$ 中, 都可以挑选出一个在 $(-\infty,\infty)$ 上一致收敛到 $f(x)$ 的子序列. Bochner 的定义被广泛地应用在殆周期函数理论中; 特别地, 它可作为殆周期概念的抽象推广的出发点.

参考文献

[1] Bochner, S., Beiträge zur Theorie der fastperiodischen Funktionen I, Funktionen einer Variablen, *Math. Ann.*, **96** (1927), 119 – 147.

[2] Левитан, Б. М., Почти - периодические функции, М., 1953 (中译本: Б. М. 列维坦, 概周期函数, 高等教育出版社, 1956).

Е. А. Бредихина 撰

【补注】

参考文献

[A1] Maak, W., Fastperiodische Funktionen, Springer, 1967.

[A2] Amerio, L. and Prouse, G., Almost - periodic functions and functional equations, v. Nostrand, 1971.

朱学贤 译 潘文杰 校

Bochner 积分 [Bochner integral ; Бохнера интеграл]

取值于 Banach 空间的函数关于某数量测度的积分. 它属于所谓的**强积分** (strong integral).

设 $(E,\mathfrak{B},\mu)$ 为由 E 的子集所成 σ 代数 $\mathfrak{B}$ 上带有可数加性数量测度 μ 的测度空间, 并设 $F(X;E,\mathfrak{B},\mu)$ 为定义于 $(E,\mathfrak{B},\mu)$ 上取值于 Banach 空间 X 的函数 $x(t)$ $(t\in E)$ 所成的向量空间. 一个函数 $x_0\in F$ 称为简单的 (simple), 如果

$$x_0(t)=\begin{cases}x_i, & t\in B_i\in\mathfrak{B},\ \mu(B_i)<\infty,\ B_i\cap B_j=\varnothing,\\ 0, & t\in E\setminus\bigcup_{i=1}^{N}B_i,\quad i\neq j;\ i,j=1,\ldots,N.\end{cases}$$

函数 $x\in F$ 称为强可测的 (strongly measurable), 如果存在一列简单函数 $\{x_n\}$, 使条件 $\|x-x_n\|\to 0$ 关于 E 上测度 μ 几乎处处成立. 此时, 数量函数 $\|x\|$ 是 $\mathfrak{B}$ 可测的. 对于简单函数 x_0,

$$\int_E x_0(t)\,d\mu \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{N}x_i\mu(B_i).$$

函数 x 称为 Bochner 可积的 (Bochner integrable), 假如它强可测, 且对某个简单函数组成的逼近序列 $\{x_n\}$, 则有关系式

$$\lim_{n\to\infty}\int_E\|x(t)-x_n(t)\|\,d\mu=0.$$

这样的函数在集合 $B\in\mathfrak{B}$ 上的 Bochner 积分 (Bochner integral) 是

$$\int_B x(t)d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_E \chi_B(t)x_n(t)d\mu,$$

其中 χ_B 是 B 的特征函数，而极限是理解为在 X 的强收敛意义下取的．上述极限存在，并且不依赖于简单函数逼近列的选取．

Bochner 可积性的准则 (criterion for Bochner integrability)：强可测函数 $x\in F$ 是 Bochner 可积的充分必要的条件是，这个函数的范数可积，即

$$\int_B \| x(t)\| d\mu < \infty.$$

Bochner 可积函数全体构成 F 的一个向量子空间 $\mathscr{L}$，且 Bochner 积分是该子空间上的线性算子．

Bochner 积分的性质：

1) $\| \int_B x(t)d\mu \| \leqslant \int_B \| x(t)\| d\mu$.

2) 在 σ 代数 $\mathfrak{B}$ 上，Bochner 积分有可数加性及 μ 绝对连续性，即假如 $B_i\in\mathfrak{B}$, $B_i\cap B_j=\emptyset(i\neq j)$ 且 $\mu(B_i)<\infty$，则

$$\int_{\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i} x(t)d\mu = \sum_{i=1}^{\infty}\int_{B_i}x(t)d\mu,$$

并且，当 $\mu(B)\to 0$ 时，$\|\int_B x(t)du\|\to 0$ 关于 $B\in\mathfrak{B}$ 均匀地成立．

3) 假设 $x_n\in F$, $x_n\to x$ 关于 $B\in\mathfrak{B}$ 上测度 μ 几乎处处成立，$\|x_n\|\leqslant f$ 关于 B 上测度 μ 几乎处处成立且 $\int_B f(t)du<\infty$，则 $x\in\mathscr{L}$ 且

$$\int_B x_n(t)d\mu \to \int_B x(t)d\mu$$

4) 空间 $\mathscr{L}$ 关于范数(见依范数收敛 (convergence in norm))

$$\| x-y \| = \int_B \| x(t)-y(t)\| d\mu$$

是完全的．

5) 假设 T 为 Banach 空间 X 到 Banach 空间 Y 的闭线性算子，又设

$$x \in \mathscr{L}(X;E,\mathfrak{B},\mu),\quad Tx \in \mathscr{L}(Y;E,\mathfrak{B},\mu),$$

则

$$\int_B Tx(t)d\mu = T\int_B x(t)d\mu.$$

假如 T 有界，那么条件

$$Tx \in \mathscr{L}(Y;E,\mathfrak{B},\mu)$$

自动满足([3]－[5])．

Bochner 积分由 S. Bochner 引进 ([1])．T. Hildebrandt ([2]) 以及 N. Dunford 给出了等价的定义(D_0 积分)．

参考文献

[1] Bochner, S., Integration von Funktionen, deren Werte die Elemente eines Vektorraumes sind, *Fund. Math.*, **20** (1933), 262－276.

[2] Hildebrandt, T. H., Integration in abstract spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **59**(1953), 111－139

[3] Yosida, K., Functional analysis, Springer, 1980 (中译本：吉田耕作，泛函分析，人民教育出版社，1981).

[4] Hille, E. and Phillips, R., Functional analysis and semi-groups, *Amer. Math. Soc.*, 1957 (中译本：E.希尔与 R. 菲列浦斯，泛函分析与半群，上海科学技术出版社，1964).

[5] Dunford, N. and Schwartz, J. T., Linear operators, General theory, 1, Interscience, 1958.

В. И. Соболев 撰

【补注】 简单函数也称为阶梯函数(step function)．[A1] 是最近出版的关于取值于 Banach 空间的积分的好的教科书；[A4] 专门讨论 Bochner 积分．

参考文献

[A1] Diestel, J. and Uhl. J. J., Vector measures, Math. Surveys, 15, Amer. Math. Soc., 1977.

[A2] Zaanen, A. C., Integration, North-Holland, 1967.

[A3] Bourbaki, N., Elements of mathematics, Integration, Addison-Wesley, 1975, Chapt, 6; 7; 8 (译自法文).

[A4] Mikusínski, J., The Bochner integral, Academic Press, 1978.

王斯雷 译 郑维行 校

Bochner-Martinelli 表示 [Bochner-Martinelli representation; Бохнера-Мартинелли представление]，Martinelli-Bochner 表示 (Martinelli-Bochner representation), Bochner-Martinelli 公式 (Bochner-Martinelli formula).

全纯函数的一种积分表示，其定义如下 ([1], [2])．命函数 f 在一具有逐块光滑边界 ∂D 的区域 $D\subset \mathbf{C}^n$ 内是全纯的，并且 f 在它的闭包 $\bar{D}$ 上是连续的，那么表达式

$$\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{|\zeta-z|^{2n}}\sum_{j=1}^{n}(\bar{\zeta}_j-\bar{z}_j)d\bar{\zeta}_1\wedge d\zeta_1\wedge\cdots$$
$$\wedge[d\bar{\zeta}_j]\wedge d\zeta_j\wedge\cdots\wedge d\zeta_n =$$
$$=\begin{cases} f(z), & \text{若 } z\in D,\\ 0, & \text{若 } z\notin\bar{D}\end{cases}\qquad(1)$$

称为 Bochner-Martinelli 表示，其中 $[d\bar{\zeta}_j]$ 表示略去项 $d\bar{\zeta}_j$．当 $n=1$ 时，这个表示和 Cauchy 积分公式 (见 **Cauchy 积分** (Cauchy integral)) 是一致的，但当 $n>1$ 时它的核对 z 不是全纯的，这就是 Bochner-Martinelli 表示在多复变函数论中的应用受到限制的原因．Bochner-Martinelli 表示的核 (kernel of the Bochner-Mar-

tinelli representation)是双度为$(n, n-1)$的ζ微分形式:

$$\omega(\zeta, z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \frac{1}{|\zeta - z|^{2n}} \times$$
$$\times \sum_{j=1}^{n} (\bar{\zeta}_j - \bar{z}_j) d\bar{\zeta}_1 \wedge d\zeta_1 \wedge \cdots$$
$$\wedge [d\bar{\zeta}_j] \wedge d\zeta_j \wedge \cdots \wedge d\bar{\zeta}_n \wedge d\zeta_n,$$

它定义在$\mathbf{C}^n$中,在$\zeta=z$处有一奇点,在奇点外是$\bar{\partial}$闭的(即$\bar{\partial}\omega=0$).如果$n>1$,形式ω等于$\partial\omega'(\zeta, z)$,其中

$$\omega'(\zeta, z) = -\frac{(n-2)!}{(2\pi i)^n} \cdot \frac{1}{|\zeta - z|^{2n-2}} \sum_{j=1}^{n} \left[\prod_{k \neq j} d\bar{\zeta}_k \wedge d\zeta_k \right]$$

是一双度为$(n-1, n-1)$的形式,它的系数是 Laplace 方程的基本解;在此

$$\partial\varphi = \sum dz_k \frac{\partial \varphi}{\partial z_k} \quad 和 \quad \bar{\partial}\varphi = \sum d\bar{z}_k \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}_k}.$$

下面的积分表示是公式(1)的拓广,它类似于 Cauchy - Green 公式(Cauchy-Green formula)(见 **Cauchy 积分**(Cauchy integral)):如果函数f在具有逐块光滑边界∂D的区域$D \subset \mathbf{C}^n$的闭包$\bar{D}$上是连续可微的,那么,对任一点$z \in D$,

$$f(z) = \int_{\partial D} f(\zeta)\omega(\zeta, z) - \int_{D} \bar{\partial} f(\zeta) \wedge \omega(\zeta, z). \qquad (2)$$

函数

$$\hat{f}(z) = \int_{\Gamma} f(\zeta)\omega(\zeta, z)$$

称为 Bochner-Martinelli 型积分(integral of Bochner-Martinelli type),其中Γ是$\mathbf{R}^{2n} = \mathbf{C}^n$中的一光滑超曲面,$f$是$\Gamma$上的一个 Lebesgue 可积函数.象 Cauchy 型积分一样,对Γ和f加以通常的限制后,Сохоцкий 公式也可应用到 Bochner - Martinelli 型积分.一个 Bochner - Martinelli 型积分是一个在Γ外处处调和的复函数;一般说来只有当$n=1$时这函数是全纯的.如果$\Gamma = \partial D$,则当$n \geqslant 1$时,在$\bar{D}$外$\hat{f}(z) \equiv 0$这个条件等价于$\hat{f}$在D内的全纯性.

Bochner - Martinelli 表示已应用到论证其他积分表示(例如 **Bergman -Weil 表示**(Bergman - Weil representation)),从边界的全纯开拓,以及多复变量全纯函数的边值理论之中.它是由 S. Bochner ([1])和 E. Martinelli ([2])引进的.

参考文献

[1] Bochner, S., Analytic and meromorphic continuation by means of Green's formula, *Ann. of Math.*, (2), **44** (1943), 4, 652-673.

[2] Martinelli, E., *Rend. Accad. Ital.*, **9** (1938), 269-283.

[3] Владимиров, В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964(英译本: Vladimirov, V. S., Methods of the theory of functions of several complex variables, M. I. T., 1966).

E. M. Чирка 撰

【补注】 Сохоцкий 公式也称为 Plemelj 公式(Plemelj formula). Cauchy - Green 公式也称为 Cauchy - Pompeiu 公式(Cauchy - Pompeiu formula).

Bochner - Martinelli 核是 Cauchy - Fantappié 核(Cauchy - Fantappié kernel)的一种特殊情形.积分表示(2)可求解如下$\bar{\partial}$方程($\bar{\partial}$- equation):

$$\bar{\partial} f = v, \ 且\ \bar{\partial} v = 0,$$

其中V为具紧支集的$(0, 1)$形式,这时在(2)的右端将$\bar{\partial} f$代以V并略去在边界上的积分.当V不具紧支集时,边界积分带来困难.这时对严格伪凸域(strictly pseudo-convex domains)可以求解,并且此时 Bochner - Martinelli 核出现在$\bar{\partial}$方程的显式解算子之中.

参考文献

[A1] Krantz, S., Function theory of several complex variables, Wiley, 1982.

[A2] Henkin, G. M. and Leiterer, J., Theory of functions on complex manifolds, Birkhäuser, 1984.

[A3] Range, R. M., Holomorphic functions and integral representations in several complex variables, Springer, 1986.

【译注】 具有 Bochner - Martinelli 核的 Plemelj 公式最早由陆启铿,钟同德在 1957 年得到([B1]),此后应用在具 Bochner - Martinelli 核的奇异积分方程([B2])等方面.

参考文献

[B1] 陆启铿,钟同德,Привалов 定理的拓广,数学学报,7 (1957), 144-165.

[B2] 钟同德,多复变函数的积分表示与多维奇异积分方程,厦门大学出版社,1986.

钟同德 译

Боголюбов 方程系列 [Bogolyubov chain of equations; Боголюбова цепочка уравнений], BBGKY 方程(Bogolyubov - Born - Green - Kirkwood - Yvon equations)

经典统计系统的单粒子、双粒子等等的分布函数的方程系列.函数定义如下:

$$F_s(t, \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_s, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_s) = \qquad (1)$$
$$= V^s \int w_N \, d\mathbf{r}_{s+1} \cdots d\mathbf{r}_N \, d\mathbf{p}_{s+1} \cdots d\mathbf{p}_N,$$

其中$s=1, 2, \cdots$, V为系统的容积,而w_N为N粒子归一化的分布函数,它满足 **Liouville 方程**(Liouville equation):

$$\frac{\partial w_N}{\partial t} = \{H, w_N\}, \qquad (2)$$

这里括号为 **Poisson 括号**(Poisson brachets)，而 H 为系统的 Hamilton 算子，在热力学极限下 $V\to\infty$，$V/N=v=$ 常数，方程系列具有对于 F_s 的一个方程的形式，并与较高秩的函数 F_{s+1} 有特定的"链接"：

$$\frac{\partial F_s}{\partial t}-\{H_s,F_s\}= \tag{3}$$

$$=\frac{1}{v}\int\left\{\sum_{1\leqslant i\leqslant s}\Phi(|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_{s+1}|),F_{s+1}\right\}d\mathbf{r}_{s+1}\,d\mathbf{p}_{s+1},$$

其中 $\Phi(|r_i-r_{s+1}|)$ 为第 i 个和第 $(s+1)$ 个粒子间的相互作用势，而 H_s 为 s 粒子系统的 Hamilton 算子.

在热力学平衡的条件下，每个粒子的动量分布为 **Maxwell 分布**(Maxwell distribution)，这时考察按粒子坐标的 s 粒子分布函数，它由(1)类型的关系式通过 N 粒子函数

$$w_N(\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_N)=\frac{1}{Q}\exp\left[-\frac{H_1}{\theta}\right] \tag{4}$$

定出，这里 $H_1=H-H_0$，而 H_0 是系统的粒子的动能和，而配置积分 Q 由(4)的归一化条件决定. 这些函数的方程系列有如下形式

$$\frac{\partial F_s}{\partial x_1}+\frac{1}{\theta}\frac{\partial U_s}{\partial x_1}F_s+ \tag{5}$$

$$+\frac{1}{\theta}\frac{1}{v}\int\frac{\partial\Phi(|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_{s+1}|)}{\partial x_1}F_{s+1}\,d\mathbf{r}_{s+1}=0,$$

这里 U_s 是系统的 s 个粒子间相互作用的势能.

分布函数，尤其是 F_1 和 F_2，可以用来表达统计系统的所有特定的特性. 在研究函数(3)或(5)时所遇到的主要困难是由系统的封闭问题(将方程链解开)以及在函数 F_s 的特定边界条件下求解封闭系所引起的. 这一研究对于多种物理系统是重要的且对于短程相互作用情况取得最大进展，这时 $r_0^3/v\ll 1$，此地 r_0 为粒子间相互作用的实效半径，对于长程相互作用当 $r_0^3/v\gg 1$ 时进展亦大，尤其是对于其中静电(Coulomb)力起作用的系统. 在依赖时间的理论中，这直接导致单粒子函数 F_1 的动理论 **Boltzmann 方程**(Boltzmann equation)或 **Власов 动理论方程**(Vlasov kinetic equation)，而在平衡理论中，导致热力学势的**位力分解**(virial decomposition)或特定 Coulomb 修正.

在考察量子统计系统时，BBGKY 系列对于 s 粒子统计量子算子 $<x_1,\cdots,x_s|F_s|x_1',\cdots,x_s'>$ 构成，后者是一般 N 粒子算子——密度矩阵——在粒子的变量 $s+1,\cdots,N$ 之上的踪迹. 这些方程形式与(3)相似，其中经典 Poisson 括弧由量子括弧所代替.

参考文献

[1] Боголюбов, Н. Н., Избр. тр., 2 К., 1970, 99－196, 227－493.

[2] Uhlenbeck, G. E. and Ford, G. V., Lectures in statistical mechanics, Amer. Math. Soc., 1963.

И. А. Квасников 撰 沈 青 译

Боголюбов 不等式[**Bogolyubov inequality**; **Боголюбова неравенство**]，统计学中的

1) 自由能泛函(free-energy functional)的 Боголюбов 不等式是产生统计力学变分原理的一个不等式. 对于任何 Hermit 算子 U_1 和 U_2，以下不等式均成立：

$$\frac{1}{N}<U_1-U_2>_{U_1}\leqslant f[U_1]-f[U_2]\leqslant \tag{*}$$

$$\leqslant\frac{1}{N}<U_1-U_2>_{U_2},$$

其中

$$f[U]\equiv-\frac{\Theta}{N}\ln\mathrm{Tr}\,e^{-U/\Theta}.$$

这一表达式的意义是 Hamilton 算子为 U 的系统的自由能密度；广延参数 N 是粒子数或容积，依系统而定；Θ 为能量单位的绝对温度，而

$$<\cdots>_U\equiv\frac{\mathrm{Tr}(\cdots e^{-U/\Theta})}{\mathrm{Tr}\,e^{-U/\Theta}}$$

标记相对于 Hamilton 算子 U 的热力学平均.

Боголюбов 不等式(*)在统计量子物理中用来得到模型问题的准确热力学极限解([1],[2])，在利用分子场方法的研究中([3])，在热力学极限存在的证明中，以及为得到各种多粒子系统的物理上重要的自由解的估值中([4])，均得到应用. 对于有"迹"von Neumann 代数([5])及广义 von Neumann 代数([6])的情况，均有 Боголюбов 不等式(*)的推广.

参考文献

[1] Bogolyubov, jr., N. N., On model dynamical systems in statistical mechanics, *Physica*, 32 (1966), 933－944.

[2] Боголюбов, Н. Н., (мл.), Метод исследования модельных гамильтонианов, М., 1974 (英译本: Bogolyubov, jr., N. N., A method for studying model Hamiltonians, Pergamon Press, 1972).

[3] Тябликов, С. В., Методы квантовой теории магнетизма, 2 изд., М., 1975 (英译本: Tyablikov, S. V., Methods of the quantum theory of magnetism, Plenum Press, 1967).

[4] Кудрин, Л. П., Статистическая физика плазмы, М., 1974.

[5] Ruskai, M. B., Inequalities for traces on von Neumann algebras, *Comm. Math. Phys.*, 26 (1972), 280－289.

[6] Araki, H., Golden - Thompson and Peierls - Bogolyubov inequalities for a general von Neumann algebra, *Comm. Math. Phys.*, **34** (1973), 167 – 178.

【补注】

[A1] Ruelle, D., Statistical mechanics : rigorous results, Benjamin (1974).

2) Green 函数(Green function)与关联函数(correlation functions)的 Боголюбов 不等式．以下不等式对于时间 - 温度换位子 Green 函数(见统计力学中的 **Green 函数** (Green function))成立．如果定义

$$<<A;B>> = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{1}{\theta}} <AB_{is}>_H ds,$$

其中 B_{is} 是算子 B 的虚数时间 $t=is$ 的 Heisenberg 表达，$<\cdots>_H$ 表示 Hamilton 算子 H 的热力学平均，θ 为绝对温度，则

$$| <<A;B>> |^2 \leqslant \leqslant | <<A;A^+>> | \cdot | <<B^+;B>> |. \quad (1)$$

将 $A=iQ\equiv[Q,H]_-$ 代人，得到

$$| <<B^+;B>> | \leqslant \frac{| <[Q,B]_->_H |^2}{2\pi | <[Q,[Q^+,H]_-]_->_H |}, \quad (2)$$

这里 $[,]_-$ 为换位子．还可以写出由(2)得到的不等式

$$<BB^+ + B^+B> \geqslant 2\theta\frac{| <[Q,B]_->_H |^2}{| <[Q,[Q^+,H]_-]_->_H |}, \quad (3)$$

由于不等式(2)与(3)的一般性，它们在对各种物理系统的研究中被广泛应用．

通过选择运动的某种在 $k=0$ 与 Hamilton 算子换位的"拟积分"做为算子 $Q_k=Q(k)$，从(3)可以得到关联函数

$$<B_kB_k^+ + B_k^+B_k>_H$$

的改善了的估值．(3)右端分子中的换位子描述算子 $Q_{k=0}$ 产生的连续对称群的无穷小转换下的 B_k 的转换性质，在对具有自发对称破坏的系统的研究中，不等式(2)与(3)被有效地利用：在这样的情况下，热力学平均应在准平均方法的框架中加以考察(见**拟平均方法**(quasi - averages, method of))．

类似的不等式可应用于经典统计力学中的 Green 函数，这时相应的换位子"变成为" **Poisson 括号**(Poisson brackets)．

Боголюбов 不等式使建立与统计物理的模型系统有关的一些关系式以及研究无穷系统中的顺序问题成为可能．参考文献见 **Боголюбов 定理**(Bogolyubov theorem)条．

А. М. Курбатов 撰　沈　青 译

Боголюбов 定理 [**Bogolyubov theorem** ; **Боголюбова теорема**]

1) Боголюбов 楔边定理 (Bogolyubov edge - of - the - wedge theorem) 是**解析开拓**(analytic continuation)原理的一个拓广，特别是拓广到多个复变量的情形．它是 1956 年 Н. Н. Боголюбов 在证明量子场论中的色散关系时得到的([1]，附录 A)．它的近代的表述如下．命函数 $f(z)$, $z=(z_1,\cdots,z_n)=x+iy$ 在一开集 $T_\eta^C=\{z:|z|<\eta, y\in C\}$ 内全纯，其中 C 是 $\mathbf{R}^n$ 中顶点在原点使得 $C\cap(-C)\neq\emptyset$ 的一开锥，命开集 $O\subset\mathbf{R}^n$ 包含在球 $|x|<\eta$ 中并设对 $D(O)$ 中的任何测试函数 $\varphi(x)$，极限

$$\lim_{\substack{y\to0\\y\in C}}\int f(x+iy)\varphi(x)dx$$

存在，且与 $y\to0$, $y\in C$ 的方式无关；那么 $f(z)$ 可以解析开拓到与下式 $\tilde{O}$ 有联系的区域 $T_\eta^C\cup\tilde{O}$ 内：

$$\tilde{O} = \bigcup_{\xi\in O}\{z: |z-\xi|<\theta\Delta_O(\xi)\},$$

其中 $\tilde{O}$ 是集合 O 的一复邻域，$0<\theta<1$ 是一常数，它仅仅依赖于锥 C，又 $\Delta_O(\xi)$ 是点 ξ 到 O 的边界的距离．Боголюбов 的楔边定理当 $\eta=\infty$ 时也成立．在这种情形下，在关于函数 $f(z)$ 的增长的某些假设下，我们可以得到 Боголюбов 定理的原来的表述(见[1]；$\mathbf{R}^4$ 中的光锥起着锥的作用)．这个定理有各种证明和拓广([2],[5])．特别要提到拓广到超函数([4])和全纯上循环([3])的情形．

Боголюбов 楔边定理广泛应用于公理量子场论，偏微分方程理论和全纯函数(特别是多复变函数)的边值理论中．这个定理的一个有用的完全化是 C 凸包定理(C- convex hull theorem) ([2])．在 Боголюбов 定理的条件下，设 $C=C^+\cup C^-$, $C^-=-C^+$，其中 C^+ 是一凸尖锥，那么

$$B_C(O)\subset \mathrm{Re}\,H(T_\eta^C\cup\tilde{O}),$$

这里 $H(D)$ 是 D 的**全纯包** (holomorphic envelope)，$\mathrm{Re}\,D$ 是区域 D 的实截面，又 $B_C(O)$ 是集合 O 的 C 凸包，即包含 O 并且具有下列性质的最小开集：如果 $B_C(O)$ 中的点 x' 和 x'' 可以用完全包含在 $B_C(O)$ 中的 C 相似曲线连结，那么所有和它同伦的 C 相似曲线都位于 $B_C(O)$ 内．

参考文献

[1] Боголюбов, Н. Н., Медведев, Б. В., Поливанов, М. К., Вопросы теории дисперсионных соотношений, М., 1958 (英译本：Bogolyubov, N. N. and Shirkov, D. V., Introduction to the theory of quantized fields, Interscience, 1959).

[2] Владимиров, В. С., Методы теории функций многих

комплексных переменных, М. 1964 (英译本: Vladimirov, V. S., Methods of the theory of functions of several complex variables, M. I. T., 1966).
[3] Martineau, A., Distributions et valeurs au bord des fonctions holomorphes, in *Theory of distributions. Proc. internat. summer inst.*, Lisbon, 1964, pp. 193–326.
[4] Komatsu, H. (ed.), Hyperfunctions and pseudodifferential equations, Proc. Conf. Katata, 1971, Springer, 1973.
[5] Rudin, W., Lectures on the edge-of-the-wedge theorem, Amer. Math. Soc., 1971. В. С. Владимиров 撰

【补注】 楔边定理的其他拓广包括 $C\cap(-C)=\emptyset$ 的情形(见[5])和"楔"的"边"是一 $\mathbf{C}^n$ 中的全实超曲面而不是 $\mathbf{C}^n$ 中在$\{\mathrm{Im}\ z=0\}$中的开集的情形(见[A1]). 对锥 $C=C^+\cup C$ 来说,(其中 C^+ 是凸的), 在 O 中的一 C 相似曲线定义为一可微分曲线 $C(t)$: $[0,1]\to O$ 使得 $C'(t)\in C$.

参考文献

[A1] Bedford, E., Holomorphic continuation at a totally real edge, *Math. Ann.*, **230** (1977), 213–225.

2) $1/q^2$ 型奇性的 Боголюбов 定理 (Bogolyubov theorem on singularities of type $1/q^2$). 它是统计力学中对于具有一规范不变交互作用位势的 Bose 和 Fermi 系统中的 **Green 函数** (Green function) 在小动量 ($q\to0$) 极限下关于其渐近性质的一个定理. 它是由 Н. Н. Боголюбов 1961 年提出来的([1]).

对多个交互作用粒子系统在简并的统计平衡状态的情形对双时温度对易子 Green 函数(见统计力学中的 **Green 函数** (Green function))成立如下用能量表示的不等式

$$|\langle\langle a_{\mathbf{q}}, a_{\mathbf{q}}^{+}\rangle\rangle_{E=0}| \geqslant 常数\cdot\mathbf{q}^{-2}, \qquad (1)$$

其中 $a_{\mathbf{q}}$, $a_{\mathbf{q}}^{+}$ 是具有动量 $\vec{\mathbf{q}}$ 的粒子的湮没算符和产生算符.

当 $\mathbf{q}\to0$ 时在 Боголюбов 定理中取定的 Green 函数所出现的奇性对应于所研究的物理系统的初等激发. Боголюбов 定理也预测系统的宏观性质下那种小动量的渐近性态, 该小动量是用已知公式和 Green 函数联系的.

因此,按照(1)在超流 Bose 或 Fermi 系统的情形, 当 $\mathbf{q}\to0$ 时,粒子密度分布 $\omega(\mathbf{q})$ 以不低于 $1/\mathbf{q}^2$ 的速率趋于无穷大. 在这种情况下统计平衡状态的简并性是由于粒子总数守恒的规则, 即由于系统的 Hamilton 量关于规范变换的不变性. 但是, 类似的奇性出现在各自的 Green 函数中, 因此也出现在这样一些关联函数中,这些关联函数表征了具有其它种类的简并性的系统,而这种简并性是由某些附加的守恒规则而引起的, 即由系统的 Hamilton 量关于某些变换的不变性而引起的. Боголюбов 定理有许多非平凡的物理推论, 其中包含多个相互作用粒子系统的长程有序化问题,在此系统中对称性的自发破缺以多种方式出现: 具有铁磁的 Heisenberg 模型,反铁磁和铁磁的有序化,超流体和超导体型系统和结晶的有序化系统.

当 $\mathbf{q}\to0$ 时 Green 函数中奇性的出现与系统的能谱中汇集型激发的分支的存在有关, 它相应于在相互作用位势上的某些限制下对称性的自发破缺.

初等激发能谱的本性可以借助于对(1)型 Green 函数所构造的**质量算子** (mass operator)不等式来研究. 在 Bose 系统的情形, 对于有限温度 ($\theta\equiv K_B T>0$), 这个不等式具有形式:

$$|\Sigma_{11}(0,\mathbf{q})-\Sigma_{12}(0,\mathbf{q})| \leqslant 常数\cdot\mathbf{q}^2. \qquad (2)$$

如果 $\mathbf{q}=0$, 公式(2)给出所谓 Hugenholtz-Pines 公式(到有限温度)的一个推广. 如果假设质量算符在点 $(E=0, \vec{\mathbf{q}}=0)$ 的一个邻域内是正则的, 那么可以用(2)来证明(声子型)激发能谱中不存在间隙.

在温度为零($\theta=0$)的情形不等式(1)建立了粒子动量的连续分布的密度和一个激发状态的极小能量之间的联系.

(1)型的关系在量子场论中也应成立, 这时一个对称性的自发破缺(在两个基态间的跃迁)发生在无穷多个零质量的粒子中([4], [5]) (Goldstone 定理 (Goldstone theorem)). 它可解释为在量子场 Green 函数中关于小动量的奇性. Боголюбов 定理已被应用到具有一对称性自发破缺的相对论性的量子场模型上([6]).

参考文献

[1] Боголюбов, Н. Н., Избранные труды, т. 3, Киев, 1971.
[2] Садовников, Б. И., Федянин, В. К., 《Теор. и матем. Физ.》, **16** (1973), 3, 368–393.
[3] Боголюбов, Н. Н. (мл.), Садовников, Б. И., Некоторые вопросы статистической механики, М., 1975.
[4] Goldstone, J., Field theories with 'superconductor' solutions, *Nuovo Cimento* (10), **19** (1961), 154–164 Italian abstract.
[5] Goldstone, J., Salam, A. and Weinberg, S., Broken symmetries, *Phys. Rev.*, (2), **127** (1962), 965–970.
[6] Казанский, А. К., 《Теор. и матем. Физ.》, **22** (1975), 3, 418–421. А. М. Курбатов 撰 钟同德 译

Bohl 殆周期函数 [Bohl almost-periodic functions; Боля почти периодические функции]

这类函数的典型特性是,它们都能用形式为

$$\sum a_{n_1\cdots n_k} e^{i(n_1\alpha_1+\cdots+n_k\alpha_k)x}$$

的广义三角多项式在整个实轴上一致逼近,其中的 n_1,

$\cdots, n_k$ 是任意整数，$\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ 是给定的实数. 这个函数类包含了以 2π 为周期的连续函数类，但被 **Bohr 殆周期函数** (Bohr almost - periodic functions) 类所包含. P. Bohl 刻画了函数是殆周期的几个充分必要条件. 特别地，形式为

$$f(x) = f_1(x) + \cdots + f_k(x),$$

的任何函数 $f(x)$，其中 $f_1(x), \cdots, f_k(x)$ 都是连续函数及周期函数(周期可能不相同)，是 Bohl 殆周期函数.

参考文献

[1] Bohl, P., Über die Darstellung von Funktionen einer Variabeln durch trigonometrische Reihen mit mehreren einer Variabeln proportionalen Argumenten, Dorpat, 1893. Thesis.

[2] Bohl, P., Ueber eine Differentialgleichung der Störungstheorie, *J. Reine Angew Math.*, 131 (1906), 268 – 321.

[3] Левитан, Б. М., Почти - периодические функции, М., 1953 (中译本: Б. М. 列维坦, 概周期函数, 高等教育出版社, 1956).

E. A. Бредихина 撰

【补注】 这类课题的一个广泛知晓的参考文献是 [A1].

参考文献

[A1] Bohr, H., Almost periodic functions, Chelsea, 1947 (译自德文).

朱学贤 译 潘文杰 校

Bohr 殆周期函数 [Bohr almost - periodic functions; Бора почти периодические функции]，一致殆周期函数 (uniform almost - periodic function)

殆周期函数的 U-a.p.类. 它的第一个定义由 H. Bohr([1]) 给出，是建立在周期概念的推广之上的: 在区间 $(-\infty, \infty)$ 上连续的函数 $f(x)$ 是 Bohr 殆周期函数，如果对于任意 $\varepsilon>0$，存在这个函数的 ε 殆周期的相对稠密集(见**殆周期** (almost - period)). 换句话说，$f(x)$ 是 U 殆周期(或 $f \in U$ - a.p.)的，如果对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $L=L(\varepsilon)$ 使得在任意长度为 L 的区间中，至少存在一个数 τ 使得

$$|f(x+\tau)-f(x)| < \varepsilon, \quad -\infty < x < \infty.$$

如果当 $\varepsilon \to 0$ 时 $L(\varepsilon)$ 有界，则 Bohr 殆周期函数 $f(x)$ 成为连续的周期函数. Bochner 的定义(见 **Bochner 殆周期函数** (Bochner almost - periodic functions)) 等价于 Bohr 的定义，也在殆周期函数理论中使用. U 殆周期函数类中的函数在整个实轴上有界且一致连续. 一致收敛的 Bohr 殆周期函数序列 $\{f_n(x)\}$ 的极限 $f(x)$ 属于 U 殆周期函数类; 这一函数类关于算术运算是不变的 (特别地，在

$$\inf_{-\infty<x<\infty} |g(x)| > \gamma > 0$$

的条件下，Bohr 殆周期函数的商 $f(x)/g(x)$ 是 U 殆周期函数). 如果 $f(x)$ 是 U 殆周期函数且 $f'(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上一致连续，则 $f'(x)$ 是 U 殆周期函数; 如果 $F(x)$ 是有界函数，那么不定积分 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 是 U 殆周期函数.

参考文献

[1] Bohr, H., Zür Theorie der fastperiodischen Funktionen I, *Acta Math.*, **45** (1925), 29 – 127.

[2] Левитан, Б. М., Почти - периодические функции, М., 1953 (中译本: Б. М. 列维坦, 概周期函数, 高等教育出版社, 1956).

E. A. Бредихина 撰

【补注】 Bohr 的论著 [A1] 是很好的参考文献. 最新的文献是 [A2].

参考文献

[A1] Bohr, H. Almost periodic function, Chelsea, 1947 (译自德文).

[A2] Corduneanu, C., Almost periodic functions, Wiley, 1968.

朱学贤 译 潘文杰 校

Bohr 紧化 [Bohr compactification; Бора кампакт]

Bohr 殆周期函数的代数的极大理想的空间 X (见 **Banach 代数** (Banach algebra) 及 **Bohr 殆周期函数** (Bohr almost - periodic functions)). Bohr 殆周期函数构成实轴 $\mathbf{R}$ 上的交换 C^* 代数 A. 代数 A 等距同构于紧统 X 上所有连续函数构成的代数 $C(X)$. 实轴 $\mathbf{R}$ 自然地嵌入在 X 中作为一个处处稠密的子集(但这一嵌入并不是同胚的). 紧统 X 具有连通紧群的结构，这一紧群等同于实轴的特征标群，如果后者看作赋有离散拓扑. 在殆周期函数的代数与 Bohr 紧化上所有连续函数的代数之间的这一同构使得有可能去简化一些经典定理的证明. Bohr 紧化的概念对于其他群上的殆周期函数的代数也很有意义. 在有 n 个独立的固定周期的条件周期函数集的情形，带有这些周期的 n 维圆环面起着 Bohr 紧化的作用.

参考文献

[1] Loomis, L. H., An introduction to abstract harmonic analysis, v. Nostrand, 1953

E. A. Горин 撰

【补注】 也用 Bohr 紧统 (Bohr compactum) 一词代替 Bohr 紧化.

有几种方法刻画 Bohr 紧化并证明它的存在性，例如见 [A1]. 其中最抽象的一个是将拓扑群 G 的 Bohr 紧化刻画成 G 在所有紧 Hausdorff 拓扑群的范畴中的反射，这时，它的存在性由伴随函子定理 (adjoint functor theorem) 得以保证. 这一研究方法也用于半群并导出几种其他类型的紧化(例如，弱殆周期紧化 (weakly almost - periodic compactification)). 见 [A2].

参考文献

[A1] Alfsen, E. M. and Holm, P., A note on compact representations and almost periodicity in topological groups, *Math. Scand.*, **10**(1962), 127－136.

[A2] Berglund, J. F., Junghenn, H. D. and Miles, P., Compact right topological semigroups and generalizations of almost periodicity, Springer, 1978.

朱学贤 译 潘文杰 校

Bohr - Favard 不等式 [Bohr - Favard inequality; Бора-Фавара неравенство]

H. Bohr([1])在关于概周期函数的原函数在全直线上的有界性问题中提出的一个不等式. J. Favard([2])给出了此不等式的最终形式,大大地改进了 Bohr 的结果;他还研究了具有 r 阶连续导数 $f^{(r)}(x)$ 的任意周期函数

$$f(x)=\sum_{k=n}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

其中 n 和 r 均为给定的自然数. Bohr - Favard 不等式的精确形式是

$$\|f\|_C\leqslant K\|f^{(r)}\|_C,$$
$$\|f\|_C=\max_{x\in[0,2\pi]}|f(x)|,$$

其中最优常数 $K=K(n,r)$:

$$K=\sup_{\|f^{(r)}\|_C\leqslant 1}\|f\|_C.$$

Bohr - Favard 不等式与函数及其 r 阶导数用至多为 n 阶三角多项式的最佳逼近不等式, 以及可微函数类的 Колмогоров 宽度(见宽度(width))等概念均有密切的关系.

参考文献

[1] Bohr, H., Un théorème général sur l'intégration d'un polynôme trigonométrique, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **200**(1935), 1276－1277.

[2] Favard, J., Sur les meilleurs procédés d'approximation de certaines classes des fonctions par des polynômes trigonométriques, *Bull. Sci. Math* (2), **61** (1937), 209－224; 243－256.

[3] Ахиезер, Н. И., Лекции по теории аппроксимации, 2 изд., М., 1965(中译本: Н. И. 阿赫叶惹尔, 逼近论讲义, 科学出版社, 1957).

Л. В. Тайков 撰 王斯雷 译

Boks 积分 [Boks integral; Бокса интеграл]

Lebesgue 积分的一种拓广,由 A. Denjoy(1919)引入, 而后被 T. J. Boks(1921)详细研究. 把在线段 $[a,b]$ 上给定的实值函数 f 周期延拓(以周期 $b-a$)到全直线. 对于 $[a,b]$ 的任一分划 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 以及对于任意选取的点 $\bar\xi=\{\xi_i\}_1^n$, $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ 和任意 t, 构作下面的和:

$$I(t)=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i+t)[x_i-x_{i-1}].$$

假如当 $\rho=\max(x_i-x_{i-1})\to 0$ 时, $I(t)$ 依测度收敛于某确定的极限 I, 则称数 I 为 f 在 $[a,b]$ 上的 Boks 积分(Boks integral)(或 B 积分(B-integral)). 因此, Boks 积分是 Riemann 类型的积分, 它是 Riemann 积分的一种推广.

Boks 积分是 Lebesgue 积分的一种相当大的拓广: Lebesgue 可积函数都是 B 可积的, 且它们的积分相等, 但是却存在着 Lebesgue 不可积而 B 可积的函数; 特别, 若 g 是可积函数 f 的共轭函数, 则 g 是 B 可积的, 并且 f 的 Fourier 级数的共轭级数的系数分别等于 g(在 B 积分意义下)的 Fourier 级数的系数(A. H. Колмогоров). 由于 A 积分(A-integral)更适合于 Lebesgue 可积函数的共轭函数的积分, Boks 积分的理论就没有进一步发展了.

参考文献

[1] Boks, T. J., Sur les rapports entre les méthodes de l'intégration de Riemann et de Lebesque, *Rend. Circ. Mat. Palermo* (2), **45** (1921), 211－264.

[2] Zygmund, A., Trigonometric series, 1－2, Cambridge Univ. Press, 1979.

И. А. Виноградова 撰 王斯雷 译

Boltzmann 分布 [Boltzmann distribution; Больцмана распределение]

分子服从经典力学定律的理想气体的粒子的动量 $\mathbf{p}$ 和坐标 $\mathbf{r}$ 的统计平衡分布函数 $f(\mathbf{p},\mathbf{r})$, 在外势场中为

$$f(\mathbf{p},\mathbf{r})=A\exp\left\{-\frac{\dfrac{\mathbf{p}^2}{2m}+U(\mathbf{r})}{kT}\right\}.\qquad(1)$$

这里 k 为 Boltzmann 常数(一个普适常数: $k=1.38\times10^{-16}$ erg/degree), T 为绝对温度, $\mathbf{p}^2/(2m)$ 为粒子的动能, $U(\mathbf{r})$ 为粒子在场中的势能, 常数 A 通过在一无量纲相容积中的归一化条件而定义

$$\iint f(\mathbf{p},\mathbf{r})\frac{d^3\mathbf{p}\,d^3\mathbf{r}}{h^3}=N.$$

这里 N 是粒子的总数, h 为 Planck 常数(一个普适常数 $h=6.62\times10^{-27}$ erg × sec),

$$d^3\mathbf{p}=dp_x\,dp_y\,dp_z,\quad d^3\mathbf{r}=dx\,dy\,dz.$$

A 还可以通过在速度和坐标空间中的归一化条件而定出, 这在气体动理论中是更为通常的:

$$\iint f(\mathbf{p},\mathbf{r})\,d^3\mathbf{v}\,d^3\mathbf{r}=N,$$

$$\mathbf{v}=\frac{\mathbf{p}}{m},\ d^3\mathbf{v}=dv_x\,dv_y\,dv_z.$$

Boltzmann 分布是理想气体 **Boltzmann 统计法**(Boltzmann statistics)的结果，是 **Gibbs 分布**(Gibbs distribution)

$$\rho(\mathbf{p}_1,\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{p}_N,\mathbf{r}_N)=\frac{1}{Z}e^{-\frac{H(\mathbf{p}_1,\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{p}_N,\mathbf{r}_N)}{kT}}$$

对于理想气体的特例，这时

$$H=\sum_i\frac{\mathbf{p}_i^2}{2m}+\sum_i U(\mathbf{r}_i),$$

而 Gibbs 正则分布变为单个粒子 Boltzmann 分布的积. Boltzmann 分布是理想气体在足够高的温度下当量子效应可以忽略时的量子统计的极限情况. 一个粒子第 i 量子态的平均占有数为

$$\overline{n}_i=e^{(\mu-\varepsilon_i)/kT},\qquad(2)$$

其中 ε_i 为相应于粒子第 i 个量子态的能量，而 μ 为由条件 $\sum\overline{n}_i=N$ 定义的化学势. 公式(2)在如下温度和密度范围内成立，这时粒子间的平均距离比 Planck 常数 h 和平均热运动速度模之比为大量

$$\left(\frac{V}{N}\right)^{1/3}\gg\frac{h}{\sqrt{mkT}}.$$

Maxwell 分布(Maxwell distribution)是 Boltzmann 分布(1)对于 $U=0$ 时的特例:

$$f(\mathbf{p})=\frac{N}{V}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}e^{-\mathbf{p}^2/2mkT}.\qquad(3)$$

分布函数(1)有时称为 Maxwell-Boltzmann 分布(Maxwell-Boltzmann distribution)，而 Boltzmann 分布(Boltzmann distribution)一词保留下来用来称呼对于粒子所有动量积分了的分布函数(1)，这时它代表点 $\mathbf{r}$ 处粒子的数密度:

$$n(\mathbf{r})=n_0e^{-U(\mathbf{r})/kT},\qquad(4)$$

这里 n_0 是相应于 $U=0$ 处的粒子的数密度. 不同点处粒子数的相对密度依赖于各该点处势能之差:

$$\frac{n_1}{n_2}=e^{-\Delta U/kT},$$

其中 $\Delta U=U(r_1)-U(r_2)$. (4)的一个特例给出气压公式(barometric formula)，它给出重力场中地球表面上方的粒子密度:

$$n(z)=n_0e^{-mgz/kT},\qquad(5)$$

这里 g 是重力加速度，m 是粒子质量，z 是地球表面上方高度，而 n_0 为 $z=0$ 处的密度.

几种不同质量气体构成的混合气体的 Boltzmann 分布表明，每单个组分的粒子部分密度分布与其他组分的分布无关. 对于一旋转容器中的气体，$U(\mathbf{r})$ 为离心力场:

$$U(\mathbf{r})=-\frac{m\omega^2\mathbf{r}^2}{2},$$

这里 ω 是旋转角速度.

文献见 **Boltzmann 统计法**(Boltzmann statistics).

Д. Н. Зубарев 撰 沈 青 译

Boltzmann 方程 [**Boltzmann equation; Больцмана уравнение**]

气体动理论中 L. Boltzmann 建议用来决定理想单原子气体的单个粒子分布函数的方程([1]). 在无量纲变量中该方程具有形式:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+(v,\ \nabla_x f)+(F,\ \nabla_v f)=\frac{1}{\varepsilon}\ L(f,\ f).\qquad(*)$$

这里 $f(x,v,t)$ 是相空间 $x\otimes v$ 中粒子数的分布函数密度，x 为三维空间坐标，v 为速度，t 为时间，F 为外力的场强，而 ε 为一无量纲参数(它正比于相邻碰撞间粒子走过的平均距离与所讨论现象的典型尺度之间的比值). 在最简单的情况下碰撞算子具有形式:

$$L(f,\ f)=\int[f(v')f(v_1')-f(v)f(v_1)]|v-v_1|d\omega\,dv_1,$$

其中 v_1 与 v 为碰撞前分子的速度，v_1' 与 v' 为碰撞后分子的速度，而 $d\omega$ 为向量 v_1-v 方向上的主体角元.

在推导 Boltzmann 方程时假设函数 $f(x,v,t)$ 的演变由其在给定时刻 t 时的值及气体分子间的成对碰撞所决定，并假设碰撞期间两个分子间的相互作用时间比起它们互不依赖地运动时的时间要短的多. 从数学观点看 Boltzmann 方程的推导基于一定的算法规则，以构成与两个互相碰撞的气体分子的已知运动法则相一致的算子 L.

方程(*)中 t 变量的变化区域为半直线 $t\geqslant0$, v 的变化范围为整个 $\mathbf{R}^3$ 空间；而 x 的变化范围是 $\mathbf{R}^3$ 中的亚空间 Ω(Ω 也可以与 $\mathbf{R}^3$ 相重合)，根据其物理意义，函数 $f(x,v,t)$ 应是不负的而且

$$\int f(x,\ v,\ t)v^2dv<\infty.$$

$\partial\Omega$ 上的最简单的边界条件具有形式

$$f(v-2n(n,\ v),\ x,\ t)=f(v,\ x,\ t),\ x\in\partial\Omega,\ v\in\mathbf{R}^3,$$

其中 n 为 $\partial\Omega$ 的法向. 方程(*)有 Cauchy 问题的几种准确提法，但对其中的任何一种提法，在对算子 L 的从物理上看来很自然的假设条件下，却没有证明方程

(*)的解的整体存在.

参考文献

[1] Boltzmann, L., Lectures on gas theory, Univ. of California Press, Berkeley, 1964.
[2] Боголюбов, Н. Н., Избр. труды, т. 2, К., 1970.
[3] Chapman, S. and Cowling, T. G., The mathematical theory of non - uniform gases, Cambridge Univ. Press, 1939.

【补注】

参考文献

[A1] Cercignani, C., Theory and application of the Boltzmann equation, Scottish Acad. Press, 1975.
[A2] Cercignani, C. (ed.), Kinetic theories and the Boltzmann equation, Springer, 1984.

沈 青译

线性化 Boltzmann 方程 [Boltzmann equation, linearized; Больцмана линеаризованное уравнение],气体动理论中的

近似描述无内自由度的足够稀薄的气体在与平衡偏离为小量时的单个粒子分布函数的演变的线性积分微分方程.

这一方程

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+<c, \nabla_x\varphi> = \frac{1}{\varepsilon}L_0(\varphi)$$

是将

$$f = \pi^{-3/2}e^{-c^2}+\mu e^{-c^2/2}\varphi$$

代入 **Boltzmann 方程**(Boltzmann equation)

$$\frac{\partial f}{\partial t}+<c, \nabla_x f> = \frac{1}{\varepsilon}L(f, f)$$

并平衡含参数 μ 的一次幂的各项而得到的. 算子 L_0 称为**线性化碰撞算子**(linearized collision operator). 只有当

$$\sup_{x,c,t}|f(x, c, t)-\pi^{-3/2}e^{-c^2}| \ll 1$$

时线性化 Boltzmann 方程才给出分布函数演变的令人满意的描述.

在十分一般的假设下, 算子 L_0 是非正的, $<\varphi, L_0\varphi>\leqslant 0$, 并可以写为

$$L_0(\varphi) = -\nu(c)\varphi+G\varphi,$$

这里 $\nu(c)$ (有时称为碰撞频率)是乘法算子而 G 是一个完全连续积分算子. 对于刚球模型, 函数 $\nu(c)$ 和 G 的核有如下形式([1]):

$$\nu(c) = 4\pi^2\left[\frac{1}{2}e^{-c^2/2}+\left(|c|+\frac{1}{2|c|}\right)\int_0^{|c|}e^{-\alpha^2}d\alpha\right],$$

$$G(c, c') = \frac{4\pi}{|c-c'|}\exp\left\{\frac{-|c-c'|^2}{4}-\frac{|c|^2-|c'|^2}{4|c-c'|^2}\right\}-$$
$$-2\pi|c-c'|\exp\left\{-\frac{c^2+c'^2}{2}\right\}.$$

$t\to\infty$ 及 $\varepsilon\to 0$ 时的 Cauchy 问题解的存在定理对于线性化 Boltzmann 方程已得到证明, 并研究了弥散方程. 此方程主要应用于理想气体的分子声学. 方程给出输运系数(粘性系数, 热传导, 声速)的正确值并给出超声吸收的 Stokes - Kirchhoff 律.

参考文献

[1] Carleman, T., Problème mathématique de la theorie kinétique des gases, 1960.
[2] Арсеньев, А. А., 《Ж вычисл. матем. и матем. физ.》, 5 (1965), 5, 864 – 882.

А. А. Арсеньев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Cercignani, C., Theory and application of the Boltzmann equation, Scottish Acad. Press, 1975.
[A2] Cercignani, C. (ed.), Kinetic theories and the Boltzmann equation, Springer, 1984.

【译注】

参考文献

[B1] Cercignani, C., The Boltzmann equation and its applications, Springer, 1987.

沈 青译

Boltzmann *H* 定理 [Boltzmann *H* - theorem; Больцмана *H* - Теорема]

动理论 **Boltzmann 方程**(Boltzmann equation)的推论之一, 根据此定理, 函数

$$H(t)\equiv\int h(t, \mathbf{r})d\mathbf{r} = \iint f\ln f d\mathbf{p}d\mathbf{r}$$

是时间 t 的不增长函数. 这里 $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ 是满足 Boltzmann 方程的坐标 $\mathbf{r}$ 和动量 $\mathbf{p}$ 的无量纲的经典单粒子分布函数. 密度 $h(t, \mathbf{r})$ 随时间的演变由函数 f 向局地 **Maxwell 分布**(Maxwell distribution)演变的弛豫本性所决定, 而 $t\to\infty$ 时 H 函数的极限值等于按照 Gibbs 计算的带有负号的理想气体的熵. 如果 t 的增量在所考察的问题中比建立局地 Maxwell 分布所需时间大的多, 量 $(-h(t, \mathbf{r}))$ 可与熵密度完全等同, 而 $(-H(t))$ 可与理想气体的非平衡熵完全等同起来.

从统计力学的观点看来, Boltzmann H 定理的主要意义在于以数学形式表述了宏观热力学的基本假设, 例如, 根据这些假设一个孤立系统自发地趋于热力学平衡, 而此过程伴随有熵增.

有一些 H 定理, 是与最初始的 Boltzmann H 定理

相似的陈述，但是是对于不同的或更一般类型的统计系统表达的，包括非理想的和量子化了的系统的情况．

Boltzmann H 定理是 Boltzmann 于 1872 年得到的．

参考文献

[1] Sommerfeld, A., Thermodynamics and statistical mechanics, Acad. Press, 1956 (译自德文).

[2] Uhlenbeck, G. E., Ford, G. V., Lectures in statistical mechanics, Amer. Math. Soc., 1963.

И. А. Квасников 撰 沈 青 译

Boltzmann 统计法 [Boltzmann statistics; Больцмана статистика]

应用于遵循经典力学的非相互作用粒子系统(经典理想气体)的统计学．理想气体粒子的分布不在所有粒子的相空间（Γ-空间）中讨论（既然粒子之间无相互作用），如在 Gibbs 统计力学中那样(见 **Gibbs 分布** (Gibbs distribution))，而在一个粒子的坐标和动量的相空间(μ-空间)中讨论．这与理想气体中相体积在 μ-空间中得以保持有关 (**Liouville 定理** (Liouville theorems) 的一种特殊情况)．

根据 Boltzmann 统计法，这种相空间被分割为具有如此相体积的大量的小相格，使其中每一相格均含有足够多的粒子 N_i，并且讨论粒子在这些相格中一切可能的分布．第 i 个相格的相体积 G_i 是以 h^3 为单位的 μ-空间中该相格的体积，其中 h 是 Planck 常数(普适常数 $h=6.62\times10^{-27}$erg·sec)．这种无量纲的 G_i 的意义是第 i 相格中可能的微状态数的最大值，因为根据量子力学，每一对坐标和动量的乘积的最小值等于 h，并且粒子具有三个自由度．

统计力学是建立在如下假设之上的，即对应于给定的总能量和给定的粒子数，所有微观状态的概率相同．将 N 个粒子分配给每个相格含 N_i 个粒子，其大小为 G_i 的 M 个相格的不同方式的数目等于

$$W_B(\cdots N\cdots)=N!\prod_{1\leqslant i\leqslant M}\frac{G_i^{N_i}}{N_i!},\quad N=\sum_i N_i.$$

这里考虑到，粒子完全独立，粒子可互相区分，在每一相格范围内粒子的重新排列不会改变状态．在 Boltzmann 统计法中此值决定了统计权或者状态的热力学概率(与普通概率不同，此概率尚未归一化)．当计算统计权时，已假设全同粒子的排列不会改变状态，从而相体积 W_B 应当除以 $N!$ 因子：

$$W(\cdots N\cdots)=\frac{W_B}{N!}.$$

这里，体积如此减小了的相称为类分相 (generic phases)，以区别于原来的特定相(specific phases)．

当粒子数目

$$N=\sum_{i=1}^{M}N_i$$

以及总能量

$$E=\sum_{i=1}^{M}\varepsilon_i N_i$$

(ε_i 是第 i 个相格中粒子的能量)给定时，粒子按相格单元的不同分布的所有微观状态均对应于同一宏观状态．

假定处于统计平衡状态的粒子的分布对应于最可几分布，即当粒子数 N 给定且能量为 E 时对应于最大的 $W(\cdots N_i\cdots)$．当 N 和 E 确定时的条件极值 $W(\cdots N_i\cdots)$ 问题给出相格中粒子的平均数的 Boltzmann 分布 (Boltzmann distribution)

$$\bar{n}_i=\frac{\overline{N_i}}{G_i}=e^{(\mu-\varepsilon_i)/kT},$$

其中 k 为 Boltzmann 常数(普适常数 $k\approx1.38\cdot10^{-16}$ erg/degree)，T 是绝对温度，μ 是由 $N=\sum_i N_i$ 条件所决定的化学势．在势场为 $U(\mathbf{r})$ 的特殊情况下：

$$\varepsilon_i=\frac{p_i^2}{2m}+U(\mathbf{r}_i).$$

Boltzmann 统计法是非相互作用粒子的气体的正则系综的 Gibbs 统计法的特殊情况．当温度足够高，可以忽略量子效应时，Boltzmann 统计法是 **Fermi-Dirac 统计法** (Fermi-Dirac statistics) 和 **Bose-Einstein 统计法** (Bose-Einstein statistics) 的极限情况．

Boltzmann 统计法是由 L. Boltzmann 于 1868—1871 年建立的．

参考文献

[1] Mayer, J. E. and Goeppert-Mayer, M., Statistical mechanics, Wiley, 1940.

[2] Sommerfeld, A., Thermodynamics and statistical mechanics, Academic Press, 1956 (译自德文).

[3] Schrödinger, E., Statistical thermodynamics, Cambridge Univ. Press, 1948.

[4] Fowler, R. and Guggenheim, E., Statistical thermodynamics, Cambridge Univ. Press, 1960.

Д. Н. Зубарев 撰 朱治强 译 沈 青 校

Bolza 问题 [Bolza problem; Больца задача]

经典变分法中主要问题之一，给出某些方程类型的约束后，讨论极值的条件，由 O. Bolza 于 1913 年系统地提出．此问题是在出现方程类型的微分约束

$$\varphi(t,x,\dot{x})=0,\ \varphi:\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m,\ m<n,$$

以及边界条件

$$\psi(t_1, x(t_1), t_2, x(t_2)) = 0,\ \psi: \mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p,$$
$$p \leqslant 2n+2$$

时,使泛函

$$J(x) = \int_{t_1}^{t_2} f(t, x, \dot{x})\,dt + g(t_1, x(t_1), t_2, x(t_2)),$$

$$f: \mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n \to \mathbf{R},\ g: \mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$$

极小化.如果 $g\equiv 0$,此问题为熟知的 **Lagrange 问题**(Lagrange problem),如果 $f\equiv 0$ 及 $p<2n+2$,则是熟知的 **Mayer 问题**(Mayer problem). Bolza 问题的一个特殊的特征是泛函的混合性质,它表示成一个积分泛函与一个边界上的函数之和. 原则上, Bolza 问题等价于 Lagrange 问题,事实上如果令

$$J_1(x) = \int_{t_1}^{t_2} (f(t, x, \dot{x}) + x_{n+1})\,dt,$$

$$\dot{x}_{n+1} = 0,\ x_{n+1}(t_1) = \frac{g}{(t_2-t_1)}$$

就可做到. 它也导致 Mayer 问题,如果令

$$J_2 = x_0(t_2) + g(t_1, x(t_1), t_2, x(t_2)),$$

这里

$$\dot{x}_0 = f(t, x, \dot{x}),\ x_0(t_1) = 0.$$

选择此问题的给出形式,以及选择拓扑,然后在此范围内考虑问题,取决于是否方便或者在每个特殊情形下的期望. 在最优控制理论中,此问题通常采取 Mayer 问题的形式;在经典变分法中,则考虑 Lagrange 问题的形式. 最为广泛使用的拓扑是连续可微函数的空间 C^1 的拓扑. 为了得到关于极值的必要或充分条件,必须对问题定义中所涉及的函数 f, g 与映射 φ, ψ 加以光滑性的要求,并且也要求这些映射的正则性,即矩阵 $(\partial\psi/\partial t_1, \partial\psi/\partial x_1, \partial\psi/\partial t_2, \partial\psi/\partial x_2)$ 与 $(\partial\varphi/\partial\dot{x})$ 必须分别有最大的秩 p 与 m. 在 Bolza 问题中(类似地,在 Lagrange 或者 Mayer 问题中)给出极值的向量函数 $x(t)$ 必须满足 **Euler 方程**(Euler equation)、关于由所给问题的条件用 **Lagrange 乘子**(Lagrange multipliers)构成的 **Lagrange 函数**(Lagrange function)的 **Weirstrass 条件(关于变分极值的)**(Weirstrass conditions (for a variational extremum))、以及 **Jacobi 条件**(Jacobi condition)和**横截条件**(transversality condition).

在 Bolza 问题上面的叙述中所用的记号是最优控制理论中所使用的记号. 在经典变分法中, Bolza 问题使用不同的记号来阐述:

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\,dx + g(x_1, y(x_1), x_2, y(x_2)),$$

$$\varphi(x, y, y') = 0,\ \psi(x_1, y(x_1), x_2, y(x_2)) = 0.$$

参考文献

[1] Bliss, G. A., Lectures on the calculus of variations, Chicago Univ. Press, 1947.

И. Б. Вапнярский 撰 李炳仁 译 王声望 校

Bolzano - Weierstrass 选择原理 [Bolzano - Weierstrass selection principle; Больцано - Вейерштрасса принцип выбора]

数学分析中经常应用的一种证明方法,它的基本思想是把区间不断地等分为两半,从中选取有某种特性的区间作为新的原始区间. 这种方法适用于以下的场合:假如区间具有某种性质,经过等分以后,至少有一个区间仍具备这种性质. 例如,一个区间含有某集合中的无限多个点,或者某函数在一个区间上是无界的,或者一个非零函数在区间的两端点上取符号相反的值;所有这些都属于这种类型的性质. Bolzano - Weierstrass 选择原理可以用来证明 **Bolzano - Weierstrass 定理**(Bolzano - Weierstrass theorem)以及分析中许多其他定理.

在应用 Bolzano - Weierstrass 选择原理时,根据所选区间的判别准则,而将过程分为能行性与非能行性两种. 前一情形的例子有:应用这种选择原理去证明在给定线段的端点取异号值的连续函数必在内部某点取值为0(见连续函数介值的 **Cauchy 定理**(Cauchy theorem)). 在此情形下,选取区间的判别准则是函数在该区间的两端取异号值. 假如有一种方法可以计算每点的函数值,那么过程进行到足够多次步骤以后,可以算出在一定精度下,函数取零值的点的坐标. 这样,不仅证明了在区间两端取异号值的连续函数必在区间内有零点,而且还提供了求方程近似解的一种方法. 非能行性的一个例子是:应用 Bolzano - Weierstrass 选择原理去证明在闭区间上连续实函数在此区间上达到最大值. 这种情形下,过程中逐次选取区间的判别准则是,函数在所应选的区间上的最大值不小于其他区间上的最大值. 如果像前一情形那样,能够计算每点的函数值,这时仍不足以有效地选出所需区间. 因此, Bolzano - Weierstrass 选择原理在这种情况下,只能证明存在性定理,即函数在某点达到其最大值,却无法提供在一定精度下该点的坐标.

Bolzano - Weierstrass 选择原理有各种推广,例如可应用于 n 维 Euclid 空间($n=2, 3, \cdots$)中的 n 维方体,通过等分其边长而得到相互合同的子方体等等.

Л. Д. Кудрявцев 撰 王斯雷 译 郑维行 校

Bolzano - Weierstrass 定理 [Bolzano - Weierstrass theorem; Больцано - Вейерштрасса теорема]

任意有界数列均含一个收敛的子列. 此定理对实数集和复数集都可应用. 它还可以推广到一般的情形,例如, n 维 Euclid 空间中的任意有界的无限集,至少

在该空间内有一个极限点，这定理甚至还可以进一步推广到更为一般的空间中去.

B. Bolzano ([1])证明了这个定理;以后它又被 K. Weierstrass 独立地推得.

参考文献

[1] Bolzano, B., Abh. Biochem. Ges. Wiss. (1917)

Л. Д. Кудрявцев 撰 王斯雷 译

Bonnesen 不等式 [Bonnesen inequality; Боннезена неравенство]

平面中凸区域等周不等式 (isoperimetric inequality) 的更精确的形式之一. 设 K 是平面中一个凸域 (convex domain)，令 r 是内含于 K 的最大圆周的半径，R 是包含 K 的最小圆周的半径，又令 L 与 F 分别是 K 的周长与面积，于是 Bonnesen 不等式 (Bonnesen inequality) ([1])

$$\Delta = L^2 - 4\pi F \geqslant \pi^2(R-r)^2$$

成立. 等式 $\Delta=0$ 成立当且仅当 $R=r$，即 K 是圆盘. Bennesen 不等式的推广见 [2].

参考文献

[1] Bonnesen, T., Ueber eine Verschärferung der isoperimetische Ungleichheit des Kreises in der Ebene und auf die Kugeloberfläche nebst einer Anwendung auf eine Minkowskische Ungleichheit für konvexe Körper, *Math. Ann.*, **84** (1921), 216 – 227.

[2] Дискант, В. И., 《Докл. АН СССР》, **213** (1973), 3, 519 – 521.

А. Б. Иванов 撰 虞言林 译

Bonnet 网 [Bonnet net; Бонне сеть]

其参数曲线具有常测地曲率的等温网 (isothermal net). 在这种参数曲线网下，线素平方是:

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{(U+V)^2},$$

其中 $U=U(u)$, $V=V(v)$. O. Bonnet 在 1848 年研究过.

А. Б. Иванов 撰 沈一兵 译

Bonnet 定理 [Bonnet theorem; Бонне теорема]

1) 关于具有给定第一和第二基本形式的曲面存在性和唯一性的 Bonnet 定理 (Bonnet theorem on the existence and the uniqueness of a surface) ([1]). 设给定下面两个二次微分形式:

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2,$$

其中第一个形式是正定的，并设这些形式的系数满足 Gauss 方程 (见 **Gauss 定理** (Gauss theorem)) 和 **Peterson - Codazzi 方程** (Peterson - Codazzi equations). 那么，存在一个曲面，使得上述两个形式分别是该曲面的第一和第二基本形式，并且这样的曲面被唯一确定到只差空间的一个运动.

2) 关于卵形面直径的 Bonnet 定理 (Bonnet theorem on the diameter of an oval surface). 若一卵形面在其所有点上的曲率大于或等于 $1/A^2$，则该曲面的外部直径小于 πA; 这个估计不能再改进. 这是 O. Bonnet 在 1855 年给出的.

А. Б. Иванов 撰

【补注】 Bonnet 的这个定理的证明可在[A1]或[A2]中找到. Peterson - Codazzi 方程通常称为 Mainardi - Codazzi 方程 (Mainardi - Codazzi equations), 见[A1], 它们是由 G. Mainardi(1857) 和 D. Codazzi(1868) 建立的.

参考文献

[A1] Blaschke, W. and Leichtweiß, K., Elementare Differentialgeometrie, Springer, 1973.

[A2] Carmo, M. do, Differential geometry of curves and surfaces, Prentice - Hall, 1976 (中译本: M. 多卡模, 曲线和曲面的微分几何学, 上海科学技术出版社, 1988).

【译注】 外部直径是指曲面作为二维度量空间的直径，即两点间(内蕴)距离的上确界，一般简称直径. 上述 Bonnet 定理通常叙述为: 若卵形面的 Gauss 曲率处处不小于 $1/A^2$，则它的直径不大于 πA (见[A2], p.352).

3) 关于中值的 Bonnet 定理 (Bonnet theorem on the mean value)，第二中值定理 (second mean value theorem) ([2]): 设 $f(x)$, $\varphi(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的可积函数，并设 $\varphi(x)$ 是 x 的正递减函数; 则在 $[a,b]$ 中存在数 ξ，使等式

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \varphi(a)\int_a^\xi f(x)dx$$

成立. 若只要求 $\varphi(x)$ 是单调函数，则 Bonnet 定理断言: 在 $[a,b]$ 中存在一点 ξ，使

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \varphi(a)\int_a^\xi f(x)dx + \varphi(b)\int_\xi^b f(x)dx$$

成立.

参考文献

[1A] Bonnet, O., J. École Polytechnique, **24** (1865), 204 – 230.

[1B] Bonnet, O., J. École Polytechnique, **25**(1867), 1 – 151.

[2] Bonnet, O., Rémarques sur quelques intégrales définies, *J. Math. Pures Appl.*, **14** (1849), 249 – 256.

Т. Ю. Попова 撰

【补注】 Bonnet 的原文是 [A1].

参考文献

[A1] Bonnet, O., *C. R. Acad. Sci. Paris*, **40** (1855), 1311–1313.

沈一兵 译

Boole 代数 [**Boolean algebra**; **Булева алгебра**], Boole 格(Boolean lattice)

一种特殊类型的偏序集,它是有最大元"1",和最小元"0",并且每个元素 x 都有补元 Cx 的**分配格**(distributive lattice),"1"和"0"分别称作 Boole 代数的幺元和零元;Cx 是满足关系

$$\sup\{x, Cx\} = 1, \inf\{x, Cx\} = 0$$

的元素. 运算 sup 和 inf 通常用符号 $\vee$ 和 $\wedge$ 表示. 为强调它们与集运算中并与交的类似性,有时也分别记作 $\cup$ 和 $\cap$, Cx 也可用符号 $\bar{x}$, x' 或者 $-x$ 来代替. 在 Boole 代数中,元素的补元是唯一的.

Boole 代数也可由另一种方式来定义,即作为一个具有运算 C, $\vee$, $\wedge$ 的非空集,运算满足以下的公理:

1) $x\vee y=y\vee x$, $x\wedge y=y\wedge x$;
2) $x\vee(y\vee z)=(x\vee y)\vee z$, $x\wedge(y\wedge z)=(x\wedge y)\wedge z$;
3) $(x\wedge y)\vee y=y$, $(x\vee y)\wedge y=y$;
4) $x\wedge(y\vee z)=(x\wedge y)\vee(x\wedge z)$, $x\vee(y\wedge z)=(x\vee y)\wedge(x\vee z)$;
5) $(x\wedge Cx)\vee y=y$, $(x\vee Cx)\wedge y=y$.

如果用这种定义方式,那就不必事先给出序,而是按如下的条件引入: $x\leqslant y$, 当且仅当 $x=x\wedge y$.

还有其他的公理化方法. Boole 代数的公理反映了在"集合"、"事件"与"命题"这些概念之间的相似性. Boole 代数中的"序"关系可以作多种方式的阐释——集合论中的包含,事件的因果关系,或命题的逻辑依赖,等等.

在一个 Boole 代数中,除基本运算 C、$\vee$, $\wedge$ 以外,还可以定义别的运算,其中对称差运算特别重要:

$$x+_2y = (x\wedge Cy)\vee(y\wedge Cx).$$

这个运算又可记作 $x\Delta y$, $|x-y|$.

任何 Boole 代数都是关于"加法"($+_2$)和"乘法"($\wedge$)的有单位元的 **Boole 环**(Boolean ring);任何有单位元的 Boole 环都可作为 Boole 代数.

Boole 代数最初是作为一种符号逻辑的工具出现于 G. Boole 的研究中,见[1],[2]. 它随后在数学的其他分支中——概率论、拓扑、泛函分析等,得到了广泛的应用. Boole 代数对逻辑的应用基于把 Boole 代数的元素解释为命题(见**逻辑代数**(algebra of logic)). 补元 Cx 解释为命题 x 的否定,运算 $\wedge$ 和 $\vee$ 分别为合取和析取. 与逻辑密切相关的有 Boole 代数的另一应用——**切触模式**(contact scheme)的理论. Boole 代数应用于概率论基础. 在概率论的研究中,事件场就是一个 Boole 代数;这里不等式 $x\leqslant y$ 指事件 y 跟随事件 x, "1", "0", 及 Boole 运算(Boolean operations) $\vee$, $\wedge$ 和 C 作相应的解释.

Boole 代数的一个例子是在某个给定的集合 Q 中,取所有的子集组成的类,按包含关系规定它的偏序. 这种 Boole 代数记作 2^Q;它的零元是空集,幺元是集 Q 本身. 集合 $Q\setminus x$ 是元素 x 的补元;Boole 运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 分别等同于并和交.

考虑 Q 的子集的特征函数来代替子集是方便的. 由所有这些函数所成的集 X_Q, 按自然的序构成一个 Boole 代数,它与 Boole 代数 2^Q 是同构的. 在这个 Boole 代数中, 运算 $\vee$, $\wedge$, C 以及 $+_2$ 的意义如下所述:

$$(x\vee y)(q) = \max\{x(q), y(q)\},$$
$$(x\wedge y)(q) = \min\{x(q), y(q)\} = x(q)\cdot y(q),$$
$$(Cx)(q) = 1-x(q),$$
$$(x+_2y)(q) = |x(q)-y(q)| = x(q)+y(q) \pmod 2,$$
$$(q\in Q).$$

以下是两种特别重要的情形:

1) $Q=Q_n=\{1, \cdots, n\}$.

在这种情形下,子集的特征函数是形式如下的"二值符号":

$$x = (x_1, \ldots, x_n), \quad x_i = \begin{cases}0,\\1,\end{cases}$$

其个数为 2^n. 在 $n=1$ 时,得到只由"1"和"0"所成的二元 Boole 代数.

2) $Q=X_{Q_n}$.

在这种情形下, X_Q 的元素是所有定义在长为 n 的二值符号集上,取值为"0"和"1"的函数. 称它们为 n 元 **Boole 函数**(Boolean function). 谓词逻辑中每个有效构成的公式都定义一个 Boole 函数;若二函数恒等,则公式等价.

在某些条件下, Boole 代数 X 的子集 E 关于由 X 诱导出的序,本身也是一个 Boole 代数. 特别见于以下的情况:

(a) E 是个主理想, 即形如 $\{x\in X: x\leqslant u\}$ 的集合,元素 u 起幺元"1"的作用;

(b) E 是 Boole 代数 X 的一个子代数. 这是指, 若 x, $y\in E$, 则 $x\vee y$, $x\wedge y$, Cx 都属于 E. 原 Boole 代数中的"0"和"1",在新的 Boole 代数中仍然是"0"和"1". 2^Q 的 Boole 子代数特别重要,它们被称做集代数(algebra of sets). 任何集合 $E\subset X$ 生成一个确定的子代数——包含 E 的最小子代数.

在 Boole 代数间的映射中，Boole 代数的同态有特殊的作用；它们是那些与 Boole 运算可交换的映射．Boole 代数的双射同态是同构．若 Boole 代数 X 由集合 E 生成，则每个从 E 到任一 Boole 代数的映射都可扩张成为同态，当且仅当 E 是一个无关集（independent set），即所有形如

$$x_1\wedge\cdots\wedge x_p\wedge Cx_{p+1}\wedge\cdots\wedge Cx_m,\quad x_i\in E,\quad x_i\neq x_k$$

的元素都是非零的．由一个无关集生成的 Boole 代数称为自由 Boole 代数（free Boolean algebra）．

上面所论及的 n 元 Boole 函数的代数，是自由 Boole 代数的一个例子．它的独立生成元是以下的函数：

$$f_i: f_i(x) = f_i(x_1,\ldots,x_n) = x_i.$$

Stone 定理（Stone theorem）：每个 Boole 代数 X 都同构于某一个集合代数，即某个全不连通的紧统 $\mathfrak{D}(X)$ 中，由所有开闭集形成的代数，紧统 $\mathfrak{D}(X)$ 除同胚外是唯一确定的．这个紧统称作 Stone 紧统（Stone compactum）．与每个从 Boole 代数 X 到 Boole 代数 Y 内的同态相对应的是 $\mathfrak{D}(Y)$ 到 $\mathfrak{D}(X)$ 内的一个拓扑嵌入；与 Boole 代数 X 的子代数相对应的是 $\mathfrak{D}(X)$ 的连续象．自由 Boole 代数的 Stone 紧统是二进密断统．

Boole 代数 X，如果它的任一子集 $E\subset X$ 在 E 中都有一个上界（$\sup E$）和一个下界（$\inf E$），就称为完全的（complete）．这也等价于 $\mathfrak{D}(X)$ 是极不连通的（见极不连通空间（extremally-disconnected space））．在一个完全 Boole 代数 X 中，如果子代数包含其所有子集在 X 中的界，就称作正则子代数（regular subalgebra）．Boole 代数 X 的权（weight of a Boolean algebra），是指它的完全生成集（complete generating set）的最小基数，所谓 X 的完全生成集，是指不包含在除 X 之外的任何一个正则子代数中的集合．若所有非空的主理想的权都相等，这个 Boole 代数就称作一致的（uniform）；这种代数总包含一个完全的独立生成集．换言之，一个完全的一致 Boole 代数能够"伸展"到一个自由 Boole 代数上．对任何 Boole 代数的研究都不难归结为对一致 Boole 代数的研究．非完全的 Boole 代数能由不同的方式使之完全化，即作为子代数嵌入到某个完全 Boole 代数之内．

一个完全 Boole 代数称作是赋范的（normed），如果能在其上定义一个实值函数（测度）μ，满足：1）若 $x\neq 0$，则 $\mu(x)>0$；2）对于 $E\subset X$，以及 $x,y\in E$，当 $x\neq y$ 时，$x\wedge y=0$，则

$$\mu(\sup E) = \sum_{x\in E}\mu(x).$$

在概率论中，赋范 Boole 代数特别重要．对此通常假定 $\mu(1)=1$，$\mu(x)$ 的值在这里解释成事件 x 出现的概率．古典的测度与积分理论能大量应用于赋范 Boole 代数．赋范 Boole 代数已有了完全的分类，见 [4]，[5]，[7]．特别对于均匀赋范 Boole 代数，权是它们仅有的不变量．并不是任何一个 Boole 代数都能成为赋范的．在赋范化的问题上，已经得到不少有关测度存在的条件，但远远没有被彻底认知．

对一个 Boole 代数能给以多种拓扑．一种特别重要的，是所谓 (o) 拓扑，它在赋范 Boole 代数上是可度量化的，所对应的度量是

$$\rho(x,y) = \mu[(x\wedge Cy)\vee(Cx\wedge y)].$$

这种拓扑对于形式如 2^Q 的 Boole 代数，等同于 Тихонов 拓扑．在最一般的情形下，不一定存在与 Boole 代数的序相容的拓扑．

参考文献

[1] Boole, G., The mathematical analysis of logic: being an essay towards a calculus of deductive reasoning, Macmillan, 1847.

[2] Boole, G., An investigation of the laws of thought, on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities, Dover, reprint, 1951.

[3] Sikorski, R., Boolean algebras, Springer, 1969.

[4] Владимиров, Д. А., Булевы алгебры, М., 1969.

[5] Halmos, P. R., Lectures on Boolean algebras, v. Nostrand, 1963.

[6] Rasiowa, E. and Sikorski, R., The mathematics of metamathematics, Polska Akad. Nauk, 1963.

[7] Stone, M. H., The theory of representations for Boolean algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **40** (1936), 37–111.

[8] Birkhoff, G. D., Lattice theory, Colloq. Publ., 25, Amer. Math. Soc., 1973.

[9] Hermes, H., Einführung in die Verbandstheorie, Springer, 1967.

[10] Колмогоров, А. Н., Algèbres de Boole mètriques complètes, in VI *Zjazd, Mathematykow Polskich, Krakow*, 1950.

[11] Dunford, N. and Schwartz, J. T., Linear operators, Spectral operators, 3. Interscience, 1971.

[12A] Kakutani, S., Concrete representations of abstract (L)-spaces and the mean ergodic theorem, *Ann. of Math.* (2), **42** (1941), 2, 523–537.

[12B] Kakutani, S., Concrete representations of abstract (M)-spaces (a characterization of the space of continuous functions), *Ann. of Math.* (2), **42** (1941), 4, 994–1024.

[13] Maharam, D., *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **28** (1942), 108–111.

[14] Mackey, G. W., The mathematical foundations of quantum mechanics, Benjamin, 1963.

[15] Yosida, K., Functional Analysis, Springer, 1980.

[16] Kuratowski, K., Topology, 2, Acad. Press, 1966

- 1968（译自法文）.

Д. А. Владимиров 撰 戴执中 译

Boole 方程 [Boolean equation; Булево уравнение]

形式如

$$f(x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad (*)$$

的方程，其中 f 是含 n 个变元的**Boole函数**（Boolean function）. 一个形式为（*）的方程，其全部解所成的集合，可由一组依赖于 n 个任意参数的 Boole 函数来描述.

参考文献

[1] Birkhoff, G., Lattice theory, Colloq. Publ. 25, Amer. Math. Soc., 1973.

Т. С. Фофанова 撰 戴执中 译

Boole 函数 [Boolean function; Булева функция]，逻辑代数函数（function of the algebra of logic）

自变量及函数的值均取自一个二元集（常作{0, 1}）的函数. Boole 函数是离散数学，特别是数理逻辑及数学控制论中的一个主要对象. Boole 函数最初出现于逻辑问题公式化的数学陈述中，它被冠以 Boole 之名，是因为G. Boole 在 19 世纪中叶为数学在逻辑中的应用奠定了基础，见**逻辑代数**（algebra of logic）.

这里的问题之一是命题代数的构造. 为此目的，对于每个命题赋以值 0（"假"）或 1（"真"）中的一个，主要的逻辑关系"和"、"或"、"否"，"若 ……，则"等，分别看作"初等"Boole 函数：$x \wedge y$，$x \vee y$，Cx，$x \rightarrow y$ 等. 在做了这样的规定后，任何一个由给定的一些命题藉助于基本逻辑连接词所构成的复合命题，它的值就是这些命题的值的 Boole 函数. 这种 Boole 函数是一些初等 Boole 函数的组合，后者对应于在复合命题中出现的那些逻辑连接词. 后来清楚地看到，Boole 函数的语言很适于描述离散控制系统（control system）的运算，诸如接触模式，函数元的图表，逻辑网络，开关网络等. 这些控制系统，都是从一些初始元素出发，按照确定的规律所构成，正如复合命题由简单命题来构出一样. 构造那些控制系统所遵循的规律，以及初始元素的运算，使得复合控制系统的运算能藉助 Boole 函数来描述. Boole 函数又用在整规划的某些问题中，它使得问题简化成解一组形如

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = \cdots = f_m(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

的 Boole 方程（Boolean equition），其中 f_i（$i = 1, \cdots, m$）都是 Boole 函数. 在离散数学中，还有别的方式使用 Boole 函数，故对 Boole 函数的研究有其自身的意义.

解决与 Boole 函数有关的问题的一个基本特点，是特化 Boole 函数法（method of specifying Boolean functions）. 这样的方法有许多种：图表，公式，被称为范式（见 **Boole 函数的范式**（Boolean functions, normal forms of））的一些特殊公式，n 维单位立方体的顶点子集，等等. 在最后一种情形下，以自变量值（0 或 1）的每个长为 n 的选择作为 n 维单位立方体的一个顶点，此时，一个 n 元 Boole 函数能由顶点集的一个子集所确定，即在该子集的每个点上取值 1. 这个子集，当它写成矩阵时，就称为 Boole 矩阵（Boolean matrix），它的行是由 Boole 函数的自变量所取的值所组成. 如果一个 Boole 函数描述控制系统的运算，则后者可以作为一个特化该 Boole 函数的方法. 人们常称，这个控制系统实现了所给的 Boole 函数. 用多种控制系统来实现 Boole 函数密切关连到大量的问题，例如综合法，极小化，控制与可靠性问题，等等. 另一类型的问题来自研究由不同方法特化的 Boole 函数的性质与类，也就是研究 Boole 函数的各类范式的度量特征和 n 维单位立方体（见 **Boole 函数的度量理论**（Boolean functions, metric theory of））的相应的几何性质，以及研究 Boole 函数的各种代数（见**多值逻辑**（many-valued logic）；**等价变换**（equivalent trausformations））. E. Post 描绘了所有关于合成是封闭的 Boole 函数类的系统，它形成一个有五个极大（准完全）类的可数无限的格.

在某些情形下，可能有必要来考虑偏（即并非到处有定义的）Boole 函数. 对于这种函数，上面所列举的种种问题就有其特殊性.

参考文献

[1] Новиков, П. С., Элементы Математической Логики, 2 изд., М., 1973（英译本：Novikov, P. S., Elements of mathematical logic, Edinburgh, 1964）.

[2] Яблонский, С. В., Гаврилов, Г. П., Кудрявцев, В. Б., Функции алгебры логики и классы поста, М., 1966.

В. Б. Кудрявцев 撰

【补注】 Boole 函数与 Boole 方程在开关理论和逻辑网络上的应用见[A2]. Boole 函数与方程在运筹学上的应用，在[A1] 中作了讨论.

参考文献

[A1] Hammer, P. L. and Rudeanu, S., Boolean methods in operations research, Springer, 1968.

[A2] Rudeanu, S., Boolean functions and equations, North-Holland, 1974.

戴执中 译

Boole 函数的度量理论 [Boolean functions, metric theory of; Булевых функций метрическая теория]

研究 Boole 函数的数值特征与度量性质的数学分支. 此理论的主要部分在于研究"几乎所有的"Boole 函数所具有的性质（见 **Boole 函数的极小化**（Boole functions, minimization of）），有给定多个变元的所有 Boole 函数的集合的性质，以及 Boole 函数的特殊子类. 另一个课题，主要出现于与 Boole 函数的极小化以及局部算法

论等有关的问题中，是藉助于数值特征以求 Boole 函数的真值定义域的结构．这些特征是函数的维数和长度．

令 $N_{f(x_1,\cdots,x_n)}$ 是由 n 维单位立方体的顶点组成的集合，在这些顶点上，$f(x_1,\cdots,x_n)$ 等于 1．考虑函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 的所有极大区间，并选取有极大维数 r 的区间．数 r 称作 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 的维数(dimension)，记为 $\mathrm{Dim}\,f(x_1,\cdots,x_n)$．维数可用来估计 f 的最复杂终端与 f 的最短析取范式(见 **Boole 函数的范式** (Boolean functions, normal forms of))之复杂度比率．这个比率的一个上界是 $2^{\mathrm{Dim}\,f}$．不等式

$$\mathrm{Dim}\,f(x_1,\ldots,x_n) \leqslant [\log_2 n]+1$$

对"几乎所有的" Boole 函数成立．

在解答 Boole 函数的极小化问题中，计算"典范"极大区间的维数是有趣的．已经证明，"几乎所有的" Boole 函数 $f_{(x_1,\ldots,x_n)}$ 的"几乎所有的"极大区间的维数都接近于 $\log_2\log_2 n$．

令 $S_k(\mathfrak{A},f)$ 是在 f 的简约析取范式 $\mathfrak{N}_f$ 中出现的初等合取 $\mathfrak{A}$ 的 k 阶光滑邻域(见**局部算法** (algorithm, local))，又令 $k(\mathfrak{A},f)$ 记所有那些邻域的极小阶数，在此邻域内 $S_k(\mathfrak{A},f)$ 包含出现于简约析取范式 $\mathfrak{N}_f$ 的所有初等合取式．数量

$$p(f) = \max_{\mathfrak{A}\in\mathfrak{N}_f} k(\mathfrak{A},f)$$

称作 f 的长度(extent)．对于"几乎所有的"Boole 函数 f，有

$$p(f(x_1,\ldots,x_n)) \sim \frac{n}{\log_2\log_2 n}.$$

令

$$p(n) = \max_{f(x_1,\ldots,x_n)} p(f(x_1,\ldots,x_n)).$$

已知对于被称为链的那种特殊类型的 Boole 函数，$p(n)$ 可被实现．称函数 $\psi(x_1,\cdots,x_n)$ 为链(chain)，如果它的零点集 N_ψ 可表为一个序列 $\tilde{\alpha}_1,\cdots,\tilde{\alpha}_q$，使得 $\rho(\tilde{\alpha}_i,\tilde{\alpha}_{i+1})=1$，这里 ρ 是 Hamming 距离(见码(code))；而其他一对点 $\tilde{\alpha}_r,\tilde{\alpha}_s$(可能除 $(\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_q)$ 外)间的距离则大于 1，同时任何二维区间都不完全包含在 ψ 的取值 1 的集内．链 ψ 的长度为 $q-1$．因此，对于 $p(n)$ 的计算，演化成在 n 维单位立方体中构造一个有极大 q 的链的问题．由直接构造这种链就证明了

$$c_1\cdot 2^n < p(n) < c_2\cdot 2^n,$$

其中 c_1,c_2 是常数．构造闭链(closed chain 或 cycle)，即 N_ψ 有极大基数且 $\rho(\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_q)=1$ 的那种链，是证明下述定理中的重要部分：出现在"极小或最短的析取范式中的"合取的性质，在局部算法类中是不可计算的．

以下这个结论澄清了"几乎所有的"Boole 函数的真值定义域的结构．n 维单位立方体的一个顶点集 M，如果对任一点 $\tilde{\alpha}\in M$，都存在 M 的点 $\tilde{\beta}$，使得 $\rho(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})=1$，就称 M 是连通的(connected)．M 的点 $\tilde{\alpha}$，若所有使得 $\rho(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})=1$ 的点 $\tilde{\beta}$ 都满足条件 $\tilde{\beta}\notin M$，就称作孤立的(isolated)．今有以下的定理：对于"几乎所有的"Boole 函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$，取值 1 的集合 $N_{f(x_1,\ldots,x_n)}$ 分解成一个连通集和由孤立点所成的集合．连通集的基数不小于 $2^{n-1}-\sqrt{n}\cdot 2^{n/2}-\mathrm{const}\cdot\log_2 n$，孤立点的个数不超过 $\mathrm{const}\cdot\log_2 n$．

计算"几乎所有的"Boole 函数的长度所得到的结果，与计算由 Boole 函数生成的图的半径和直径所获得的结果，是密切相关的．Boole 函数 f 生成的图(graph) $G(f)$ 以 N_f 中的点作为顶点，而以 N_f 中 Hamming 距离等于 1 的点对作为边．$G(f)$ 中二顶点 $\tilde{\alpha}$ 与 $\tilde{\beta}$ 间的距离 $r_G(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})$ 定义为连接 $\tilde{\alpha}$ 与 $\tilde{\beta}$ 的最短链的长度(假定顶点 $\tilde{\alpha}$ 与 $\tilde{\beta}$ 属于 $G(f)$ 的同一连通分支)．顶点 $\tilde{\alpha}$ 在 $G(f)$ 中的偏差是指 $l(\tilde{\alpha})=\max r_G(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})$，其中 max 是对 G 中那些与 $\tilde{\alpha}$ 属于同一连通分支中的所有顶点 $\tilde{\beta}$ 所取的．G 的连通分支 K 的半径是 $R(K)=\min_{\tilde{\alpha}\in K} l(\tilde{\alpha})$．称 $R(G)=\max R(K)$ 为 G 的半径，此处 max 是对 G 中所有的连通分支所取的．G 的直径定义作 $D(G)=\max r_G(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})$，其中 max 是对所有属于同一连通分支的二顶点 $\tilde{\alpha}$，$\tilde{\beta}$ 所取的．对"几乎所有的"Boole 函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$，$R(G)$ 和 $D(G)$ 满足 $n-2\leqslant R(G(f))\leqslant n-1$ 与 $D(G(f))=n-1$．

今仅就单调 Boole 函数这一类，来考虑有关计算 Boole 函数的数值特征方面的结果．令 $\tilde{\alpha}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，$\tilde{\beta}=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$ 是两个有序样本．若 $\alpha_i\leqslant\beta_i$ ($i=1,\cdots,n$)，就称 $\tilde{\alpha}\leqslant\tilde{\beta}$．如果 $\tilde{\alpha}\leqslant\tilde{\beta}$ 蕴含 $f(\tilde{\alpha})\leqslant f(\tilde{\beta})$，则称 Boole 函数 f 是单调的(monotone)．确定以 $x_1,\cdots,x_n$ 为变元的相异的单调 Boole 函数的个数 $\psi(n)$，是个有趣的问题．只对于少数小的 n 值，人们才知道这个数．渐近等式

$$\log_2\psi(n) \sim \binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$$

也属已知．

单调 Boole 函数的最优译码问题，在解答离散极值问题中有大量的应用．为计算一个单调 Boole 函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 在任意点 $\tilde{\alpha}$ 处的值，考虑一个给定的算法 A．如果在计算过程中能确立在某个点 $\tilde{\alpha}$ 处有 $f(\tilde{\alpha})=1$，则对所有的 $\tilde{\beta}\geqslant\tilde{\alpha}$，皆有 $f(\tilde{\beta})=1$．如果 $f(\tilde{\alpha})=0$，则在所有的 $\tilde{\beta}\leqslant\tilde{\alpha}$ 处，f 的值是既知的(取零值)．因此，为完成译码(decoding)，即完全重现函数 f，对于算法 A，只需要计

算在某个点集上的值. 令 $m(f)$ 表示完全重现 f 所需要的最小的点的个数. 令

$$m(n)=\max_{f(x_1,\cdots,x_n)} m(f).$$

数 $m(n)$ 满足渐近等式

$$m(n)\sim 2\left[\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}\right].$$

若对于单调 Boole 函数还有其他补充条件, 则 $m(n)$ 的估值尚可改进.

一个有关破译单调 Boole 函数的问题, 是对于并非到处有定义的 Boole 函数, 即只在 n 维单位立方体的顶点集的某个子集有定义的 Boole 函数, 计算其本质变元组的数量特征. 对于一个并非到处有定义的 Boole 函数 $F(x_1,\cdots,x_n)$, 它的一组变元 $x_{i_1},\cdots,x_{i_k}$ 称为本质的, 如果 $\{x_{i_1},\cdots,x_{i_k}\}\subseteq\{x_1,\cdots,x_n\}$, 并且存在一个并非处处定义的 Boole 函数 $\varphi(x_{i_1},\cdots,x_{i_k})$, 使得在 F 的定义域内恒有 $F(x_1,\cdots,x_n)\equiv\varphi(x_{i_1},\cdots,x_{i_k})$. F 的一个本质变元组, 如果它的任何真子集都不再是本质的, 就称作 F 的终极组.

每个到处有定义的 Boole 函数都有唯一的终极组. 对于并非处处有定义的 Boole 函数, 本质变元组的结构是多种多样的. 令 Σ 是满足下列条件的集 $\{x_1,\cdots,x_n\}$ 的子集组: 若 $S\in\Sigma$, S 是 $\{x_1,\cdots,x_n\}$ 的任何子集, 则有 $S\cup S'\in\Sigma$. 于是存在非处处有定义的 Boole 函数 $F_\Sigma(x_1,\cdots,x_n)$, 使得 Σ 是 F_Σ 的本质族组. 令 $t_F(n)$ 是 $F(x_1,\cdots,x_n)$ 的不同的终极组的个数, 又令

$$t(n)=\max_{F(x_1,\cdots,x_n)} t_F(n).$$

已知

$$t(n)=\left[\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}\right].$$

构造 $F(x_1,\cdots,x_n)$ 的所有终极组的算法, 所需要的计算量最多可达 $2^{\binom{n}{[n/2]}}$, 而且这个最大数实际上是可以达到的 (此处计算量的单位规定为验证一组变元对于 F 是否为本质的所用的工作量).

Boole 函数的度量理论也用于计算与 Boole 函数的极小化问题相关连的特征诸问题中.

参考文献

[1] Глаполев, В. В., 《Проблемы Кибернетики》, **19** (1967), 75－94.

[2] Журавлев, Ю. И., 《Проблемы Кибернетики》, **11** (1964), 271－275.

[3] Коробков, В. К., 《Проблемы Кибернетики》, **13** (1965), 5－28.

[4] Сапоженко, А. А., 《Дискретный анализ》, **10** (1967), 91－119.

[5] Сапоженко, А. А., 《Докл. АН СССР》, **180** (1968), 32－35.

[6] Kleitman, D. J., On Dedekind's problem: the number of monotone Boolean functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **21** (1969), 677－682.

Ю. И. Журавлев 撰 戴执中 译

Boole 函数的极小化 [Boolean functions, minimization of; Булевых функций минимизация]

Boole 函数的范式 (Boolean functions, normal forms of) 表示, 它们关于某种复杂性度量是最简单的. 范式的复杂性 (complexity of a normal form) 的通常的意义是指其中所含字母的个数. 这种意义下的最简单的范式称为极小范式 (minimal form). 复杂性的度量有时是指在析取范式中出现的初等合取的个数, 或是合取范式中因式的个数. 在这种情形下, 最简单的范式称作最短范式 (shortest form). 鉴于析取范式与合取范式的对偶性, 仅考虑析取范式就足够了.

最短析取范式与极小析取范式的构造各具特点. 同一函数的极小析取范式的集合与最短析取范式的集合之间可能有如下的集合论关系: 一个包含在另一个之内, 交集是空集, 或有非空的对称差. 设 m_f 是函数 f 的极小析取范式的复杂性, k_f 是它的最短析取范式的极小复杂性; 又设 $l(n)$ 是当 f 取遍所有 n 元函数时, 比值 k_f/m_f 中之最大者. 于是有以下的渐近式成立:

$$l(n)\sim\frac{n}{2}.$$

Boole 函数的极小化问题, 通常理解为构造它们的极小析取范式. 构造任何 Boole 函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 的一切极小析取范式, 有一个平凡的算法如下: 观察所有含变元 $x_1,\cdots,x_n$ 的析取范式, 从中选取那些实现 f, 并且有极小复杂性的范式. 实际上, 这个算法即使对于小的 n, 也是不切实用的, 因为它所需要的演算次数急剧上升. 因此, 许多别的算法被提出, 但并不能有效地应用于所有的函数.

在极小化问题中, 一个函数的初始指定通常是一个表, 或一个完满析取范式 (见 **Boole 函数的范式** (Boolean functions, normal form of)), 或任何一个析取范式. 第一步在于转化成所谓的简约析取范式, 这对每个函数都是唯一确定的. 实现这个转化有许多方法可采用. 最普遍的方法是在析取范式中作形式如下的变换:

$$A\vee A\cdot B\Rightarrow A \quad (\text{吸收}).$$

$$xA \vee CxB \Rightarrow xA \vee CxB \vee AB.$$

简约析取范式的一个典型性质，是可以经消去某些初等合取而得到任一极小简约析取范式．第二步，也是最费事的一步，就是从简约析取范式中选取所有的终端析取范式，其中也包含所有的极小范式．在这一步，Boole 函数的几何表示常被应用．设 E_n 是 n 维单位立方体的所有顶点所成的集合．每个 Boole 函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 都一一对应于 E_n 的子集 N_f，后者是由使得 $f(\tilde{\alpha})=1$ 的那些顶点 $\tilde{\alpha}$ 所组成．设 $\mathfrak{A}$ 是个 r 级的初等合取．于是，对应于初等合取 $\mathfrak{A}$ 的集合 $N_{\mathfrak{A}}$，就称为 r 级区间(interval of rank r)．一组区间 $N_{\mathfrak{A}_1},\cdots,N_{\mathfrak{A}_m}$，如果满足

$$N = N_{\mathfrak{A}_1} \bigcup \cdots \bigcup N_{\mathfrak{A}_m},$$

就称它组成集合 $N \subseteq E_n$ 的一个覆盖(covering)．

由于等式

$$f = \mathfrak{A}_1 \vee \cdots \vee \mathfrak{A}_m \quad 和 \quad N_f = N_{\mathfrak{A}_1} \bigcup \cdots \bigcup N_{\mathfrak{A}_m}$$

是等价的，所以 Boole 函数的极小化问题，等价于寻找那些区间的级有极小和的覆盖的问题．这种覆盖称为是极小的(minimal)．称区间 $N_{\mathfrak{A}}$ 对于函数 f 是极大的(maximal)，如果 $N_{\mathfrak{A}} \subseteq N_f$ 并且不存在满足 $N_{\mathfrak{A}} \subset N_{\mathfrak{B}} \subseteq N_f$ 的区间 $N_{\mathfrak{B}}$．函数 f 的终端析取范式的构造，演化成寻找 N_f 的由极大区间组成的那种覆盖，使得它的任何真子集都不再能覆盖 N_f．这种覆盖与终端析取范式相对应，并且称之为不可约的(irreducible)．它们是从简约析取范式所对应的覆盖中，去掉某些区间而得到的．

从所有的终端析取范式中选出极小析取范式仍然是一个十分繁复的过程，这是因为"几乎所有的"n 元 Boole 函数都有不少于 2^{2^n} 个不同的终端析取范式．终端析取范式的复合度可能有很大的差异，因此，任意选出一个终端析取范式而非极小析取范式，可能产生大的误差．

对终端析取范式的个数的估值以及对它们的复杂性的散布的估值，显示出在从一个析取范式消去初等合取的过程中作更细致的观察是提高极小化算法的有效性的一个自然途径．一个合取应被消去(或者，相反地，一直保留到此过程的最后)，只有在某个过程中被证实，它不出现在 f 的任何一个极小析取范式之内(出现在 f 的所有极小析取范式之内)．后一事实，通常从分析接近于所要决定取舍的合取的那些合取，即出现在前者的一个邻域内的那些合取而得以确认(见局部算法(algorithm, local))．在此，应积累有关初等合取的各种信息，并在以后的分析中使用．这种过程就是所谓局部简化算法(local simplification algorithm)．下面将举出几个这种算法．对这些算法的描述，涉及到在析取范式 $\mathfrak{N}$ 中一个初等合取 $\mathfrak{A}$($\mathfrak{A} \in \mathfrak{N}$)的 k 次邻域 $S_k(\mathfrak{A},\mathfrak{N})$ 这一概念．

零次邻域 $S_0(\mathfrak{A},\mathfrak{N})$ 只含合取 $\mathfrak{A}$．若 $S_{k-1}(\mathfrak{A},\mathfrak{N})$ 是 $k-1$ 次邻域，则 k 次邻域 $S_k(\mathfrak{A},\mathfrak{N})$ 是由析取范式 $\mathfrak{N}$ 中所有那些满足下列条件之一的合取 $\mathfrak{A}_j$ 所组成：1) $N_{\mathfrak{A}_j}$ 至少与一个对应于 $S_{k-1}(\mathfrak{A},\mathfrak{N})$ 中合取的区间有非空交；或者，2) $N_{\mathfrak{A}_j} \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} N_{\mathfrak{B}_i}$，其中 $N_{\mathfrak{B}_i}$($i=1,\cdots,r$)满足 1)．

Quine 算法(Quine algorithm)．算法的每一步都是对于析取范式 $\mathfrak{N}$ 的一个合取，来考虑它的邻域 $S_1(\mathfrak{A},\mathfrak{N})$．由于算法实施于每个合取，从而我们对下列二性质之一进行计算：

$P_1(\mathfrak{A},\mathfrak{N})$——"$\mathfrak{A}$ 出现于所有的极小析取范式中"；和

$P_2(\mathfrak{A},\mathfrak{N})$——"$\mathfrak{A}$ 不出现于任何一个极小析取范式中"．

这个算法进行如下：1) 依次作出 $\mathfrak{N}$ 中每个合取 $\mathfrak{A}$ 的邻域 $S_1(\mathfrak{A},\mathfrak{N})=\{\mathfrak{A},\mathfrak{A}_1,\cdots,\mathfrak{A}_m\}$．检验包含关系 $N_{\mathfrak{A}} \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} N_{\mathfrak{A}_i}$．如果它不成立，则予 $\mathfrak{A}$ 以标记，表明它属于所有的极小析取范式．这时，称 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathfrak{N}$ 的核的一部分($\mathfrak{A}$ 是个核合取(kernel conjunction))．2) 令 $\mathfrak{B}_1,\cdots,\mathfrak{B}_q$ 是在第一步中给有标记的 $\mathfrak{N}$ 中合取．把 $\mathfrak{N}$ 中余下的合取依序罗列，并对每个这种合取 $\mathfrak{B}$，来检验包含关系 $N_{\mathfrak{B}} \subseteq \bigcup_{i=1}^{q} N_{\mathfrak{B}_i}$．凡满足这个关系的合取，都不出现于任何一个极小析取范式之中，把它们从 $\mathfrak{N}$ 中去掉．

正则点算法(regular points algorithm)．在这个算法的每一步中，考察析取范式 $\mathfrak{N}$ 中一合取 $\mathfrak{A}$ 的邻域 $S_2(\mathfrak{A},\mathfrak{N})$，并从 $\mathfrak{N}$ 中消去那些不出现于任何终端析取范式中，从而也不出现于任何极小析取范式中的合取．对算法的描述涉及到 $\mathfrak{N}$ 中 $\tilde{\alpha}$ 丛(bundle)这个概念，此即对于 $N_{\mathfrak{A}}$ 中的点 $\tilde{\alpha}$，由满足下述条件的区间 N_{A_j} 所成的集合 $M(\tilde{\alpha},\mathfrak{N})$：$\mathfrak{A}_j \in \mathfrak{N}$，$\tilde{\alpha} \in N_{A_j}$．对于 $\mathfrak{N}$ 中的合取 $\mathfrak{A}$，以及 $N_{\mathfrak{A}}$ 中的 $\tilde{\alpha}$，如果存在点 $\tilde{\alpha}'$，使得 $\tilde{\alpha}' \in N_{\mathfrak{A}} \setminus N_{\mathfrak{A}}$，并且 $M(\tilde{\alpha}',\mathfrak{N}) \subseteq M(\tilde{\alpha},\mathfrak{N})$，则称 α 关于($\mathfrak{A},\mathfrak{N}$)是正则的(regular)．一个集合 $M \subseteq N_{\mathfrak{A}}$，如果其中所有的点关于($\mathfrak{A},\mathfrak{N}$)都是正则的，则称 M 关于($\mathfrak{A},\mathfrak{N}$)是正则的．这个算法基于这样一个事实：在函数 f 的简约析取范式 $\mathfrak{N}$ 中，一个合取 $\mathfrak{A}$，当且仅当 $N_{\mathfrak{A}}$ 关于($\mathfrak{A},\mathfrak{N}$)是正则的时，才不出现于 f 的任何终端析取范式之内．这个算法在于按某种顺序逐个检验出现于析取范式的合取区间是否为正则的，同时消去那些有正则区间的合取．区间 $N_{\mathfrak{A}}$ 关于($\mathfrak{A},\mathfrak{N}$)是否成为正则的，一般不能由邻域 $S_1(\mathfrak{A},\mathfrak{N})$ 确定，而是由邻域 $S_2(\mathfrak{A},\mathfrak{N})$ 完全确定．

A 算法(A-algorithm)．这里所使用的概念是关于一个析取范式 $\mathfrak{N}$ 为极小析取范式(minimal disjunctive normal form)，即在所有那些从 $\mathfrak{N}$ 中消去某些初等合取而得到的但仍与 $\mathfrak{N}$ 等价的析取范式中的一个极小的．在析取范式 $\mathfrak{N}$ 中，对初等合取考虑以下两个性

质:

$P_1(\mathfrak{A},\mathfrak{N})$——"$\mathfrak{A}$ 出现于所有关于 $\mathfrak{N}$ 为极小的析取范式之内";以及

$P_2(\mathfrak{A},\mathfrak{N})$——"$\mathfrak{A}$ 不出现于任何一个关于 $\mathfrak{N}$ 为极小的析取范式之内".

若性质 P_i 成立,规定 $P_i=1$;否则,规定 $P_i=0$. 我们还规定析取范式由附有信号 (ω_1,ω_2) 的合取所组成,此处 $\omega_i\in\{0,1,\Delta\}$. 等式 $\omega_i=\Delta$ 表示性质 P_i 未被验证,等式 $\omega_i=1,0$, 表示 $P_i=\omega_i$ $(i=1,2)$. 附有信号 (ω_1,ω_2) 的合取 $\mathfrak{A}$ 记作 $\mathfrak{A}^{\omega_1\omega_2}$. A 算法是对于析取范式 $\mathfrak{N}$ 的合取 $\mathfrak{A}$ 计算性质 P_1 与 P_2 的值,为此目的,只需用到邻域 $S_2(\mathfrak{A},\mathfrak{N})$ 中的合取以及它们的信号. 对于 $\mathfrak{N}$ 的一个 r 级合取 $\mathfrak{A}$,称集合 $M\subseteq N_{\mathfrak{A}}$ 是关于 $(\mathfrak{A},N)$ 的一个第一型集合,如果 $\mathfrak{N}$ 包含级分别为 $r_1,\cdots,r_m$ 的合取 $\mathfrak{A}_1,\cdots,\mathfrak{A}_m$,使得 $M\subseteq\bigcup_{j=1}^m N_{\mathfrak{A}_j}$ 且 $r>\sum_{j=1}^m r_j$.

两个析取范式 $\mathfrak{N}_1$ 与 $\mathfrak{N}_2$ 的差 $\mathfrak{N}_1\setminus\mathfrak{N}_2$, 是由出现于 $\mathfrak{N}_1$ 但不出现于 $\mathfrak{N}_2$ 的初等合取所组成的析取范式.

在施行 A 算法之前,析取范式 $\mathfrak{N}$ 中所有的合取都有信号 (Δ,Δ). 在施行了 i 步,并且合取 $\mathfrak{A}_1',\cdots,\mathfrak{A}_s'$ 取得信号 $(1,\Delta)$; 合取 $\mathfrak{A}_1'',\cdots,\mathfrak{A}_t''$ 取得信号 $(\Delta,1)$ 后,第 $i+1$ 步的施行将进行如下. 把析取范式中的合取按某种顺序罗列. 若析取范式 $\mathfrak{N}\setminus(\vee_{j=1}^s\mathfrak{A}_j'\vee\vee_{j=1}^t\mathfrak{A}_j'')$ 是空的,则 A 算法终止. 如果不然,把这个析取范式中的合取按某一顺序排列;取出这个序列中的第一个合取 $\mathfrak{A}$,以及它在析取范式 $\tilde{\mathfrak{N}}=\mathfrak{N}\setminus(\vee_{j=1}^t\mathfrak{A}_j'')$ 中的邻域 S_1 与 S_2, 并且对关系

$$N_{\mathfrak{A}}\subseteq\bigcup_{\mathfrak{B}\in(S_1(\mathfrak{A},\tilde{\mathfrak{N}})\setminus\mathfrak{A})}N_{\mathfrak{B}}$$

进行检验. 如果这个关系成立, $\mathfrak{A}$ 的信号 (Δ,Δ) 就由 $(1,\Delta)$ 取代, 同时 A 算法的第 $i+1$ 步即告终止. 如果不然,就来验证 $N_{\mathfrak{A}}$ 是否能表成 $M_1\cup M_2$ 的形式,其中 M_1 关于 $(\mathfrak{A},\mathfrak{N})$ 是正则集, M_2 关于 $(\mathfrak{A},\mathfrak{N})$ 是第一型的集合. 若 $N_{\mathfrak{A}}$ 能表成这一形式, $\mathfrak{A}$ 的信号 (Δ,Δ) 就由 $(\Delta,1)$ 所取代,此时 A 算法的第 $i+1$ 步即告终止;否则,就对序列中的第二个合取作同样的处理,如此继续下去. 如果这些合取中的任何一个其信号都保持不变,则在检验了所有的合取后, A 算法的运算即告结束.

若以函数 f 的简约析取范式 $\mathfrak{N}_f$ 作为 $\mathfrak{N}$, 则在算法中凡获得信号 $(\Delta,1)$ 的合取都不出现于 f 的任何一个极小析取范式之中;这些合取都从 $\mathfrak{N}_f$ 中消去. 凡获得信号 $(1,\Delta)$ 的合取,在 f 的每个极小析取范式中都出现. A 算法的种种特例也都被考虑过.

环算法 (ring algorithm) 对合取给以信号 (ω_1,ω_2), 此信号具有与 A 算法中相同的意义. 环算法的每一步中,都用到含在某个合取的 k 次邻域中的合取以及它们的信号. 此算法可简述如下. 环算法的完整形式, 是带有关于邻域 $S_k(\mathfrak{A},\mathfrak{N})$ 的特殊记忆的最佳局部算法. 上面所介绍的种种算法,都是一般环算法 (general ring algorithm) 的特例. 若

$$S_{k-1}(\mathfrak{A},\mathfrak{N})=\{\mathfrak{A},\mathfrak{A}_1,\ldots,\mathfrak{A}_l\},$$
$$S_k(\mathfrak{A},\mathfrak{N})=\{\mathfrak{A},\mathfrak{A}_1,\ldots,\mathfrak{A}_l,\mathfrak{A}_{l+1},\ldots,\mathfrak{A}_m\}$$

以及

$$N_{S_{k-1}}=N_{\mathfrak{A}}\cup\bigcup_{i=1}^{l}N_{\mathfrak{A}_i},\quad N_{S_k}=N_{\mathfrak{A}}\cup\bigcup_{j=1}^{m}N_{\mathfrak{A}_j},$$
$$Q(S_k)=N_{S_k}\setminus N_{S_{k-1}},$$

则对于每个子集 $N\subseteq Q(S_k)$, 都可以确定一个并非到处有定义的 Boole 函数 f, 使得 f 取值 1 的集合 M_1^f 为 $N_{S_k}\setminus N$, 取值 0 的集合 M_0^f 为 $E_n\setminus N_{S_k}$; 函数 f 在 N 上无定义. 这种函数组成的集合记为 $F_k(\mathfrak{A})$. 在算法进行之前,含于所考虑的析取范式 $\mathfrak{N}$ 中的合取,都具有信号 (Δ,Δ). 如果在完成 i 步以后,合取 $\mathfrak{A}_1',\cdots,\mathfrak{A}_s'$ 有信号 $(1,\Delta)$, 以及合取 $\mathfrak{A}_1'',\cdots,\mathfrak{A}_t''$ 有信号 $(\Delta,1)$, 则第 $i+1$ 步将进行如下: 把析取范式中的合取按某种顺序排列. 如果析取范式 $\mathfrak{N}\setminus\vee_{j=1}^s\mathfrak{A}_j'\vee\vee_{j=1}^t\mathfrak{A}_j''$ 是空的,则此算法终止. 否则,将此析取范式中的所有合取按某种顺序排列. 对于此序列中的第一个合取 $\mathfrak{A}$, 和集 $F_k(\mathfrak{A})$ 中所有的 f, 找出在 f 的定义域上所有能实现 f 且符合下述要求的析取范式: 它们由 $S_k(\mathfrak{A},\mathfrak{N})$ 中的合取所组成,并且较之其他这种析取范式含有最少个数的变元符号. 在它们之中,选择满足下述二条件的所有析取范式: 首先,不包含合取 $\mathfrak{A}_1'',\cdots,\mathfrak{A}_t''$, 其次,包含所有使得 $N_{\mathfrak{A}}\cap(N_{S_k}\setminus N)=\phi$ 的合取 $\mathfrak{A}_j'$ $(j=1,\cdots,s)$. 如果对于 $F_k(\mathfrak{A})$ 中所有的 f, 合取 $\mathfrak{A}$ 出现于所有选出的析取范式,则 $\mathfrak{A}$ 的信号 (Δ,Δ) 就由 $(1,\Delta)$ 所取代,算法的第 $i+1$ 步即告终止. 如果 $\mathfrak{A}$ 不出现于任何一个所选出的析取范式之中,则信号 (Δ,Δ) 变成 $(\Delta,1)$, 第 $i+1$ 步亦告结束. 否则,就对序列中后一个合取施行以上的步骤,如此继续下去. 若对于任何合取信号都不改变,算法就终止于第 $i+1$ 步. 在函数 f 的简约析取范式 $\mathfrak{N}_f$ 中,经环算法所得到的所有那些带信号 $(1,\Delta)$ (或者, $(\Delta,1)$) 的合取,出现于 f 的每个极小析取范式(或者,不出现于 f 的任何一个极小析取范式)之内. 无论对析取范式中的合取作何种排序,上述的算法都给出全然相同的结果.

选出所有那些至少出现于一个极小析取范式内,或者不出现于任何一个极小析取范式内的合取,这一工作无法由藉助于 $S_k(\mathfrak{A},\mathfrak{N})$ 的各种算法来解决,如果其中的 k 是有界的,或是当变元个数 n 增加时, k 增加得很慢. 如果对储存于算法中的性质 P_1, P_2 添加由性质组成的一个有界集,或者一个当 n 增加时,增加得太慢的无界集,这个情况不会改变.

参考文献

[1] Яблонский, С. В., Функциональные построения в к-значной логике.,《Тр. Матем. ин-та АН СССР》, 51 (1958), 5-142.

[2] Журавлев, Ю. И.,《Проблемы кибернетики》, 8 (1962), 5-44.

[3] Quine, W. V., On cores and prime implicants of truth functions, *Amer. Math. Monthly*, 66 (1959), 755-760.

Ю. И. Журавлев 撰 戴执中 译

Boole 函数的范式 [Boolean functions, normal forms of; Булевых функций нормальные формы]

表达 Boole 函数一类特殊公式. 区别为析取范式 (disjunctive normal form) (见 **Boole 函数的极小化** (Boolean functions, minimization of)) 与合取范式 (conjunctive normal form). 如果乘积 $x_{i_1}^{\sigma_1}\cdots x_{i_k}^{\sigma_k}$ 的所有变元都不同,则称为 k 级初等合取(elementary conjunction),其中,当 $\sigma=1$ 时,$x^\sigma=x$;当 $\sigma=0$ 时,$x^\sigma=Cx$;"1"被看作0 级的初等合取. 如果逻辑和 $x_{j_1}^{\sigma_1}\vee\cdots\vee x_{j_r}^{\sigma_r}$ 的所有变元都不同,就称为 r 级的初等析取 (elementary disjunction);"0"被看作 0 级的初等析取.

公式 $\mathfrak{A}_1\vee\cdots\vee\mathfrak{A}_l$,其中 $\mathfrak{A}_1,\cdots,\mathfrak{A}_l$ 分别是 $r_1,\cdots,r_l$ 级的互异的初等合取,称为一个析取范式,数 $\sum_{j=1}^{l}r_j$ 称为它的复杂性 (complexity);公式 $\mathfrak{B}_1\cdots\mathfrak{B}_t$,其中 $\mathfrak{B}_1,\cdots,\mathfrak{B}_t$ 分别是 $\rho_1,\cdots,\rho_t$ 级的互异的初等析取,称为一个合取范式,数 $\sum_{i=1}^{t}\rho_i$ 称为它的复杂性(complexity). 每个不恒为零的 Boole 函数都可由一个析取范式来定义,一般说,这种范式不是唯一的. 对于不恒为零的 Boole 函数,同样也可用合取范式来定义.

从定义 Boole 函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 的一个表出发,容易得到完满析取范式 (perfect disjunctive normal form) $\mathfrak{A}_1\vee\cdots\vee\mathfrak{A}_s$, 其中 $\mathfrak{A}_i=x_1^{\sigma_{i1}}\cdots x_n^{\sigma_{in}}$ $(i=1,\cdots,s)$, 同时 $\sigma_{i1},\cdots,\sigma_{in}$ 满足 $f(\sigma_{i1},\cdots,\sigma_{in})=1$. 表达一个 Boole 函数 f 的完满析取范式是唯一的. 完满合取范式 (perfect conjunctive normal form) 可以类似地来定义.

对"几乎所有的"Boole 函数,由于单位集的个数在 $2^{n-1}-\sqrt{n}\,2^{n/2}$ 与 $2^{n-1}+\sqrt{n}\,2^{n/2}$ 之间变动,故对于"几乎所有的"Boole 函数,完满析取范式的渐近复杂性是 $n2^{n-1}$. 那些仅在一点取零值的 n 元 Boole 函数,其完满析取范式具有最大的复杂性. 这个复杂性是 $n(2^n-1)$.

Boole 函数的范式理论的主要问题是 Boole 函数的极小化问题,即对任一给定的 Boole 函数构造其具有极小复杂性的合取或析取范式——Boole 函数的极小合取范式或极小析取范式(见 **Boole 函数的极小化** (Boolean functions, minimization of); **局部算法** (algorithm, local)). 基于对偶原则,此处只需考虑析取范式. 与 Boole 函数的极小化问题有关, 我们还考虑有简约终端的析取范式, 最短的析取范式, 和极小析取范式. 析取范式理论中的一个重要问题是求它们的数量特征,以及关于给定函数的几种不同类型的析取范式的特征.

Boole 函数的简约析取范式,可从一个相当简单的算法唯一地作出. 简约析取范式最重要的性质, 是在此范式中消去某些初等合取,就能得出函数的每个极小析取范式,以及至少一个最短析取范式. 因此,许多极小化算法,都用 Boole 函数的简约析取范式作为最初的定义式. 于是最关重要的是对"几乎所有的"函数,来定义简约析取范式的复杂性,并确定这个复杂性的绝对极大值. 若在 Boole 函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 的简约析取范式中,初等合取的个数为 $S_f(n)$, 又若

$$S(n)=\max_{f(x_1,\dots,x_n)}S_f(n),$$

则有以下的估值成立:

$$C_1\frac{3^n}{n}\lesssim S(n)\lesssim C_2\frac{3^n}{\sqrt{n}},$$

又对于"几乎所有的"Boole 函数,有

$$n^{(1-\epsilon)\log_2\log_2 n}2^n<S_f(n)<n^{(1+\epsilon)\log_2\log_2 n}2^n,$$

当 $n\to\infty$ 时, $\varepsilon\to0$.

从这些结果以及从对完全析取范式的复杂性的估值,可以清楚地看到,无论是"典型的"还是"破纪录的"情形,简约析取范式的复杂性都远高于完全析取范式的复杂性. 不同于完全析取范式和简约析取范式,一个给定的 Boole 函数可能有许多终端析取范式和极小析取范式. 令 $t_f(n)$ 是 Boole 函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 的终端析取范式的个数; $m_f(n)$ 是该函数的极小析取范式的个数, 又令

$$t(n)=\max_{f(x_1,\dots,x_n)}t_f(n),\quad m(n)=\max_{f(x_1,\dots,x_n)}m_f(n).$$

于是有以下的估值成立:

$$(2^{2^n})^{\sqrt{n}}\leqslant t(n)\leqslant(2^{2^n})^{n/2},\quad m(n)>(2^{2^n})^{\text{常数}\,\sqrt{n}},$$

又对于"几乎所有的" Boole 函数,有

$$(2^{2^{n-1}})^{(1-\epsilon)\log_2 n\log_2\log_2 n}<t_f(n)<$$
$$<(2^{2^{n-1}})^{(1+\epsilon)\log_2 n\log_2\log_2 n},$$

当 $n\to\infty$ 时, $\varepsilon\to0$.

就"几乎所有的"函数而论,对 $m_f(n)$ 的一个非平凡的估值, 以及对 $m(n)$ 的上界的非平凡估值, 至今(1977)尚未知晓. 在 Boole 函数的极小化问题中,对终端析取范式和极小析取范式的复杂性的估值,是十分有意义的. 设 $\lambda_f^T(n)$ 是函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 的终端析取范式 T 中所含初等合取的个数; $l_f(n)$ 是 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 的最短析取范式中所含初等合取的个数,又设

$$\lambda(n)=\max_{f,T}\lambda_f^T(n),\quad l(n)=\max_{f}l_f(n).$$

于是有以下的估值成立：

$$\lambda(n) \sim 2^n,\ l(n) = 2^{n-1}.$$

对"几乎所有的"Boole函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$，以及几乎所有的终端析取范式 T，有

$$\lambda_f^T(n) \sim 2^{n-1}.$$

对"几乎所有的"Boole函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$，有

$$\frac{2^n}{\log_2 n\cdot\log_2\log_2 n} < l_f(n) < \frac{2^n}{\log_2 n}.$$

这些估值表明，对于"几乎所有的"Boole函数，最短(以及极小)析取范式仅是终端析取范式中的一小部分．对于Boole函数的终端析取范式与最短析取范式的相对复杂性(relative complexity)，也有一些估值．令 $\lambda_f(n)$ 是函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 的终端析取范式中所出现的初等合取的最大数．对于"几乎所有的"Boole函数，恒有

$$\log_2 n < \frac{\lambda_f(n)}{l_f(n)} < \log_2 n\cdot\log_2\log_2 n.$$

比数 $\lambda_f(n)/l_f(n)$ 的极大值的下界估值为 $2^{n(1-\varepsilon)}$，此处当 $n\to\infty$ 时，$\varepsilon\to 0$．所谓 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 的散布(scatter) $y(f)$ 是指

$$y(f) = \max_{T',T''}\frac{L(T')}{L(T'')},$$

其中 T' 与 T'' 是 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 的任意二终端析取范式，$L(T)$ 是在终端析取范式 T 中文字的个数．已获得关于 $y(f)$ 的估值．满足 $y(f)\geqslant 2^{n(1-o(1))}$ 的Boole函数的例 f 已经作出；另一方面，对"几乎所有的"Boole函数，都有

$$y(f) \leqslant \log_2 n\cdot\log_2\log_2 n.$$

以上这些估值，给人们在对Boole函数按完全析取范式——简约析取范式——终端析取范式——极小析取范式作极小化时所产生的困难以一个相当全面的认识．

参考文献

[1] Васильев, Ю. Л., 《Проблемы Кибернетики》, 10 (1963), 5－61.

[2] Глаголев, В. В., 《Проблемы Кибернетики》, 19 (1967), 75－94.

[3] Коршунов, А. Д., 《Кибернетика》, 6 (1969), 1－8.

[4] Сапоженко, А. А., 《Матем. Заметки》, 4 (1968), 6, 649－658.

Ю. И. Журавлев 撰　戴执中 译

Boole 环 [Boolean ring; Булево кольцо]

结合环 K，它所有的元都是幂等的，即对于每个 $x\in K$，有 $x^2=x$．Boole环 $K\neq 0$ 总是交换环，且为二元域 $\mathbf{Z}_2$ 的次直和，又对于每个 $x\in K$，均有 $x+x=0$．有限Boole环 $K\neq 0$ 是域 $\mathbf{Z}_2$ 的直和，从而有幺元．

Boole环是**Boole代数**(Boolean algebra)的一种环形式，这就是说，任何Boole代数是个有幺元的Boole环，其加法与乘法运算分别规定为

$$(x+y) = (x\cap Cy)\cup(y\cap Cx),\quad x\cdot y = x\cap y.$$

其中 Cx 为 x 的补元．环的零元与幺元分别是代数的零元与幺元．反之，每个有幺元的Boole环都是一个Boole代数，其运算为

$$x\cup y=x+y+xy,\ x\cap y=x\cdot y,\ Cx=1+x.$$

参考文献

[1] Stone, M. H., The theory of representations for Boolean algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 40 (1936), 37－111.

[2] Жегалкин, И. И., 《Матем. сб.》, 34 (1927), 9－28.

[3] Владимиров, Д. А., Булевы алгебры, М., 1969.

[4] Sikorski, R., Boolean algebras, Springer, 1969.

Ю. М. Рябухин 撰

【补注】 运算 $x+y=(x\cap Cy)\cup(y\cap Cx)$ 又称作对称差(symmetric difference)．为阐释以上的公式，可设想一个由给定的集中所有子集在并，交，以及补的运算下所成的Boole代数．

参考文献

[A1] Rudeanu, S., Boolean functions and equations, North-Holland, 1974.

戴执中 译

Boole 值模型 [Boolean-valued model; булевозначная модель]

此模型定义如下：设 Ω 具有单种变元的某个一阶语言的表征，即 Ω 为函数与谓词的符号集．Boole值模型为一三元组 $M=(B_M, V_M, \Omega_M)$，这里 B_M 为非退化**Boole代数**(Boolean algebra)，V_M 为非空集并且 Ω_M 为定义在 Ω 上的函数，使得若 ρ 为 n 元函数符号，则

$$\Omega_M(\rho) \in V_M^{V_M^n},$$

若 ρ 为 n 元谓词符号，则

$$\Omega_M(\rho) \in B_M^{V_M^n}.$$

符号 X^Y 表示定义在 Y 上而取值于 X 的所有函数的集合，$X^n=X^{\{m:\,m<n\}}$，这里 $n\geqslant 0$ 为自然数．Boole代数 B_M 称为模型 M 的真假值集(set of truth values)．集合 V_M 称为 M 的全域(universe)．Boole值模型 M 也称为 B 模型，若真值集为Boole代数 B 即 $B_M=B$．若Boole代数 B 为二元代数(即 $B=\{0,1\}$)，则此 B 模型 M 就是经典两值模型．

令 L_M 为在语言 L 上添加新个体常元而得：对每个 $v\in V_M$ 在 L_M 中具有相应的个体常元 $\mathbf{v}$．设 M 为一 B 模型且 $B=(B;\ 0,\ 1,\ C,\cup,\cap)$ 为完全Boole代数；以

下的等式 1)−8) 定义 L_M 的每个闭表达式 e（即无自由变元的公式或项）的值 (value) $\| e \|_M$.

1) $\| \mathbf{v} \|_M = v$，这里 $v \in V_M$；

2) $\| \rho(\tau_1, \cdots, \tau_n) \|_M = (\Omega_M(\rho))(\| \tau_1 \|_M, \cdots, \| t_n \|_M)$，这里 $\tau_1, \cdots, \tau_n$ 为闭项且 ρ 为 n 元函数或谓词符号；

3) $\| \varphi \supset \psi \|_M = -\| \varphi \|_M \cup \| \psi \|_M$；

4) $\| \varphi \vee \psi \|_M = \| \varphi \|_M \cup \| \psi \|_M$；

5) $\| \varphi \wedge \psi \|_M = \| \varphi \|_M \cap \| \psi \|_M$；

6) $\| \neg \varphi \|_M = -\| \varphi \|_M$；

7) $\| \exists \xi \varphi(\xi) \|_M = \bigcup_{v \in V_M} \| \varphi(\mathbf{v}) \|_M$；

8) $\| \forall \xi \varphi(\xi) \|_M = \bigcap_{v \in V_M} \| \varphi(\mathbf{v}) \|_M$.

关系式 1)−8) 对于某些非完全 Boole 代数亦可定义值 $\| e \|_M$；仅需要 7) 和 8) 中的无穷并和无穷交存在. Boole 值模型的概念亦可对具多种类型变元的语言引入. 在这样的情形下每种变元具有自己的变域 V_M.

称闭公式 φ 在 B 模型中为真的 (true) ($M \vDash \varphi$) 是指 $\| \varphi \|_M = 1$. 称 B 模型 M 为理论 T 的模型，是指对于 T 的所有公理 φ 皆有 $M \vDash \varphi$. 若 h 为从 Boole 代数 B 到 Boole 代数 B' 的同态且保持无穷并和无穷交，则存在 B' 模型 M' 使对每个 L_M 闭公式 φ，$\| \varphi \|_{M'} = h(\| \varphi \|_M)$ 成立. 若模型 M 的域是可数的，则存在映射到 Boole 代数 $\{0, 1\}$ 中的同态 h，在其下 M 被转化成经典两值模型 M' 使 $M \vDash \varphi \to M' \vDash \varphi$. 已经证明理论 T 相容，当且仅当 T 具有 Boole 值模型. 这个定理成为 Boole 值模型理论应用于公理理论相容性的基础.

若理论 T 的 Boole 值模型是借助于另一公理理论 S 而构作的，则可得到 T 相对于 S 的相容性. 于是 P. Cohen 的理论 $ZF + (2^{\aleph_0} > \aleph_1)$ 相对于 ZF 的相容性的结果由借助于 ZF 构作 Boole 值模型而得到（见**力迫法** (forcing method)). Cohen 力迫关系 $p \Vdash \varphi$ 的构作等价于满足

$$\| \varphi \|_M = \{p : p \Vdash \neg\neg\varphi\}$$

的 Boole 值模型的构作.

参考文献

[1] Rasiowa, E. and Sikorski, R., The mathematics of metamathematics, Polska Akad. Nauk, 1963.
[2] Jech, T. J., Lectures in set theory: with particular emphasis on the method of forcing, Springer, 1971.
[3] Takeuti, G. and Zaring, W. M., Axiomatic set theory, Springer, 1973.
[4] Манин, Ю. И., в сб.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 5, М., 1975, 5−72.

В. Н. Гришин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Bell, J. L., Boolean-valued models and independence proofs in set theory, Clarendon Press, 1977.
[A2] Jech, T. J., Set theory, Acad. Press, 1978.
[A3] Kunen, K., Set theory, North - Holland, 1980.

宋方敏 译 莫绍揆 校

Booth 双纽线 [**Booth lemniscate**; **Бута лемниската**]

四次平面代数曲线，它在 Descartes 直角坐标系中的方程是

$$(x^2+y^2)^2+(2m^2+n)x^2+(2m^2-n)y^2 = 0.$$

如果 $|n|<2m^2$，则 Booth 双纽线称为椭圆型的 (elliptic)（它具有奇点 O，见图 1，其中 $0<n<2m^2$）. 如果 $|n|>2m^2$，Booth 双纽线称为双曲型的 (hyperbolic)（它在坐标原点处具有结点，见图 2，其中 $n>2m^2$）.

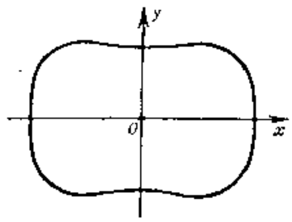


图 1

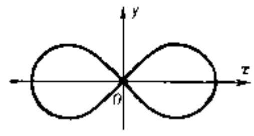


图 2

在极坐标中，椭圆型 Booth 双纽线的方程是

$$\rho^2 = a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi \quad 或 \quad \rho \equiv 0.$$

如果 $n>2m^2$，则双曲型 Booth 双纽线的方程是

$$\rho^2 = a^2\cos^2\varphi - b^2\sin^2\varphi;$$

如果 $n<-2m^2$，则是

$$\rho^2 = -a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi$$

$$(a^2 = |2m^2+n|, \ b^2 = |2m^2-n|).$$

Booth 双纽线的弧长可以用椭圆积分来表示. 椭圆型 Booth 双纽线所围成的面积是

$$S = \frac{\pi}{2}(a^2+b^2),$$

而双曲型 Booth 双纽线所围成的面积是

$$S = \frac{a^2-b^2}{2}\operatorname{arctg}\frac{a}{b} + \frac{ab}{2}.$$

Booth 双纽线是**波斯曲线** (Persian curve) 的特殊情况.

Booth 双纽线因 J. Booth 而得名，见 [1].

参考文献

[1] Booth, J., A treatise on some new geometrical methods, 1−2, London, 1873−1877.
[2] Савелов, А. А., Плоские кривые, М., 1960, 144−146.

Д. Д. Соколов 撰 张鸿林 译

加边法 [bordering method; окаймления метод]

通过求矩阵的逆和计算行列式求解具有非退化矩阵的线性代数方程组 $Ax=b$ 的一种方法. 它是基于递归地从具有矩阵 A_{k-1}

$$A_{k-1}=\begin{Vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k-1,1} & \cdots & a_{k-1,k-1} \end{Vmatrix}$$

的问题的解到具有矩阵 A_k 的问题的解, 这里 A_k 可认为是由 A_{k-1} 加边得到的.

矩阵求逆的加边法的计算方案如下: 设 A_{k-1} 是非退化矩阵, 在矩阵 A_k 求逆时, 要用到表达式

$$A_k=\begin{Vmatrix} A_{k-1} & u_k \\ v_k & a_{kk} \end{Vmatrix}, \tag{1}$$

这里 $u_k=(a_{1,k},\cdots,a_{k-1,k})^T$, $v_k=(a_{k,1},\cdots,a_{k,k-1})$, 则

$$A_k^{-1}=\begin{Vmatrix} A_{k-1}^{-1}+\dfrac{A_{k-1}^{-1}u_kv_kA_{k-1}^{-1}}{\alpha_k} & -\dfrac{A_{k-1}^{-1}u_k}{\alpha_k} \\ -\dfrac{v_kA_{k-1}^{-1}}{\alpha_k} & \dfrac{1}{\alpha_k} \end{Vmatrix},$$

$$\alpha_k=a_{kk}-v_kA_{k-1}^{-1}u_k. \tag{2}$$

用这个方案逐次求矩阵 $A_1,\cdots,A_n$ 的逆, 就得到矩阵 A^{-1}.

上述加边法的方案仅适用于主子式不等于零的矩阵. 一般, 应采用主元方案. 在上述方案中, 用来加边的行和列使得 $\alpha_k=a_{kk}-v_kA_{k-1}^{-1}u_k$ 具有最大绝对值. 这时计算得到的矩阵仅在行、列的排列上与 A^{-1} 不同(见[1]).

加边法不是矩阵求逆 (inversion of a matrix) 最快的直接法.

加边法使三角矩阵的有效求逆成为可能. 如果 A_k 是右(或上)三角矩阵, 则在(1)中

$$v_k=0 \quad 和 \quad A_k^{-1}=\begin{Vmatrix} A_{k-1}^{-1} & -\dfrac{A_{k-1}^{-1}u_k}{a_{kk}} \\ 0 & \dfrac{1}{a_{kk}} \end{Vmatrix}.$$

在这种情形下, 计算量可减到六分之一.

求 Hermite 正定矩阵的逆矩阵时, 加边法是特别有效的. 对这些矩阵不必利用主元方案, 并且, 它们只需要计算一半元素. 这时计算方案简化为:

$$A_k^{-1}=\begin{Vmatrix} A_{k-1}^{-1}+\dfrac{P_kP_k^*}{\alpha_k} & -\dfrac{P_k}{\alpha_k} \\ -\dfrac{P_k^*}{\alpha_k} & \dfrac{1}{\alpha_k} \end{Vmatrix},$$

$$P_k=A_{k-1}^{-1}u_k,\quad \alpha_k=a_{kk}-u_k^*P_k.$$

解方程组的加边法的计算方案如下所述: 设 $b^{(kp)}=(a_{1p},\cdots,a_{kp})^T$, $k=1,\cdots,n$; $b^{(n,n+1)}=-b$. 如果 A_{k-1} 是非退化矩阵, $x^{(k-1,p)}$ 是方程组 $A_{k-1}x^{(k-1,p)}+b^{(k-1,p)}=0$ 的解, 则方程组 $A_kx^{(k,p)}+b^{(k,p)}=0$ 的解 $x^{(k,p)}$ 从表达式

$$A_k=\begin{Vmatrix} A_{k-1} & b^{(k-1,k)} \\ v_k & a_{kk} \end{Vmatrix},\quad b^{(k,p)}=\begin{Vmatrix} b^{(k-1,p)} \\ a_{kp} \end{Vmatrix}, \tag{3}$$

和(2)得到

$$x^{(k,p)}=-\begin{Vmatrix} A_{k-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} b^{(k-1,p)} \\ a_{kp} \end{Vmatrix}+$$

$$+\frac{1}{\alpha_k}\begin{Vmatrix} -x^{(k-1,k)}v_kx^{(k-1,p)}-x^{(k-1,k)}a_{kp} \\ -v_kx^{(k-1,p)}-a_{kp} \end{Vmatrix}=$$

$$=\begin{Vmatrix} x^{(k-1,p)} \\ 0 \end{Vmatrix}-\frac{v_kx^{(k-1,p)}+a_{kp}}{a_{kk}+v_kx^{(k-1,k)}}\begin{Vmatrix} x^{(k-1,k)} \\ 1 \end{Vmatrix}. \tag{4}$$

用这种方式, 通过具有同一个矩阵 A_{k-1}, 但不同右端项的方程组的解 $x^{(k-1,p)}$ 和 $x^{(k-1,k)}$, 可以容易地得到具有加边矩阵 A_k 的方程组的解. 原方程组的解是 $x^{(n,n+1)}$, 可以通过递归地应用关系式(4)而得到. 这就导出向量集 $x^{(k,p)}(k=1,2,\cdots,n,p>k)$ 的顺序计算, 即

$$\begin{matrix} x^{(12)}, & x^{(13)}, & \ldots, & x^{(1,n+1)}, \\ & x^{(23)}, & \ldots, & x^{(2,n+1)}, \\ & & \ldots, & \ldots, \\ & & & x^{(n-1,n+1)}, \\ & & & x^{(n,n+1)}. \end{matrix}$$

在必需的计算量方面, 这个加边法等价于 Gauss 法 (Gauss method), 即解方程组最快的直接法之一.

由于计算机内存的有效利用, 加边法可以求解较高阶方程组. 这是因为计算向量 $x^{(k,p)}(p>k)$, 只需要存储向量 $x^{(k-1,p)}(p>k-1)$ 和第 k 个方程的系数, 也就是长度为 $f(k)=k(n-k+1)+(n+1)$ 的一个数列. 因此, 对求解 n 阶方程组有 $(n+1)(n+5)/4\approx(n/2)^2$ 个工作容量就足够了, 并且, 矩阵和右端的元素不必立即全部存入计算机中, 可以逐次一行一行地进行.

当要解的方程组的一个截断方程组已经解出时, 利用加边法是合适的. 关系式(4)立即给出所需要的解.

上述加边法方案, 可用来计算行列式. 从(1)得

$$|A_k|=(a_{kk}-v_kA_{k-1}^{-1}u_k)|A_{k-1}|.$$

这个关系式的递归使用, 就得到 $|A|$.

像矩阵求逆一样, 用加边法, 仅当矩阵具有非零主子式时, 方程组求解和行列式的计算才有可能. 这里一

般需要利用主元方案．

参考文献

[1] Воеводин, В. В., Численные методы алгебры, М., 1966.

[2] Фаддеев, Д. К., Фаддеева, В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, 2 изд., М.-Л., 1963 (英译本: Faddeev, D. K. and Faddeeva, V. N., Computational methods of linear algebra, Freeman, 1963).

Г Д. Ким 撰

【补注】 加边法是更一般的分块过程 (partitioning procedures) 的一种特殊情形 ([A1])．

上面定义的加边法与 Sherman - Morrison 公式 (Sherman - Morrison formula) 和它的推广 Sherman - Morrison - Woodbury 公式 (Sherman - Morrison - Woodbury formula) 有关．Sherman - Morrison 公式表明非奇异 $m\times m$ 矩阵 M 和向量 x 和 y, 当 $c=1+y^HM^{-1}x\neq 0$ 时, 有等式

$$[M+xy^H]^{-1}=M^{-1}-M^{-1}xc^{-1}y^HM^{-1},$$

$$c=1+y^HM^{-1}x.$$

Sherman - Morrison - Woodbury 公式就是用 $m\times n$ 矩阵 X 和 Y 代替向量 x 和 y．这些公式在[A2]-[A5]中有推导 (也见[A6]), 并用于构造类似于加边法的矩阵求逆方案．这些方案的卓越讨论在 [A7] 中给出．

参考文献

[A1] Westlake, J. R., A handbook of numerical matrix inversion and solution of linear equations, Wiley, 1968, Sect. 2.6.

[A2] Bartlett, M. S., An inverse matrix adjustment arising in discriminant analysis, *Ann. Math. Stat.*, **22** (1951), 107 - 111.

[A3] Sherman, J., Computations relating to inverse matrices, Appl. Math., 29, Nat. Bur. Standards, 1953, 123 - 124.

[A4] Sherman, J. and Morrison, W. J., Adjustments of an inverse matrix corresponding to changes in the elements of a given column or a given row of the original matrix, *Ann. Math. Stat.*, **20** (1949), 621.

[A5] Woodbury, M., Inverting modified matrices, *Memorandum Report Stat. Res. Group Princeton*, **42** (1950).

[A6] Golub, G. H. and Loan, C. F. van, Matrix computations, North Oxford Acad., 1983.

[A7] Householder, A. S., Principles of numerical analysis, McGraw - Hill, 1953.

郭祥东 译

空间的加边 [bordering of a space; окаймление пространства], 空间 X 在紧化 bX 中的

空间 X 中的有限开集族 $\{U_1,\cdots,U_k\}$, 使得集合 $K=X\setminus(U_1\cup\cdots\cup U_k)$ 是紧的, 并且 $bX=K\cup\widetilde{U}_1\cup\cdots\cup\widetilde{U}_k$, 其中 $\widetilde{U}_i$ 是 bX 中与 X 之交为 U_i 的最大开集 (假定 X 是完全正则的)．空间 X 在 bX 中的加边的概念与邻近空间 X (X 上的邻近是由扩张 bX 导出的) 的殆扩张加边的概念是一致的, 用邻近这一术语来表达就是: 除了 K 是紧集以外, 对任何邻域 $\mathscr{O}_K$, 族 $\{\mathscr{O}_K,U_1,\cdots,U_K\}$ 必须是空间 X 的一致覆盖．空间 X 在它的 Stone - Čech 紧化中的加边简称为 X 的加边 (bordering)．使用加边的语言, 有关拓扑空间和邻近空间的紧化的余维数的一系列定理已经得到了陈述.

参考文献

[1] Смирнов, Ю. М., 《Матем. сб.》, 71 (1966), 4, 454 - 482.

В. В. Федорчук 撰

【补注】 与空间加边有关的概念是边缘覆盖 (border cover), 一个开集族 $\mathfrak{A}$, 使得 $X\setminus\bigcup\mathfrak{A}$ 是紧的．在某种意义上, 边缘覆盖与加边的作用相反．对加边来说, 紧化是给定的, 而根据某一边缘覆盖系统, 可以构造出使它的剩余具有指定性质的紧化．

许依群、徐定宥、罗嵩龄 译

下配边 [bordism 或 bordantism; бордизм], 亦称配边

一个被单独使用或作为一些类似意思的标准词组的一部分而使用的术语．其英文旧名 cobordism (配边) 仍在使用．

最简单的变形如下．两个光滑闭 n 维流形 M_0 和 M 是下配边的 (bordant) (内同调的 (internally homologous)), 如果存在一个光滑紧 $(n+1)$ 维流形 W (一块"薄膜"), 其边界由两个流形 N_0 和 N 组成, 它们在微分同胚 (diffeomorphism)

$$g_0:N_0\to M_0 \text{ 和 } g:N\to M$$

下分别微分同胚于 M_0 和 M．彼此下配边的流形的集合称为下配边类 (bordism class), 而三元组 (W, M_0, M) 有时称为下配边 (bordism) (写成 (W, M_0, M, g_0, g) 更精确)．n 维流形的下配边类之集合构成了一个关于非连通并的 Abel 群 $\mathfrak{R}_n$．群的零元是由某个流形 W 的边界的流形 M 组成的下配边类 (正式的说法是具有空集 M_0 的三元组 (W, M_0, M); 其他名称是: M 是一个"边界流形", 或 M"内同调于零"或"下配边零")．$\mathfrak{R}_n$ 中逆于下配边类的元素是这个类本身 (因为 $M\cup M$ 微分同胚于直积 $M\times[0,1]$ 的边界)．群 $\mathfrak{R}_n$ 的直和 $\mathfrak{R}_*$ 是一个交换分次环, 环中乘法由流形的直积诱导, 而单位元由一点的下配边类给出．

更复杂的变形包含有附加结构的光滑闭流形的下配边．例如, 两个定向流形 M_0 和 M 是定向下配边的 (orientedly bordant), 如果它们按照以上解释的意义是下配边的, "薄膜" W 是定向的且使用上述记号, 由 W 的方向在 N_0 及 N (它们是边界的一些部分) 上所诱导的方向, 在微分同胚 g_0 和 g 下分别变成 M 的原方向及 M_0

的反方向，于是就说定向下配边(oriented bordism)；如果希望强调这种下配边和前面给出的下配边之间的区别，将后者称为非定向下配边(non-oriented bordism)．类似于 $\mathfrak{N}_n$ 和 $\mathfrak{N}_*$，引进定向下配边群 Ω_n 和环 $\Omega_*=\sum\Omega_n$．

历史上，第一个例子是 1938 年由 Л. С. Понтрягин 引入的流形套的下配边，他证明了这种下配边的分类等价于球面同伦群 $\pi_i(S^n)$ 的计算，且能通过这种方式决定 $\pi_{n+1}(S^n)$ 和 $\pi_{n+2}(S^n)$ (他的研究的详细叙述见[2]，介绍性的教程，见[4])．定向和非定向下配边是 В. А. Рохлин 在 1951－1953 年间引入的([3])，他对 $n\leqslant4$ 计算了 $\mathfrak{N}_n$ 和 Ω_n．在此之前，Л. С. Понтрягин 证明了([1])：如果两个流形是下配边的，则它们的示性数相等(对非定向流形是 Stiefel - Whitney 数，对定向流形是 Stiefel - Whitney 数和 Понтрягин 数)．紧接着发现逆命题也是对的．

1954 年，R. Thom 首先将代数拓扑的现代方法应用于下配边理论([5],[6])，他重新发现(在定向和非定向下配边两种情形)下配边和某些同伦问题之间的联系．因而，对充分大的 r，群 $\mathfrak{N}_n$ 同构于群 $\pi_{n+r}(\mathrm{TBO}(r))$；这里 $\mathrm{TBO}(r)$ 是具有结构群 $O(r)$ 的万有向量丛的 **Thom 空间**(Thom space)．由这种联系，Thom 得以作出环 $\mathfrak{N}_*$ 的完全的计算，并对 Ω_* 的研究做出了重大贡献，其他学者继续进行这项工作．终于证明了 $\mathfrak{N}_*$ 是模 2 剩余域上维数 i 的生成元 x_i 的多项式环，其中 i 遍取不等于 2^s-1 $(s\geqslant1)$ 的所有正数；这些生成元的几何实现是已知的(即下配边类为 x_i 的具体的流形已经给出([7]))．

有附加结构的流形的下配边的其他变形包括非常重要的拟复流形的下配边(也称为酉下配边(unitary bordism)或复配边(complex cobordism)([8],[9]))，有一变换群作用的流形的下配边([10])．还有另一类变形(对分段线性或拓扑流形，对 Poincaré 复形，等等([11]))．下配边的特殊类型包括叶状下配边(foliated bordism)和 h 下配边(h - bordism)(过去称为 J 等价(J - equivalences))；这些下配边可用来联系微分性质和同伦拓扑性质([12])．

下配边理论的进一步发展与拓扑空间 X 的下配边群(bordism groups)(简称空间的下配边，见[13])有关．它们给出下配边各种变形的定义(以下给出最简单的例子)．空间 X 的奇异 n 维(子)流形(singular n - dimensional (sub) manifold)是一个偶对 (M^n, f)，其中 M^n 是闭光滑流形，$f:M^n\to X$ 是连续映射．两个这样的偶对 (M_0, f_0)，(M^n, f) 是下配边的(bordant)，如果 M_0，M 在通常意义下是下配边的，并且(用以前的记号)存在连续映射 $h:W\to X$，使得 $hg_0^{-1}=f_0$，$hg^{-1}=f$．(如果 M_0 和 M 等同于 N_0 和 N，就可简单地说映射 h 诱导了 M_0 和 M 到 X 内的给定映射．)空间 X 内的奇异流形的下配边类形成这个空间的 n 维下配边群 $\mathfrak{N}_n(X)$ (群运算由流形的并生成)．

如果 X 是一个维数 $>2n$ 的流形，$\mathfrak{N}_n(X)$ 的元素就可以视作子流形，恰如对应的"薄膜"；因此，空间的下配边与引入同调的最初尝试类似．若 X 是一个点，则 $\mathfrak{N}_n(X)$ 约化为原先的 $\mathfrak{N}_n$．对映射 $\varphi:X\to Y$，对应着由一个奇异流形 (M,f) 变成另一个 $(M,\varphi f)$ 的变换所生成的同态 $\varphi_*:\mathfrak{N}_n(X)\to\mathfrak{N}_n(Y)$．借助于使每个空间 X 对应着群 $\mathfrak{N}_*(X)$，每个映射 φ 对应着映射 φ_* 得到的函子是广义同调论．在现在的情形下，它约化为通常的同调，即对任何胞腔多面体 X，有

$$\sum\mathfrak{N}_n(X)\simeq H_*(X,\mathbf{Z}_2)\otimes\mathfrak{N}_*$$

(这个表达式右边分次模的张量积是在 $\mathbf{Z}_2=\mathbf{Z}/(2)$ 上的)，但这对其他下配边(有向的，等等)一般不成立．许多广义同调论可以通过所谓奇异下配边的方法得到([14])．

除空间 X 的下配边外，还有与之对偶的广义上同调论．广义同调和上同调函子的引入使得引进与本条目开头讨论的不同的术语成为必须．因此，术语"配边(cobordism)"就限于与下配边对偶的广义上同调论．

参考文献

[1] Понтрягин, Л. С.,《Матем. сб.》, **21** (1947), 2, 233－284.

[2] Понтрягин, Л. С., Гладкие многообразия и их применение в теории гомотопий, 2 изд., М., 1976.

[3] Рохлин, В. А.,《Успехи матем. наук》, **14** (1959), 4, 3－20.

[4A] Wallace, A. H., Differentiable topology. First steps, Benjamin, 1968.

[4B] Milnor, J. W., Topology from the differntiable viewpoint, Univ. Press of Virginia, 1965 (中译本：J. W. 米尔诺，从微分观点看拓扑，上海科学技术出版社，1983).

[5] Thom, R., Quelques propriétés globales des variétés différentiables, *Comm. Math. Helvetia*, **28** (1954), 17－86.

[6] Milnor, J. W. and Stasfeff, J. D., Characteristic classes, Princeton Univ. Press & Univ. of Tokyo Press, 1974.

[7] Dold, A., Erzeugende der Thomschen Algebra $\mathfrak{N}$, *Math. Z.*, **65** (1956), 25－35.

[8] Milnor, J., On the cobordism ring Ω^* and a complex analogue I, *Amer J. Math.*, **82** (1960), 505－521.

[9] Новиков, С. П.,《Матем. сб.》, **57** (99) (1962), 406－442.

[10] Conner, P. E. and Floyd, E. E., Differentiable periodic maps, Springer, 1964.

[11] Stong, R. E., Notes on cobordism theory, Princeton Univ. Press, 1968.

[12] Milnor, J., Lectures on the h - cobordism theorem,

Princeton Univ. Press, 1965.

[13] Atiyah, M. F., Bordism and cobordism, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, (2), **57** (1961), 200–208.

[14A] Baas, N. A., On bordism theory of manifolds with singularities, *Math. Scand.*, 33 (1973), 279–302.

[14B] Baas, N. A., On formal groups and singularities in complex bordism theory, *Math. Scand.*, 33 (1973), 302–313.

Д. В. Аносов, М. И. Войцеховский 撰 徐森林 译

Borel - Cantelli 引理 [Borel - Cantelli lemma; Бореля - Кантелли лемма]

关于随机事件无穷序列的一个常用的命题．设 $A_1,\cdots,A_n,\cdots$，是某一概率空间中的事件序列，而 A 是在事件 $A_n(n=1,\ 2,\ \cdots)$ 中仅有有限个发生的事件．那么，Borel - Cantelli 引理断言，如果

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{P}(A_n)<\infty \qquad (*)$$

则

$$\mathrm{P}(A)=1.$$

如果事件 $A_n(n=1,\ 2,\ \cdots)$ 相互独立，则 $\mathbf{P}(A)=1$ 或 0，取决于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}(A_n)$ 收敛或发散．即在此情形下，条件 (*) 对 $\mathbf{P}(A)=1$ 是充分必要的．这称为 Borel 0 - 1 准则 (Borel criterion)(见 **0 - 1 律** (zero - one law))．这个判据可以推广到某些相依事件类上．Borel - Cantelli 引理用来证明**强大数律** (strong law of large numbers)．

参考文献

[1] Borel, E., Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmetique, *Rend. Circ. Mat. Palermo* (2), **27** (1909), 247–271.

[2] Cantelli, F. P., Sulla probabilità come limite della frequenza, *Atti Accad. Naz. Lincei*, **26** (1917), 1, 39–45.

[3] Loève, M., Probability theory, Princeton Univ. Press, 1963.

А. В. Прохоров 撰

【补注】 在数论中可用 Borel - Cantelli 引理证明几乎所有的数都是"正常的"，见 [A1]，第 8 章第 6 节．

参考文献

[A1] Feller, W., An introduction to probability theory and its applications, 1, Wiley, 1957 (中译本：W. 费勒，概率论及其应用，科学出版社，上册，1964；下册，1979)．

刘秀芳 译

事件 Borel 域 [Borel field of events; Борелевское поле событий]，事件 σ 域 (σ - field of events)，事件 Borel 代数 (Borel algebra of events)，事件 σ 代数 (σ - algebra of events)．

非空集 Ω (基本事件空间) 的某些子集 (事件) 组成 **Borel 集域** (Borel field of sets)．

В. В Сазонов 撰 上斯雷 译

Borel 集域 [Borel field of sets; Борелевское поле множеств]，Borel 集族 (family of Borel sets)，由集系 M 生成的

包含 M 且关于可数并运算和取补运算为封闭的最小集系．

А. Г. Елькин 撰 方嘉琳 译

Borel 不动点定理 [Borel fixed - point theorem; Бореля теорема о неподвижной точке]

设 V 为代数闭域 k 上非空完全代数簇，正则地作用于 V 上的连通可解代数群 G (见**变换的代数群** (algebraic group of transformations)) 在 V 中有不动点．由这个定理可以推出代数群的 **Borel 子群** (Borel subgroup) 是共轭的 (Borel - Морозов 定理 (Borel - Morozov theorem))，不动点定理是 A. Borel ([1]) 证明的．Borel 定理可以推广到任意域 k (不一定代数封闭)：设 V 为在域 k 上定义的完全簇，若连通可解 **k 分裂群** (k - split group) G 正则地作用在 V 上，则有理 k 点集 $V(k)$ 或者为空集，或者它包含 G 的一个不动点．因此推广的 Borel 子群共轭性定理是：若域 k 是完满的，则一个连通 k 定义的代数群 H 的极大连通可解 k 可裂子群，在 H 的 k 点构成的群中元素作用下互相共轭 ([2])．

参考文献

[1] Borel, A., Groupes linéaires algébriques, *Ann. of Math.* (2), **64** (1956), 1, 20–82.

[2] Borel, A., Linear algebraic groups, Benjamin, 1969.

[3] Морозов, В. В., 《Докл. АН СССР》, **36** (1942), 3, 91–94.

В. П. Платонов 撰 许以超 译 石生明 校

Borel 函数 [Borel function; Борелевская функция]，B 函数 (B - function)

使函数 $f(x)$ 的定义域内一切形如 $E\{x: f(x)\geqslant a\}$ 的子集均为 **Borel 集** (Borel set) 的函数．这种函数也称为 Borel 可测函数 (Borel - measurable functions) 或 B 可测函数 (B - measurable functions)．如同普通可测函数一样，和、积以及极限过程等运算关于 Borel 函数类是封闭的；但和普通可测函数不同的是，Borel 函数的复合运算关于 Borel 函数类仍是封闭的．此外 ([1])，若 f 为任意空间 Ω 上的可测函数，而 g 为实数空间上的 Borel 函数，则函数 $h=g[f(x)]$ 在 Ω 上仍为可测．所有 Borel 函数均为 Lebesgue 可测 (见**可测函数** (measurable function))．反之不真．然而，对于任意 Lebesgue 可测函数 f，

总存在一个 Borel 函数 g 使得几乎处处成立着 $f(x)=g(x)$ ([1]). Borel 函数有时也称为 Baire 函数(Baire functions), 因为所有 Borel 函数组成的类等同于 **Baire 类** (Baire classes) 中函数的全体(Lebesgue 定理(Lebesgue theorem), [2]). Borel 函数可按 Borel 集 $E(x:f(x)\geq a)$ 的序来进行分类;这样得到的类与 Baire 类等同.

Borel 函数的概念已被推广到取值于任意距离空间的函数上去([3]). 从而也可以提及 B 可测映射 (B-measurable mappings). Borel 函数不仅在集论以及函数论中有用,而且在概率论中也要用到([1], [4]).

参考文献

[1] Halmos, P. R., Measure theory, v. Nostrand, 1950 (中译本: P. 哈尔姆斯, 测度论, 科学出版社, 1958).

[2] Hausdorff, F., Set theory, Chelsea, reprint, 1978 (中译本: F. 豪斯道夫, 集论, 科学出版社, 1960).

[3] Kuratowski, K., Topology, Acad. Press, 1966–1968 (译自法文).

[4] Колмогоров, А. Н., Основные понятия теория вероятностей, 2 изд., М., 1974 (中译本: A. H. 柯尔莫哥洛夫, 概率论基本概念, 上海商务印书馆 1952).

В. А. Скворцов 撰 王斯雷 译

Borel 同构 [Borel isomorphism; Борелевский изоморфизм], B 同构 (B-isomorphism)

空间 X 到空间 Y 中的一一映射 f, 使 f 和 f^{-1} 都将 Borel 集变换为 **Borel 集** (Borel set). 在完全可分度量空间的 Borel 子集类中, 同基数的集合是 Borel 同构的.

А. Г. Елькин 撰 方嘉琳 译

Borel-Lebesgue 覆盖定理 [Borel-Lebesgue covering theorem; Бореля-Лебега теорема]

设 A 是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界闭集, G 为 A 的一个开覆盖, 即 G 是一个开集系统, 它们的并包含 A, 则 G 中存在集合的有限子系统 $\{G_i\}(i=1,\cdots,N)$ (子覆盖) 也是 A 的覆盖, 即

$$A\subset\bigcup_{i=1}^{N}G_i.$$

Borel-Lebesgue 定理有逆定理: 设 $A\subset\mathbf{R}^n$, 若从 A 的任何开覆盖中都可选出有限子覆盖, 则 A 是有界闭的. 从集合 A 的任意开覆盖中都可选出有限子覆盖常作为集合 A 是紧集的定义. 按这种说法, Borel-Lebesgue 定理及其逆定理可采取下列形式: 集合 $A\subset\mathbf{R}^n$ 是紧的当且仅当 A 是有界闭的. 该定理关于 A 是线段 $[a,b]\subset\mathbf{R}^1$ 且 G 是区间系统的情形, 已由 E. Borel ([1]) 在 1898 年证明; 该定理的基本形式由 H. Lebesgue ([2]) 在 1900–1910 年给出. 这个定理的其他名称有 Borel 引理 (Borel lemma), Heine-Borel 引理 (Heine-Borel lemma), Heine-Borel 定理 (Heine-Borel theorem).

参考文献

[1] Borel, E.; Leçons sur la théorie des fonctions, Gauthier-Villars, 1928.

[2] Rudin, W., Principles of mathematical analysis, McGraw-Hill, 1953.

И. А. Виноградова 撰 方嘉琳 译

Borel 测度 [Borel measure; Бореля мера], 集合的

定义在拓扑空间 X 的子集类上具有如下性质的非负函数 μ: 1) 它的定义域是 X 中 **Borel 集** (Borel set) 的 σ 代数 $\mathscr{B}$, 即 X 中包含一切开集并且关于可数次集合论运算封闭的最小子集类; 2) 如果当 $i\neq j$ 时 $E_i\cap E_j=\varnothing$, 则 $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)$, 即 μ 是可数加性的. Borel 测度 μ 称为正则的 (regular), 是指

$$\mu(E)=\sup_{E\supset F}\mu(F),$$

其中 F 属于 X 的闭集所成的集类 $\mathscr{F}$. Borel 测度的研究经常与 Baire 测度 (Baire measures) 相联系, 它们的差别仅仅是定义域的不同. Baire 测度的定义域是使得 X 上所有连续函数皆为可测的最小 σ 代数 $\mathscr{B}_0$. Borel 测度 μ (或 Baire 测度 ν) 称为 τ 光滑的 (τ-smooth), 假如对于满足条件 $F_\alpha\downarrow\varnothing$ 的任意闭集网 $\{F_\alpha\}$, 均有 $\mu(F_\alpha)\downarrow 0$ (或对于满足 $Z_\alpha\downarrow\varnothing$ 的连续函数零点集网 $\{Z_\alpha\}$, 均有 $\nu(Z_\alpha)\downarrow 0$). Borel 测度 μ (或 Baire 测度 ν) 称为紧密的 (tight), 假如

$$\mu(E)=\sup_{E\supset K\in\mathscr{K}}\mu(K),$$

其中 $\mathscr{K}$ 是 X 的紧子集的类(或

$$\nu(E)=\sup_{E\supset K\in\mathscr{K}}\nu^*(K),$$

而

$$\nu^*(K)=\inf_{K\subset E_0\in\mathscr{B}_0}\nu(E_0)).$$

紧密性和 τ 光滑性条件可保证测度的更多光滑性, 而且在大多数情形下, 它们都是满足的. 在某些条件下, Baire 测度可以扩张为 Borel 测度. 例如, 当 X 为完全正则的 Hausdorff 空间时, 任意一个 τ 光滑(紧密)的有限 Baire 测度均可扩张为正则的 τ 光滑(紧密)的有限 Baire 测度. 在研究局部紧空间上的测度时, 有时把在紧集(或 G_δ 紧) 上取有限值, 而定义域为紧集生成的集合的 σ 环的测度, 称为 Borel 测度 (或 Baire 测度). 人们常把直线上的 Borel 测度理解为定义在 Borel 集上的这样的测度, 它在任意线段上的值就是该线段的长度.

参考文献

[1] Варадарайн, В. С., «Матем. сб», 55 (1961), 1, 35–100.

[2] Halmos, P. R., Measure theory, v. Nostrand, 1950.

[3] Neveu, J., Bases mathématiques du calcul des proba-

bilités, Masson, 1970. B. B. Сазонов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Royden, H. L., Real analysis, Macmillian, 1968.
[A2] Zaanen, A. C., Integration, North - Holland, 1967.
[A3] Rudin, W., Principles of mathematical analysis, McGraw - Hill, 1953 (中译本: W. 卢丁, 数学分析原理, 人民教育出版社, 1979).
[A4] Rudin W., Real and complex analysis, McGraw - Hill, 1966(中译本: W. 卢丁, 实分析和复分析, 人民教育出版社, 1982).
[A5] Taylor, A. E., General theory of functions and integration, Blaisdell, 1965.
[A6] Aliprantz, C. D. and Burleinshaw, O., Principles of real analysis, North - Holland, 1981.

王斯雷 译 郑维行 校

Borel 集 [**Borel set**; **Борелевское множество**], B 集 (B - set)

在拓扑空间中作为开集和闭集的不超过可数次并和交的运算的结果而得到的集合. **Borel 集** (**Borel set**)是包含闭集且关于补运算是封闭的最小可数加性集类的一个元素. Borel 集也称为 Borel 可测集 (Borel measurable sets) 及 B 可测集 (B - measurable set). 开集和闭集称为零阶 Borel 集 (Borel sets of order zero). 一阶 Borel 集(Borel sets of order one)是 F_σ 或 G_δ 型集合, 它们分别是闭集的可数和与开集的可数交. 二阶 Borel 集 (Borel sets of the second order) 是 $F_{\sigma\delta}$ 型 (F_σ 型集合的可数交)的集合和 $G_{\delta\sigma}$ 型 (G_δ 型集合的可数并)的集合. 任意有限阶的 Borel 集可用类似的方法归纳地定义. 借助于第二类**超限数** (transfinite number), 这个分类可详尽地推广到所有 Borel 集. 设 α 是任意第二类超限数; 类 α 的 Borel 集 (Borel set of class α)包含任何 α 阶 Borel 集, 而对任意 $\alpha'<\alpha$, 不是 α' 阶 Borel 集. Borel 集类是否是空集依赖于所考虑的基础空间. 在 Euclid 空间, Hilbert 空间和 Baire 空间中存在所有类的 Borel 集.

Borel 集是 $\mathscr{A}$ 集的特殊情形. **$\mathscr{A}$ 集**($\mathscr{A}$ - set) E 是 Borel 集, 当且仅当 E 的补集也是 $\mathscr{A}$ 集 (Суслин 准则). 在具有 Lebesgue **测度** (Lebesgue measure) 的空间中, 所有 Borel 集是 Lebesgue 可测的. 逆命题不成立. 有连续统基数的所有可分空间都含有非 Borel 集.

Borel 集是 E. Borel ([1]) 引人的; 在 **Borel 函数** (Borel function) 的研究中, 它们起着重要作用.

在更一般的意义下, Borel 集是由某集合系统生成的任意 Borel **集系** (Borel system of sets) 中的集合. 拓扑空间中的 Borel 集是由该空间的闭子集系生成的.

参考文献

[1] Borel, E., Leçons sur les fonctions discontinues, Gauthier - Villars, 1898.
[2] Kuratowski, K., Topology, Acad Press, 1966 – 1968 (译自法文).
[3] Hausdorff, F., Set theory, Chelsea, reprint, 1978 (中译本: F. 豪斯道夫, 集论, 科学出版社, 1960).
[4] Александров, П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, М. - Л., 1948 (中译本: 亚历山大罗夫, 集与函数的泛论初阶, 高等教育出版社, 1955).

Б. А. Скворцов 撰

【补注】 对记号问题, 见**歧义类的 Borel 集** (Borel set of an ambiguous class).

参考文献

[A1] Kuratowski, K., Introduction to set theory and topology, Pergamon, 1961.

方嘉琳 译

Borel 集的判别准则 [**Borel set, criterion for a**; **Борелевских множеств критерий**]

在完全可分度量空间中 $\mathscr{A}$ 集 ($\mathscr{A}$ - set) 是 Borel 集的必要和充分条件. 两个准则可叙述如下: 1) 它的补集必须也是 $\mathscr{A}$ 集 (Суслин 准则 (Suslin criterion)); 及 2) 它可表示为不相交连通分支的并 (Лузин 准则 (Luzin criterion)).

А. Г. Елькин 撰 方嘉琳 译

歧类 α 的 Borel 集 [**Borel set of ambiguous class** α; **двустороннее Борелевское множество класса** α]

度量空间或者(更一般地)完满正规拓扑空间的 Borel 子集, 同时是加性类 α 和乘性类 α 的集合, 亦即同时属于类 F_α 和 G_α. 歧类 0 的 Borel 集是闭集和开集; 歧类 1 的 Borel 集同时是 F_σ 型和 G_δ 型集合. 对于任何 $\beta>\alpha$, 类 α 的任何 Borel 集都是歧类 β 的 Borel 集. 歧类 α 的 Borel 集组成一个集域.

参考文献

[1] Kuratowski, K., Topology, 1, Acad. Press, 1966 (译自法文).
[2] Hausdorff, F., Set theory, Chelsea, reprint, 1978 (译自德文) (中译本: F. 豪斯道夫, 集论, 科学出版社, 1960).

А. Г. Елькин 撰

【补注】 记号 F_α, G_α 在拓扑学中流行. 在拓扑学之外, 人们比较常用的记号分别是 Σ_α^0, Π_α^0. 对于 $\alpha\geqslant\omega$, 有 $F_\alpha=\Sigma_\alpha^0$, $G_\alpha=\Pi_\alpha^0$; 而对于 $n<\omega$, 有 $\Sigma_{n+1}^0=F_n$ 及 $\Pi_{n+1}^0=G_n$. 对于歧类, 记号是 $\Delta_\alpha^0=\Sigma_\alpha^0\cap\Pi_\alpha^0$. 亦见 [A1].

参考文献

[A1] Moschovakis, Y., Descriptive set theory, North - Holland, 1980.

许依群、徐定宥、罗嵩龄 译

Borel 强大数律 [**Borel strong law of large numbers**; **Бореля усиленный закон больших чисел**]

历史上，第一个**强大数律** (strong law of large numbers)由 E. Borel 在研究 Bernoulli 方案 (见 **Bernoulli 试验** (Bernoulli trials)) 时提出并证明的. 考虑独立同分布的随机变量 $X_1, \cdots, X_n, \cdots$, 各以 1/2 的概率取 0 和 1 两个值. 那么表达式 $S_n=\sum_{k=1}^n X_k$ 给出了成功概率为 1/2 的 Bernoulli 方案中成功试验的次数. Borel 在 [1] 中证明了当 $n \to \infty$ 时

$$\frac{S_n}{n} \to \frac{1}{2}$$

以概率 1 成立. 接着(1914) G. H. Hardy 和 J. E. Littlewood 证明了几乎必然有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\left|S_n-\frac{n}{2}\right|}{\sqrt{n\ln n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}},$$

随后(1922), А. Я. Хинчин 证明了下列更强的结果:

$$\mathrm{P}\left[\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\left|S_n-\frac{n}{2}\right|}{\sqrt{n\ln\ln n}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\right]=1.$$

亦见**重对数律** (law of the iterated logarithm).

参考文献

[1] Borel, E., Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmetique, *Rend. Circ. Mat. Palermo* (2), **27** (1909), 247-271.

[2] Kac, M., Statistical independence in probability, analysis and number theory, Math. Assoc. Amer., 1963.

А. В. Прохоров 撰 刘秀芳 译

Borel 子群 [Borel subgroup; Бореля подгруппа]

线性代数群 (linear algebraic group) G 的极大连通可解代数子群. 例如, 一般线性群 GL (n) 中所有非异的上三角矩阵的子群是 Borel 子群. A. Borel ([1]) 首先对代数群的极大连通可解子群进行了系统研究. Borel 子群能被刻画为极小抛物子群 (parabolic subgroups), 即群 G 的代数子群 H, 它的商簇 G/H 是投影的. G 的所有 Borel 子群是互相共轭的, 而且, 如果设 Borel 子群 B_1, B_2 和群 G 定义在域 k 上, 则 B_1 和 B_2 由 $G(k)$ 的元素作共轭. 群 G 的任何两个 Borel 子群的交包含 G 的一个极大环面; 若这个交是极大环面, 则称这样的 Borel 子群是反的 (opposite). G 中存在相反的 Borel 子群, 当且仅当 G 是**约化群** (reductive group). 设 G 是连通的, 则它是它的全部 Borel 子群的并, 且任何抛物子群同它在 G 中的正规化子重合. 在这种情形下, 任何 Borel 子群在 G 的所有可解子群中 (不仅是在代数的和连通可解子群中) 是极大的. 然而, 在 G 中不是 Borel 子群的极大可解子群通常是存在的. Borel 子群的换位子群同它的幺幂部分 B_u 重合, 而 B_u 在 G 中的正规化子与 B 重合. 若基域的特征是零, 而 $\mathfrak{g}$ 是 G 的 Lie 代数, 则 G 的 Borel 子群的 Lie 代数作为 $\mathfrak{g}$ 的子代数 $\mathfrak{b}$ 常称为 $\mathfrak{g}$ 的 Borel 子代数 (Borel subalgebra). $\mathfrak{g}$ 的 Borel 子代数是它的极大可解子代数. 设 G 定义在任意域 k 上, 则定义在 k 上的极小抛物子群在 k 上代数群的理论中起着和 Borel 子群相似的作用. 例如, 两个这样的抛物子群在 $G(k)$ 的元素下共轭 ([2]).

参考文献

[1] Borel, A., Gruppes linéaires algébriques, *Ann. of Math.* (2), **64** (1956), 1, 20-82.

[2] Borel, A. and Tits, J., Gruppes réductifs, *Publ. Math. IHES*, **27** (1965), 55-150.

В. П. Платонов 撰 石生明 译 许以超 校

Borel 求和法 [Borel summation methed; Бореля метод суммирования]

函数项级数求和法之一, 是 E. Borel ([1]) 提出的. 假设给定数项级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k, \qquad (*)$$

S_n 是它的部分和, S 是一个实数. 如果

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}S_k = S,$$

则称级数 (*) 按 Borel 法 (B-method) 是可和的, 其和为数 S. Borel 还提出一种积分求和法, 即 B' 法: 如果

$$\int_0^{\infty} e^{-u}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k u^k}{k!}\,du = S,$$

则称级数 (*) 按 B' 法是可和的, 其和为数 S. 使得 B 法和 B' 法等价的条件, 见 [2]. B 法的产生同在一点上正则的函数的解析开拓有关. 设函数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

在点 O 处是正则的, C 是它的所有奇点的集合. 通过每一点 $P\in C$, 作线段 OP, 以及过点 P 且垂直于 OP 的直线 L_P. 对于每一条直线 L_P, 与点 O 处于同一侧的点的集合记作 Π; 这时, 区域 Π 的边界 Γ 称为函数 $f(z)$ 的 Borel 多边形 (Borel polygon), 而区域 Π 则称为它的内部. 下述定理成立: 级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

在区域 Π 中可用 B' 法求和, 而在与 Π 相补的区域 Π^* 中不可用 B' 法求和 ([2]).

参考文献

[1] Borel, E., Mémoire sur les séries divergentes, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, (3), **16** (1899), 9-131.

[2] Hardy, G. H., Divergent series, Clarendon, 1949.

А. А. Захаров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Beekmann, W. and Zeller, K., Theorie der Limitierungsverfahren, Springer, 1970.　　张鸿林 译

Borel 集系 [**Borel system of sets**; **Борелевская система множеств**], *B* 集系 (*B* - system of sets), 由集系 M 生成的

包含 M 的最小 (σ, δ) 集系 $B(M)$. 属于 $B(M)$ 的集合称为由系统 M 生成的 Borel 集 (Borel set), 或 B 集 (B - set). 对任一序数 $\alpha<\omega_1$, 其中 ω_1 为基数 $\aleph_1$ 的初始序数, Borel 类 M_α 定义如下: $M_0=M$; 若 α 是奇数, 则 M_α 由属于 $M_\beta(\beta<\alpha)$ 的集合序列的并组成; 若 α 是偶数, 则 M_α 由属于 $M_\beta(\beta<\alpha)$ 的集合序列的交组成. 这时, $B(M)=\bigcup\{M_\alpha:\alpha<\omega_1\}$. 如果将上述的并和交相交换, 则得到与集合 $B(M)$ 相同的 Borel 系统. Borel 集恰属于类 M_α, 如果它属于类 M_α, 但不属于 $\beta<\alpha$ 的类 M_β (有时取不相交类, 即系统 $M_\alpha\setminus\bigcup\{M_\beta:\beta<\alpha\}$ 称为类).　　А. Г. Ельъкин 撰　方嘉琳 译

Borel 变换 [**Borel transform**; **Бореля преобразование**]

如下类型的积分变换

$$\gamma(t)=\int_0^\infty f(z)e^{-zt}\,dz,$$

其中 $f(z)$ 是指数型整函数. Borel 变换是 **Laplace 变换** (Laplace transform) 的特殊情形. 函数 $\gamma(t)$ 称为 $f(z)$ 的 Borel 变换 (Borel transform). 若

$$f(z)=\sum_{n=0}^\infty\frac{a_n}{n!}z^n,$$

则

$$\gamma(t)=\sum_{\nu=0}^\infty a_\nu t^{-(\nu+1)};$$

该级数当 $|t|>\sigma$ 时收敛, 此处 σ 是 $f(z)$ 的型. 设 $\overline{D}$ 是包含函数 $\gamma(t)$ 的所有奇点的最小闭凸集; 令

$$K(\varphi)=\max_{t\in\overline{D}}\operatorname{Re}(ze^{-i\varphi})$$

是 $\overline{D}$ 的支撑函数, $h(\varphi)$ 是 $f(z)$ 的增长指标函数, 则 $K(\varphi)=h(-\varphi)$. 在 Borel 变换中, 若积分取在一条射线 $\arg z=\varphi$ 上, 则相应的积分在半平面 $x\cos\varphi+y\sin\varphi>K(-\varphi)$ 中收敛. 设 C 是一条包围 $\overline{D}$ 的闭围道, 则

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\gamma(t)e^{zt}\,dt.$$

如果增添一些附加条件, 从这一公式还可导出一些其他的表示式, 例如, 考虑满足

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,dx<\infty.$$

且型 $\leqslant\sigma$ 的所有指数型整函数 $f(z)$ 组成的函数类. 这一函数族与所有可表示为

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sigma}^{\sigma}e^{izt}\varphi(t)dt$$

的函数 $f(z)$ 组成的类是相同的, 此处, $\varphi(t)\in L_2(-\sigma,\sigma)$.

参考文献

[1] Borel, E., Leçons sur les séries divergentes, Gauthier - Villars, 1928.

[2] Джрбашян, М. М., Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., 1966.　　А. Ф. Леонтьев 撰

【补注】 本条目末尾所叙述的结论称为 **Paley - Wiener 定理** (Paley - Wiener theorem).

参考文献

[A1] Boas, R. P., Entire functions, Acad. Press, 1954.　　杨维奇 译

Borsuk 问题 [**Borsuk problem**; **Борсука проблема**]

组合几何的基本问题之一: 对于 n 维 Euclid 空间中任一直径 $d>0$ 的有界集, 能够把它**分解** (decomposition) 为不多于 $n+1$ 个直径小于 d 的子集吗? 这个问题是 K. Borsuk 在 [1] 中提出的, 他注意到把一个 n 维单形和 $\mathbf{R}^n$ 中的一个 n 维球剖分成直径小一些的 n 个部分是不可能的. 对于 $n=2, 3$, 这个问题有肯定的解答, 但是 $n>3$ 时, 只得到部分结果. 例如, 对于 $\mathbf{R}^n$ 中的任何有界光滑凸集, 这个问题已肯定地得到了解决 ([2]). 已经证明, Borsuk 问题的解可以归结为常宽集的情形. 如果 $a(F)$ 是集合 $F\subset\mathbf{R}^n$ 能被剖分为直径小于 d 的部分的最小个数, 那么对于直径为 d 的集合 $F\subset\mathbf{R}^2$ 等式 $a(F)=3$ 成立, 当且仅当 $\mathbf{R}^2$ 包含一个唯一的包含 F 的常宽 d 的集合 ([3]). 这个事实不能够直接推广到 $n>2$ 的情形. Borsuk 问题与**照明问题** (illumination problem) 和 **Hadwiger 假设** (Hadwiger hypothesis) 密切相关, 后者是用有限维赋范空间代替 $\mathbf{R}^n$ 而对 Borsuk 问题的推广.

参考文献

[1] Borsuk, K., Drei Sätze über die n - dimensionale euklidische Sphäre, *Fund. Math.*, **20** (1933), 177 – 190.

[2] Grünbaum, B., Borsuk's problem and related questions, Proc. Symp. Pure Math., 7, Amer. Math. Soc., 1963, 271 – 284.

[3] Болтянский, В. Г., 《Colloq. math.》, **21** (1970), 2, 253 – 263.　　П. С. Солтан 撰

【补注】

参考文献

[A1] Boltyanskü, V. G. and Gokhberg, I. Ts., Sätze und Probleme der Kombinatorische Geometrie, Deutsch. Verlag Wissenschaft., 1972 (译自俄文).　　杨路、张景中、侯晓荣 译

Bosè - Einstein 统计法 [**Bose - Einstein statistics**; **Бозе-**

Эйнштейна статистика]; Bose 统计法 (Bose statistics)

具有整数自旋(0, 1, …, 单位为 $\hbar=1.05\times10^{-34}$ Js)的全同粒子组成的系统中所应用的量子统计法.由 S. Bose 和 A. Einstein 在 1924 年提出.按照这个统计法,每个量子态中可发现任意数目的粒子. W. Pauli 曾经证明,量子统计法的类型与粒子自旋直接相联系,因为具有整数自旋的粒子总体遵循 Bose - Einstein 统计法,而具有半整数自旋的粒子总体遵循 **Fermi - Dirac 统计法** (Fermi - Dirac statistics).

多粒子系统的态在量子力学中由波函数定义.在全同粒子情况下,波函数对于任何一对粒子交换可以是对称的 (对具有整数自旋的粒子)或反对称的(对具有半整数自旋的粒子).对于遵循 Bose - Einstein 统计法的粒子系统,其态是由对称波函数描述的.这是 Bose - Einstein 统计法的另一等价表述.遵循 Bose - Einstein 统计法的大量粒子系统通称 Bose 系统(Bose systems) (例如, Bose 气体).

对于量子理想气体,即处于体积为 $V=L^3$ 立方体内的无相互作用全同粒子系统,单粒子量子能级给出为

$$\varepsilon_p = \frac{p^2}{2m},$$

其中 m 是粒子质量, p 是粒子动量本征值: $p=2\pi\hbar n/L$, 这里 n 是具有整数(正、负或零)分量的向量.

理想气体的量子态由明确规定能级占有数总体 $\{n_p\}$ 予以定义, 其中每个 n_p 是处于单粒子态 p 的粒子数.对于 Bose 系统, $n_p=0, 1, \cdots$.

对于大系统,能级很稠密,并且当 $V\to\infty$ 时趋向于形成连续谱.设把能级分成许多小单元,第 i 个单元对应平均能量 ε_i, 包含 G_i 个能级, 并且假设 G_i 很大.系统的态由一组选择 $\{N_i\}$ 来定义, 其中 N_i 是第 i 个小单元中各能级占有数 n_p 之和. 统计权重(statistical weight), 即单元上不同粒子分布的数目,是

$$W\{N_i\} = \prod\frac{(G_i+N_i-1)!}{N_i!(G_i-1)!} \qquad (1)$$

它定义由占有数 N_1, N_2, … 所表征的单元上粒子分布的概率.

对应于给定能量 E 和粒子数 N:

$$E = \sum_i\varepsilon_i N_i,\quad N = \sum_i N_i. \qquad (2)$$

最概然分布由在补充条件(2)下求(1)的极值而获得.相应的平均占有数是

$$\bar{n}_i = \frac{\bar{N}_i}{G_i} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i-\mu)}-1}, \qquad (3)$$

其中 μ 是化学势, $\beta=1/kT$, k 是 Boltzmann 常量(一个普适常量 $k=1.38\times10^{-23}$ J/K), 而 T 是绝对温度. β 和 μ 的值可由条件(2)求出.

系统的熵定义为最概然分布(3)下统计权重(1)的对数:

$$S = k\ln W\{\bar{n}_i\} = k\sum_i G_i\left\{\bar{n}_i\ln\left[1+\frac{1}{\bar{n}_i}\right]+\ln(1+\bar{n}_i)\right\}. \qquad (4)$$

其他热力学函数可以由熵和平均能量推导出来.

研究 Bose - Einstein 统计法的通常方法在于对整个系统的量子能级 n 的占有概率 w_n 使用 Gibbs 巨正则分布

$$w_n = Q^{-1}\exp\left\{-\frac{E_n-\mu N}{kT}\right\}, \qquad (5)$$

其中

$$Q = \sum_n\exp\left\{-\frac{E_n-\mu N}{kT}\right\} \qquad (6)$$

是配分函数或统计和,而 E_n 是整个系统的能级.例如,对于理想 Bose 气体

$$E_n = \sum_p\frac{p^2}{2m}n_p,\quad n=\{n_p\},\quad n_p=0,1,\ldots,$$

而由方程(5)和(6),可以求得对于占有数的公式(3)和对于熵的公式(4),而无需应用组合分析方法.对于非理想 Bose 系统的情况,当 Bose - Einstein 统计法的应用不能归结为简单组合问题时,这种处理方法特别重要.在这种情况,如果对 Hamilton 算子 H 应用二次量子化表示,其中算子的作用定义于对称波函数空间或占有数空间,则 Bose - Einstein 统计法的要求可以满足.于是,配分函数是

$$Q = \mathrm{Sp}\exp\left\{-\frac{H-\mu N}{kT}\right\},$$

其中 N 是粒子数算子;这个配分函数可用来求得 Bose 系统的所有热力学函数.

参考文献

[1] Huang, K., Statistical mechanics, New York, 1963.

[2] Kubo, R., Statistical mechanics, North - Holland, 1965 (中译本: 久保亮五, 统计力学, 高等教育出版社, 1985).

[3] Ландау, Л.Д., Лифшиц, Е. М., Статистическая физика, 2 изд., М.; 1964(中译本: Л. Д. 朗道, Е. М. 栗弗席茨, 统计物理学,人民教育出版社, 1964).

[4] Schrödinger, E., Statistical thermodynamics, Cambridge Univ. Press, 1948(中译本: E. 薛定谔, 统计热力学,科学出版社, 1964).

[5] Боголюбов, Н. Н., Лекции по квантовой статистике, в кн.: Избр. тр., т. 2, К., 1970 (中译本: Н. Н. 波戈留波夫, 量子统计学,科学出版社, 1959).

Д. Н Зубарев 撰 徐锡申 译

Bott 周期定理 [Bott periodicity theorem; Ботта тео-

рема периодичности]

K 理论 (*K* - theory) 中的一个基本定理，它的最简单的形式是说，对任意 (紧) 空间 X, 在环 $K(X)\otimes K(S^2)$ 和 $K(X\times S^2)$ 之间存在一个同构. 更一般地. 如果 L 是 X 上的一个复向量丛，且 $P(L\oplus 1)$ 是 $L\oplus 1$ 的射影化，那么环 $K(P(L\oplus 1))$ 是只有一个生成元 $[H]$ 和唯一关系 $([H]-[1])([L][H]-[1])=0$ 的 $K(X)$ 代数，这里 $[E]$ 是向量丛 E 在 $K(X)$ 中的象，H^{-1} 是 $P(L\oplus 1)$ 上的 Hopf 纤维丛. 这个事实等价于 K 理论中关于复向量丛的 Thom 同构的存在性. 特别地，$P(1\oplus 1)=X\times S^2$. Bott 周期定理最初是由 R. Bott ([1]) 使用 Morse 理论验证的，后来又用 K 理论的语言重新表述 ([6]); 对实纤维丛的类似定理也已验证.

Bott 周期定理建立了酉群 U 的稳定同伦型的性质，它就是 $\Omega^2U\sim U$, 这里 ΩX 是 X 的闭路空间，$\sim$ 是弱同伦等价. 特别地，对于 $i=0, 1, \cdots$, $\pi_i(U)=\pi_{i+2}(U)$, 这里 π_i 是第 i 个同伦群. 类似地，对正交群 O:

$$\Omega^8 O\sim O,\quad \pi_i(O)=\pi_{i+8}(O).$$

参考文献

[1] Bott, R., The stable homotopy of classical groups, *Ann. of Math.*, (2), **70** (1959), 2, 313–337.

[2] Milnor, J., Morse theory, Princeton Univ. Press, 1963.

[3] Atiyah, M. F., *K*-theory: lectures, Benjamin, 1967.

[4] Husemoller, D., Fibre bundles, McGraw-Hill, 1966.

[5] Moore, J. C., On the periodicity theorem for complex vector bundles, in Sem. H. Cartan, 1959–1960.

[6] Atiyah, M. F. and Bott, R., On the periodicity theorem for complex vector bundles, *Acta Math.*, **122** (1964), 229–247.

А. Ф. Щекутьев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Bott, R., Lectures on *K*(*X*), Benjamin, 1969.

[A2] Karoubi, M., *K*-theory, Springer, 1978.

唐梓洲 译 沈信耀 校

约束变量 [bound variable; связанная переменная], 变量的约束出现 (bound occurrence of a variable)

变量在语言表示式中出现的一种类型. 对每一个形式语言，其确切定义依赖于语言的形成规则. 约束变量出现的位置不能用一个对象去代替，因为那样的代换将导致一个无意义的表示式. 然而一个约束变量可以用一个新的 (对给定表示式来说是新的) 变量代替，结果得到一个与原表示式意义相同的表示式. 例如，在表示式

$$\int f(x, y)\,dx,\quad \{x: f(x, y)=0\}$$

中的 x 是约束变量. 用一个数去代替 x, 将导致一个无意义的表示式. 然而若把表示中 x 的所有出现用 z 代替则得到一个与原式意义完全相同的表示式.

约束变量总是产生于把一个算子变量 x 作用于一个具有变量 x 自由出现的表示式 e 时 (见**自由变量** (free variable)). 当把一个算子变量 x 作用于表示式 e 后，原来 e 中 x 的自由出现都变为约束出现. 下面我们列举一些常用的算子 (仅次于算子 $\int\cdots dx$ 和 $\{x:\cdots\}$), 其中的 x 是算子变量:

$\forall x(\cdots)$, $\exists x(\cdots)$, 即全称量词和存在量词;

$\int\cdots dx$, 即对于 x 的定积分;

$\sum_x\cdots$, 即对于 x 求和;

$\lambda x(\cdots)$, 即 x 的函数，它在 x 处的函数值是 $\cdots$.

特定的语言表示式可以代入上列诸小圆点处.

在实用 (非形式化) 的数学教科书中，对同一个表示式来说，它的用法可能不是唯一的; 这时，识别一个给定表示中的约束变量要依赖于上下文和表示式的意义. 在形式语言中，存在着识别变量的约束出现和自由出现的形式方法.

В. Н. Гришин 撰 卢景波 译 王世强 校

约束向量 [bound vector; связанный вектор]

见**向量** (vector).

边界 [boundary; граница]

1) 给定的拓扑空间 X 的子空间 A 的边界，是使它的任意点的每个邻域既含有 A 的点又含有 $X\setminus A$ 的点的点集. 常用记号包括 ∂A, $\mathrm{Fr}\,A$, $\mathrm{Fr}_X A$.

2) 关于**流形** (manifold) 的边界的同义语如单形的边界.

А. В. Чернавский 撰 方嘉琳 译

边界条件 [boundary conditions; краевые условия]

在微分方程求解区域的边界 (或边界的一部分) 上，对 (未知的) 解所加的条件. 边界条件通常是用微分算子表述的，但是也会遇到其他形式的边界条件.

А. П. Солдатов 撰 张鸿林 译

边界对应原理 [boundary correspondence, principle of; соответствия границ принцип]

如下所述的原理: 称边界对应原理对于映射 f 成立，如果 f 是区域 G 的闭包 $\bar G$ 到区域 D 的闭包 $\bar D$ 上的连续映射且 f 是 $\bar G\setminus G$ 到 $\bar D\setminus D$ 上的拓扑映射蕴涵 f 是 $\bar G$ 到 $\bar D$ 上的拓扑映射. 这样，边界对应原理在某种意义上是边界对应性质 (见**边界对应 (共形映射下的)** (boundary correspondence (under conformal mapping))) 的逆命题.

如果 G 和 D 是具有同胚于圆周的 Euclid 边界的平面域且 D 是有界的，则边界对应原理对 G 上的解析函数 f (即 f 是 G 到 D 上的共形映射) 成立. 除上述表

述之外，边界对应原理还有各种不同的形式，它们常被应用到共形映射理论中(见[1])．已经证实边界对应原理对Euclid空间中的可定向映射也成立(见[2])．

参考文献

[1] Лаврентьев, М. А., Шабат, Б. В., Методы теории функций комплексного переменого, 3 изд., М., 1965 (中译本：М. А. 拉甫伦捷夫，Б. В. 沙巴特，复变函数论方法，高等教育出版社，上册，1956，下册，1957).

[2] Кудрявцев, Л. Д.,《Докл. АН СССР》, 14 (1954), 5, 921–923.

[3] Пинчук, С. П.,《Матем. сб.》, 111 (1980), 1, 67–94.

Б. П. Куфарев 撰 沈永欢 译

边界对应(共形映射下的) [**boundary correspondence (under conformal mapping)**; **соответствие границ при конформном отображении**]

有限连通区域G到z平面内区域D的单叶共形映射f的一个性质，它包含如下事实：f可以延拓为G和D分别经某种紧化的$\widetilde{G}$与$\widetilde{D}$之间的同胚(homeomorphism)，即f引出边界$\widetilde{G}\setminus G$与$\widetilde{D}\setminus D$之间的一个同胚．对于G和D的常义(Euclid)边界∂G与∂D，并不总有此性质．例如，圆盘K的共形映射引出∂K与∂D之间的同胚只限于∂D同胚于圆周的情形．

有几种已知的单连通区域紧化方法，它们具有共形映射下的边界对应性质．历史上最早的是Carathéodory扩张(Carathéodory extension，见[1]，亦见[2])．这是最直观的紧化方法，常用于共形映射和其他映射的研究．C. Carathéodory把依这一方法得到的边界元称为素端(见**极限元** (limit elements))．关于单连通区域在可变共形映射下的边界对应理论也已得到发展(见[3])．

参考文献

[1] Мышкис, А. Д., Суворов, Г. Д.,《Докл. АН СССР》, 212 (1973), 4, 822–824.

[2] Carathéodory, C., Uber die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete, *Math. Ann.*, 73(1913), 323–370.

[3] Суворов, Г. Д.,《Матем. сб.》, 33 (75) (1953), 1, 73–100.

[4] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2. М., 1968 (中译本：А. И. 马库雪维奇，解析函数论，高等教育出版社，1957).

[5] Collingwood, E. F. and Lohwater, A. J., The theory of cluster sets, Cambridge Univ, Press, 1966.

[6] Суворов, Г. Д., Семейства плоских тополотических отображений, Новосиб., 1965.

[7] Суворов, Г. Д., Метрическая теория простых концов и граничные свойства плоских отображений с ограниченными интегралами Дирихле, К., 1981.

[8] Иванов, О. В., Суворов, Г. Д., Полные решетки конформно-инвариантных компактификаций области, К., 1982.

Б. П. Куфарев 撰

【补注】 关于共形映射下的边界对应与素端的公认的英文文献是[A1]–[A3].

参考文献

[A1] Ahlfors, L. V., Conformal invariants, McGraw-Hill, 1973.

[A2] Ohtsuka, M., Dirichlet problem, extremal length and prime ends, van Nostrand Reinhold, 1970.

[A3] Pommerenke, C., Univalent functions, Vandenhoeck and Ruprecht, 1975 (中译本：Ch. 泊茂仁克，单叶函数，科学出版社，1987).

杨维奇 译

边界(一致代数理论中的) [**boundary (in the theory of uniform algebras)**; **кольцевая граница**]

复数域**C**上的具有单位元的**交换Banach代数**(commutative Banach algebra) A的极大理想空间M_A的子集Γ，它具有下列性质：所有元素$a\in A$的Гельфанд变换$\hat{a}$的模在Γ上达到它们的最大值(见**Гельфанд表示**(Gel'fand representation))．例如，可取$\Gamma=M_A$(平凡边界)．有意义的是具有某种极小性质的非平凡边界．在所有闭边界$\Gamma\subset M_A$中存在一条极小边界∂M_A，即一条对于每条闭边界Γ都有$\partial M_A\subset\Gamma$的闭边界；它就是所谓Шилов边界(Shilov boundary)．Шилов边界的点由下列性质来刻画：对于这种点ξ的每一邻域$V\subset M_A$和每个$\varepsilon>0$，存在元素$a\in A$，满足$\max|\hat{a}|=1$，以及在V外有$|\hat{a}|<\varepsilon$．点$\xi\in\partial M_A$全体构成了极大理想集合M_A中的"最稳定的"部分：如果B是包含A作为子代数的交换Banach代数，那么对应这些点的极大理想(可乘泛函)可以延拓为代数B的极大理想(可乘泛函)，而对于不属于边界∂M_A的极大理想，这样的延拓一般是不可能的．这种情况类似于Banach空间上的有界线性算子的谱的边界的稳定性．一个典型例子是由在圆盘$|\lambda|\leq 1$上连续、在圆盘$|\lambda|<1$中解析的函数组成的代数A．在这一情形中，M_A可看作与闭圆盘恒同，而∂M_A可看作与它的拓扑边界恒同；对应圆盘内点的极大理想不可能延拓为所有在边界上连续的函数的代数(根据最大值原理，它自然把A包含在其中)的极大理想，而对应边界点的极大理想是可以延拓的．

正如在解析函数代数中那样，对于一般的交换Banach代数有局部最大模原理(local maximum-modulus principle)：如果V是空间M_A的开集，那么对于所有$a\in A$，

$$\max\{|\hat{a}(\xi)|:\xi\in\overline{V}\}=$$

$$=\max\{|\hat{a}(\xi)|:\xi\in(\partial M_A\cap V)\cup\partial V\}$$

成立，其中$\overline{V}$是集合V在M_A中的闭包，∂V是V在M_A中的拓扑边界．粗略地说，这意味着局部最大值点必定是整体最大值点(可能是其他元素的)．

边界的概念常在研究一致代数(uniform algebras)时应用,后者即紧统 X 上的所有连续函数的代数 $C(X)$ 的闭子代数 A,它可分离 X 的点,且包含常数.在这种情况下,$\partial M_A \subset X \subset M_A$.对于每个点 $\xi \in M_A$,存在集中于 Шилов 边界上的表示测度(representing measure),即对于所有 $a \in A$ 使得

$$\hat{a}(\xi) = \int_{\partial M_A} \hat{a}\, d\mu$$

的概率测度 μ(这对于任意交换 Banach 代数成立).在(上述)最简单的圆盘和解析函数代数情形,后一公式归结为 **Poisson 公式**(Poisson formula).表示测度 μ 一般不是唯一的.对于属于同一 Gleason 部分(见**函数代数**(algebra of functions))的点 ξ,测度 μ 可选择为相互绝对连续的,并且在对表示测度附加的某些唯一性型的条件下,这可对极大理想空间的 Gleason 部分赋予与代数相容的一维解析结构.一致代数的 Шилов 边界的每个点构成单点 Gleason 部分;然而,其逆一般不成立.

对于一致代数来说,等式 $\partial M_A = X = M_A$ 是对于 A 与 $C(X)$ 重合的一个简单的必要条件.没有补充假设它不是上述重合的充分条件,即使对于平面中的紧统 X 上的有理函数的一致极限的代数 $A=R(X)$ 来说,也是如此.

设 X 是可距紧统,A 是 X 上的一致代数.这时在所有边界中存在极小边界:$\partial_0 M_A$.极小边界的闭包与 ∂M_A 重合.然而,一般来说,$\partial_0 M_A$ 不是闭的;所有在圆盘 $|\lambda| \leqslant 1$ 内解析且满足 $f(0)=f(1)$ 的函数的子代数就是一个例子.边界 $\partial_0 M_A$ 与关于 A 的峰点(peak points)集是一样的;所谓峰点 $\xi \in M_A$ 是指对于这些点,存在一个 $a \in A$,使得对于所有 $\eta \neq \xi$,$|\hat{a}(\xi)| > |\hat{a}(\eta)|$ 成立.另一方面,已经知道点 ξ 属于 $\partial_0 M_A$ 的形式上看来相当弱的充分条件.也就是说,对点 $\xi \in M_A$,如果关于某个 c $(0<c<1)$ 和某个 $d \geqslant 1$,对 ξ 的每个邻域 V 存在 A 中的元素 a,使得 $\hat{a}(\xi)=1$,$\max|\hat{a}|=d$ 以及 $|\hat{a}(\eta)| \leqslant c (\eta \notin V)$ 成立,那么 $\xi \in \partial_0 M_A$.抽象的 Poisson 公式已经按下列方式得到改进:对于任何点 $\xi \in M_A$ 存在集中于 $\partial_0 M_A$ 上的表示测度(这时 $\partial_0 M_A$ 是 G_δ 集).在这样的形式下,它已成功地应用于某些逼近论问题.点 $\xi \in \partial_0 M_A$ 是由下列性质来刻画的:对于这些点,测度是唯一的,且与 Dirac δ 测度重合;这就是说,极小边界是 Choquet 边界(Choquet boundary)的特殊情形.

对于平面中的紧统 X 上的有理函数的一致极限的代数 $A=R(X)$ 来说,A 与 $C(X)$ 重合,当且仅当 $X=M_A$ 与 $\partial_0 M_A$ 重合.对于任意的一致代数来说,这一命题不真:存在不同于 $C(M_A)$ 的一致代数 A,其中 M_A 可距,且每一点 $\xi \in M_A$ 都是峰点(即 $\partial_0 M_A = M_A$).也存在这样的一致代数,其所有 Gleason 部分都是平凡的(单点集),然而,甚至其 Шилов 边界也是极大理想空间的真子集.

Шилов 边界概念的代数推广之一如下所述.设 $\partial_1 M_A = \partial M_A$,$I$ 是由元素 $a_1, \cdots, a_{n-1} \in A (n \geqslant 2)$ 所生成的闭理想.空间 $M_{A/I}$ 可以自然地看成与函数 $\hat{a}_1, \cdots, \hat{a}_{n-1}$ 的公共零点集相同.边界 $\partial M_{A/I}$ 对所有由 $n-1$ 个元素生成的理想 I 所取的并集的闭包表示为 $\partial_n M_A$.例如,对于在多圆盘 $|\lambda_1| \leqslant 1, |\lambda_2| \leqslant 1$ 上连续、在其内部解析的函数的代数来说,$\partial_1 M_A$ 是骨架 $|\lambda_1|=|\lambda_2|=1$,$\partial_2 M_A$ 是拓扑边界 $|\lambda_1|=1, |\lambda_2| \leqslant 1$;$|\lambda_1| \leqslant 1, |\lambda_2|=1$,$\partial_3 M_A = M_A$.这些推广在证明关于极大理想空间中的多维解析结构的定理时是有用的.

与上述的边界(或函数边界)概念类似的概念在解析函数论中(Bergman 边界)、在概率论中(Martin 边界)以及在许多其他数学分支中都会遇到.这时,初始的函数元素集合不一定假设为代数或环.

参考文献

[1] Basener, R., A generalized Shilov boundary and analytic structure, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 47(1975), 1, 98–104.

[2] Browder, A., Introduction to function algebras, Benjamin, 1969.

[3] Gamelin, T. W., Uniform algebras, Printice-Hall, 1969.

[4] Гельфанд, И. М., Райков, Д. А., Шилов, Г. Е., Коммутативные нормированные кольца, М., 1960.

[5] Гончар, А. А., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, 27 (1963), 4, 949–955.

[6] Phelps, R. R., Lectures on Choquet's theorem, v. Nostrand, 1966.

Е. А. Горин 撰

【补注】 本文中的许多结论,特别是边界的定义,对于一般的交换 Banach 代数也适用和成立.

史树中 译

边界层[**boundary layer**; **пограничный слой**]

函数梯度值很大的区域,特别是,在流体力学中它是粘性流体流动中这样的一个区域,同纵向尺寸比较,其横向厚度很小,并且它出现在固体表面,或者出现在具有不同速度、温度或化学组成的两种流体流动之间的界面上.边界层的特征是,在横向,速度急剧变化(剪切层(shear layer));或者温度急剧变化(热边界层(thermal boundary layer)或温度边界层(temperature boundary layer));或者个别化学组分的浓度急剧变化(扩散边界层(diffusion boundary layer)或浓度边界层(concentration boundary layer)).边界层概念和术语本身是 L. Prandtl(1904)解粘性流体动力学的非线性偏微分方程的边值问题时提出的.航空业的需求促进了空气·流体动力学边界层理论的发展.20世纪中叶,数学**边界层理论**(boundary-layer theory)有所发展,并在传热、扩散和半导体工艺等方面得到应用.

Ю. Д. Шмыглевский 撰

【补注】 虽然边界层概念起源于流体动力学,但是此

概念最近的数学发展以及其应用却是在奇异摄动法这个领域内.关于这方面的综述可参考[A1].

参考文献

[A1] Eckhaus, W., Boundary layers in linear elliptic singular perturbation problems. SIAM Review, 14(1972), 225-270.

佚名文 译

边界层理论 [boundary-layer theory; пограничного слоя теория]

最高阶导数项包含有一小参数的微分方程的边值问题(奇异问题)的解在子域中的渐近逼近,在此子域中包含最高阶导数的项对解有实质性的影响. 边界层现象出现在靠近边界的部分的狭带中,在那里,原始问题和退化问题(令小参数取零值)的边界条件的个数是有差别的,在靠近退化问题的解的间断面附近也一样出现边界层现象.

奇异问题的解可以表为两个展开式的和. 外部展开式是由具有边界条件 $B=B_0+B_1$ 的 B_0 部分的小参数方法决定的. 内部展开式在边界层外部快速下降,且通常被表为 ε 的幂的多项式. 为了确定这些,用依赖于 ε 的且伸展边界层子域的变量来变换微分方程. 将多项式代入变换后的方程,令 ε 的各个幂的系数等于零即导出边界层方程. 对这些方程加上条件 B_1. 所求到的外部展开式中的误差表明必要的变量变换. 在解复杂的应用问题时,必要的变量变换可以在对原始方程中的项以及对应于它们的简化的物理估计的基础上弄清楚. 这个变换应该消去 ε 之前的最高阶导数. 为了解这个问题,必须确定边界层在何处,以及条件 B 如何被分为 B_0 和 B_1. 这个解的一个值得注意的特点是对外部展开式的双曲型方程和对内部展开式的抛物型方程可以对应于原先的椭圆型方程.

在常微分方程组

$$x_t=f(x,y,t),\ \varepsilon y_t=g(x,y,t),\ 0\leqslant t\leqslant T \quad (1)$$

(其中 x, f 是 m 维向量函数,而 y, g 是 n 维向量函数)的理论中,在条件 $x(0,\varepsilon)=x^0$, $y(0,\varepsilon)=y^0$ 以及 f 和 g 的某些性质假定下,Cauchy 问题解的存在性和唯一性定理已被证明.还导出了当 $\varepsilon\to 0$ 时解的性质(见[1]).在对(1)的边值问题中,在条件

$$x(0,\varepsilon)=x^0,\ y_1(0,\varepsilon)=y_1^0,\ v_2(T,\varepsilon)=y_2^0$$

(其中向量 y_1 和 y_2 的分量个数之和是 n)之下,一般说来,在线段 $[0,T]$ 的端点的邻域中存在边界层. 为了寻找此问题的解的渐近展开,构造了一个算法. 在 f 和 g 的某些性质的假定下证明了解存在且是唯一的,还给出了它的估计(见[3]). 如果极限方程 $g=0$ 的解关于 y 不是唯一的,那么可以构造一个内部边界层(在 τ 的邻域中,$0<\tau<T$)以划分具有极限方程的不同解的区域. 对一类特殊的积分-微分方程构造了一个算法,对具有初始条件的问题给出了关于 ε 的渐近展开式,并考察了解的性质的某些特点.

在线性常微分方程 $(L+\varepsilon M)x=f(t)(0\leqslant t\leqslant 1)$ 具有边界条件 B_0+B_1 的情形,其中 L 和 M 是微分算子,可以区分其解包含有边界层的问题的类,且可以引进正则退化的概念(极限方程的解使条件 B_0 被满足,而对边界层的渐近解则使条件 B_1 被满足(见[4])). 对解的渐近表达式构造了一个迭代过程,并对展开式中的余项给出了估计.

在一般非线性二阶常微分方程的边界层理论中,在某些假定下,证明了(见[5])第一边值问题的解由一个外部解,一个边界层和一个余项组成,余项和它的一阶导数一起在整个线段上是 ε 阶的.

对于线性偏微分方程

$$\varepsilon\Delta u+A(x,y)u_x+B(x,y)u_y+C(x,y)u=f(x,y),$$

其中 Δ 是 Laplace 算子,在具有边界 S 的区域 D 中,已研究过关于它的基本类型的边值问题的解的性质. 给出了加在下列诸对象上的条件:函数 A,B,C,f, 边界 S, 以及出现在边界条件 $u_n+a(P)=\varphi(P)$ 中的 S 上点 P 的函数 a 和 φ, 使得 u 在 $D\cup S$ 中一致地趋于极限方程在 S 的某一部分上满足这个边界条件的解(不出现边界层)([6]).

对具有边界 S 的域 D 中的二阶椭圆型方程,利用两个自变量的例子

$$\varepsilon[a(x,y)u_{xx}+2b(x,y)u_{xy}+c(x,y)u_{yy}+$$
$$+d(x,y)u_x+e(x,y)u_y+g(x,y)u]+u_x-$$
$$-h(x,y)u=f(x,y),\quad h\geqslant\alpha^2>0.$$

构造了在 S 上具有条件 $u=0$ 的问题的求解迭代过程,证明了关于 u 的 ε 展开式的结构的一些定理,以及作出了在此展开式中余项的估计([4]). 对高阶方程得到了类似的结果.

为把方程

$$\varepsilon\Delta u-a(x,y)u_y=f(x,y)$$

在矩形中的渐近展开式和在边界上给出的 u 相结合而设计了一个方法([7]).

非线性偏微分方程的边界层理论的研究主要与空气动力学有关,并以 Navier-Stokes 方程或它们的推广为基础. 实际的需要促使了数学理论的发展,也产生了处理各种不同的问题的方法. 下面仅考虑层流(见[8]-[10]).

在具有常粘性系数 ν 的不可压缩流体的平面($k=0$)

和轴对称($k=1$)流的流体动力学情形，Navier - Stokes 方程是:

$$\left.\begin{aligned}(\eta^k u)_\xi+(\eta^k v)_\eta=0,\ u_\tau+uu_\xi+vu_\eta=\varepsilon^2\Delta u-p_\xi,\\ v_\tau+uv_\xi+vv_\eta=\varepsilon^2\Delta v-p_\eta,\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

其中 $\varepsilon=\mathrm{Re}^{-1/2}$, $\mathrm{Re}=wX/\nu$ 是 Reynolds 数，它用速度的特征值 w 和线性度量 X 来表达. 解由域 D 的闭边界 S 上的边界条件所确定. 那里，在方程为 $\eta=H(\xi)$ 的流线围线 Γ 上有条件 $\bar{u}=0$, $v=\bar{v}_0(\xi,H(\xi))$, 其中 $\bar{u}$ 和 $\bar{v}$ 是向量 (u,v) 对 Γ 的切向和法向分量. u, v 和 p 的初始值给在 $D\cup S$ 上.

当 ε 很小时，在第一近似中渐近解由 $\varepsilon=0$ 时(2)的在 S 上满足某些条件(仅给条件: 在 Γ 上 $\bar{v}=v_0$)的解和边界层方程的解组成. 动态边界层的方程是在下列假定下导出的: 边界层的条件厚度 δ 和 v 的值的阶分别为 $\delta\sim X\varepsilon$, $v\sim w\varepsilon$, 以及(2)中后两方程的左端项的阶为包含 ε^2 的项的阶. 引进变量 $t=\tau$, $x=\xi$, $y=\eta/\varepsilon$ 和 $V=v/\varepsilon$ 当 $\varepsilon\to 0$ 时就导致 **Prandtl 方程** (Prandtl equation).

$$(r^k u)_x+(r^k V)_y=0,\ u_t+uu_x+Vu_y=u_{yy}-p_x,\quad(3)$$
$$p_y=0,\ 0\leqslant t\leqslant T,\ 0\leqslant x\leqslant X_0,\ 0\leqslant y<\infty,$$

以及条件

$$u|_{t=0}=u_0(x,y),\ v|_{t=0}=v_0(x,y),\ u|_{y=0}=0,$$
$$V|_{y=0}=v_0(t,x),$$
$$u\to W(t,x),\ p_x=-WW_x-W_t,$$
$$\text{当 } y\to\infty \text{ 时},\ u|_{x=0}=0,$$

其中对于 $k=1$, r 是到对称轴的距离，$W(x)$ 是一已知函数. 这些方程和条件对于曲率半径比 δ 大得多的任何曲线围线都适用. 在后一种情形，x 和 y 分别是沿围线和它的法向的坐标.

如果 W 是常数，那么问题化为常微分方程的边值问题. 也还有其他类型的类似解.

使边界层问题的解存在的条件是已知的; 还研究了解的唯一性和稳定性问题，以及如何从定常情形的解导出它们([11]). 解是利用直线法来构造的，并已证明它们是收敛的.

可压缩液体的边界层方程可从一粘性和热传导气体流的方程导出; 它们比(3)要复杂得多，个数也比较多. 有一个积分变换可将这些一般情形的方程简化，且当 Prandtl 数 $\mathrm{Pr}=c_p/K=1$ 时将它们化为(3)，其中 c_p 是气体在常压时的热容量，K 是热传导系数([12]). 存在变换的某些改进. 在一般情形时，边界层方程描述的是所谓的自然对流. 如果 ν 不依赖于温度，且 Archimedes 力可以忽略不计，那么能量方程可从边界层方程组中分离出来，并进而论及强制对流. 能量方程决定着热边界层，它的厚度不同于 δ.

边界层还发生在将流分离成具有不同特征速度的带域中. 激波也是边界层.

一个不同类的二维边界层问题是与在旋转的轴对称板和物体中的流相联系的.

不仅发展了解非定常问题的方法，而且还解决了下述问题: W 是周期的，且从一静止状态有跳跃运动的问题; 对激波后面的边界层具有加速运动的问题; 以及被绕流的固体表面温度变化的问题.

在三维流的边界层理论中发展了求解方法，并研究了方程简化的情形. 无限翼展的活动柱形机翼的边界层方程类似于一个二维边界层的方程. 在一旋转的圆柱形螺旋桨叶片上以及在斜向流中的旋转圆柱体上的边界层问题已得到了近似解，两平面的交线附近的边界层问题也得到了近似解.

在空气动力学中关于边界层的这些研究与边界层理论中第一近似有关. 采用高阶近似能考察边界层和外部流动的相互作用，且能对 R 的中等值作计算([13]).

边界层的稳定性使得能确定理论的应用范围. 有些研究以具有周期扰动和局部初始扰动的小扰动法为基础([14]). 在二维流情形，在 Сквайр 定理的基础上，利用线性近似，三维扰动的分析可化为具有一个改变了的 ν 值的二维分析. 应用于稳定性亏损的非线性分析表明出现纵向涡旋.

在边界层理论中，各种问题在物理上的推广(见[15]—[17])与下列这些方面的研究有关: 关于多相流的研究; 真实状态方程和真实传导系数的利用(方程的复杂性); 带有扩散的非平衡流的研究(方程组的一个扩充，于是方程组变为抛物 - 双曲型的); 考虑到流动绕过的表面的损耗(边界条件的复杂性，因而必须考虑固体中的热传导); 还考虑辐射输运(积分 · 微分方程).

在不满足 Prandtl 假定的流动的研究中得到了空气动力学中边界层理论的进一步发展，其中的解是作为多层渐近展开而得到的. 在解的结构中引起复杂性的原因是在边界条件中有附加的小参数(例如，由于流动绕过围线的曲率半径是小的)，在理论的第一近似中可能有奇点、奇线或奇面，以及解可能有分歧.

这一类还包含边界层对于流动所绕围线的分离点或接合点周围的流动，边界层上激波入射点周围的流动. 特征解([18]—[20])有一个三层结构. 外部解定义了由边界层所扰动的位势流，并由扰动中的方程来描述. $X\varepsilon$ 阶的中间层可以由具有 $p_y=0$ 的无粘涡流的方程来描述，它从前面的边界层的主要部分接受气体.

最靠近壁的(最薄的)第三层的方程可以在它的长度和厚度分别是 $X\varepsilon^{3/4}$ 阶和 $X\varepsilon^{5/4}$ 阶的假定下导出. 在定常情形下引进下列变量:

$$x=\xi\varepsilon^{-3/4},\ y=\eta\varepsilon^{-5/4},$$

$$U=u\varepsilon^{-1/4},\ V=v\varepsilon^{3/4},\ P=p\varepsilon^{-1/2}.$$

当$\varepsilon\to 0$ 时这又导致(3)，其中将 u 换为 U 和 p 换为 P. 问题的解的这种结构可以表征一大类具有小扰动的流.

对于小的 ε, 关于在外部超声速流中的压力在短距离上有相当大变化($M>1, M=w/c$, 其中 w 是气体的速度, c 是声速)的流动的动力学作了很多研究. 这包括计算绕局部大曲率的围线的流动的问题和计算附贴于物体表面的流动的问题. 这些情形中, 在解的三层格式的中间层中 $p_y\neq 0$.

也研究过扰动解处于有限区域的一类问题. 这些解出现在边界层和一外部高超声速流($M\to\infty$)有缓慢的或强的相互作用时, 或者出现在超声速流绕过一有限长的物体时, 在那里有强烈气体喷射通过表面($v_0>0$). 在这些情形中, 在边界层的外部边界上的压力是由完全问题的解所确定的. 物体尾部边缘的扰动向上游传播, 它是由在前沿边缘附近的解的非唯一性所引起的.

参考文献

[1] Тихонов, А. Н., 《Матем. сб.》, 31 (1952), 3, 575–586.

[2] Wasov, W., Asymptotic expansions for ordinary differential equations, Interscience, 1965.

[3] Васильеве, А. Б., Бутузов, В. Ф., Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений, М., 1973.

[4] Вишик, М. И., Люстерник, Л. А., 《Успехи матем. наук》, 12 (1957), 5, 3–122; 15 (1960), 3, 3–80.

[5] Cole, J., Perturbation methods in applied mathematics, Blaisdell, 1968.

[6] Олейник, О. А., 《Матем. сб.》, 31 (1952), 1, 104–117.

[7] Ильин, А. М., Леликова, Е. Ф., 《Матем. сб.》, 96 (1975), 4, 568–583.

[8] Кочин, Н. Е., Кибель, И. А., Розе, Н. В., Теоретическая гидромеханика, 4 изд., ч. 2, М., 1963 (中译本: Н. Е. 柯钦, И. А. 基别里, Н. В. 罗斯, 理论流体力学, 高等教育出版社, 1956).

[9] Лойцянский, Л. Г., Ламинарный пограничный слой, М., 1962.

[10] Schlichting, H. von, Grenzschicht - Theorie, Karlsruhe, 1951(中译本: H. 史里希廷, 边界层理论, 科学出版社, 1988).

[11] Олейник, О. А., 《Успехи матем. наук》, 23 (1968), 3, 3–65.

[12] Дородницын, А. А., 《Прикл. матем. и механ.》, 6 (1942), 6, 449–486.

[13] Dyke, M. van, Perturbation methods in fluid mechanics, Parabolic Press, 1975.

[14] Betchov, R. and Crimmale, V. O., Stability of parallel flows, Acad. Press, 1967.

[15] Soo, S., Fluid dynamics of multiphase systems, Blaisdell, 1971.

[16] Dorrance, W. H., Viscous hypersonic flow, McGraw - Hill, 1962.

[17] Kays, W. M., Convective heat and mass transfer, McGraw - Hill, 1971.

[18] Нейланд, В. Я., 《Изв. АН СССР, Механ. жидк. и газа》, (1969), 4, 53–57.

[19] Нейланд, В. Я., 《Тр. ЦАГИ》, 1529, 1974.

[20] Stewartson, K., Multistructured boundary layers on flat plates and related bodies, *Adv. Appl. Mech.*, 14 (1974), 145–239.

Ю. Д. Шмыглевский 撰

【补注】 上述内容涉及的只是本主题的一方面的观点, 在许多方面并未触及到近代的观点. 而且, 西方文献中许多非常重要的贡献都被忽略了. 边界层在数学上起源于奇异扰动(singular perturbations)的问题, 且是利用渐近分析(asymptotic analysis)方法处理的. 在线性和非线性、常和偏微分方程中所完成的工作要比上面第一部分中所描述的多得多. 作为部分补充的总的看法可以在[A1]–[A3]中找到.

从应用的观点看, 边界层理论在上面被描述为流体和气体动力学的一个分支, 它产生于这些领域. 但是, 边界层和过渡层也出现在许多其他领域中, 例如燃烧学、地球地理学、自由边界问题或流行病学等. 实例和进一步的文献可以在[A4], [A5]中找到.

上面形如(1)的(常)微分方程组常被称作奇异扰动(singular perturbations)(也见**扰动理论**(perturbation theory)的补注).

对奇异扰动、边界层及控制和系统理论中的多重时间尺度(multiple time scales)的作用的概念见[A6].

参考文献

[A1] Lions, J. L., Perturbation singulières dans les problèmes aux limits et en controle optimal, Lecture Notes in Math., 323, Springer, 1973.

[A2] Eckhaus, W., Asymptotic analysis of singular perturbations, North - Holland, 1979.

[A3] Chang, K. W. and Howes, F. A., Nonlinear singular perturbation phenomena: theory and application, Springer, 1984.

[A4] Brauner, C. M., Gay, B. and Mathieu, J. (eds.), Singular perturbations and boundary layer theory, Lecture Notes in Math., 594, Springer, 1977.

[A5] Verhulst, F. (ed.), Asymptotic analysis Ⅱ, Lecture Notes in Math., 985, Springer, 1983.

[A6] Kokotovic, P. (ed.), Singular perturbations and time scales in modelling and control of dynamical systems, Univ. of Illinois at Urbana - Champaign, 1980.

孙和生 译 陆柱家 校

边界(流形的) [**boundary** (of a manifold); **край многообразия**]

一个(开)n 维实流形 M^n 的闭包 $\overline{M}^n$ 的子集,它每一点的邻域同胚于 $\mathbf{R}^n$ 中闭半空间的一个在 $\mathbf{R}^n_+$(但不在 $\mathbf{R}^n$)中开的区域 W^n. 点 $a\in\overline{M}^n$ 对应于 $W^n\subset\mathbf{R}^n_+$ 的边界点,即对应于 $\overline{W}^n$ 与 $\mathbf{R}^n_+$ 的边界的交点,则称为 M^n 的一个边界点 (boundary point). 有边界点的流形称为带边流形 (manifold with boundary). 不带边的紧流形称为闭流形 (closed manifold). M^n的所有边界点的集合是一个$(n-1)$维无边流形. М. И. Войцеховский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hirsch, M. W., Differential topology, Springer, 1976.

徐森林 译

解析函数的边界性质 [boundary properties of analytic functions; граничные свойства аналитических функций]

解析函数在其定义域边界邻近的性质.

解析函数边界性质的研究,就其最宽泛的意义上去理解,可以说始于有关解析函数在孤立本质奇点邻域内的性质的 **Сохоцкий 定理** (Sokhotskiĭ theorem) 与 **Picard 定理** (Picard theorem) (见**本质奇点** (essential singular point)),这两个定理是在 19 世纪的后半世纪得到的. 有关解析函数边界性质研究方面的术语——如今称之为素端理论和聚值集理论(见**极限元** (limit elements)) —— 首次出现于 1895 年 P. Painlevé 的一本教程中. P. Fatou 的学位论文 (1906) 就解析函数在其定义域之连续边界的邻域内的某些边界性质首次作了系统的研究. 在 20 世纪的前三分之一世纪,由于一些科学家的工作,边界性质理论有了引人注目的发展;在这个世纪的后半世纪,随着新思想和新方法的出现,随着研究方向与目标的更新,边界性质理论又恢复了其飞速发展的势头. 它的发展同数学分析及一般数学的许多领域都有密切联系,首先是概率论,调和函数理论,共形映射理论,解析函数论的边值问题,位势理论,值分布论,Riemann 曲面,次调和函数与函数代数. 通过边值问题,解析函数的边界性质理论还同应用数学的许多领域有密切联系.

由于边界性质的研究首先同单复变量 z 的解析函数 $f(z)$的定义域 D 的边界 Γ 的几何性态有关,在解析函数的边界性质理论中主要有三种不同的探讨.

a) $f(z)$ 在孤立边界点 $a\in\Gamma$ 的邻域内的性质的研究. 最重要的是 a 为本性奇点的情形, 这方面有 Сохоцкий, Picard, Julia 和 Iversen 等人的定理 (见 **Сохоцкий 定理** (Sokhotskiĭ theorem); **Picard 定理** (Picard theorem); **Julia 定理** (Julia theorem); **Iversen 定理** (Iversen theorem)).

b) 当 Γ 是处处不连续集时对 $f(z)$的性质的研究. В. В. Голубев 的著作《具有奇点完全集的单值解析函数》(1961, 见[1]) 是这一方面最重要的文献.

c) 当区域 D 由一条闭连续曲线 Γ 围成以及更特别的由单位圆周围成时对 $f(z)$ 的性质的研究.

a) 和 c) 就某种意义而言是极端情形, b) 则是介乎两者之间的情形. 情形 c) 已成为最热门的研究课题,下面对此作一详细介绍.

设解析函数 $f(z)$ 是定义在 z 平面上由一条可求长 Jordan 曲线 Γ 围成的有限单连通区域 $\mathbf{D}$ 上. 在解析函数边界性质研究的经典方法中,下列问题是基本的.

1) 边界值的存在性问题,即在何种条件及何种意义下当点 z 趋近 Γ 时 $f(z)$ 的边界值是否存在的问题. 这一问题,以及紧接着的几个问题,亦可以不同的方式表述为确定 D 中足够广泛的解析函数类的问题,该函数类就某种意义在 Γ 的足够大的子集上具有边界值.

2) $f(z)$ 的边界表示问题,即在何种条件下,借助何种解析机制,能够表示函数 $f(z)$ 对于它在边界 Γ 上的值的依赖性问题. 显然,对于不同的解析函数类,这种结构是不同的.

3) 唯一性问题,或集 $E\subset\Gamma$ 应具有什么性质,就能使得对于给定函数类的两个解析函数,只要它们在 E 上的边界值恒等便在 D 内恒等的问题.

解决存在性问题的第一个结果是 Fatou 定理 (Fatou theorem) (1906): 若一解析函数在单位圆盘 $D=\{z:|z|<1\}$ 内有界, $|f(z)|\leq M$, 则径向边界值或极限值 $f(e^{i\theta})=\lim_{r\to1-0}f(re^{i\theta})$ 在单位圆周 $\Gamma=\{z:|z|=1\}$ 上关于 Lebesgue 测度几乎处处存在. 可以证明,在这些条件下,不仅径向边界值,而且角边界值或沿所有非切向路径的边界值也在 Γ 上几乎处处存在. 这意味着对于几乎所有的点 $e^{i\theta}\in\Gamma$, 当 z 在以 $e^{i\theta}$ 为顶点,角度为 $\pi-2\varepsilon<\pi$ $(\varepsilon>0)$ 且以过点 $e^{i\theta}$ 的半径为等分线的任一固定角

$$\Delta(e^{i\theta},\varepsilon)=\{|z|<1\}\cap\left\{|\arg(e^{i\theta}-z)|<\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right\}$$

内趋于点 $e^{i\theta}$ 时 $f(z)$ 趋于确定的极限 $f(e^{i\theta})$. 就某种意义而言, Fatou 的定理不可能再改善; 事实上, Н. Н. Лузин (1919) 证明对于 Γ 上任一零测集 $E\subset\Gamma$, 存在有界解析函数 $f(z)$ 在 E 上无径向极限.

区域 D 中的有界解析函数族记为 $B(D)$ 或 $H^\infty(D)$. 紧随着 Fatou 的一系列结果,下一个问题是他的这些定理到更宽的函数类的推广. 可把单位圆盘 D 中下列基本函数族区分开来,它们具有真包含关系:

$$A(D)\subset B(D)$$

$$=H^\infty(D)\subset H^p(D)\subset N^*(D)\subset N(D). \quad (1)$$

$A(D)$ 是在闭区域 $D\cup\Gamma=\overline{D}$ 上连续的 D 内单值解析函数类.

对于所有的正数 p，类 $H^p(D)$ 由条件

$$\|f\|_p=\sup_{0<r<1}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\varphi})|^p\,d\varphi\right\}^{1/p}= \\ =C(f,p)<+\infty \qquad (2)$$

确定. 对任何 $0<p_1<p_2<+\infty$，有真包含关系 $H^\infty\subset H^{p_2}\subset H^{p_1}$. 类 H^p 首先由 G. H. Hardy 引入(1915)，通常称为 Hardy 类 (Hardy classes). 当 $1\leqslant p<\infty$ 时，在 H^p 上可引入范数(2)，在 H^∞ 上可引入范数

$$\|f\|_\infty=\|f\|_B=\sup_{z\in D}|f(z)|;$$

类 $H^p(1\leqslant p\leqslant+\infty)$ 有一种自然的向量空间结构，从而成为 Banach - Hardy 空间 (Hardy spaces). 当 $0<p<1$ 时，在 H^p 上只能引入度量 $\rho_p(f,g)=\|f-g\|_p^p$，使这类 H^p 变成不可赋范的完全度量空间. 有界解析函数族 $B=H^\infty$ 包含于任何一个类 H^p 之中 ($p>0$).

单位圆盘 D 中某个亚纯函数类 $N(D)$ 称为具有有界特征的函数族；系 R. Nevanlinna 在 1924 年引入. 类 $N(D)$ 可以表征为 D 内有如下性质的亚纯函数 $f(z)$ 的集合，$f(z)$ 可表示为 D 内两个有界正则函数 $f_1(z)$ 与 $f_2(z)$ 的比，$f(z)=f_1(z)/f_2(z)$.

所有正则函数 $f(z)\in N(D)$ 构成一个子类 $N^*(D)$，而 $f(z)\in N^*(D)$，当且仅当条件

$$\sup_{0<r<1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi=C(f)<+\infty \qquad (3)$$

成立. 其中 $\ln^+x=\ln x$，如果 $\ln x\geqslant 0$；$\ln^+x=0$，如果 $\ln x<0$. 类 $N^*(D)$ 包含所有的类 H^p，$0<p\leqslant+\infty$.

类 H^p 有如下推广. 设 $\psi(t)$ 是对于 $-\infty<t<+\infty$ 的严格凸函数 (strictly - convex function)，即非负非减的凸函数，使得当 $t\to+\infty$ 时 $\psi(t)/t\to+\infty$. 则类 $H_\psi(D)$ 由条件

$$\sup_{0<r<1}\psi^{-1}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(\ln|f(re^{i\varphi})|)\,d\varphi\right\}=C(f,\psi)< \\ <+\infty \qquad (2')$$

定义，与条件(2)相比较该处的 $\psi(t)=e^{pt}$.

在单位圆盘 D 的情况下，关于边界值存在性问题已得到的主要结果断言：D 内具有有界特征的每个亚纯函数 $f(z)$ 在 Γ 上几乎处处有角边界值 $f(e^{i\theta})$；这些边界值使得函数 $\ln|f(e^{i\theta})|$ 在 Γ 上 Lebesgue 可积. 对于族 $H^p(0<p<+\infty)$ 或 H_ψ，还有如下性质：函数 $|f(e^{i\theta})|^p$，或相应的 $\psi(\ln|f(e^{i\theta})|)$，在 Γ 上 Lebesgue 可积. 对于有界函数 $f(z)$，$|f(z)|\leqslant M$，可用 $\operatorname{ess\,sup}|f(e^{i\theta})|\leqslant M(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$ 代替之. 因此，条件(3)是关于解析函数 $f(z)$ 当 $|z|\to 1$ 时的平均增长的最宽的充分条件，这保证了角边界值在 Γ 上几乎处处存在.

已证明条件(3)不可能再有实质性的减弱. 例如，A. Zygmund 证明，对于任一增函数 $\psi(t)$，当 $0<t\to+\infty$ 时 $\psi(t)/t\to 0$，则存在 D 内解析函数 $f(z)$ 使得

$$\sup_{0<r<1}\int_0^{2\pi}\psi(\ln^+|f(re^{i\varphi})|)\,d\phi<+\infty,$$

但在 Γ 上任何一点都没有边界值. 甚至不管要求最大值 $M(r;f)=\max\{|f(z)|:|z|=r\}$ 的增长多慢，仍存在解析函数无径向边界值.

族 $N(D)$ 的函数 $f(z)$ 的边界表示的形式为

$$f(z)=z^m e^{i\lambda}\frac{B_1(z;a_\mu)}{B_2(z;b_\nu)}\times \qquad (4)$$

$$\times\exp\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(e^{i\theta})|\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\,d\theta\times$$

$$\times\exp\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\,d\Phi(\theta).$$

这也是该族函数的特征；其中 m 是整数. 当 $z=0$ 是 k 重零点时 $m=k$，当 $z=0$ 是 k 阶极点时 $m=-k$；λ 是实数；

$$B_1(z;a_\mu)=\prod_{\mu=1}^{\infty}\frac{|a_\mu|}{a_\mu}\frac{a_\mu-z}{1-\overline{a}_\mu z} \qquad (5)$$

是 **Blaschke 积** (Blaschke product)，取遍 $f(z)$ 在 D 内的所有零点 $a_\mu\neq 0$，并且按零点的重数重复取几次；$B_2(z:b_\nu)$ 也是式(5)型 Blaschke 积，取遍 $f(z)$ 在 D 内的所有极点 $b_\nu\neq 0$；$\Phi(\theta)$ 是 $[0,2\pi]$ 上具有有界变差的奇异函数，其导数几乎处处为零. 在式(4)中，最后一个积分是 Lebesgue - Stieltjes 型的积分，第一个积分则是 Lebesgue 型积分.

M. M. Джрбашян ([10]) 指出：具有有界特征的亚纯函数理论可以作出重要的扩展. 事实上，可以引入依赖于一个连续参数 α 的一类函数族 N_α，$-1<\alpha<+\infty$，类 N_α 亦以相应的表示式为特征，该表示式当 $\alpha=0$ 时便得到(4)式. 当 α 增大时，类 N_α 变大，而 N_0 则与 Nevanlinna 族 N 相同.

对于解析函数 $f(z)\in N^*(D)$，在表示式(4)中须置 $B_2(z;b_\nu)\equiv 1$. 对于函数 $f(z)\in H^p$，$0<p\leqslant+\infty$，或 $f(z)\in H_\psi$，在表示式(4)中有 $B_2(z;b_\nu)\equiv 1$，且 $\Phi(\theta)$ 是所曾指出类型的非增函数. 亦见 **Cauchy 积分** (Cauchy integral).

关于唯一性问题的最早的结果是 F. 与 M. Riesz 兄弟在 1916 年得到的：若函数 $f(z)\in H^\infty$ 在 Γ 上的一个具有正值 Lebesgue 测度的集合 $E\subset\Gamma$ 上有径向边界值 $f(e^{i\theta})=0$，则在 D 内 $f(z)\equiv 0$. 表示式(4)使这一定理可以推广到具有有界特征的亚纯函数(见**有界型函数**

(function of bounded form)). Н. Н. Лузин(1919) 对任何零测度集 $E\subset\Gamma$ 构造出解析函数 $f(z)$, 使得当 z 以任意方式趋于 $e^{i\theta}$ 时在 E 上处处有 $f(e^{i\theta})=0$, 但 $f(z)$ 不恒等于零. 对于具有一般形式的亚纯函数的最深刻、最一般的边界唯一性定理是 Лузин 和 И. И. Привалов 在 1925 年得到的(见**解析函数的唯一性性质**(uniqueness properties of analytic functions); **Лузин - Привалов 定理**(Luzin - Privalov theorems)).

考虑任一平面区域 D 的情形, 为了简便, 只讨论具有可求长边界 Γ 的单连通区域 D. 条件(2), (3)和(2′)分别等价于要求次调和函数 $|f(z)|^p$, $\ln^+|f(z)|$ 和 $\psi(\ln|f(z)|)$ 在 D 内有**调和强函数**(harmonic majorant). 在这样一种形式下, 这些条件是十分适宜的, 并给任意区域中的族 H^p, N^* 和 H_ψ 提供了一种自然的定义. 已知可求长曲线 Γ 在其几乎所有的点都有确定的切线和法线. 结论(1)仍然成立, 对于族 N^* 关于角边界值在 Γ 上的几乎处处存在性的 Fatou 定理也同样成立. 此处, Γ 在点 $\zeta\in\Gamma$ 处的法线被作为角域 $\Delta(\zeta,\varepsilon)$ 的等分线. 对于类 N^*, Riesz 唯一性定理亦可移植过来.

对于任意区域 D 的情形, В. И. Смирнов 还引入了常常被引用的类 E^p(classes E^p), $p>0$. 这类函数的定义如下: $f(z)\in E^p(D)$, 如果存在一列围道 $\{\Gamma_j\}\subset D$, $\Gamma_j\to\Gamma$, 使得

$$\sup_{\{\Gamma_j\}}\int_{\Gamma_j}|f(z)|^p\,|dz| = C(f,p) < +\infty.$$

类 E^p 对于研究以 Cauchy 积分形式给出函数表示的问题尤为方便.

具有特别重要意义的是对于实现共形映射的解析函数的边界性质的研究. 设函数 $z=F(w)$ 是单位圆盘 $|w|<1$ 到 z 平面的具有可求长边界 Γ 的区域 D 的共形映射. 比如已证明在这种情况下导函数 $F'(w)$ 在圆盘 $|w|<1$ 内属于 Hardy 族 H^1, 因而可用形如式(4)表示之, 其中 $B_z\equiv1$ 而且奇异函数 $\Phi(\theta)$ 非增. Смирнов 曾指出奇异函数 $\Phi(\theta)\equiv0$ 的区域族 S 的重要性. 1937 年, М. В. Келдыш 与 М. А. Лаврентьев 构造出一个具有可求长边界而不属于刚提到的 Смирнов 的 S 族的区域例子. 这使得 Смирнов 型区域的描述显得更为重要.

许多数学工作者亦试图研究多变量 $z=(z_1,\cdots,z_n)$ 的解析函数 $f(z)$ 的边界性质. 设 $D=U^n=\{z\in\mathbf{C}^n:|z_j|<1, j=1,\cdots,n\}$ 是单位**多圆盘**(polydisc), 并设 $T^n=\{z\in\mathbf{C}^n:|z_j|=1, j=1,\cdots,n\}$ 是它的骨架. D 中解析函数 $f(z)$ 的类 $N^*(D)$ 由类似于(3)式的条件

$$\sup_{0<r<1}\int_{T^n}\ln^+|f(rz)|\,dm_n(z) = C(f) < +\infty$$

定义之, 而族 $H^p(D)$ 或 $H_\psi(D)$ 则由形如

$$\sup_{0<r<1}\psi^{-1}\left\{\int_{T^n}\psi(\ln|f(rz)|)\,dm_n(z)\right\} = C(f,\psi) < +\infty$$

的条件定义之(对于 $H^p(D)(p>0)$ 的情形 $\psi(t)=e^{pt}$). 其中 m_n 是 T^n 上的规范化 **Haar 测度**(Haar measure), $m_n(T^n)=1$. 形如 $B=H^\infty\subset H_\psi\subset N^*$ 的结论仍成立. 解析函数 $f(z)\in N^*(D)$ 在 T^n 上关于 Haar 测度 m_n 几乎处处有"径向"边界值 $f^*(z)=\lim_{r\to1-0}f(rz)$, $z\in T^n$; 且 $\ln^+|f^*(z)|$ 在 T^n 上关于 m_n 可和. 对于 U^n 中函数 $f(z)$ 的边界表示与唯一性性质, 当 $n>1$ 时(直到 1986 年)尚未找到足够简单而普遍的特征.

许多边界性质可应用于解析函数的各种推广, 特别是抽象解析函数 $f: D\to X$, 它取值于(比如说)域 $\mathbf{C}$ 上的一个可分的局部凸拓扑空间 X.

参考文献

[1] Голубев, В. В., Однозначные аналитические функции, Автоморфные функции, М., 1961.

[2] Голузин, Г, М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966 (中译本: Г. М. 戈鲁辛, 复变函数的几何理论, 科学出版社, 1956).

[3] Привалов, И. И., Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М. - Л., 1950 (中译本: И. И. 普里瓦洛夫, 解析函数的边界性质, 科学出版社, 1956).

[4] Хавинсон, С. Я., в сб.: Итоги. науки. Математический анализ, 1963, М., 1965, 5-80.

[5] Nevanlinna, R., Analytic functions, Springer, 1970 (译自德文).

[6] Noshiro, K., Cluster sets, Springer, 1960.

[7] Collingwood, E. F. and Lohwater, A. J., The theory of cluster sets, Cambridge Univ. Press, 1966.

[8] MacLane, G. R., Asymptotic values of holomorphic functions, Rice Univ. Studies, Math. Monographs, 49, Rice Univ., Houston, 1963.

[9] Ловатер, А., в сб. Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 10, М., 1973, 99-259.

[10] Джрбашян, М. М., Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., 1966.

[11] Rudin, W., Function theory in polydiscs, Benjamin, 1969.

[12] Хенкин, Г. М., Чирка, Е. М., в сб. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 4, М., 1975, 13-142.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 Сохоцкий 定理就像 Casorati - Weierstrass 定理(Casorati - Weierstrass theorem)那样著名. 在式(4)中右边的第一个积分称为外因子(outer factor), 而右边的其余因子组成内因子(inner factor); 后者的边界值的绝对值几乎处处为 1. 若式(4)中的外因子等于 1,

则称 f 为内函数 (inner function). 新近的通用参考文献是[A2],[A3].

对于 $\mathbf{C}^n(n \geq 2)$ 中的光滑区域 Ω, 关于 $H^p(\Omega)$ 和 $N^*(\Omega)$ 有一个强 Fatou 型定理: 只要边界在容许近接区域(admissible approach regions)上可达, 则边界值几乎处处存在(甚至比几乎处处更好), 见[A5], [A7]. 与一维的情形大不一样, 对于不同的 p 值, H^p 函数的零集可以有本质的区别, 见[11], [A5]. 光滑的强伪凸域 (strongly pseudo-convex domains)上的 Nevanlinna 族函数的零集的特征是由 Г. М. Хенкин 与 H. Skoda 分别独立得到的, 见 [A5]. А. Б. Александров 与 E. Low 各自独立证明关于 $\mathbf{C}^n$ 中单位球的非常数内函数的存在性, 见 [A1], [A4]. 另一方面, 对于 $\mathbf{R}^n$ 的上半空间已引入 H^p 空间, 见[A6].

参考文献

[A1] Aleksandrov, A. B., The existence of inner functions in the ball, *Math. USSR Sb.*, **46** (1983), 143–159.

[A2] Garnett, J., Bounded analytic functions, Academic Press, 1981.

[A3] Koosis, P., Introduction to Hp Spaces, Cambridge Univ. Press, 1980.

[A4] Løw, E., A construction of inner functions on the unit ball in $\mathbf{C}^n$, *Invent. Math.*, **67** (1982), 223–229.

[A5] Rudin, W., Function theory in the unit ball in $\mathbf{C}^n$, Springer, 1980.

[A6] Stein, E. M., Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton Univ. Press, 1970.

[A7] Stein, E. M., Boundary, behaviour of holomorphic functions of several complex variables, Princeton Univ. Press, 1972.

杨维奇 译

边值问题, 复变方法 [boundary value problem, complex-variable methods; краевая задача, методы комплексного переменного]

研究偏微分方程边值问题的方法,其中用复变解析函数表示.

设对二阶椭圆型方程

$$\Delta u + a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u = 0, \quad (1)$$

其中 a, b, c 是 $z = x + iy$ 平面上某一区域 D_0 中实变量 x, y 的解析函数, 考虑如下的边值问题: 求方程(1)的在单连通域 $S \subset D_0$ 中的正则解, 满足边界条件

$$R(u) \equiv \sum_{0 \leq j+k \leq m}\left[a_{jk}(t)\frac{\partial^{j+k}u}{\partial x^j \partial y^k} + T_{jk}\left(\frac{\partial^{j+k}u}{\partial x^j \partial y^k}\right)\right] = f(t), \quad (2)$$

其中 $a_{jk}(t), f(t) \in C_\alpha(\partial S)(0<\alpha<1)$, T_{jk} 是将 $C_\alpha(\partial S)$ 映射到 $C_\alpha(\partial S)$ 中的线性算子, 而且 $T_{m-k,k}$ 是全连续的.

这问题包含了熟知的 Dirichlet, Neumann, Poincaré 等经典边值问题.

利用解的一般表达式(见**偏微分方程, 复变方法** (differential equation, partial, complex-variable methods))的公式

$$u(x,y) = \mathrm{Re}\left\{G(z,\bar{z}_0,z,\bar{z})\Phi(z) - \int_{z_0}^{z}\Phi(t)\frac{\partial}{\partial t}G(t,\bar{z}_0,z,\bar{z})\,dt\right\},$$

这个问题化为等价的解析函数的边值问题:

$$\mathrm{Re}\sum_{k=0}^{m}[a_k(t)\Phi^{(k)}(t) + T_k(\Phi^{(k)})] = f(t), \quad (3)$$

其中 $a_k(t)$ 是给定的 Hölder 连续函数, $t \in \partial S$, T_m 是全连续算子, $T_k(k=0,1,\cdots,m-1)$ 是线性算子.

设有限单连通域 S 是由闭的 Ляпунов 周线(见 **Ляпунов 曲面和曲线** (Lyapunov surfaces and curves)) ∂S 围成的, 且设 S 中的全纯函数 $\Phi(z)$ 的 $m(\geq 0)$ 阶导数在 ∂S 上是 $\mathbf{C}_\alpha(0<\alpha<1)$ 类函数. 于是, 假定点 $z=0$ 属于 S, 函数 $\Phi(z)$ 可被表为

$$\Phi(z) = \int_{\partial S}\frac{t\mu(t)\,dt}{t-z} + ic, \text{ 若 } m=0;$$

$$\Phi(z) = \int_{\partial S}\mu(t)\left(1-\frac{z}{t}\right)^{m-1}\ln\left(1-\frac{z}{t}\right)dt + \int_{\partial S}\mu(t)\,dt + ic, \text{ 若 } m \geq 1,$$

其中 $\mu(t)$ 是 $\mathbf{C}_\alpha(\partial S)$ 类的实函数, $0<\alpha<1$, c 是实常数; $\mu(t)$ 和 c 由 $\Phi(z)$ 唯一确定.

将这些表达式代入边界条件(3), 就可以得到未知函数 μ 的等价于问题(2)的奇异积分方程

$$K(\mu) = A(t_0)\mu(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int_{\partial S}\frac{\mu(t)\,dt}{t-t_0} + T(\mu) = f(t_0),$$

其中 T 是全连续算子.

边值问题(2)正规可解的充要条件是

$$a(t) = \sum_{k=0}^{m} i^k a_{m-k}(t) \neq 0, \quad t \in \partial S, \quad m \geq 0. \quad (4)$$

Dirichlet 问题 $(m=0)$ 总是正规可解的. (下文处处假定条件(4)满足.)

边值问题(2)的指数(index)按公式

$$\kappa = 2(m+p), \quad m \geq 1$$

计算, 其中 p 是函数 $\frac{1}{2\pi}\arg\overline{a(t)}$ 正向绕围道 ∂S 一周的

增量. Dirichlet 问题的指数等于零.

齐次边值问题 $R(u)=0$ 具有有限 $k\geqslant 0$ 个线性无关解, $k\geqslant\kappa$; 而非齐次问题(2)有解, 当且仅当满足等式

$$\int_{\partial S} f(t)v_j(t)\,dS = 0,\ j=1,\ldots,\bar{k},$$

其中 v_j 是连带齐次积分方程

$$k'(v) = A(t_0)v(t_0)-\frac{1}{\pi i}\int_{\partial S}\frac{B(t)v(t)\,dt}{t-t_0}+T(v) = 0$$

的线性无关解的完全组.

边值问题(2)对任意右端有解的充要条件是对应的齐次问题 $R(u)=0$ 正好有 κ 个线性无关解. 因此, 在 $\kappa>0$ 的情形, 齐次边值问题 $R(u)=0$ 总有不少于 κ 个线性无关解, 而当 $\kappa<0$ 时非齐次问题(2)对任意右端不允许有解, 而且可解性条件的个数不少于 $|\kappa|$ 个.

非齐次边值问题可解性的充要条件可以用某个核关于所考虑域的封闭性的术语来表达, 也可用某个函数系的完全性来表达. 这些核和函数系可利用方程(1)的 Riemann 函数和边界条件的系数明显地构造出来. 例如, 设 $\{u_k\}$ 是方程(1)关于基本域 D_0 的解的某个完全组, 且设 $S\subset D_0$. 于是, 问题(2)对任意右端可解的充要条件是函数系 $\{R(u_k)\}$ 在边界上是完全的.

关于下列边值问题(**广义 Riemann - Hilbert 问题** (generalized Riemann - Hilbert problem))得到了十分完全的结果: 求方程

$$\partial_{\bar z}w+A(z)w+B(z)\bar{w} = f(z),\quad w=u+iv, \tag{5}$$

$$2\partial_{\bar z} = \partial_x - i\partial_y,$$

的在 $S+\partial S$ 上连续且满足边界条件

$$\mathrm{Re}[\overline{\lambda(z)}, w(z)] \equiv \alpha u+\beta v = \gamma,\quad z\in\partial S \tag{6}$$

的解, 其中 α,β,γ 是 $C_\alpha(\partial S)$ 类的实函数, $0<\alpha<1$, $\alpha^2+\beta^2=1$. 一般说来, 区域 S 是多连通的. 这样的问题可以化为对应的奇异积分方程. 用这个办法可以得到边值问题(6)的完全的定性分析.

设域 S 的边界 ∂S 由有限个满足 Ляпунов 条件的简单闭曲线 $\partial S_0,\cdots,\partial S_m$ 组成. 因为在共形映射下方程和边界条件的形状保持不变, 所以, 不失一般性, 可以认为 ∂S_0 是以 S 中一点 $z=0$ 为中心的单位圆周, 而 $\partial S_1,\cdots,\partial S_m$ 是在 ∂S_0 内部的一些圆.

问题(6)的指数定义为整数 n, 它是当点 ζ 正向绕 ∂S 一周时 $\frac{1}{2\pi}\arg[\alpha(\zeta)+i\beta(\zeta)]$ 的增量. 边界条件可以化为更简单的形式:

$$\mathrm{Re}[z^{-n}e^{ic(z)}w(z)] = \gamma,\quad z\in\partial S,$$

其中 $c(z)=c_j$ 在 ∂S_j 上, 这里 $c_0=0$, $c_1,\cdots,c_m$ 是某些实常数, 它们可由 α 和 β 单值地表达. 共轭问题

$$\left.\begin{aligned} &\partial_{\bar z}w_*-Aw_*-\bar{B}\bar{w}_* = 0, \qquad z\in S,\\ &\mathrm{Re}\left\{(\alpha+i\beta)\frac{dz}{ds}w_*(z)\right\} = 0,\ z\in\partial S \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

的指数按公式 $n=-n+m-1$ 计算.

问题(6)有解, 当且仅当

$$\int_{\partial S}(\alpha+i\beta)w_*\gamma\,ds = 0,$$

其中 w_* 是共轭问题的任一解.

设 e 和 e' 分别是齐次问题(6)和(7)的线性无关解的个数. 于是

$$e-e' = n-n' = 2n+1-m.$$

如果 $n<0$, 那么齐次问题(6)没有非平凡解. 如果 $n>m-1$, 那么齐次问题(6)恰有 $e=2n+1-m$ 个线性无关解, 而非齐次问题(6)总可解. 如果 $n<0$, 那么非齐次问题(6)有解, 当且仅当

$$\int_{\partial S}(\alpha+i\beta)w_{*j}\gamma\,ds = 0,\ j=1,2,\ldots;\ e'=m-2n-1,$$

其中 w_{*j} 是齐次问题(7)的完全解组. 如果 $m=0$ 和 $n=0$, 那么 $e=1$, 且齐次问题(6)的所有解具有形式

$$w(z) = ice^{\omega_0(z)},$$

其中 c 是实常数, ω_0 是在 $S+\partial S$ 上连续的函数.

上述结果完全表征了单连通($m=0$)和多连通($n<0$, $n>m-1$)情形的问题. $0\leqslant n\leqslant m-1$ 的情形需要特别考虑, 他们也已相当详细地解决了.

对方程(5)还研究了 **Poincaré 问题**(Poincaré problem)型的边值问题.

参考文献见**偏微分方程, 复变方法** (differential equation; partial, complex - variable methods).

И. Н. Векуа 撰

【补注】

参考文献

[A1] Vekua, I. N., Generalized analytic functions, *Pergamon*, 1962(译自俄文)(中译本: И. Н. 维库阿, 广义解析函数, 上、下册, 人民教育出版社, 1960).

[A2] Vekua, N. P., Systems of singular integral equations and some boundary value problems(俄文)(中译本: Н. П. 维库阿, 奇异积分方程组及某些边值问题, 上海科学技术出版社, 1963).

[A3] Vekua, I. N., New methods for solving elliptic equations, North - Holland, 1968(译自俄文)(中译本: И. Н. 维库阿, 椭圆型方程新解法, 上海科学技术出版社, 1963).

孙和生 译 陆柱家 校

椭圆型方程边值问题 [boundary value problem, elliptic equations; краевая задача для эллиптического уравнения]

求椭圆型方程

$$\sum_{i,k=0}^{n} a_{ik}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}+\sum_{i=0}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i}+cu=f \qquad (1)$$

在区域 D 中的正则解 u 的问题，使 u 在 D 的边界 Γ 上满足某些附加条件．这里 a_{ik}, b_i, c 和 f 都是 D 上的已知函数．

经典的边值问题是下述问题的特殊情形：求方程(1)的在 D 中正则的解，使其在边界 Γ 上满足条件

$$a\frac{du}{dl}+bu=g, \qquad (2)$$

其中 d/dl 表示沿某个方向取微分，a, b 和 g 是给定的 Γ 上的连续函数，且在 Γ 上处处有 $|a|+|b|>0$（见[1]）．

当 $a=0, b=1$ 时边值问题是 **Dirichlet 问题**(Dirichlet problem)；当 $b=0, a=1$ 时就得到斜导数问题（见**偏微分方程，斜导数问题**(differential equation; partial, problem of oblique derivatives)）；如果 l 是余法线方向，则就成为 **Neumann 问题**(Neumann problem)．如果 $\Gamma=\overline{\Gamma}_1\cup\overline{\Gamma}_2$，其中 Γ_1 和 Γ_2 是 Γ 的不相交的开子集，而 $\overline{\Gamma}_1\cap\overline{\Gamma}_2$ 或者是空的，或者是一个 $(n-2)$ 维流形，且在 Γ_1 上 $a=1, b=0$，在 Γ_2 上 $a=0, b=1$，那么就得到**混合问题**(mixed problem)．

问题(2)对两个自变量的椭圆型方程已研究过（见[2]）．对任意有限个自变量的椭圆型方程，Dirichlet 问题已十分完整地研究过（见[1]，[3]，[4]）；当在 Γ 的任一点上方向 l 都不包含在 Γ 的切平面上时，斜导数问题亦已十分完整地研究过．在此情形斜导数问题是 Fredholm 问题，且解和方向 l 的场及函数 g 有同阶的光滑性（见[1]）．当 l 在 Γ 的某些点上落在 Γ 的切平面上时这情形已研究过（见[3]）．斜导数问题的解的局部性质也已研究过（见[5]）．在 l 的方向场落在 Γ 的切平面上的那些点上，问题的解的光滑性要比 l 和 g 差．这是在广义框架下研究问题的基础（见[7]，[8]）．

考虑下列在单位球 $\Sigma\subset\mathbf{R}^3$ 中正则的调和函数的边值问题：

$$au_x+bu_y+cu_z=g;$$

令 K 是单位球面 S 上的点集，在其上函数 $\omega=ax+by+cz$ 为零．向量场 $P(a,b,c)$ 在 K 的点处落在 S 的切平面上．此外，假设 K 是有限个不相交曲线的并集，令 K^+ 是 K 的子集，它由这样一些点组成，在这些点上 $\operatorname{grad}\omega$ 与向量场 P 在 S 上的投影成锐角；令 K^- 是 K 的其余部分．问题的广义提法是在 K^+ 上给 u 值，而在 K^- 上解 u 允许有可积奇性．如果 K^- 是空集，则只要提高问题的附加数据的光滑性，就可以使得广义问题的解任意光滑．一般说来，混合问题的解在集合 $\Gamma_0=\overline{\Gamma}_1\cap\overline{\Gamma}_2$ 上有奇异性（见[1]）．为了消除 Γ_0 上这样的奇异性，就必须在问题的数据上附加条件（见[11]）．

边值问题的一大类型是由所谓的自由边界问题组成．在这类问题中不仅要求出方程(1)的解，而且要求出使解正则的域．域的边界 Γ 是未知的，但在它上面必须满足两个边界条件．这类问题的例子之一是理想流体的波动问题(problem of wave motions of an ideal fluid)：求一调和函数 u，它在某个域 D 中正则，域 D 的一部分边界 Γ_1 为已知，且在 Γ_1 上已给出法向导数 $\partial u/\partial n$；域 D 的另一部分边界 Γ_2 为未知，但在它上已给出两个边界条件：

$$\frac{\partial u}{\partial n}=0,\ \ u_x^2+u_y^2+u_z^2=q(x,y,z),$$

其中 $q>0$ 是已知函数．

对两个自变量的调和函数，可以利用共形映射（见[12]，[13]，[14]）．也见**偏微分方程，自由边界问题**(differential equation, partial, free boundaries)．

已研究过下列问题：求一调和函数 u，在域 D 中正则，且满足条件

$$|\operatorname{grad} u|^2=q,$$

其中 $q>0$ 是边界 Γ 上的已知函数．对两个自变量的调和函数，这个问题已完全解决（见[14]）．

给定方程 $Lu=f$，其中 L 是一个 $2m$ 阶的算子，在域 D 的闭包 $\overline{D}$ 中是一致椭圆型的，考虑求解 u 的问题，它在 D 中正则，且在 D 的边界 Γ 上满足条件

$$B_j u=\Phi_j,\ \ j=1,\ldots,m, \qquad (3)$$

其中 $B_j(x,D)(j=1,\cdots,m)$ 是满足下面互补性条件(complementarity condition)的微分算子．

令 $L'(x,\partial/\partial x_1,\cdots,\partial/\partial x_{n+1})$ 是 L 的主部，B_j' 是 B_j 的主部，n 是 Γ 在点 x 处的法线，$\lambda\neq0$ 是一平行于 Γ 的任意向量．令 $\tau_k^+(\lambda)$ 表示 $L'(x,\lambda+\tau n)$ 的具有正虚部的根．多项式 $B_j'(x,\lambda+\tau n)$ 组 $(j=1,\cdots,m)$ 作为 τ 的函数，以多项式 $\prod_{k=1}^{m}(\tau-\tau_k^+(\lambda))$ 为模必须是线性无关的．正是在此情形，问题是正规可解的．不满足互补性条件可以引起问题性质的本质变化（见[17]）．

问题(2)是问题(3)的特殊情形．对问题(2)，当 $a\equiv1$ 时互补性条件等价于这样的条件：在域的边界上不存在这样的点，使得方向 l 在此点落在边界的切平面上．

问题(3)的另一特殊情形是边值问题

$$\frac{\partial^j u}{\partial n^j}=\Phi_j,\ \ j=0,\ldots,m-1,$$

在某种程度上，它类似于高阶椭圆型方程的 Dirichlet 问题．

当域的边界由不同维数的流形组成时，重调和方程 $\Delta^k u=0$ 的边值问题已研究过（见[15]）．

在非线性方程的边值问题（例如，Dirichlet 问题和

Neumann 问题)的研究中,起重要作用的是(1)的解的先验估计、各种不动点原理(见[17],[18])以及 Morse 理论对无穷维情形的推广(见[19]).

参考文献

[1] Miranda, C., Partial differential equations of elliptic type, Springer, 1970(译自意大利文).

[2] Векуа, И. Н., Обобщенные аналитические функции, М., 1959(英译本: Vekua, I. N., Generalized analytic functions, Pergamon, 1962. 中译本: И. Н. 维库阿, 广义解析函数, 上、下册, 人民教育出版社, 1960)

[3] Бицадзе, А. В., Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М., 1966(英译本: Bitsadze, A. V., Boundary value problems for second-order elliptic equations, North-Holland, 1968).

[4] Келдыш, М. В., 《Успехи матем. наук》, 1941, В. 8, 171-231.

[5] Hörmander, L. Pseudo-differential operators and nonelliptic boundary value problems, *Ann. of Math.*, **83** (1966), 1, 129-209.

[6] Borrelli, R. L., The singular, second order oblique derivative problem, *J. Math. and Mech.*, **16** (1966), 1, 51-81.

[7] Егоров, Ю. В., Кондратьев, В. А., 《Матем. сб.》, 78 (1969), 1, 148-176.

[8] Мазья, В. Г., 《Матем. сб.》, **87** (1972), 3, 417-453.

[9] Янушаускас, А., 《Докл. АН СССР》, **164** (1965), 4, 753-755.

[10] Вишик, М. И., Эскин, Г. И., 《Сиб. матем. ж.》, **9** (1968), 5, 973-997.

[11] Giraud, G., *Ann. Soc. Polon de Math.*, *année* 1933, Kraków, **12** (1934), 35-54.

[12] Лаврентьев, М. А., Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа, М., 1962.

[13] Некрасов, А. И., Точная теория волн установившегося вида на поверхности тяжелой жидкости, в кн.: Собр. соч., т. 1, М., 1961.

[14] Гахов, Ф. Д., Краевые задачи, 2 изд., М., 1963(英译本: Gakhov, F. D., Boundary value problem, Pergamon, 1966).

[15] Соболев, С. Л., 《Матем. сб.》, **2** (1937), 3, 465-499.

[16] Agmon, S., Douglis, A. and Nirenberg, L., Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions I, II, *Comm. Pure Appl. Math*, **12** (1959), 623-727; **17** (1964), 35-92.

[17] Schauder, J., *Math. Z.*, **33** (1931), 602-640.

[18] Leray, J. and Schauder, J., *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, Ser. 3, **51** (1934), 45-78.

[19] Palais, R. S., Morse theory on Hilbert manifolds, *Topology*, **2** (1963), 4, 299-340.

А. И. Янушаускас 撰

【补注】

参考文献

[A1] Courant, R. and Hilbert, D., Methods of mathematical physics, Partial differential equations, 2, Interscience, 1965(译自德文)(中译本: R. 柯朗, D. 希尔伯特, 数学物理方法Ⅱ, 科学出版社, 1977.)

[A2] Garabedian, P. R., Partial differential equations, Wiley, 1964.

[A3] Friedman, A., Partial differential equations, Holt, Rinehart and Winston, 1969.

孙和生 译 陆柱家 校

边值问题,偏微分方程数值解法 [boundary value problem, numerical methods for partial differential equations; краевая задача, численные методы решения для уравнений с частными производными]

近似解法,所得问题的解用数值表表示.边值问题的(用显式公式、级数等等表达的)精确解仅在极少情形可以建立.在近似解法中应用最广泛的是差分方法(见[1]);它们可应用于最一般的问题且在电子计算机上实现很方便.差分方法的本质在于将自变量变化的原来区域用离散的点集——网格来代替,而在方程和边界条件中出现的导数用在此网格点上的差商来代替.由此原问题就化为有限个(线性的或非线性的)代数方程的组,称之为差分格式.差分格式的解就取作原问题的近似解,近似解的精确度依赖于逼近方法和网格的精细,即依赖于网格点充满原来的区域的稠密程度.下面将只考虑偏微分方程的线性边值问题,而且原问题假定是适定的.为了证明差分方法是正确的,就得研究差分问题的适定性和当网格缩小时它的收敛性.差分问题称作适定的(well-posed),如果对任意的右端它的解都存在、唯一且稳定.差分格式的稳定性理解为它的解连续地依赖于右端,且关于网格步长是一致的.

例如,在具有边界 Γ 的正方域 $G=\{0<x_1,x_2<1\}$ 中对 Poisson 方程求解 Dirichlet 问题:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = -f(x_1,x_2),\quad (x_1,x_2)\in G,$$

$$u(x_1,x_2) = \mu(x_1,x_2),\quad (x_1,x_2)\in\Gamma.$$

代替区域 G 的是具有步长为 h 的正方形网格 G_h,即点集

$$G_h = \{(x_1^{(i)},x_2^{(j)}):\ x_1^{(i)}=ih,\ x_2^{(j)}=jh;\ i,j=1,\dots,N-1\},\quad hN=1,$$

它具有边界

$$\Gamma_h = \bigcup_{i,j=1}^{N-1}\{(0,x_2^{(j)})\cup(1,x_2^{(j)})\cup(x_1^{(i)},0)\cup(x_1^{(i)},1)\}.$$

而代替方程中出现的导数是差商

$$(\Lambda_1 u)_{i,j} = u_{\bar{x}_1 x_1, i,j} = \frac{(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j})}{h^2},$$

$$(\Lambda_2 u)_{i,j} = u_{\bar{x}_2 x_2, i,j} = \frac{(u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1})}{h^2},$$

其中 $u_{i,j}=u(x_1^{(i)}, x_2^{(j)})$. 差分格式有形式

$$(\Lambda_h y)_{i,j} = y_{\bar{x}_1 x_1, i,j} + y_{\bar{x}_2 x_2, i,j} = -f_{i,j}, \qquad (1)$$

$$i, j = 1, \ldots, N-1; \quad y_{i,j}\Big|_{\Gamma_h} = \mu_{i,j},$$

其中 $y_{i,j}$是它的解.

问题(1)的解对任意的右端f和任意的边界条件μ存在且唯一(见[2]). 又,差分问题(1)的解当$h \to 0$时收敛于原问题的解,而且格式在C范数中有二阶精确度,即

$$\max_{(x_1,x_2)\in G_h} |y(x_1, x_2) - u(x_1, x_2)| \leqslant Mh^2,$$

其中M是不依赖于h的常数.

差分格式(1)是线性代数方程组,它的特点是有大量的方程(确切地说,是$(N-1)^2$个方程,且当$h \to 0$时$N \to \infty$),而且该方程组的矩阵中有大量的零,另外,它是病态的(最小特征值与最大特征值之比当$h \to 0$时是h^2阶的量). 为了解由差分方程逼近微分方程所产生的这一类方程组,有有效的直接法和迭代法. 直接法经过完成有限步算术运算之后给出差分问题的精确解. 在直接法中包含有各种不同变型的追赶法,包括矩阵追赶法,分解法,快速Fourier变换,用和表示的方法等(见[1],[2],[3],[6]). 直接法的有效性是以当$h \to 0$时运算次数的阶来估价的. 这样,用矩阵追赶法解问题(1)要求$O(h^{-4})$阶运算次数,而解同一问题用快速Fourier变换则要求$O(h^{-2}\ln h^{-1})$次运算. 解差分问题的迭代方法常用的有具有Чебышев参数选取的Richardson方法,交替三角迭代法,各种交替方向法等(见[2]). 迭代方法的有效性是用最小迭代次数$n_0(\varepsilon)$的阶来估价的,而最小迭代次数是为了将初始逼近误差缩小$1/\varepsilon$倍所必须的. 例如,在用Richardson方法解问题(1)对量$n_0(\varepsilon)$有阶$h^{-1}\ln\frac{1}{\varepsilon}$,而用具有最佳迭代参数选择的交替方向法解时$n_0(\varepsilon)=O(\ln h^{-1}\ln\frac{1}{\varepsilon})$. 迭代方法比直接法更适用,更简单,因此在解差分问题时更广泛地被使用.

例如,对热传导方程求解第一边值问题:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, && t>0, \ (x_1, x_2)\in G \\ &u(x_1, x_2, 0) = u_0(x_1, x_2); && \\ &u(x_1, x_2, t) = 0 && (x_1, x_2)\in\Gamma. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

为了解这个问题,给出具有时间步长为$\tau>0$的网格

$$\omega_\tau = \{t_n = n\tau: n = 0, 1, \ldots\}$$

和空间变量的网格G_h. 设$u_{i,j}^n = u(x_1^{(i)}, x_2^{(j)}, t_n)$. 导数$u_t'$用下面的关系式逼近:

$$u_{t,i,j} = \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\tau}.$$

而Laplace算子用差分算子Δ_h逼近. 原来的方程(2)成为对应的差分格式:

$$\left.\begin{aligned} &y_{t,i,j} = \sigma(\Delta_h y)_{i,j}^{n+1} + (1-\sigma)(\Delta_h y)_{i,j}^n; \\ &y_{i,j}^0 = u_0(x_1^{(i)}, x_2^{(j)}), \quad i, j = 1, \ldots, N-1; \\ &y_{i,j}^n\Big|_{\Gamma_h\times\omega_\tau} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

方程中的参数σ决定着格式的稳定性和精确度. 如果$\sigma\geqslant 0.5$,那么格式(3)对任意的网格步长τ和h是稳定的(绝对稳定的差分格式). 如果$\sigma<0.5$,那么格式(3)在量$\gamma=\tau/h_2$的某一限制下是稳定的(条件稳定的差分格式); 例如,显式格式($\sigma=0$)当$\gamma\leqslant 1/4$时是稳定的. 当$\sigma=0.5$时格式关于τ和h有二阶精确度,对其余的σ则关于τ有一阶精确度,关于h有二阶精确度. 差分问题(3)"分层"来解. 第n层是对某个固定的n,网格$G_h\times\omega_\tau$的所有点的集合. 第零层(当$n=0$时)的值$y_{i,j}^0$由初始条件给出. 如果已知某一n层的值$y_{i,j}^n$,那么下一层的$y_{i,j}=y_{i,j}^{n+1}$的值由下列方程组求出:

$$\left.\begin{aligned} &y_{i,j} - \sigma\tau(\Delta_h y)_{i,j} = f_{i,j}^n, \quad i, j = 1, \ldots, N-1, \\ &y_{i,j}\Big|_{\Gamma_h} = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

其中

$$f_{i,j}^n = y_{i,j}^n + (1-\sigma)\tau(\Delta_h y)_{i,j}^n.$$

为了求问题(4)的解,可以利用定常问题(1)的解法中的任一个. 然而,存在解多维非定常边值问题的更经济的算法,即交替方向法(见[1]-[5]),它把解多维问题化为解一系列的一维问题. 因此,为了解热传导方程,可以利用下面的交替方向格式:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{y_{i,j}^{n+1/2} - y_{i,j}^n}{0.5\tau} = \Lambda_1 y_{i,j}^{n+1/2} + \Lambda_2 y_{i,j}^n, \\ &\frac{y_{i,j}^{n+1} - y_{i,j}^{n+1/2}}{0.5\tau} = \Lambda_1 y_{i,j}^{n+1/2} + \Lambda_2 y_{i,j}^{n+1}. \end{aligned}\right\}$$

这个格式绝对稳定,有二阶精确度,并通过一系列的一维差分算子的反演来解.

差分问题的解,即使如果它是精确求得的,也可以不仅在定量上而且在定性上与原微分方程问题的解不

一样．这个差别，在处理系数或解本身具有奇性的方程时，显得特别突出(因此，在计算气体动力学方程组的间断解时通常出现间断的强“溢出”区)．这样，当用具有很大程度任意性的差商代替导数时，用差分直接逼近微分问题并不总是可以导出好的差分格式．为了建立具有良好性质的差分格式，发展了各种不同的原理．在有成效的方法中有平衡法和变分泛函逼近法(见[1]－[3])．由这些方法所得到的差分格式正确地反映了积分守恒法则，这些法则对原方程是成立的，并保证对应的差分算子定号．在齐次差分格式理论(见[7])中对具有变系数(包括间断系数)的方程考虑了建立和研究差分格式收敛性的问题．

参考文献

[1] Тихонов, А. Н., Самарский, А. А., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1977.

[2] Самарский, А. А., Теория разностных схем, М., 1977.

[3] Марчук, Г. И., Методы вычислительной математики, М., 1977.

[4] Яненко, Н. Н., Методы дробных шагов решения многомерных задач математической физики, Новосиб., 1967.

[5] Дьяконов, Е. Г., Разностные методы решения краевых задач, В. 1－2, М., 1971－1972.

[6] Положий, Г. Н., Численное решение двумерных и трехмерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента, Киев, 1962.

[7] Тихонов, А. Н., Самарский, А. А., «Ж. вычислит. матем. и матем. физ.», 1 (1961), 1, 5－53

А. В. Гулин 撰

【补注】 在西方文献中边值问题如果包含有时间变量(例如本节问题(2))，则常称为初边值问题(initial-boundary value problems)．关于偏微分方程数值解的文献多得不可胜数，下面只列举少数几本好的教科书．参考文献[A5]和[A8]仅讨论初边值问题．

参考文献

[A1] Forsythe, G. E. and Wasow, W. R., Finite difference methods for partial differential equations, Wiley, 1960(中译本：G. E. 福雪斯，W. R. 华沙，偏微分方程的有限差分方法，上海科学技术出版社，1964)．

[A2] Garabedian, P. R., Partial differential equations, Wiley, 1964.

[A3] Gladwell, I. and Wait, R.(eds.), A survey of numerical methods for partial differential equations, Clarendon Press, 1979.

[A4] Mitchell, A. R. and Griffiths, W. F., The finite difference method in partial differential equations, Wiley, 1980.

[A5] Richtmyer, R. D. and Morton, K. W., Difference methods for initial value problems, Wiley, 2nd ed., 1967 (中译本：R. D. Richtmyer, K. W. Morton，初值问题的差分方法，中山大学出版社，1992)．

[A6] Samarskil, A. A., Theorie der Differenzverfahren, Akad. Verlagsgesellsch. Geest u. Portig K.-G., Leipzig, 1984.

[A7] Smith, G. D., Numerical solution of partial differential equations, Oxford Univ. Press, 1977.

[A8] Yanenko, N. N., The method of fractional steps; the solution of problems of mathematical physics in several variables, Springer, 1971(译自俄文)．

孙和生 译　陆柱家 校

常微分方程边值问题 [**boundary value problem, ordinary differential equations; краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения**]

求方程

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad t\in J, \quad x\in \mathbf{R}^n \tag{1}$$

的解的问题，这个方程定义在依赖于 t 的函数空间 $D(J, \mathbf{R}^n)$ 的一个给定的子集 D 中，这些函数在 J 上绝对连续，在 $\mathbf{R}^n$ 中取值：

$$x(\cdot) \in D. \tag{2}$$

假定 $f(t,x)$ 是一个定义在 $J\times\mathbf{R}^n$ 上，在 $\mathbf{R}^n$ 中取值并满足 Carathéodory 条件的函数；J 是实线 $\mathbf{R}$ 上的一个区间．

1) 边值问题(1)，(2)是线性的(linear)，如果

$$f(t, x) \equiv A(t)x + b(t),$$

其中函数 $A(t)$ 和 $b(t)$ 是在 J 的每一个紧区间上可求和的，集合 D 是 $D(J, \mathbf{R}^n)$ 中的一个线性流形．特别地，可以有

$$J = [t_0, t_1],$$

$$D = \left\{ x(\cdot) \in D(J, \mathbf{R}^n): \int_{t_0}^{t_1} [d\Phi(t)]x(t) = 0 \right\},$$

其中 $\Phi(t)$ 是一个有界变差函数．线性边值问题产生一个线性算子

$$Lx(t) \equiv x' - A(t)x, \quad x(\cdot)\in D,$$

其本征值就是具有非平凡解的齐次边值问题(homogeneous boundary value problem)

$$x' - A(t)x = \lambda x, \quad x(\cdot)\in D$$

中参数 λ 的值．这些非平凡解是算子 L 的本征函数．如果逆算子 L^{-1} 存在，并有一个积分表达式

$$x(t) = L^{-1}b(t) \equiv \int_J G(t, s)b(s)\,ds, \quad t\in J,$$

那么 $G(t, x)$ 就称为 Green 函数(Green function)．

2) 令 $J=(-\infty, \infty)$, 设 $f(t,x)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 的每一紧子集上关于 x 一致地对 t 是殆周期的，并设 D 为在 J 上绝对连续的，关于 t 是殆周期函数的集合．那么问题(1)，(2)称为殆周期解的问题(problem of almost-periodic solutions)．

3) 在控制论中，考虑带有一个函数参数的边值问题：一个控制问题．例如，考虑方程

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x,u),\quad t\in J=[t_0,t_1],\quad x\in\mathbf{R}^n, \tag{3}$$

它具有容许控制集合 U 和两个集合 $M_0, M_1\subset\mathbf{R}^n$. 设 D 为关于 t 的绝对连续函数的集合，且有 $x(t_0)\in M_0$, $x(t_1)\in M_1$. 边值问题就是求一对 $(x_0(\cdot),\ u_0(\cdot))$，使得 $u_0(\cdot)\in U$, 且在 $u=u_0(t)$ 处方程(3)的解 $x_0(t)$ 满足条件 $x_0(\cdot)\in D$．

4) 对不同边值问题解的存在和唯一性有多种必要和充分条件，以及有许多构成一个近似解的方法(见[4]－[7])．例如，考虑问题

$$\left.\begin{aligned} &x'=A(t)x+f(t,x),\\ &\int_{t_0}^{t_1}[d\Phi(t)]x(t)=0,\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

其中

$$\|f(t,x)\|\leqslant a+b\|x\|^{\alpha}$$

对某些常数 $a>0, b>0, \alpha\geqslant 0$ 成立．假定齐次问题

$$x'=A(t)x,\quad \int_{t_0}^{t_1}[d\Phi(t)]x(t)=0 \tag{5}$$

是正则的(regular)，即它的唯一解是平凡解，如果 $\alpha<1$, 或 $\alpha\geqslant 1$ 而 b 足够小，那么问题(4)至少有一个解．确定问题(5)是否是正则的是相当复杂的．但是，例如线性(纯量)边值问题

$$x''+q(t)x'+p(t)x=0,\quad x(t_0)=0,\quad x(t_1)=0$$

是正则的，如果当 $|q(t)|\leqslant 2m$ 时，存在一个 $k\in\mathbf{R}$, 使得

$$\int_{t_0}^{t_1}\{p(t)-k\}_+\,dt<2[F(k,m)-m],$$

其中

$$F(k,m)=\begin{cases}\sqrt{k-m^2}\operatorname{cotg}\dfrac{(t_1-t_0)\sqrt{k-m^2}}{2}, & m^2<k\leqslant m^2+\dfrac{\pi^2}{(t_1-t_0)^2},\\[2ex] \dfrac{2}{t_1-t_0}, & k=m^2,\\[2ex] \sqrt{m^2-k}\operatorname{cotg}\dfrac{(t_1-t_0)\sqrt{m^2-k}}{2}, & k<m^2\end{cases}$$

参考文献

[1] Hartman, P., Ordinary differential equations, Birkhäuser, 1982.

[2] Красносельский, М. А., Бурд, В. Ш., Колесов, Ю. С., Нелинейные почти периодические колебания, М., 1970 (英译本: Krasnosel'skii, M. A., Burd, V. Sh. and Kolesov, Yu. S., Nonlinear almost-periodic oscillations, Wiley, 1973).

[3] Понтрягин, Л. С., [и др.], Математическая теория оптимальных процессов, 3 изд., М., 1976 (英译本: Pontryagin, L. S., et. al., The mathematical theory of optimal processes, Interscience, 1962).

[4] Красовский, Н. Н., Теория управления движением. Линейные системы, М., 1968

[5] Зубов, В. И., Лекции по теории управления, М., 1975.

[6] Kamke, E., Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen, 1, Chelsea, reprint, 1971 (中译本: E. 卡姆克, 常微分方程手册, 科学出版社, 1977).

[7] Кигурадзе, И. Т., Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений, Тб., 1975.

Ю. В. Комленко, Е. Л. Тонков 撰

【补注】

参考文献

[A1] Braun, M., Differential equations and their applications, Springer, 1975.

[A2] Ince, E. L., Ordinary differential equations, Dover, reprint, 1956.

[A3] Jackson, L. K., Boundary value problems for ordinary differential equations, in J. K. Hale (ed.): Studies in ordinary differential equations, Math. Assoc. Amer., 1977, 93－127.

周芝英 译

偏微分方程边值问题 [boundary value problem, partial differential equations; краевая задача для уравнения с частными производными]

在变量 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 的域 D 中确定方程

$$(Lu)(x)=f(x),\quad x\in D, \tag{1}$$

的解 $u(x)$ 的问题，解在这域的边界 S (或它的部分边界)上满足某个边界条件(boundary conditions)

$$(Bu)(y)=\varphi(y),\quad y\in S. \tag{2}$$

通常，边界条件与解及其到某一阶的导数的边界值有关，即 B 是微分算子．然而也还出现其他类型的边界条件．

对已给的一个微分方程应该研究的是哪一类具体的边值问题，通常用适定性的概念来确定．也就是说，一个边值问题是适定的，如果它是可解的，解是唯一

的,且解连续地依赖于问题的数据. 不同类型的微分方程要求不同的适定边值问题;反之,适定边值问题有时可以作为微分方程分类的基础.

边值问题称为线性的(linear),如果算子 L 和 B 都是线性的;称为齐次的(homogeneous),如果(1),(2)中的 f 和 φ 都等于零. 线性边值问题称为 Noether 型的(Noetherian),如果 a) 齐次问题有有限数 k 个线性无关解; b) 非齐次问题可解,当且仅当 f 和 φ 满足 l 个线性无关的正交性条件; c) 在问题是唯一可解的条件下,解连续地依赖于 f 和 φ.

如果 $k=l$,那么问题称作 Fredholm 问题(Fredholm problem). 差 $k-l$ 定义了问题的指数(index).

二阶线性偏微分方程

$$Lu = \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=0}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x) \qquad (3)$$

的广泛的一类边值问题是 Poincaré 问题(Poincaré problem). 在这类问题中边界条件给在整个边界 L,这个边界假定为 $(n-1)$ 维流形,而(2)中边界算子 B 则有形式

$$(Bu)(y) = \sum_{i=1}^{n} p_i(y)\frac{\partial u}{\partial x_i} + p(y)u = \varphi(y), \quad y \in S. \qquad (4)$$

在算子 L 是一致椭圆型的情形,在具有充分光滑边界的有界域 D 中的 Poincaré 问题已详细研究过.

假设(3)、(4)中算子 L 和 B 的系数充分光滑,且 D 的边界充分光滑,于是当 $n=2$, $\sum p_i^2>0$ 时 Poincaré 问题是 Noether 型的;当 $n>2, \sum p_i^2>0$,且向量 $\bar{p}=(p_1,\cdots,p_n)$ 不切于 S 时是 Fredholm 型的. 二维情形的 Poincaré 问题的研究广泛应用了复变函数理论方法(见**边值问题,复变方法**(boundary value problem, complex-variable methods)).

一般的 $2m$ 阶椭圆型方程

$$Lu = \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} a_\alpha(x)\frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x^\alpha} = f(x), \quad x \in D \qquad (5)$$

的边界条件可以用系数定义在 D 的边界 S 上的 $m_j<2m$ 阶的线性微分算子

$$B_j u = \sum_{|\alpha| \leqslant m_j} b_{j\alpha}(y)\frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x^\alpha} = \varphi_j(y), \quad y \in S, \quad 1 \leqslant j \leqslant m \qquad (6)$$

给出. 这里 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, α_j 是非负整数, $|\alpha|=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$,以及

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

如果算子 L 和 B_j 满足所谓的互补性条件,那么满足边界条件的函数 u 的 $2m$ 阶导数(的适当范数)可以用(5)中 f 的范数和(6)中诸边界函数 φ_j 的适当范数来估计. 这类边值问题称作强制的.

其他类型的边值问题有**混合问题**(mixed problem),即在邻接的边界部分上给出不同的边界条件.

$\bar{D}$ 上一致椭圆型的微分方程的边值问题的特点是边界条件给出在整个边界上. 如果(3)中算子 L 在区域内部是椭圆型的,在部分边界 $S_0 \subseteq S$ 上是抛物地退化的,那么,依赖于退化的类型,部分边界 S_0 可以从边界条件给值中排除. 也见**椭圆型方程边值问题**(boundary value problem, elliptic equations).

如果方程(3)不是椭圆型的,那么边界的一部分通常可以从边界条件的给值中排除. 例如,对最简单的抛物型方程 —— 热传导方程

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

在由直线 $x=\pm1$, $t=\pm1$ 所围的区域 D 中的 Dirichlet 问题相当于 u 的边界值给出在区间 $\{t=-1, -1 \leqslant x \leqslant \pm1\}$ 和 $\{x=\pm1, -1 \leqslant t \leqslant 1\}$ 上.

椭圆-双曲混合型的边值问题是用特殊形式来表示的.

边值问题在解析函数理论中占有重要的位置. 令 S 是平面上一逐段光滑曲线,即有限个简单定向弧的并集. 线性共轭问题(linear conjugation problem)是确定一函数 $\varphi(z)$,在 S 外部解析,从 S 的两边得到的极限值为 $\varphi^{\pm}(t)$ $(t \in S)$,且满足边界条件

$$\varphi^+(t) - G(t)\varphi^-(t) = g(t), \quad t \in S,$$

其中 $G(t)$ 和 $g(t)$ 是已知函数. 可以在关于函数 G, g 和曲线 S 的某些假定下,利用 Cauchy 型积分表示的解析函数,将这问题的解表示成显式. 见**解析函数论的边值问题**(boundary value problem of analytic function theory).

研究边值问题可以用各种方法. **Schwarz 交替法**(Schwarz alternating method),与其相关的 Poincaré **扫除法**(balayage method)和 **Perron 法**(Perron method)都基于最大值原理的应用. 利用积分方程的解法是基于解的各种积分表示. 利用先验估计研究边值问题属于泛函方法. 分布理论被广泛应用. 在实际应用中广泛应用各种有限差分方法.

参考文献

[1] Bers, L., John, F. and Schechter, M., Partial differential equations, Interscience, 1964.

[2] Бицадзе, А. В., Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М., 1966 (英译本: Bitsadze, A. V., Boundary value problems for second-order elliptic equations, North-Holland, 1968).

[3] Courant, R. and Hilbert, D., Methods of mathematical physics, Partial differential equations, 2, Interscience, 1965 (译自德文) (中译本: R. 柯朗、D. 希尔伯特, 数学物理方法 II, 科学出版社, 1977).

[4] Ладыженская, О. А., Краевые задачи математической физики, М., 1973 (英译本: Ladyzhenskaya, O. A., Boundary value problems of mathematical physics, Springer-Verlag, 1985).

[5] Miranda, C., Partial differential equations of elliptic type, Springer, 1970 (译自意大利文).

[6] Мусхелишвили, Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, 3 изд. М., 1968 (中译本: Н. И. 穆斯海里什维里, 奇异积分方程, 第二版, 上海科学技术出版社, 1966).

[7] Тихонов, А. Н., Самарский, А. А., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1972.

А. П. Солдатов 撰

【补注】 下面给出一些有用的补充参考文献.

参考文献

[A1] Courant, R. and Hilbert, D., Methods of mathematical physics, 1-2, Interscience, 1953-1962 (译自德文) (中译本: R. 柯朗, D. 希尔伯特, 数学物理方法 I-II, 科学出版社, 1977).

[A2] Friedman, A., Partial differential equations, Holt, 1969.

[A3] Garabedian, P. R., Partial differential equations, Wiley, 1964.

[A4] Hörmander, L., Linear partial differential operators, Springer, 1963 (中译本: L. 霍曼德尔, 线性偏微分算子, 科学出版社, 1980).

[A5] Ladyzhenskaya, O. A. and Uraltseva, N. N., Linear and quasilinear elliptic equations, Acad. Press, 1968 (中译本: O. A. 拉迪任斯卡娅, H. H. 乌拉利采娃, 线性和拟线性椭圆型方程, 科学出版社, 1987).

[A6] Lions, J. L. and Magenes, E., Non-homogeneous boundary value problems and applications, 1-3, Springer, 1972 (译自法文) (中译本: J. L. Lions, E. Magenes, 非齐次边值问题及其应用, 第一卷, 高等教育出版社, 1987).

[A7] Protter, M. H and Weinberger, H. F., Maximum principles in differential equations, Prentice-Hall, 1967 (中译本: M. H. 普劳特, H. F. 温伯格, 微分方程的最大值原理, 科学出版社, 1985).

[A8] Forsythe, G. E. and Wasow, W. R., Finite-difference methods for partial differential equations, Wiley, 1960 (中译本: G. E. 福雪斯, W. R. 华沙, 偏微分方程的有限差分方法, 上海科学技术出版社, 1964).

孙和生 译 陆柱家 校

位势论中的边值问题 [boundary value problems in potential theory; краевая задача теории потенциала]

经典和抽象的**位势论** (potential theory) 中的基本问题. 经典 Newton 位势和对数位势满足某些椭圆型偏微分方程: 在与产生位势的物质无关的域中是 **Laplace 方程** (Laplace equation), 在物质所占有的域中是 **Poisson 方程** (Poisson equation). 因此导出, 位势论的边值问题根本上是椭圆型方程和椭圆组的边值问题 (见**椭圆型方程边值问题** (boundary value problem, elliptic equations)).

1) **Dirichlet 问题** (Dirichlet problem), 或第一边值问题 (first boundary value problem). 这里的问题是在某个域 D 中求位势 $u(x)$, 在域的边界 $\partial D=\Gamma$ 上已给出它的连续限制 $u(x)=f(x), x\in\Gamma$, 且假定在 D 内部物质的分布是已知的. 这是位势论中的基本问题.

2) **Neumann 问题** (Neumann problem), 或第二边值问题 (second boundary value problem). 这里的问题是在 D 中求位势, 而在 Γ 上已给出位势的法向导数的连续限制

$$\frac{\partial u(x)}{\partial n}=\varphi(x).$$

3) **混合问题** (mixed problem), 或第三边值问题 (third boundary value problem). 这里, 在 Γ 上的已知数据构成一线性组合

$$\frac{\partial u(x)}{\partial n}+\alpha(x)u(x)=\varphi(x),\quad x\in\Gamma. \qquad (*)$$

4) **斜导数** (oblique derivative) 问题是将条件 (*) 中的法导数 $\partial u(x)/\partial n$ 换为关于任意方向 $l=l(x)(x\in\Gamma)$ 的导数 $\partial u(x)/\partial l$.

除这些一般问题外, 下列特殊问题也出现在位势论中.

5) **Robin 问题** (Robin problem). 这里, 当在 D 的内部具有常位势时要求出 Γ 上的质量分布. 这个问题出现在静电学中, 在导体 Γ 上要决定对 D 内部任何处都不发生效应的平衡的电荷分布.

6) **扫除法** (balayage method). 它的最简单的提法可回溯到 H. Poincaré, 它相当于求 Γ 上一个"扫出的"质量分布, 它在余域 $C\bar{D}$ 中的位势与 D 内部已给质量分布的位势相等.

最后两个问题在**抽象位势论** (potential theory, abstract) 中特别重要, 亦见 **Bessel 位势** (Bessel potential); **非线性位势** (non-linear potential); **Riesz 位势** (Riesz potential).

参考文献

[1] Günter, N. M., Potential theory and its applications to basic problems of mathematical physics, F. Ungar, New-York, 1967 (译自法文).

[2] Ландкоф, Н. С., Основы современной теории потенциала, М., 1966.

[3] Brélot, M., Eléments de la théorie classique du potential, Sorbonne Univ. Centre Doc. Univ., Paris, 1959.

[4] Constantinescu, C. and Cornea, A., Potential theory on harmonic spaces, Springer, 1972.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 [A1], [A2], [A3] 是熟知的补充参考文献. 抛

物型方程的边值问题可以如同位势论中那样同样考虑,见 [A3]. 边值问题和 Markov 过程理论之间的联系在 [A3] 中考虑.

参考文献

[A1] Kellogg, O. D., Foundations of potential theory, F. Ungar, 1929. Re-issue, Springer, 1967.

[A2] Helms, L. L., Introduction to potential theory, Wiley (interscience), 1969 (译自德文).

[A3] Doob, J. L., Classical potential theory and its probabilistic counterpart, Springer, 1983.

孙和生 译 陆柱家 校

解析函数论的边值问题 [boundary value problems of analytic function theory; граничные задачи теории аналитических функций]

由一个给定的函数的实部和虚部的边界值的关系去寻找某个域内的解析函数的问题. B. Riemann 于 1857 年首先提出此问题([1]). D. Hilbert 研究的边值问题([2])可叙述如下(Riemann-Hilbert 问题 (Riemann-Hilbert problem)):求函数 $\Phi(z)=u+iv$, 它在以围线 L 为边界的单连通域 S^+ 内解析,且在 $S^+\cup L$ 上连续,满足边界条件

$$\operatorname{Re}(a+ib)\Phi = au-bv = c, \tag{1}$$

其中 a, b 和 c 是在 L 上给定的实值连续函数. 为了给出奇异积分方程的应用的例子, Hilbert 首先将上述边值问题化归为一奇异积分方程.

问题(1)能化归为相继求解两个 Dirichlet 问题. 在 [3] 中能找到用此方法于这个问题的完整研究.

H. Poincaré([4])在发展潮汐的数学理论中所遇到的问题类似于问题(1). Poincaré 问题(Poincaré problem)是由域 S^+ 的边界 L 上的下述条件确定此域内的调和函数 $u(x,y)$:

$$A(s)\frac{\partial u}{\partial n}+B(s)\frac{\partial u}{\partial s}+C(s)u = f(s). \tag{2}$$

其中 $A(s)$, $B(s)$, $C(s)$ 和 $f(s)$ 是 L 上给定的实函数, s 是弧坐标, n 为 L 的法向量.

广义的 Riemann-Hilbert-Poincaré 问题(Riemann-Hilbert-Poincaré problem)是下述线性边值问题:由边界条件

$$\operatorname{Re}\{\lambda\Phi\} = f(t_0),\quad t_0\in S^+, \tag{3}$$

寻求 S^+ 内的解析函数 $\Phi(z)$, 其中 λ 是由下述公式定义的积分-微分算子

$$\lambda\Phi = \sum_{j=0}^{m}\left\{a_j(t_0)\Phi^{(j)}(t_0)+\int_L h_j(t_0,t)\Phi^{(j)}(t)\,ds\right\}. \tag{4}$$

其中 $a_0(t_0),\cdots,a_m(t)$ 是(通常是复值的)定义在 L 上的 H 类函数(即满足 Hölder 条件), $f(t)$ 是给定的 H 类实值函数, $h_j(t_0,t)$ 是(通常为复值)L 上具有下述形式的函数

$$h_j(t_0,t) = \frac{h_j^0(t_0,t)}{|t-t_0|^\alpha},\quad 0\leqslant\alpha<1,$$

其中 $h_j^0(t_0,t)$ 是两个变量的 H 类函数. (4)式右边的表达式 $\Phi^{(j)}(t_0)$ 了解为 $\Phi(z)$ 的 j 次导数从 S^+ 的内部趋于 L 的边界值.

当 $m=0$, $h_j(t_0,t)=0$ 时,这一特殊的 Riemann-Hilbert-Poincaré 问题即是 Riemann-Hilbert 问题; Poincaré 问题也是同一问题的一个特殊情形. 很多重要的边值问题——诸如两个独立变量的椭圆型偏微分方程的边值问题——可化归为 Riemann-Hilbert-Poincaré 问题.

对于 $a_m(t_0)\neq0$ $(t_0\in L)$ 的 Riemann-Hilbert-Poincaré 问题由 И. Н. Векуа([3])提出并解决.

边值问题的指数(index of a boundary value problem)的概念在边值问题的理论中起着重要的作用,指数是由下述公式定义的整数

$$\kappa = 2(m+n),$$

其中 $2\pi n$ 是沿 L 走过并保持 S^+ 在其左边时 $\arg\overline{a_m(t)}$ 的增量.

Riemann-Hilbert-Poincaré 问题可化归为下列形式的奇异积分方程:

$$N_\mu \equiv A(t_0)\mu(t_0)+\int_L N(t_0,t)\mu(t)\,ds = \tag{5}$$

$$= f(t_0)-c\sigma(t_0),$$

其中 μ 是 H 类的未知实值函数, c 是待定常数, 且

$$N(t_0,t) = \frac{K(t_0,t)}{t-t_0}.$$

函数 $A(t_0)$, $K(t_0,t)$ 和 $\sigma(t_0)$ 能由 $a_j(t)$ 和 $h_j(t_0,t)(j=0,\cdots,m)$ 表出.

令 k 和 k' 分别是相对于(5)的齐次积分方程 $N_\mu=0$ 和相连的齐次积分方程

$$N'_\nu \equiv A(t_0)\nu(t_0)+\int_L N(t,t_0)\nu(t)\,ds = 0 \tag{6}$$

的线性无关解的个数,数 k 和 k' 与 Riemann-Hilbert-Poincaré 问题的指数 κ 的联系由下述等式给出:

$$\kappa = k-k'.$$

下述情形特别有兴趣,即无论怎样的右端 $f(t_0)$ 问题都是可解的. 对于 Riemann-Hilbert-Poincaré 问题. 不管怎样的右端 $f(t_0)$, 问题是可解的充要条件是 $k'=0$ 或 $k'=1$. 对于后种情形方程(6)的解 $v(t)$ 必须满足

$$\int_L v(t)\sigma(t)\,ds \neq 0;$$

而两种情形都要求 $\kappa \geqslant 0$ 且齐次问题 $\mathrm{Re}\{\lambda\Phi\}=0$ 恰有 $\kappa+1$ 个线性无关的解. 若 $\sigma(t)=0$, 则 Riemann - Hilbert - Poincaré 问题对任意右端是可解的充要条件为 $k'=0$.

至于 Riemann - Hilbert 问题, 下述命题成立: 1) 若 $\kappa \geqslant 0$, 则非齐次问题(1)对任意右端是可解的; 2) 若 $\kappa<-2$, 则问题有解的充要条件是

$$\int_0^{2} e^{i(k+\kappa/2)\varphi}\Omega(\varphi)c(\varphi)d\varphi=0,\ k=1,\ \cdots,\ -\kappa-1,$$

其中

$$\Omega(\varphi)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2(\varphi)+b^2(\varphi)}}\exp\left\{-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2}\theta(\varphi_1)\operatorname{cotg}\frac{\varphi_1-\varphi}{2}d\varphi_1\right\},$$

$$\theta(t)=\arg\left[-t^{\kappa}\frac{a-ib}{a+ib}\right],\ a^2+b^2\neq 0.$$

Riemann - Hilbert 问题与所谓的线性共轭问题密切相联. 设 L 是一光滑的或分段光滑的曲线, 它构成一个闭的围线, 界定复平面 $z=x+iy$ 上的某个域 S^+, 且当沿 L 走过时使此域在其左边, 又以 S^- 表示 $S^+\cup L$ 在 z 平面上的补集. 给定一函数 $\Phi(z)$, 它在曲线 L 的邻域处处连续, 在 L 上可能除外. 称函数 $\Phi(z)$ 能从左边(或从右边)连续拓展到一点 $t\in L$, 如果当 z 沿任意一路径且保留在 L 的左边(或右边)趋于 t 时, $\Phi(z)$ 趋于一确定的极限 $\Phi^+(t)$ (或 $\Phi^-(t)$).

函数 $\Phi(z)$ 称为具有跳跃的曲线 L 分片解析函数, 如果它在 S^+ 和 S^- 内解析且能由左边和右边连续地拓展到任一点 $t\in L$.

线性共轭问题 (linear conjugation problem) 是从边值条件

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)+g(t),\quad t\in L,$$

确定一分片解析函数 $\Phi(z)$, 它以 L 为跳跃曲线且在无穷远点为有限阶, 这里 $G(t)$ 和 $g(t)$ 是在 L 上给定的 H 类函数. 当假定在 L 上处处有 $G(t)\neq 0$ 时, 整数

$$\kappa=\frac{1}{2\pi}[\arg G(t)]_L$$

称为**线性共轭问题的指数**.

若 $\Phi(z)=(\Phi_1,\cdots,\Phi_n)$ 是分片解析向量, G 是 $n\times n$ 方阵且 $g(t)=(g_1,\cdots,g_n)$ 是向量, 若 $\det G(t)\neq 0$, 则整数

$$\kappa=\frac{1}{2\pi}[\arg\det G(t)]_L$$

称为**线性共轭问题的总指数**. 指数和总指数的概念在线性共轭问题理论中起着重要的作用([5]), [6], [7]).

形式(5)的一维奇异积分方程理论建基于线性共轭问题理论之上.

参考文献

[1] Riemann, B., Gesammelte mathematische Werke - Nachträge, Teubner, 1892—1902.

[2] Hilbert, D., Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Chelsea, reprint, 1953.

[3] Векуа, И. Н., 《Тр. Тбил. матем. ин-та АН Груз ССР》, **11** (1942), 109—139.

[4] Poincaré, H., Leçons de mécanique celeste, 3, Paris, 1910.

[5] Мусхелишвили, Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, 3 изд., М., 1968 (中译本: Н. И. 穆斯海里什维里, 奇异积分方程, 上海科学技术出版社, 1966).

[6] Векуа, Н. П., Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи, 2 изд., М., 1970 (中译本: Н. П. 维库阿, 奇异积分方程组及某些边值问题, 上海科学技术出版社, 1963).

[7] Гахов, Ф. Д., Краевые задачи, 2 изд., М., 1963.

[8] Хведелидзе, Б. В., 《Тр. Тбил. матем. ин-та АН Груз ССР》, **23** (1956), 3—158

А. В. Бицадзе 撰

【补注】 文中所论问题亦称**障碍问题** (barrier problem). 在数学物理中的应用见 [A6], [A7], [A9] 和那里给出的参考文献. 对此理论(矩阵情形)的一个重要贡献在 [A5] 中给出. 其他的有关论著是 [A1], [A2], [A3], [A4] 和 [A8]. 在 [A1] 中提出的方法使用系统理论中的**状态空间** (state space) 处理方式.

注意到对这些问题的各种变形所给的各种名称并不统一. 例如, 上述线性共轭问题亦常称为 Riemann - Hilbert **问题** ([A9]). 特别是在矩阵形式的情形, 即 $g(t)$, $\Phi^+(t)$, $\Phi^-(t)$ 全是(可逆)矩阵值函数的情形, 在完全可积方程组理论中非常重要. 事实上, 考虑超定线性偏微分方程组(详细叙述见 [A6])

$$\varphi_x=u\varphi,\ \varphi_t=v\varphi,\qquad \text{(A1)}$$

其中 u, v 考虑作复参数 λ 的有理函数, 系数依赖于 x, t 但极点结构不依赖于 x, t, 例如

$$u=u_0+\frac{u_1}{a_1-\lambda}+\cdots+\frac{u_n}{a_n-\lambda},$$

其中 a_i 为常数, 只有 u_i 是 x, t 的函数. [A1] 存在可逆矩阵解 φ 的充要条件是 u, v 满足

$$u_t-v_x+[u,v]=0,\qquad \text{(A2)}$$

并称作 Zakharov - Shabat **方程组** (Zakharov - Shabat system of equations). 许多可积方程组能写为这种形式. 现设 φ 是(A1)的解并取 λ 平面上围线 Γ 上的函数 $g(\lambda)$. 解矩阵 Riemann - Hilbert 问题 $\Phi^-=\varphi g\varphi^{-1}\Phi^+$ 的 (x,t) 族, 则 $\psi=(\Phi^-)^{-1}\varphi$ 亦是(A1)的解, 且它导致 λ 可逆矩阵值函数的群在(A2)的解空间上的一个作用. 这种由原来的解 u, v 和一函数 $g(\lambda)$ 获得新的解 $\tilde{u}=$

$\psi_k\varphi^{-1}, \tilde{v}=\psi_l\psi^{-1}$的方法称为 Zakharov - Shabat 整形法(Zakharov - Shabat dressing method). $(u,v)\mapsto(\tilde{u},\tilde{v})$有时亦称作 Riemann - Hilbert 变换(Riemann - Hilbert transformation). 在 Einstein 场方程(Einstein field equations)(轴对称解)的情形, 类似的一种方法名为 Hauser - Ernst 变换(Hauser - Ernst transformation)或 Kinnersley - Chitre 变换(Kinnersley - Chitre transformations), 并且在此情形相关的群(的一个子群)称作 Geroch 群(Geroch group)([A10]). Riemann 单值问题(Riemann monodromy problem)是寻求 n 个多值函数 $y(\lambda)=(y_1(\lambda),\cdots,y_n(\lambda))$在 $\lambda=a_1,\cdots,a_n,\infty=a_0$ 外处处正则, 使得当沿着仅包含上述诸点的一个点的围线解析开拓时, $y(\lambda)^t$变为 $V_i y(\lambda)^t$, $i=0,\cdots,n$. 当取围线通过 $a_0,\cdots,a_n$ 和在它上的一个适当的阶梯函数时, 此问题化为 Riemann - Hilbert 问题. Riemann 单值问题本质上由 J. Plemelj ([A11]), G. D. Birkhof ([A12])和 I. A. Lappo - Danilevsky ([A13]) 所解决.

参考文献

[A1] Bart, H., Gohberg, I. and Kaashoek, M. A., Fredholm theory of Wiener - Hopf equations in terms of realization of their symbols, *Integral Equations and Operator Theory*, **8** (1985), 590–613.

[A2] Boutet de Monvel, L., A. O. (eds.), Mathématique et physique, Sém ENS 1979–1982, Birkhauser, 1983.

[A3] Clancey, K. and Gohberg, I., Factorization of matrix functions and singular integral operators, Operator Theory: Advances and Applications, Vol.3, Birkhäuser, 1983.

[A4] Gohberg, I. C. and Feldman, I. A., Convolution equations and projection methods for their solution, Transl. Math. Monographs, 41, Amer. Math. Soc., 1974.

[A5] Gohberg, I. C. and Krein, M. G., Systems of integral equations on a half line with kernels depending on the difference of arguments, *Amer. Math. Soc. Transl.* (2), 1960, 217–287 (*Uspekhi Mat. Nauk*, **13** (1958), 2 (80), 3–72).

[A6] Zakharov, V. E. and Manakov, S. V., Soliton theory, J. M. Khalatnikov (ed.): Physics reviews, Vol. 1, Harwood Acad. Publ., 1979, 133–190.

[A7] Meister, E., Randwertaufgaben der Funktionentheorie, Teubner, 1983.

[A8] Rodin, Y. L., The Riemann boundary value problem on Riemannian manifolds, Reidel, 1987.

[A9] Chudnovsky, D. and Chudnovsky, G. (eds.), The Riemann problem, complete integrability and arithmetic applications, Lecture Notes in Math., 925, Springer, 1982.

[A10] Hoenselaers, C. and Dietz, W., Solutions of Einstein's equations: techniques and results, Lecture Notes in Physics, 265, Springer, 1984.

[A11] Plemelj, J., Problems in the sense of Riemann and Klein, Interscience, 1964.

[A12A] Birkhoff, G. D., Singular points of ordinary linear differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **10** (1909), 436–470.

[A12B] Birkhoff, G. D., A simplified treatment of the regular singular point, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **11** (1910), 199–202.

[A13] Lappo - Danilevsky, I. A., Mémories sur la théorie des systémes des equations différentielles linéaires, Chelsea, reprint, 1953.

何育赞 译 容尔谦 校

边界变分方法 [boundary variation, method of; граничных вариаций метод]

研究单叶函数(univalent function)的一种方法, 该方法以研究 z 平面区域内单叶函数 $w=f(z)$的变分(variation of a function)为基础, 这种变分系通过适当变更象域的边界而确定.

边界变分方法的基本引理. 设 D 是 w 平面内一区域, D 在扩充平面内的余集 Δ 由有限个连续统组成. 设 Γ 是 Δ 中的一个连续统, 且在 Γ 上存在解析函数 $s(w)\neq 0$ 使得对于任意一点 $w_0\in\Gamma$ 及 D 内可表为

$$F(w) = w + A_0 + \frac{A_1\rho^2}{w-w_0} + O(\rho^3) \qquad (*)$$

的任一单叶函数 $F(w)$, 不等式

$$\mathrm{Re}\{A_1 s(w_0)\} + O(\rho) \geqslant 0$$

成立, 并假定(*)式中余项的估计在 D 的所有闭子域中是一致的. 则 Γ 是一条解析曲线, 它可以用实参数 t 的函数 $w=w(t)$作为其参数表示; 且可选取该参数使得 Γ满足微分方程

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 s(w) + 1 = 0.$$

此结果显示了二次微分(quadratic differential)在求解单叶函数论的极值问题中的重要作用; 因为在许多应用问题中 $s(w)$ 是亚纯函数. 在某些场合, 从问题的条件推出 $s(w)$ 的特定的极点属于极值区域的边界, 且边界变分方法的基本引理表明该区域的边界属于二次微分

$$Q(w)\,dw^2 = -s(w)\,dw^2$$

的临界轨道的闭包之并集. 在一些极值问题中, 基本引理不仅产生定性的结果, 也给出确定极值区域边界的足够信息, 因而使问题得到完全解决.

下列结果是借助于边界变分方法解决的: 关于 S 族的系数问题(coefficient problem)的定性结果; 具有给定容量的一族连续统的 n 级直径的最大值问题; 二连

通区域单叶共形映射的某些极值问题的解；关于多连通区域的畸变定理 (distortion theorem),该定理同时也证明了给定多连通区域到典型域的单叶共形映射的存在性定理，等等.

参考文献

[1] Schiffer, M., A method of variation within the family of simple functions, *Proc. London Math. Soc. Ser*, 2, **44** (1938), 432−449.

[2] Schiffer, M., Some recent developments in the theory of conformal mappings, in R. Courant (ed.): Dirichlet's principle, Conformal mapping and minimal surfaces, Interscience, 1950.

[3] Schiffer, M., Applications of variational methods in the theory of conformal mapping, in Calculus of variations and its applications, Proc. Symp. Appl. Math., Vol, 8, Amer. Math. Soc. & McGraw - Hill, 1958, 93−113.

Г. В Кузьмина 撰

【补注】 边界变分方法的基本引理亦称 Schiffer 定理 (Schiffer theorem).

参考文献

[A1] Duren, P. L., Univalent functions, Springer, 1983.

杨维奇 译

有界算子 [bounded operator ; ограниченный оператор]

一个由拓扑向量空间X到拓扑向量空间 Y中的映射A,使得对X的任何有界子集M, $A(M)$是 Y中的有界子集.每个在 X上连续的算子 A: $X \to Y$是有界算子.如果 A: $X\to Y$ 是一个线性算子,那么为了A是有界子,只须存在原点的一个邻域 $U\subset X$,使得 $A(U)$在 Y中是有界的.设 X 与 Y是赋范线性空间,线性算子 $A:X\to Y$ 是有界的，那么

$$\gamma = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| < \infty.$$

这个数称为算子 A 的范数,并记以 $\|A\|$. 于是

$$\|Ax\| \leq \|A\|\cdot\|x\|,$$

并且 $\|A\|$ 是最小的常数 C 使得对任何的 $x\in X$,

$$\|Ax\| \leq C\|x\|$$

反之,如果上面的不等式成立,那么 A 是有界的.对于把赋范空间X映到赋范空间 Y中的线性算子,有界性与连续性的概念是等价的.对于任何的拓扑向量空间X与Y,这两个概念未必等价,但若X是有界型的而 Y是局部凸空间,那么线性算子 $A:X\to Y$ 的有界性蕴涵它的连续性.如果H是 Hilbert 空间,而$A:H\to H$ 是有界对称算子,那么二次型 $\langle Ax,x\rangle$ 在单位球 $K_1=\{x:\|x\|\leq 1\}$上是有界的.数

$$\beta = \sup_{\|x\|\leq 1} \langle Ax, x\rangle \quad 和 \quad \alpha = \inf_{\|x\|\leq 1} \langle Ax, x\rangle$$

称为算子A的上界(upper bound)和下界(lower bound).点α与β属于A的谱,并且整个谱在区间$[\alpha,\beta]$之中,有界算子的例: Banach 空间到它的一个可补子空间上的**射影算子** (projector) 及作用于 Hilbert 空间上的**等距算子** (isometric operator).

如果空间X与 Y 具有偏序集的结构,例如它们是向量格(见**向量格**(vector lattice)),那么除去上面考虑的拓扑有界性外,还能够引入一个算子的序有界性的概念.算子$A:X\to Y$ 称为是序有界的,如果对于X中的任何序有界集M,$A(M)$是 Y中的序有界集.例:保序算子 (isotone operator),即 $x\leq y$ 蕴涵 $Ax\leq Ay$ 的算子.

参考文献

[1] Люстерник, Л. А., Соболев, В. И., Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965 (中译本：Л. А. 刘斯铁尔尼克，В. И. 索伯列夫,泛函分析概要(第二版),科学出版社,1985).

[2] Rudin, W., Functional analysis, McGraw - Hill, 1973.

[3] Birkhoff, G., Lattice theory, Amer. Math. Soc., 1967.

В. И. Соболев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Taylor, A. E. and Lay, D. C., Introduction to functional analysis, Wiley, 1980.

[A2] Zaanen, A. C., Riesz spaces, 2, North - Holland, 1983.

李炳仁 译 王声望 校

有界集 [bounded set ; ограниченное множество]

1)(有距离ρ的)度量空间X中的有界集是一个集合A,其直径

$$\delta(A) = \sup_{x,y\in A} \rho(x,y)$$

为有限的.

2)(域k上的)拓扑向量空间E中的有界集是被每一个零邻域U吸收的集合B(即存在某个$\alpha\in k$使得$B\in\alpha U$).

М. И. Войцеховский 撰 史树中 译

有界紧集 [boundedly - compact set ; ограниченно компактное множество],在拓扑线性空间X中的

有下列性质的集合M:每个有界子集$N\subset M$的闭包$\bar N$是包含在M内的紧集(对于赋范空间,按强(相应地,弱)拓扑,这等价于M与闭球的交集的紧(相应地,弱紧)性).赋范空间中的一个闭凸集是有界紧的,当且仅当它是局部紧的.有界紧集在 Banach 空间中的逼近论里有应用;这类集合具有存在**最佳逼近元** (element of best approximation)的性质.对自身按弱(相应地,强)拓扑为有界紧的桶型拓扑线性空间是自反(相应地,Montel)空间.有界紧的赋范空间是有限维的.

参考文献

[1] Klee, V. L., Convex bodies and periodic homeomorphisms in Hilbert space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **74** (1953), 10-43.

[2] Edwards, R. E., Functional analysis: theory and applications, Holt, Rinehardt, Winson, 1965

Л. П. Власов 撰 史树中 译

Bourget 函数 [Bourget function; Бурже функция]

可以作为 **Bessel 函数**(Bessel functions)积分表示的推广定义的函数 $J_{n,k}(z)$:

$$J_{n,k}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int t^{-n-1}\left[t+\frac{1}{t}\right]^k \exp\left\{\frac{1}{2}z\left[t-\frac{1}{t}\right]\right\}dt,$$

其中 n 是整数, k 是正整数. 积分围道绕坐标原点沿反时针方向回转一周. 换句话说,

$$J_{n,k}(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (2\cos\theta)^k \cos(n\theta - z\sin\theta)\,d\theta,$$

$J_{n,0}(z) \equiv J_n(z)$ 是第一类柱函数. Bourget 函数因 J. Bourget 而得名([1]), 他从在天文学中的各种应用的角度研究了这个函数.

参考文献

[1] Bourget, J., Mémoire sur les nombres de Cauchy et leur application à divers problèmes de mécanique céleste, *J. Math. Pures Appl.* (2), **6**(1861), 32-54.

[2] Watson, G. N., A treatise on the theory of Bessel functions, Cambridge Univ. Press, 1952, Chapt. 10.

В. И. Пагурова 撰 张鸿林 译

捷线 [brachistochrone; брахистохрона], 最速降线 (curve of shortest descent)

下降最快的路线. 求捷线的问题是 G. Galilei 提出的([1]), 如下所述: 在连接处于同一竖直平面内的两点 A 和 B (B 在 A 下)的一切平面曲线中, 求这样一条曲线; 当一个质点仅在重力作用下沿这条曲线由 A 运动到 B 时, 花费的时间为最短. 这个问题可以化为求一个函数 $y(x)$, 使得泛函

$$J(y) = \int_a^b \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\,dx$$

达到最小值, 其中 a 和 b 是点 A 和 B 的横坐标. 捷线是具有水平基线的**摆线**(cycloid), 其尖点在点 A.

参考文献

[1] Galilei, G., Unterredungen und mathematische Demonstrationen über zwei neue Wissenszweigen, die Mechanik und die Fallgesetze betreffend, W. Engelmann, Leipzig, 1891(译自意大利文和希腊文).

[2] Лаврентьев, М. А., Люстерник, Л. А., Курс вариационного исчисления, 2 изд., М.-Л., 1950 (中译本: М. А. 拉夫连齐耶夫, Л. А. 留斯捷尔尼克, 变分学教程, 高等教育出版社, 1955).

Л. П. Куптов 撰

【补注】 捷线问题(brachistochrone problem)的解决通常归功于 Johann Bernoulli (见([A1], p.350) 有关讨论在大多数变分学教科书中都可找到, 例如见[A2].

参考文献

[A1] Rouse Ball, W. W., A short account of the history of mathematics, Dover, reprint, 1960.

[A2] Weinstock, R., Calculus of variations, Dover, reprint, 1974.

张鸿林 译

辫论 [braid theory; кос теория]

拓扑学和代数学中与辫、其等价类构成的群及这些群的各种推广有关的分支([1]).

n 根绳的一条辫由以下几部分组成: 三维空间 $\mathbf{R}^3$ 中, 包含两个有序点集 $a_1, \cdots, a_n \in P_0$ 和 $b_1, \cdots, b_n \in P_1$ 的两个平行平面 P_0 和 P_1, n 条简单不交弧 $l_1, \cdots, l_n$, 这些弧与 P_0, P_1 间每个平行平面 P_t $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ 恰好相交一次, 且连接点 $\{a_i\}$ 和 $\{b_i\}$ $(i=1, \cdots, n)$. 假设 a_i 位于 P_0 中直线 L_a 上, b_i 位于 P_1 中平行于 L_a 的直线 L_b 上, 此外, 对每个 i, b_i 位于 a_i 之下(见图 1). 辫可用在通过 L_a 和 L_b 的平面上的射影表示; 这个射影可取一般位置, 依这个办法仅有有限个二重点, 其中的任两个位于不同的水平线上, 且横截相交.

辫 ω 的绳 l_i 连接 a_i 和 b_{k_i}, 从而定义一个置换

$$S^\omega = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ k_1 & \cdots & k_n \end{pmatrix}.$$

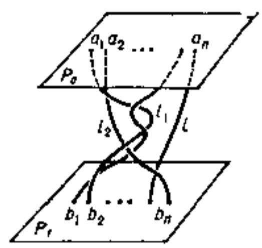


图 1

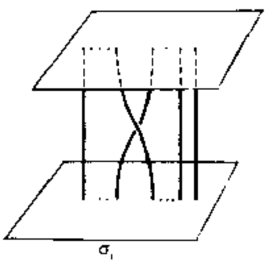


图 2

如果是恒等置换, 则 ω 称为有色辫(coloured braid)(或纯辫 (pure braid)). 对换 $(i, i+1)$ 对应着一条简单辫 (simple braid) σ_i (见图 2).

在固定 $P_0, P_1, \{a_i\}, \{b_i\}$ 的 n 根绳的所有辫的集合上, 可以引进由同胚 h: $\Pi \to \Pi$ 定义的等价关系, 其中 Π 是 P_0, P_1 间的区域, h 在 $P_0 \cup P_1$ 上是恒等映射; 故可假定 $h(P_t)=P_t$. 如果存在具有上述性质的同胚, 使得 $h(\alpha)=\beta$, 则辫 α 和 β 等价.

这些等价类——它们仍称为辫——关于以下定义的

运算组成辫群 (braid group) $B(n)$. 把上述区域Π的一个拷贝Π′放上另一拷贝Π″,按这个办法 $P_0^{'}$ 与 $P_1^{'}$ 重合,$a_i^{'}$ 与 $b_i^{'}$ 重合,并压缩Π′∪Π″至其"高度"的一半. 辫 $\omega'\in\Pi'$ 和 $\omega''\in\Pi''$ 的象产生一条辫 $\omega'\omega''$, 其绳 l_i 是 $l_i^{'}$ 接上 $l_{k_i}^{''}$ 得到的,其中 $k_i\in S^{\omega'(i)}$. 单位辫是含有 n 条平行线段的辫的等价类;辫 ω 的逆 ω^{-1} 由它对平面 $P_{\frac{1}{2}}$ 的反射所定义. 条件 $\omega\omega^{-1}=\varepsilon$ 见图3. 映射 $\omega\to S^{\omega}$ 定义

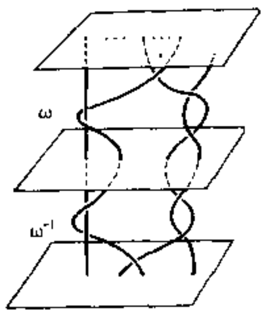


图 3

了 $B(n)$ 到 n 个元素的置换群 $S(n)$ 上的一个满同态,这个满同态的核是所有纯辫构成的子群 $K(n)$, 于是有一个正合序列

$$1\to K(n)\to B(n)\to S(n)\to 1.$$

辫群 $B(n)$ 有两种主要的解释. 第一, 作为构形空间 (configuration space) 是这样得到的: 用到 P_0 上的垂直射影将平面 P_t 与 P_0 等同,而点 $a_{it}=l_i\cap P_t$ 的象,当考虑 t 从 0 变到 1 时,形成了集合 $\bigcup a_i$ 沿 P_0 的合痕 φ_t^{ω} 的轨迹;有 $\varphi_1^{\omega}(\bigcup a_i)=\bigcup a_i$. 考虑平面上 n 个两两不同点的无序序列的空间 $G(n)$; 则每条辫一一对应于此空间中的一个同伦闭路类,且有同构:

$$\beta: B(n)\to\pi_1 G(n).$$

对于纯辫,可类似地构造同构

$$\alpha: K(n)\to\pi_1 F(n),$$

其中 $F(n)$ 是平面上 n 个不同点构成的有序序列的空间,于是 $K(n)$ 可与对应于覆叠

$$p: F(n)\to G(n)=F(n)/S(n)$$

的子群等同.

第二种解释,作为同胚合痕群 (homeotopy group), 是这样得到的,将合痕 φ_t^{ω} 延拓成平面 P_0 的合痕 $\tilde{\varphi}_t^{\omega}$, 使它在某个圆盘外与恒等映射一致,且 $\tilde{\varphi}_0^{\omega}=\mathrm{id}$. 对每个 t, 两个这样的延拓仅差一个在点 a_{it} 恒等的同胚. 一条辫唯一确定了把集合 $\bigcup a_i$ 映到自身的平面的同胚空间 $Y(n)$ 的一个分支,且有同构

$$\gamma: B(n)\to\pi_0 Y(n).$$

每个同胚 $h\in Y$ 对应着一个秩为 n 的自由群 $F_n=\pi_1(\mathbf{R}^2\setminus\bigcup a_i)$ 的自同构,这些自同构彼此可以相差一个内自同构, 依次产生了一个同态 $B(n)\to\mathrm{Out}\ F_n=\mathrm{Aut}\ F_n/\mathrm{Inn}\ F_n$. 象的元素称为自由群的辫自同构(braid automorphisms). 特别地,与辫 σ_i 对应的有自同构

$$\bar{\sigma}_i: \bar{\sigma}_i(x_i)=x_{i+1},\ \bar{\sigma}_i(x_{i+1})=x_{i+1}x_ix_{i+1}^{-1},$$

$$\bar{\sigma}_i(x_j)=x_j,$$

若 $j\neq i,\ i+1$ ($\{x_i\}$ 是 F_n 的生成元的集合). 任一辫自同构 α 有如下性质:

$$\alpha(x_i)=A_ix_iA_i^{-1},\ \alpha\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)=\prod_{i=1}^{n}x_i,$$

至多相差一个内自同构(A_i 的意义,见下文);这些性质刻画了辫自同构的特征.

辫 σ_i ($1\leqslant i\leqslant n-1$) 是群 $B(n)$ 的生成元, 即 $\omega=\sigma_{k_1}\cdots\sigma_{k_m}$, 且

$$\left.\begin{aligned}\sigma_i\sigma_j&=\sigma_j\sigma_i & &\text{若 } |i-j|>1,\\ \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i&=\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}, & &1\leqslant i\leqslant n-2.\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

其结果(1)为 $B(n)$ 的一个表现(见图4). 存在分裂

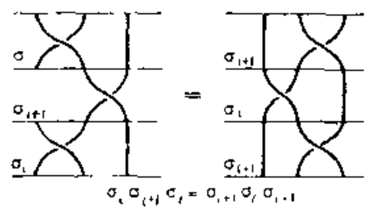


图 4

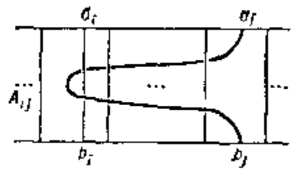


图 5

正合序列(从以 $\mathbf{R}^2\setminus(a_1,\cdots,a_{n-1})$ 为纤维的局部平凡纤维化 $F(n)\to F(n-1)$ 得到):

$$1\to F_{n-1}\to K(n)\to K(n-1)\to 1,$$

它导致正规列

$$K(n)=A_n\supset\cdots\supset A_1\supset A_0=F_{n-1}$$

以 A_i/A_{i-1} 为自由因子,其中 A_i 有一"分支" U_{n-i} 同构于 $K(n-i-1)$. 每个元素 $\omega\in B(n)$ 可唯一表示成

$$\omega=\omega_2\cdots\omega_n\pi_\omega,$$

其中 π_ω 是 S^ω 在 $B(n)$ 中选取的代表，且 $\omega_i \in A_{n-i+1} \cap U_i$. 一条辫约化成这种形式的过程称为它的修饰(dressing). 这解决了 $B(n)$ 中词(同一性)的问题.

$K(n)$ 的一个表现如下. 生成元(见图 5):

$$A_{ij} = \sigma_{j-1}\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_i^2\sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j-1} \in A_i \cap U_{n-i+1};$$

关系:

$$\left.\begin{array}{ll} A_{rs}A_{ij} = A_{ij}A_{rs} & 若\ r \leqslant s < i < j \\ & 或\ i < r < s < j; \\ A_{rj}A_{ij} = A_{rj} & 若\ i = s; \\ A_{ij}A_{sj}A_{ij}A_{ij} = A_{sj} & 若\ r = i < j < s; \\ A_{rj}A_{sj}A_{rj}^{-1}A_{sj}^{-1}A_{ij}A_{rj}A_{sj} = A_{sj}A_{rj} & 若\ r < i < s < j \end{array}\right\} \quad (2)$$

利用 Schreier 系统 (Schreier system) $\prod_{j=2}^{n} M_j k_j$, $j \geqslant k_j \geqslant n$, 其中 $M_{ji} = \sigma_{j-1} \cdots \sigma_i$, 这个表现可作为由表现(1)所定义的抽象群 $B(n)$ 到 $S(n)$ 中自然同态的核的表现得到.

$B(n)$ 的中心是由元素 $(\sigma_1 \cdots \sigma_n)^n$ 生成的无限循环群. $n \geqslant 5$ 时, 换位子群 $B'(n)$ 与 $B''(n)$ 相同; $B'(3)$ 同构于秩为 2 的自由群, $B'(4)$ 同构于两个这种群的半直积. 商群模换位子群是一个由 σ_i 的象生成的无限循环群. $B(n)$ 中无有限阶元素. 群 $K(n)$ 通过一个有非 Abel 象的自同态被映到自身上. 特别地, $K(n) \cap B'(n)$ 是 $B(n)$ 并且也是 $K(n)$ 的一个全特征子群(见 [15]).

解决 $B(n)$ 中共轭问题要比解决词问题复杂得多. 存在辫的唯一的 Garside 正规形式 (Garside normal form) $\omega = \Delta^m \Omega$, 其中 $\Delta = (\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1})(\sigma_1 \cdots \sigma_{n-2}) \cdots (\sigma_1\sigma_2)\sigma_1$ 是已知的 Garside 元素, Ω 是一条正辫, 即这样的辫, 它用有正指标的元素 σ_i 写出的表示. 利用依赖于 i 的有限多次运算(与某元素共轭, 最大阶的元素的选择, 等等). 可以将任何辫 ω 与词的某个集合 $\Sigma(\omega)$ 联系起来, 从中可选择一个具有最小 T 的正规形式的词 $\Delta^s T$. 这就是称之为辫 ω 的上形式 (upper form). 于是得到二辫共轭当且仅当它们有相同的上形式(见 [7]).

在具有整系数的单变量多项式环上的矩阵群中, 辫群 $B(n)$ 的 Burau 表示 (Burau representation) 是由对应

$$b(\omega): \sigma_i \to \left\| \begin{array}{cccc} I_{i-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n-k-1} \end{array} \right\|$$

定义的, 其中 I_k 是 k 阶单位矩阵. 矩阵 $b(\omega) - I_n$ 是由闭合辫(见下文)所得到的连接的约化 Alexander 矩阵 (见 **Alexander 不变量** (Alexander invariants)). 对于纯辫, 从类似的 Gassner 矩阵可得到全 Alexander 矩阵. 这些表示是否正确的问题至今(1982)尚未解决(见[2]).

空间 $F(n)$ 和 $G(n)$ 是非球面这一事实使得可能求出辫群的同调的值.

$K(n)$ 的同调(homology)(见[16]). 类似地, $K(n)$ 与圆的并的积一致, 其中圆的数目从 1 直到 $n-1$. 同调环同构于外分次环, 这环是由具有关系

$$\omega_{kl}\omega_{lm} + \omega_{lm}\omega_{mk} + \omega_{mk}\omega_{kl} = 0$$

的一维元素 $\omega_{ij} = \omega_{ji}$ $(1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n)$ 生成的. 如同 ω_{kl} 一样, 对应着沿对角线 $z_k = z_l$ 的道路, 可以取形式

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{dz_k - dz_l}{z_k - z_l}.$$

$B(n)$ 的同调(homology)(见[8], [12]). 同态 $B(n) \to S(n)$ 可以扩张成嵌入 $S(n) \to O(n)$; 上同调空间的诱导同态 $H^*(O(n)) \to H^*(B(n))$ 是满射, 即群 $B(n)$ 的模 2 上同调空间由 Stiefel - Whitney 类生成.

存在一个从 $G(n)$ 到 Ω^2S^2 中的自然映射, Ω^2S^2 是 S^2 的二折闭路空间, 即球体空间 $S^2 \to S^2$ (对于 n 个点选择小圆盘, 则以度数 1 将这些小圆盘典型地映到球面中, 将整个补集映到一个点). 此映射(见[14])建立了极限空间 $G(\infty)$ 和 $(\Omega^2S^2)_0$ 的一个同调等价(下标表示可以选择度数为 0 的球体的分支). 至于 $B(n)$ 的不稳定同调群, 已经证明了(见[16])它们是有限的, 在高度为 n 处稳定且满足递归关系 $H^iB(2n+1) = H^iB(2n)$. 有一个这些群计算的说明([17]).

应用和推广. 1) 闭辫 (closed braid) 是 $\mathbf{R}^3$ 中的连接(一个 n 个分支的组结 (knot)), 它的每个分支横截过由闭辫的轴 l 这同一条直线所界定的半平面(见图 6).

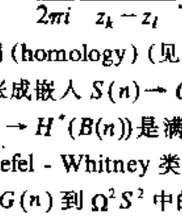


图 6

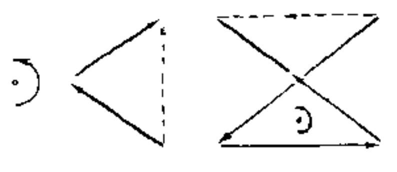


图 7

一条辫 ω 用下述方法生成一条闭辫 $\widetilde{\omega}$ (ω 的闭包 (closure)). 考虑以 P_0 和 P_1 为底的柱面, 它的内部包

含 ω. 让这柱面在 $\mathbf{R}^3$ 中形变,使它的元素变成中心在 l 上的圆,其底相重合且每个点 a_i 与 b_i 重合,则 $\tilde{\omega}$ 是绳 l_i 的并. 反之,$\mathbf{R}^3$ 中的每个连接都可以用闭辫表示. 等价辫对应于合痕的连接,且共轭辫能产生合痕的连接. 反之不真,因为一个连接可以用绳数不同的辫来表示. 此外,辫 $\omega\sigma_{n-1}$ 和 $\omega\sigma_{n-1}^{-1}$ 在 $B(n)$ 中不共轭,但它们对应着合痕的连接. 如果两条闭辫作为连接等价,它们可以通过两种类型的初等变换的链彼此获得(见图 7). 这些运算可用连接群的表示的语言来解释,这就导致了如同与群 $B(n)$ 的系统有关的问题那样对连接合痕问题的重新阐述. $\tilde{\omega}$ 的连接群的表示形如

$$\{y_1, \cdots, y_n : y_i = A_i y_{k_i} A_i^{-1}\},$$

其中关系由辫自同构 b^ω 确定. 反之,任何这样的关系确定一条辫.

2) 如果用 g 条不相交的割线切割亏格 g 的曲面,以致得到有 $2g$ 个洞的球面,则这带洞球面的将其洞边上的点固定的同胚定义了将割线固定的曲面的同胚,且它们本身在相差群 $K(2g)$ 的元素意义下确定了一个合痕. 这就导致了辫群在曲面同伦群中的一个表示. 类似地可构造 $B(2g)$ 的一个表示. 这些表示在**三维流形**(three-dimensional manifold)的 Heegaard 图表的研究中有用.

3) 将 $\mathbf{R}^2$ 与复平面 $\mathbf{C}^1$ 等同并联系平面中任何 n 个点的无序集与以这些点为根的 n 次多项式, 可以将 $G(n)$ 与具有非零判别式的多项式空间等同. 这就使得通过较少变量的函数的迭加得到有关代数函数的不可表示性的一些结果成为可能(见[16]).

4) 任意空间 X 的构形空间可类似于 $G(n)$ 和 $F(n)$ 来定义,其中 X 代替 $\mathbf{R}^2$. 这些空间的基本群 $B(X)$ 和 $K(X)$ 分别称为空间 X 的辫群(braid group)和空间 X 的纯辫群(pure braid group). 对于维数大于 2 的流形 M^n, $\pi_1 F_n(X) \approx \prod_{i=1}^{n} \pi_1(M_i)$, 这种群我们没有兴趣. 对于二维流形,则有一个由嵌入 $\mathbf{R}^2 \subset M^2$ 诱导的从 $B(n)$ 和 $K(n)$ 到 $B_n(M^2)$ 和 $K_n(M^2)$ 中的自然嵌入. 如果 M^2 既不是球面,也不是射影空间,就可得到一个恰当序列

$$1 \to \pi_1 K(2) \xrightarrow{e} \pi_1 K_n(M^2) \to \prod_{i=1}^{n} \pi_1 M_{(i)}^2;$$

对于球面,将单个关系

$$\sigma_s \cdots \sigma_{n-2} \sigma_{n-1}^2 \sigma_{n-2} \cdots \sigma_1 = 1$$

加到(1)上就得出同态 e 是一个满同态.

5) 如果 $p: X \to Y$ 是一个 k 层覆叠,则 $p^{-1}\alpha$(其中 α 是 Y 中的闭路)是构形空间 X 中的闭路,而且定义了一个同态 $\pi_1 Y \to B_k(X)$,这个同态强化了覆叠的单值性,在代数几何中有应用.

6) 设 V^C 是实向量空间 V 的复化, W 是由作用到 V 中(因而也作用到 V^C 中)的反射所生成的有限不可约群. 设 s_i 是平面 $P_i \subset V$ 产生的反射, D 是它们的并. 最后,设 $V^C/D = Y_W$ 和 X_W 是商空间. 群 $\pi_1 Y_W$ 和 $\pi_1 X_W$ 称为 Brieskorn 群(Brieskorn groups)且构成 $K(n)$ 和 $B(n)$ 的自然推广,如果 $\mathrm{ord}(s_i s_j) = m_{ij}$, 则 $\pi_1 X_W$ 有如下形式的表示

$$\sigma_i \sigma_j \sigma_i \cdots = \sigma_j \sigma_i \sigma_j \cdots,$$

式中每边因子的个数均为 m_{ij}(这里的 σ_i 对应于 Weyl 胞腔). 对这些群,已经证明了 X_W 和 Y_W 是 $K(\pi, 1)$ 类型的空间,且共轭性问题也得以解决. 作为对有理奇点通用形变的判别式的补充,空间 X_W 出现在代数几何中(见[12],[13]).

参考文献

[1] Artin, E., Theory of braids, *Ann. of Math.*, **48** (1947), 643−649.

[2] Birman, J. S., Braids, links and mapping class groups, Princeton Univ. Press, 1974.

[3] Burau, W., Ueber Zopfinvarianten, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg.*, **9** (1932), 117−124.

[4] Марков, А. А., 《Тр. Матем. ин-та АН СССР》., **16** (1945).

[5] Gassner, B., On braid groups, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg.*, **25** (1961), 10−22.

[6] Fadell, E. and Neuwirth, L., Configuration spaces, *Math. Scand.*, **10** (1962), 111−118.

[7] Garside, F. A., The braid group and other groups, *Quart. J. Math.*, **20** (1969), 4, 235−254.

[8] Фукс, Д. Б., 《Функциональный анализ и его приложения》, **4** (1970), 2, 62−73.

[9] Арнольд, В. И., 《Функциональный анализ и его приложения》, 4 (1970), 1, 84−85.

[10] Горин, Е. А., Лин, В. Я., 《Матем. сб.》, **78** (1969), 579−610.

[11] Арнольд, В. И., 《Тр. Моск. матем. об-ва》, **21** (1970), 27−46.

[12] Brieskorn, E., *Matematika*, **18** (1974), 3, 46−59.

[13] Brieskorn, E. and Saito, K., Artin Grupen und Coxeter Gruppen, *Invent. Math.*, **17** (1972), 245−271.

[14] Deligne, P., Les immeubles des groupes de tresses généralisés, *Invent. Math.*, **17** (1972), 4, 273−302.

[15] Лин, В. Я., 《Успехи матем. наук》, **29** (1974), 1, 173−174.

[16] Арнольд, В. И., 《Матем. заметки》, **5** (1969), 2, 227−231.

[17] Лин, В. Я., в. кн.: Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 17, М., 1979, 159−227.

А. В. Чернавский 撰 徐森林 译

分支指数 [branch index; ветвления индекс]

紧 Riemann 曲面 S 被看作 Riemann 球面上的 n 叶覆叠面时,其**分支点**(branch point)的阶数之和 $V=$

$\sum(k-1)$，和式扩大到 S 的所有有限和无穷远分支点．分支指数由下面公式

$$V = 2(n+g-1)$$

而与 S 的亏格 g 及叶数 n 相联系．亦见 **Riemann 曲面** (Riemann surface)．

参考文献

[1] Springer, G., Introduction to Riemann surfaces, Addison - Wesley, 1957.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Mumford, D., Algebraic geometry 1. Complex projective varieties, Springer, 1976.

陈志杰 译

解析函数的分支 [branch of an analytic function; ветвь аналитической функции]

由中心为 a，收敛半径为 $r>0$ 的幂级数

$$\Pi(a;r) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (z-a)^\nu$$

表示的给定的解析函数元素沿属于复平面 C 内给定区域 $D(a\in D)$ 的所有可能路径**解析开拓** (analytic continuation) 的结果．因此，解析函数的一个分支由元素 $\Pi(a;r)$ 及区域 D 确定．在计算中常常只用到解析函数的单值分支 (single - valued branches of analytic fuctions) 或者说解析函数的正则分支 (regular branches of analytic functions)．这种分支并非对属于**完全解析函数** (complete analytic function) 的存在域中的所有区域 D 都存在．例如，在割开的复平面 $D=\mathrm{C}\setminus\{z=x:-\infty\leqslant x\leqslant 0\}$ 内，多值解析函数 $w=\mathrm{Ln}\,z$ 有正则分支

$$w = \mathrm{Ln}\,z = \ln|z| + i\arg z, \quad |\arg z|<\pi,$$

这是对数的主值，而在环域 $D=\{z:1<|z|<2\}$ 内不可能分出解析函数 $w=\mathrm{Ln}\,z$ 的正则分支．

参考文献

[1] Hurwitz, A. and Courant, R., Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen, 1, Chapt. 3; 2, Chapt. 4, Springer, 1964

[2] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т.2, М., 1968, гл. 8 (中译本: А. И. 马库雪维奇，解析函数论，高等教育出版社，1957).

Е. Д. Соломенцев 撰　侯纪欣 译　何育赞 校

分支点 [branch point; ветвления точка]，多值性奇点 (singular point of multi - valued character)

单复变量 z 的解析函数 $f(z)$ 的**孤立奇点** (isolated singular point) a，使得 $f(z)$ 的任一函数元素沿环绕 a 的闭路径的**解析开拓** (analytic continuation) 产生 $f(z)$ 的新元素．更准确地说，a 称为一个分支点，如果存在：1) 一个环域 $V=\{z:0<|z-a|<\rho\}$，$f(z)$ 可沿 V 内任一路径解析延拓；2) 一点 $z_1\in V$ 以及由以 z_1 为中心，收敛半径 $r>0$ 的幂级数

$$\Pi(z_1;r) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (z-z_1)^\nu$$

表示的 $f(z)$ 的某个函数元素，这个元素沿圆周 $|z-a|=|z_1-a|$，譬如说，按正方向绕一周的解析开拓，产生一个不同于 $\Pi(z_1;r)$ 的新元素 $\Pi'(z_1;r')$．若依此绕过最小的圈数 $k>1$ 之后又重新得到起始元素 $\Pi(z_1;r)$，则对于由元素 $\Pi(z_1;r)$ 在 V 内确定的 $f(z)$ 的分支 (见**解析函数的分支** (branch of an analytic function)) 的所有元素也如此．这时，a 就是这一分支的有限 $(k-1)$ 阶分支点 (branch point of finite order)．在有限阶分支点 a 的一个去心邻域 V 内，这个分支由广义 Laurent 级数 (generalized Laurent series)，即 Puiseux 级数 (Puiseux series) 表示：

$$f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} b_\nu (z-a)^{\nu/k}, \quad z\in V. \tag{1}$$

若 $a=\infty$ 是一个有限阶的非普通分支点，则 $f(z)$ 的分支在某个邻域 $V'=\{z:|z|>\rho\}$ 内由类似于 (1) 的级数表示：

$$f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} b_\nu z^{-\nu/k}, \quad z\in V'. \tag{2}$$

$f(z)$ 的 **Riemann 曲面** (Riemann surface) R 在有限阶分支点 a 上面的状态的特点是：由元素 $\Pi(z_1;r)$ 确定的 $f(z)$ 的 k 叶分支都聚集在 a 的上面．与此同时，R 的其他分支在 a 上面的状态可能完全不同．

如果级数 (1) 或 (2) 只含有有限多个具有负下标 ν 的非零系数 b_ν，则 a 是一个**代数分支点** (algebraic branch point) 或称代数奇点 (algebraic singular point)，这样一个有限阶支点还可刻画为：当 z 以任意方式趋于 a 时，由 $\Pi(z_1;r)$ 在 V 或 V' 内确定的分支的所有元素的值趋于一个确定的有限或无穷的极限．

例：$f(z)=z^{1/k}$，其中 $k>1$ 为自然数，$a=0,\infty$．

如果级数 (1) 或 (2) 含有无穷多个具有负下标 ν 的非零系数 b_ν，则有限阶支点 a 属于超越分支点 (transcendental branch points) 类．

例：$f(z)=\exp(1/z)^{1/k}$，其中 $k>1$ 为自然数，$a=0$．

最后，如果绕有限多周后不能回到起始元素，则 a 称为**对数分支点** (logarithmic branch point) 或无穷阶分支点 (branch point of infinite order)，它也是一个超越分支点．

例：$f(z)=\mathrm{Ln}\,z$，$a=0$，∞．

由元素 $\Pi(z_1;r)$ 确定的 $f(z)$ 的分支的无穷多叶聚集在一个对数分支点上面．

在多复变解析函数 $f(z)(z=(z_1,\cdots,z_n),n\geqslant 2)$ 的情

形，空间 $\mathbf{C}^n$ 或 $\mathbf{CP}^n$ 的一点 a 称为 m 阶分支点(branch point of order m)，$1 \leqslant m \leqslant \infty$，如果它是 $f(z)$ 的全纯域 (domain of holomorphy) (一般是多叶全纯域) 的 m 阶分支点. 和 $n=1$ 的情形不同，当 $n \geqslant 2$ 时，分支点，正如解析函数的其他奇点一样 (见奇点(singular point))，不可能是孤立的.

参考文献

[1] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968, гл. 8 (中译本: А. И. 马库雪维奇, 解析函数论, 高等教育出版社, 1957).

[2] Фукс, Б. А., Теория аналитических функций многих комплексных переменных, 2 изд., М., 1962, ч. 1, гл. 2 (英译本: Fuks, B. A., Theory of analytic functions of several complex variables, Amer. Math. Soc., 1963).

Е. Д. Соломенцев 撰 侯纪欣 译 何育赞 校

解的分支 [branching of solutions; ветвление решений]，解的分歧(bifurcation of solutions)，非线性方程的

下述现象: 在非线性方程的参数中引入较小的变化，会使得该方程的一个给定的解完全消失或者变成数个解. 更确切地，设带有参数 λ (它不必是数值的) 的非线性方程

$$F(x, \lambda) = 0 \qquad (*)$$

对参数的给定值 λ_0 有解 x_0. 于是，如果 λ 的值接近于 λ_0，方程(*)可能会有多于一个的解 $x(\lambda)$ 接近于 x_0. 此时就说为解 x_0 的分支(分歧)，而 (x_0, λ_0) 称为方程(*)的分支(分歧)点(branching (bifurcation) point of an equation).

例如，方程 $x^2-\lambda=0$，这里 x 与 λ 是复变量，有分支点 $(x_0, \lambda_0)=(0, 0)$，因为存在一个双值解 $x=\sqrt{\lambda}$，即当 $\lambda \neq 0$ 很小时，解 $x=0$ (对 $\lambda=0$) 分支为两个小的非平凡的解.

解的分支的现代理论基于 A. M. Ляпунов ([1]) 与 E. Schmidt ([2]) 的思想，并且主要地对于 Banach 空间中的非线性方程取得了发展.

设 E_1 与 E_2 是复 Banach 空间，$x \in E_1$，λ 是一个复变量，又设 $F(x, \lambda)$ 是一个非线性算子，它与它的 **Fréchet 导数**(Fréchet derivative) $F_x(x, \lambda)$ 在点 (x_0, λ_0) 的一个邻域 Ω 中是连续的. 设 $F(x, \lambda)$ 把 Ω 映到空间 E_2 的 0 点的一个邻域之中，使得 $F(x_0, \lambda_0)=0$，并且假定 $F_x(x_0, \lambda_0) \equiv B$ 是一个 **Fredholm 算子**(Fredholm operator).

要求在球 $\|x-x_0\|<r$ 中(这里半径 r 充分小)去寻找方程(*)的所有解，而这些解是连续的，只要 $|\lambda-\lambda_0|<\rho$，这里 ρ 也是充分小的. 换言之，这是解 x_0 按参数 λ 的局部延拓问题. 如果逆算子 B^{-1} 存在，所提问题有唯一的解 $x(\lambda)$，且 $x(\lambda_0)=x_0$. 另一方面，如果 B^{-1} 不存在，则 B 的零空间 $N(B)$ 的维数 $\geqslant 1$. 在这样的情形中，问题可化为一个类似的有限维问题. 设 P 是 E_1 到 $N(B)$ 上的射影算子(projector)，并设 $I-Q$ 为 E_2 到 B 的值域上的射影，这里 I 是恒等算子. 方程(*)可写成方程组

$$\left.\begin{aligned}(I-Q)F(x_0+u+v, \lambda) &= 0,\\ QF(x_0+u+v, \lambda) &= 0,\end{aligned}\right\}$$

这里 $u=(I-P)(x-x_0)$，$v=P(x-x_0)$. 从方程组的第一个方程中，找到隐算子 $u=f(v, \lambda)$，将它代入方程组的第二个方程中得到方程

$$QF(x_0+f(v, \lambda)+v, \lambda) = 0,$$

由此可决定 v；上述方程称为分支(分歧)方程(branching (bifurcation) equation). 此问题的完全解——在充分小半径 r 的球 $\|v\|<r$ 中，找出分支方程的所有解 $v(\lambda)$，且对 $|\lambda-\lambda_0|<\rho$ (ρ 充分小)，$v(\lambda)$ 是连续的——便产生最初问题的完全解，这是因为它的所有解可表示为形式

$$x(\lambda) = x_0+v(\lambda)+f[v(\lambda), \lambda],$$

这里 v 是分支方程的某个解.

设 $F(x, \lambda)$ 是 Ω 中的一个解析算子(analytic operator). n 维子空间 $PE_1=N(B)$ 与 QE_2 中基的选择可能使分支方程写为方程组的形式

$$\mathscr{L}_i(\xi_1, \ldots, \xi_n, \lambda) = 0, \quad i=1, \ldots, n,$$

这里 $\mathscr{L}_i (i=1, \cdots, n)$ 在点 $(0, \cdots, 0, \lambda_0)$ 处是一个解析函数，而所有的偏导数 $\partial \mathscr{L}_i / \partial \xi_i$ 在该点为 0. 这个方程组可以用排除理论，**Newton 图**(Newton diagram)方法及其他方法([3]，[4]，[5])来研究. 如果 $n=1$，由 Newton 图的方法可实现完全的分析、关于分支方程(即关于原来的问题)的研究，下面是仅仅可能的三种情形: a) 问题没有解; b) 问题有有限多个解，每个解都能够表示为差 $\lambda-\lambda_0$ 的整数或有理数幂的收敛级数; 或 c) 问题有有限多的解的族，每个族依赖于有限个小的自由参数，并且可能依赖于有限个在 b) 中给出的解.

为了出现情形 b)，只须 x_0 是方程 $F(x, \lambda_0)=0$ 的一个孤立解. 在情形 b) 中，用如下形式的不定系数法来寻找解是方便的:

$$x(\lambda) = x_0+\sum_{k=1}^{\infty} x_k(\lambda-\lambda_0)^{k/p},$$

其中 x_k 是待定的系数，而 p 的可能值也许用分支方程事先就找到，这样的级数代入(*)产生求 $x_1, x_2, \cdots$ 的一个递归系统. 于是得到形如 $Bx_k=H(x_1, \cdots, x_{k-1})$ 的问题，而每个 x_k 决定到 n 个任意的常数，这些常数来自于逐次方程约定的可解性. 所有得到的级数在 λ_0 的某个邻域内收敛. 通过构造控制级数可得到这个邻域的半径的下界的一个估计([6]).

为了出现情形 c)，x_0 必须是方程 $F(x, \lambda_0)=0$ 的非

孤立解.这里应用不定系数法可能产生发散级数(形式解). 如果问题关于 E_1 中线性算子的一个连续群是不变的, 运用群的考虑, 在几种情形中, 将可能减少方程与涉及的未知数的数目, 从而简化问题或者甚至归结为情形 b) ([7], [8]).

方程(*)也可能仅对于 $\lambda=\lambda_0$ 有解. 只有当 x_0 是方程 $F(x,\lambda_0)=0$ 的一个非孤立解时, 这样的解才是可能的; 使用对于 $\lambda=\lambda_0$ 的分支方程, 可找到它们. 所有多参数族解可产生方程(*)在 $\lambda=\lambda_0$ 时所有的解.

如果空间 E_1 与 E_2 是实的,先在复数域中研究分支方程,然后取实解. 其中某些可以证明是定义于 λ_0 的半邻域中.

如果 $F(x,\lambda)$ 是充分光滑的算子, B 是一个 **Noether 算子** (Noetherian operator), 且参数 λ 是另一个 Banach 空间 E 中的元(E 中的分支点可用直线与曲面代替), 上面的过程也部分地适用. 同时, 上面的过程也应用于某些有关问题的研究中: 寻找大解的问题(方程(*)能够有解 $x(\lambda)\to\infty$ 当 $\lambda\to\lambda_0$ 时), 线性算子的特征值与特征元的分支问题, 等等 ([3]). 对于

$$E_1 = E_2,\ \ F(x,\lambda)\equiv x-\Phi(x,\lambda),\ \ \Phi(0,\lambda)\equiv 0$$

这一特殊情形, 也使用拓扑的与变分的方法, 以及 Banach 空间中包含使用锥的方法来研究. 在这类问题中, **分歧** (bifurcation) 点的概念是十分重要的. 不属于这个系统的解的分支问题也会遇到. 它们包括, 例如, 退化微分方程 ([9], [10]), 以及涉及长波与孤立波的问题 ([11]).

参考文献

[1] Ляпунов, А. М., Офигурах равновесия, мало отличающихся от эллипсоидов, вращающейся однородной массы жидкости, Собр. соч., т. 4, М., 1959.

[2] Schmidt, E., Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen Ⅲ, *Math. Ann.*, **65** (1908), 370-399.

[3] Вайнберг, М. М., Треногин, В. А., Теория ветвления решений нелинейных уравнений, М., 1969 (英译本: Vainberg, M. M. and Trenogin, V. A., *Theory of braching of solutions of non-linear equations*, Noordhoff, (1974).

[4] Вайнберг, М. М., Треногин, В. А., 《Успехи матем. наук》, 17 (1962), 2, 13-75.

[5] Красносельский, М. А., [и др.], Приближенное решение операторных уравнений, М., 1969.

[6] Ахмедов, К. Т., 《Успехи матем. наук》, 12 (1957), 4, 135-153.

[7] Юдович, В. И., 《Прикл. матем. и механ.》, **31** (1967), 1, 101-111.

[8] Логинов, Б. В., Треногин, В. А., 《Докл. АН СССР》, **197** (1971), 1.

[9] Ахмедов, К. Т., 《Докл. АН СССР》, **115** (1957), 1. 9-12.

[10] Сидоров, Н. А., 《Дифференц. уравнения》, **3** (1967), 9.

[11] Тер-Крикоров, А. М., Треногин, В. А., 《Дифференц. уравнения》, 3 (1967), 3, 496-508.

В. А. Треногин 撰

【补注】 分支(歧)点类型的分类见**可微映射的奇异性** (singularities of differentiable mappings). 约化解方程(*)为一个有限维问题即分歧方程的方法, 通常称为 Ляпунов-Schmidt 方法 (Lyapunov-Schmidt method).

参考文献

[A1] Chow, S.-N. and Hale, J. K., Methods of bifurcation theory, Springer, 1982. 李炳仁 译 王声望 校

分支点 (极小曲面的) [branching point (in a minimal surface); ветвления точка]

极小曲面的奇点, 在该点曲面的第一基本形式为零; 事实上, 这意味着分支点仅在广义极小曲面上才能存在. 这种奇点的名称源于下列事实: 在分支点的一个邻域内, 广义极小曲面的结构类似于函数 $\omega=z^n(n\geqslant 2)$ 的 Riemann 曲面在点 $z=0$ 的结构. 即广义极小曲面在那里有到某个平面区域上的多层正交投影, 而分支点自身在该区域上的投影是具有唯一原象的内点. 在一个分支点 ($u=0$, $v=0$) 的邻域内, 极小曲面的坐标 (x,y,z) 可表成

$$x+iy = aw^m+O(|w|^{m+1}),$$
$$z = \mathrm{Re}(bw^{m+n})+O(|w|^{m+n+1}),\ \ w = u+iv,$$

其中 $a=c(1+i)\neq 0$ 和 $b\neq 0$ 是两个复常数, $\mathrm{Im}\,c=0$; $m\geqslant 2$ 和 $n\geqslant 1$ 是整数, 分别称为奇点的阶数和指数, u 和 v 是内蕴等温坐标.

基于这种表示可得下列定理: 若数 $m+n$ 与 m 互素, 则极小曲面上从奇点沿不同方向可引出 $(m-1)\cdot(m+n)$ 条不同的自交线. 在完全极小曲面的亏格、它的分支点数和它的 Gauss 映射的指数之间有一个关系 ([1]).

要区分两类分支点: 假分支点和真(非假)分支点. 假分支点是定义曲面时映射的奇点, 它可以通过重新参数化来去掉(例如, 若 $r=r(w)$ 是正则极小曲面, 则广义极小曲面 $r=r(w^2)$ 在 $w=0$ 处有一假分支点). 真分支点表示曲面本身的实奇性, 且具有下列重要性质: 在真分支点的一个邻域内, 曲面可作适当形变, 使得新曲面(它在变形邻域的外部与原曲面重合)的面积比原曲面小(这对 $\mathbf{R}^3$ 中的曲面成立; 在更一般情形下并不正确, 例如 $\mathbf{R}^4$ 中面积极小化的曲面). 有分支点的广义极小曲面理论是为 $\mathbf{R}^n(n\geqslant 3)$ 中一大类 2 维曲面而发展的分支浸入的一般理论的基础 ([2]).

参考文献

[1] Chen, Y. W., Branch points, poles and planar points of minimal surfaces in $\mathbf{R}^3$, *Ann. of Math.*, **49** (1948), 4, 790–806.
[2] Nitzsche, J. C. C., Vorlesungen über Minimalflächen, Springer, 1973

И Х Сабитов 撰 沈一兵 译

分支过程 [**branching process**; **ветвящийся процесс**]

描述一类范围广阔的、与已知对象(如物理学中的粒子、化学中的分子、生物学中的某一特殊群体等等)的繁殖和转换相关的现象的**随机过程** (stochastic process). 区别于其他过程,分支过程的基本假定是:个体的繁殖是相互独立的.

具有一种类型粒子的时齐分支过程 $\mu(t)$ 定义为具可数个状态 0, 1, 2, … 的 **Марков 过程** (Markov process),其转移概率 $P_{ij}(t)$ 满足附加的分支条件(branching condition):

$$P_{ij}(t) = \sum_{j_1+\cdots+j_i=j} P_{1j_1}(t)\cdots P_{1j_i}(t), \tag{1}$$

分支过程的状态 0, 1, 2, … 解释为粒子的个数. 概率 $P_{ij}(t)$ 等于在长为 t 的时间间隔内从状态 i 转移到状态 j 的概率,即

$$\mathrm{P}\{\mu(t+t_0)=j\,|\,\mu(t_0)=i\}.$$

研究分支过程的主要分析工具是**生成函数** (generating function) (又称母函数)

$$F(t;s) = \sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{P}\{\mu(t)=n\,|\,\mu(0)=1\}s^n \tag{2}$$

由分支条件可知

$$F(t+\tau;s) = F(t;F(\tau;s)). \tag{3}$$

在离散时间分支过程 (branching processes with discrete time)中 t 取非负整数值,并由(3)可知 $F(t;s)$ 是函数 $F(s)=F(1;s)$ 的 t 重迭代. 这种过程有时称为 Galton - Watson 过程 (Galton-Watson process). 在连续时间分支过程中假设 $t\in[0,\infty)$ 及右导数

$$\left.\frac{\partial F(t;s)}{\partial t}\right|_{t=0} = f(s)$$

存在. 由(3)可知 $F(t;s)$ 满足微分方程

$$\frac{\partial F(t;s)}{\partial t} = f(F(t;s)), \tag{4}$$

其初始条件为 $F(0;s)=s$.

若 $A=F'(1)$ 和 $a=f'(1)$ 是有限的,则粒子数 $\mu(t)$ (在条件 $\mu(0)=1$ 之下)的数学期望 $\mathrm{E}\mu(t)$ 在离散分支过程中为 A^t,在连续分支过程中为 e^{at}. 根据参数 A 或 a 的值,分支过程分为下临界的 (subcritical) ($A<1$, $a<0$), 临界的 (critical) ($A=1$, $a=0$) 和上临界的 (supercritical) ($A>1$, $a>0$). 这种分类的主要依据是当 $t\to\infty$ 时 $\mathrm{E}\mu(t)$ 的性态.

对于平凡情形, $F(s)=s$ 和 $f(s)=0$, 即

$$\mathrm{P}\{\mu(t)=1\,|\,\mu(0)=1\}\equiv 1,$$

将不予讨论.

灭绝概率,在下临界和临界分支过程中为 1, 而在上临界情形小于 1. 如果 $\mathrm{E}\mu(t)\cdot\ln\mu(t)<\infty$,则在下临界情形,过程存活概率 $\mathrm{P}(\mu(t)>0)$, 当 $t\to\infty$ 时的渐近性态与 $K\mathrm{E}\mu(t)$ 的近似,其中 K 是一正的常数. 在具有有限的 $\mathrm{E}\mu^2(t)$ 的临界分支过程中, 当 $t\to\infty$ 时其渐近性态为

$$\mathrm{P}\{\mu(t)>0\} \approx \frac{2}{\mathrm{D}\mu(t)},$$

式中对于离散分支过程 $\mathrm{D}\mu(t)=Bt$, 其中 $B=F''(1)$, 对于连续时间分支过程 $\mathrm{D}\mu(t)=bt$, 其中 $b=f''(1)$. 对 $t\to\infty$ 时 $\mu(t)$ 的分布的渐近性态的更细致的研究表明:若 $\mu(t)$ 的某些矩是有限的,则当 $t\to\infty$ 时,条件分布律

$$S_t(x) = \mathrm{P}\left\{\frac{\mu(t)}{\mathrm{E}\{\mu(t)\,|\,\mu(t)>0\}}\leqslant x\,\Big|\,\mu(t)>0\right\} \tag{5}$$

弱收敛到一个极限分布 $S(x)$. 在下临界分支过程中,极限律 $S(x)$ 是离散的,而在其他情形它是绝对连续的. 特别有趣的是在临界分支过程的情形,极限律 $S(x)$ 是指数的:

$$S(x) = 1-e^{-x},\quad x\geqslant 0. \tag{6}$$

分布(6)也是近临界分支过程的极限分布. 更确切地说,如果考虑具有有界三阶导数 $F'''(1)$, $f'''(1)$ 且 $F''(1)\geqslant B_0>0$, $f''(1)\geqslant b_0>0$ 的一类母函数 $F(s)$ 或 $f(s)$, 则

$$\lim_{\substack{t\to\infty\\ A\to 1}} S_t(x) = 1-e^{-x},\quad x\geqslant 0,$$

其中 $S_t(x)$ 由公式(5)定义. 这种在近临界过程中当 $t\to\infty$ 时发生的现象称为瞬变现象 (transient phenomena).

分支过程的另一类模型是 **Bellman - Harris 过程** (Bellman-Harris process), 在这类过程中每个粒子有一分布函数为 $G(t)$ 的随机生存时间. 在粒子生命结束时,它留下的子代粒子数是 n 的概率为 q_n:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q_n = 1.$$

各个粒子的生存时间和产生的子代粒子数是独立的. 考虑一个在初始时刻($t=0$)年龄为零的粒子,则由公式(2)给出的在时刻 t 的粒子数 $\mu(t)$ 的母函数 $F(t;s)$ 满足非线性积分方程

$$F(t;s) = \int_0^t h(F(t-u;s))\,dG(u)+s(1-G(t)), \tag{7}$$

其中

$$h(s) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n s^n.$$

如果 $G(t)$是一退化分布函数，则 Bellman - Harris 过程是离散时间分支过程；如果 $G(t)$是一指数分布函数，就得到连续时间分支过程．在一般情形下，Bellman-Harris 过程是非 Марков 分支过程．

分支过程也可以复杂到粒子依赖于它们所在的空间位置．例如，设每一粒子在 r 维区域 G 中独立地做 Brown 运动，且有吸收边界 ∂G．一个位于区域 G 中的粒子在时间 $\Delta t \to 0$ 内以概率

$$p_n \Delta t + o(\Delta t), \quad n \neq 1$$

变成 n 个粒子，且每一粒子从其出生地开始沿着 Brown 轨道独立地运动．设 $\mu_{x,t}(A)$ 为在初始时刻 $(t=0)$ 位于 $x \in G$ 处的一个粒子在时刻 t 产生于集合 A 中的粒子数，其生成泛函

$$H(t, x, s(\cdot)) = \mathrm{E}\exp\left[\int_G \ln s(y) \mu_{x,t}(dy)\right]$$

满足拟线性抛物型方程

$$\Delta H + f(H) = 0 \qquad (8)$$

其初始条件为 $H(0, x, s(\cdot)) = s(x)$，边界条件为 $H(t, x, s(\cdot))|_{x \to \partial G} = 0$．其中 $\Delta = \sum_{i=1}^{r} \partial^2 / \partial x_i^2$ 是 Laplace 算子，$f(s) = \sum_n p_n s_n$，$p_1 = -\sum_{n \neq 1} p_n$．

在一般分支过程中，假定繁衍着的粒子能用某些参数来描述．这些参数可以解释为年龄、粒子在空间中的位置、粒子的类型、大小或能量等等．这些过程借助于母函数或生成泛函来研究，可以导出母函数或生成泛函的非线性微分和积分方程，它们是方程(4)，(7)和(8)的推广．可以给出这种分支过程模型的一般描述：设粒子彼此独立地在某一相空间 X 中按 Марков 律运动，假定一个粒子的随机生存时间是 **Марков 时** (Markov moment, Markov time)，它依赖于粒子运动的轨道．在粒子生命结束时，它产生一些新的粒子，依某一概率律分布于相空间 X 中．新的粒子彼此独立地以类似的方式演化．在由 X 的子集中的粒子数所决定的整数值测度空间中，分支过程是 Марков 过程．可是，也常在较简单的约化空间中研究分支过程．在这种情形下，许多分支过程成为非 Марков 过程．

在上面所讨论的绝大多数模型中，把过程分为下临界、临界和上临界过程的分类法依然有意义．由方程(4)所描述的简单分支过程的许多性质对更复杂的系统也成立．例如，对于临界过程，(5)的极限分布通常是指数分布(6)（在适当的范数下）．

分支过程用在各种各样的(生物学的、遗传学的、物理学的、化学的或技术的)实际过程的计算中．在实际过程中，每一粒子独立运动的条件往往不满足，产生的子代粒子可以有相互作用．许多生物的繁殖过程，传染病的传播过程(见**传染过程** (epidemic process))，双分子化学反应等的情况就都是如此．可是，这些过程的最初发展阶段还都可以借助于适当选择的分支过程模型来计算．若介质中活动的粒子数比较少，以至在这样低浓度下它们的相互碰撞实际上不发生，而系统的状态只是在活动的粒子和介质的粒子之间发生碰撞时才变化，此时就可以这样计算．例如，在传染病过程中有病的个体可以看作这种"活动的粒子"；又如，在遗传学中有关变异的现象也可以借助于分支过程来计算；**具有有限种粒子的分支过程** (branching process with a finite number of particle types)可用作计算链式反应的一个模型；**具有扩散的分支过程** (branching process with diffusion) 可以作为原子核反应堆中的中子过程的模型；发生在宇宙线簇射中的现象也可以借助于分支过程来研究；在电话学中，某些等待系统的研究可以归结为分支过程模型．

亦见**具有随机介质的分支过程** (branching process with a random medium)；**具有迁移的分支过程** (branching process with immigration)；**分支过程的正则性** (branching process, regularity of)．

参考文献

[1] Севастьянов, Б. А., Ветвящиеся процессы, М., 1971.

[2] Athreya, K. B. and Ney, P., Branching processes, Springer, 1972.

Б. А. Севастьянов 撰

【补注】 分支过程在生物学中的应用可在[A2]中见到．综述文章[A3]叙述了最新的稳定群体理论和平衡指数增长，这些也都与生物学的应用有关．

参考文献

[A1] Asmussen, S. and Hering, H., Branching processes, Birkhäuser, 1983.

[A2] Jagers, P., Branching processes with biological applications, Wiley, 1975.

[A3] Jagers, P. and Nerman, O., The growth and composition of branching populations, *Adv. Appl. Probab.*, **16** (1984), 221－259.

刘秀芳 译

年龄相关分支过程 [branching process, age - dependent; ветвящийся процесс с зависимостью от возраста]

分支过程的一个模型．其中，粒子的寿命是一非负随机变量，而子代粒子的个数依赖于它转换时刻的年龄．在单一类型粒子模型中，每一粒子有一随机的生存时间 τ，它的分布函数为

$$\mathrm{P}\{\tau \leqslant t\} = G(t).$$

年龄达到 u 的一个粒子，在它生命结束时转换成年龄为

零的 k 个子代粒子的概率为 $p_k(u)$. 设 t 时刻粒子的个数为 $\mu(t)$. 对开始只有一个年龄为零的粒子的过程，$\mu(t)$ 的概率分布的母函数 $F(t;x)$ 满足方程

$$F(t;x) = \int_0^t h(u, F(t-u;x))dG(u)+x(1-G(t)). \qquad (*)$$

其中

$$h(u,x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(u)x^k.$$

令

$$a(u) = \left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{x=1}, \quad b(u) = \left.\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right|_{x=1},$$

$$A = \int_0^{\infty} a(u)dG(u), \quad B = \int_0^{\infty} b(u)dG(u).$$

称一个年龄相关分支过程为下临界的，临界的或上临界的，如果相应地有 $A<1$, $A=1$ 且 $B>0$, 或 $A>1$. 当 $t\to\infty$ 时过程的性态显著地依赖于它的临界性质. 下临界和临界过程以概率 1 灭绝，即

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}\{\mu(t)=0\} = 1.$$

在[1]中对这些过程已得到下述结果：$\mu(t)$ 的矩的渐近公式，灭绝的充分必要条件，方程(*)的解的存在和唯一性条件以及

$$Q(t) = \mathsf{P}\{\mu(t)>0\}$$

当 $t\to\infty$ 时的渐近公式. 极限分布也已确立. 在临界情形，当 $t\to\infty$ 时

$$Q(t) \approx 2\frac{\int_0^{\infty} ua(u)dG(u)}{Bt},$$

$$\mathsf{P}\left\{\frac{\mu(t)}{\mathsf{E}(\mu(t)\,|\,\mu(t)>0)}<x\,|\,\mu(t)>0\right\} \to 1-e^{-x}, \quad x>0.$$

如果 $h(u,x)$ 与 u 无关，则年龄相关分支过程就是 **Bellman - Harris 过程** (Bellmen - Harris process). 上述模型已经被推广到包含多种类型粒子的过程，也推广到粒子在它的生存期间内可以多次产生新粒子的过程 ([2], [3]).

参考文献

[1] Севастьянов, Б. А., Ветвящиеся процессы, М., 1971.
[2] Севастьянов, Б. А., 《Теория вероят. и ее примен.》, 9 (1964), 4, 577 – 594.
[3] Mode, C. J., Multitype branching processes, Elsevier, 1971.

В. П. Чистяков 撰

【补注】 其他参考文献见分支过程 (branching process).

刘秀芳 译

具有有限种粒子的分支过程 [**branching process with a finite number of particle types**; **ветвящийся процесс с конечным числом типов частиц**]

分支过程的一个模型，它是具有可数状态集的 Марков 过程的特殊情形. 分支向量的状态用随机过程

$$\mu(t) = (\mu_1(t),\ldots,\mu_n(t))$$

描述，其第 k 个分量 $\mu_k(t)$ 表示时刻 t 有 $\mu_k(t)$ 个 T_k 种粒子. 这种分支过程区别于一般 Марков 过程的主要性质是：在时刻 t_1 存在的粒子，在任何后续时刻 t_1+t, $t>0$, 以相互独立的方式产生子代粒子. 其母函数

$$F_k(t,x_1,\ldots,x_n) = $$
$$= \mathsf{E}(x_1^{\mu_1(t)},\ldots,x_n^{\mu_n(t)}\,|\,\mu_k(0)=1;\ \mu_i(0)=0,\ i\neq k)$$

满足方程组

$$F_k(t+\tau,x_1,\ldots,x_n) = \qquad (*)$$
$$= F_k(t, F_1(\tau,x_1,\ldots,x_n),\ldots,F_n(\tau,x_1,\ldots,x_n)),$$

具有初始条件

$$F_k(0,x_1,\ldots,x_n) = x_k, \quad k=1,\ldots,n.$$

方程(*)对离散时间和连续时间过程都成立.

在离散时间情形下，数学期望矩阵

$$A(t) = \|A_{ij}(t)\|,$$

$$A_{ij}(t) = \left.\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right|_{x_1=\ \ =x_n=1}$$

是矩阵 $A=A(1)$ 的第 t 次幂，即 $A(t)=A^t$. 如果 A 是不可分解且非周期的，则它具有唯一的正的特征值 λ，它大于其他特征值的模. 在这种情形下，当 $t\to\infty$ 时

$$A_{ij}(t) = u_i v_j \lambda^t + o(\lambda^t),$$

其中 $(u_1,\cdots,u_n)$, $(v_1,\cdots,v_n)$ 是 A 的相应于 λ 的右和左特征向量. 具有不可分解矩阵 A 的分支过程，如果 $\lambda<1$, 则称为下临界的. 如果 $\lambda>1$, 则称为上临界的. 如果 $\lambda=1$ 并且函数 $F_k(1,x_1,\cdots,x_n)$ 中至少有一个是非线性的，则称为临界的. 对于连续时间过程可用类似的方式定义临界性的概念.

分支过程的渐近性质本质上依赖于它的临界性. 下临界和临界过程以概率 1 灭绝. 当 $t\to\infty$ 时，概率

$$Q_k(t) = \mathsf{P}\{\mu_1(t)+\cdots+\mu_n(t)>0$$
$$|\,\mu_k(0)=1;\ \mu_i(0)=0,\ i\neq k\}$$

的渐近公式和粒子个数的极限分布定理([2])都类似于单种粒子过程的相应结果(见**分支过程**(branching process)). 在[3]中研究了近临界情形 ($t\to\infty$, $\lambda\to 1$) 的渐近性质. 在[4]中讨论了具有可分解数学期望矩阵

的过程.

参考文献

[1] Колмогоров, А. Н., Дмитриев, Н. А., 《Докл. АН СССР》, **56** (1947), 1, 7－10.

[2] Севастьянов, Б. А., Ветвящиеся процессы, М., 1971.

[3] Чистяков, В. П., 《Теория вероят. и ее примен.》, **17** (1972), 4, 669－678.

[4] Ogura, Y., Asymptotic behaviour of multitype Galton - Watson processes, *J. Math. Kyoto Univ.*, **15** (1975), 251－302.

В. П. Чистяков 撰

【补注】 附加的文献可在**分支过程** (branching process) 的文章中找到.

刘秀芳 译

具有随机介质的分支过程 [branching process with a random medium; ветвящийся процесс с случайной средой]

一个非时齐分支过程,其中非时齐性是随机的. 设 $\bar{\xi}=\{\xi_0,\xi_1,\cdots\}$ 是平稳随机变量序列 (ξ_t 的值解释为 t 时刻介质的状态). 再设对于介质的每一可能状态 ξ 对应于一个由单个粒子产生的粒子个数的概率分布$\{p_k(\bar{\xi})\}$:

$$p_k(\bar{\xi}) \geqslant 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\bar{\xi}) = 1,$$

$$F_{\bar{\xi}}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\bar{\xi}) s^k$$

为构造随机介质中分支过程的轨道$\{\mu(0),\mu(1),\cdots\}$,取定$\mu(0)=m$ 和介质的状态的轨道 $\bar{\xi}$, 对每个 t ($t=0, 1, \cdots$), $\mu(t+1)$ 由 $\mu(t)$个具有分布$\{p_k(\xi_t)\}$的独立随机变量的和决定. 这种复杂化了的分支 **Galton - Watson 过程** (Galton - Watson process) 是十分自然的. 例如, 随机介质中的分支过程可以作为生物群体的模型.

随机介质中的分支过程的性质类似于普通分支过程的性质. 例如, 在 $\mu(0)=1$ 的条件下, $\mu(t)$的母函数具有形式

$$\mathrm{E}\{s^{\mu(t)} \mid \mu(0)=1\} = \mathrm{E}_{\bar{\xi}} F_{\xi_0}(F_{\xi_1}(\cdots(F_{\xi_{t-1}}(s))\cdots)) \quad (*)$$

(对于分支 Galton - Watson 过程, 即 $\mathrm{P}(\xi_t=0)=1$, $(*)$ 的右边就等于 $F_0(s)$ 的 t 重迭代). 随机介质中的分支过程可以是下临界、临界和上临界的, 此处临界参数 (见[1]) 是变量

$$\rho = \mathrm{E}_{\xi_0} \ln \sum_{k=0}^{\infty} k p_k(\xi_0) = \mathrm{E}_{\xi_0} \ln F'_{\xi_0}(1)$$

(对于通常的分支过程, 临界参数是单个粒子产生的粒子个数的数学期望). 若 $\rho<0$, 则称随机介质中的分支过程为下临界的, 且对随机变量

$$q(\bar{\xi}) = \lim_{t\to\infty} \mathrm{P}\{\mu(t)=0 \mid \mu(0)=1, \bar{\xi}\}$$

它是随机介质中的分支过程对给定轨道 $\bar{\xi}$ 的灭绝概率, 关系式

$$\mathrm{P}\{q(\bar{\xi})=1\} = 1$$

成立. 还存在类似于下临界的 Galton - Watson 分支过程的极限定理: 对几乎所有的序列 $\bar{\xi}$ 的现实, 极限

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{P}\{\mu(t)=k \mid \mu(0)=1, \mu(t)>0, \bar{\xi}\} = p_k^*(\bar{\xi})$$

存在且满足

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k^*(\bar{\xi}) = 1.$$

如果 $\rho=0$, 则称随机介质中的分支过程为临界的, 此时

$$\mathrm{P}\{q(\bar{\xi})=1\} = 1$$

并且对几乎所有的$\bar{\xi}$的现实,

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{P}\{\mu(t)=k \mid \mu(0)=1, \mu(t)>0, \bar{\xi}\} = 0.$$

如果 $\rho>0$, 则称随机介质中的分支过程为上临界的. 在此情形下,

$$\mathrm{P}\{q(\bar{\xi})<1\} = 1$$

并且在某些附加的条件下, 对几乎所有的 $\bar{\xi}$ 存在一个非负随机变量 W,

$$W = \lim_{t\to\infty} \frac{\mu(t)}{F'_{\xi_0}(1)\cdots F'_{\xi_{t-1}}(1)}, \quad \mathrm{E}W = 1.$$

参考文献

[1] Athreya, K. B. and Ney, P., Branching processes, Springer, 1972.

А. М. Зубков 撰

【补注】 其他参考文献见**分支过程** (branching process).

刘秀芳 译

具有扩散的分支过程 [branching process with diffusion; ветвящийся процесс с диффузией]

分支过程的一个模型, 其中生殖的粒子扩散在某一区域 G 中. 设区域 G 是 r 维的, 具有吸收边界 ∂G, 并设区域 G 中的粒子相互独立地进行 Brown 运动. 在 G 中的每个粒子在时间 Δt 之内变成 n 个粒子的概率为 $p_n\Delta t+o(\Delta t)$, $n\neq 1$, $\Delta t\to 0$. 设子代粒子从它们的出生地出发开始它们的独立演化. 设 $p_1=-\sum_{n\neq 1} p_n$, $\{p_n\}$ 的母函数是

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n,$$

并设 $\mu_{x,t}(\Delta)$ 表示初始时刻在 $x\in G$ 处的一个粒子在时刻 t 位于集合 $A\subset G$ 中的粒子数. 其生成泛函

$$H(t; x, s(\cdot)) = \mathrm{E}\exp\left[\int_G \ln s(y)\mu_{x,t}(dy)\right]$$

满足拟线性抛物型方程

$$\sum_{i=1}^{r}\frac{\partial^2 H}{\partial x_i^2}+f(H) = \frac{\partial H}{\partial t},$$

其初始条件为

$$H(0, x, s(\cdot)) = s(x),$$

边界条件为

$$H(t, x, s(\cdot))|_{x\to\partial G} = 0.$$

用 $0<\lambda_1<\lambda_2\leqslant\lambda_3\leqslant\cdots$ 表示其本征值，$\varphi_1(x)>0$ 是问题

$$\sum_{i=1}^{r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2}+\lambda\varphi = 0,\ \varphi(x)|_{x\to\partial G} = 0$$

相应于 λ_1 的本征函数．当 $t\to\infty$ 时渐近关系式

$$\mathsf{E}\mu_{x,t}(G) \approx Ke^{(a-\lambda_1)t}\varphi_1(x)$$

成立．据此，当 $a<\lambda_1$ 时称问题为下临界的，$a=\lambda_1$ 时为临界的，$a>\lambda_1$ 时为上临界的．当 $a\leqslant\lambda_1$ 时，带扩散的分支过程灭绝概率为 1，而当 $a>\lambda_1$ 时，在一般情况下，灭绝概率和事件 $\{\mu_{x,t}(G)\to\infty$ 当 $t\to\infty$ 时$\}$ 的概率都是正的．依赖于其临界性，带扩散的分支过程也有类似于不带扩散的分支过程的极限定理．

参考文献

[1] Севастьянов, Б. А., Ветвящиеся процессы, М., 1971.

【补注】 其他参考文献可在**分支过程** (branching processes) 中找到． Б. А. Севастьянов 撰 刘秀芳 译

具有迁移的分支过程 [branching process with immigration; ветвящийся процесс с иммиграцией]

分支过程(离散时间或连续时间，一种或多种类型的粒子等)的一个模型，在这个模型中新的粒子不仅可以由原有粒子的分裂而产生，也可以从某一"外部源"迁移进来．例如，设

$$X_{t,i},\ Y_t,\ t=0,1,\ldots;\ i=1,2,\ldots$$

分别是具有母函数

$$F(s) = \sum_{k=0}^{\infty}\mathsf{P}\{X_{t,i}=k\}s^k,$$

$$G(s) = \sum_{k=0}^{\infty}\mathsf{P}\{Y_t=k\}s^k$$

的独立随机变量；具有迁移的 Galton - Watson 分支过程 (见 **Galton - Watson 过程** (Galton - Watson process)) 可以用如下关系式来定义：$\mu(0)=0$，$\mu(t)$ 是 t 时刻的粒子数且

$$\mu(t+1) = X_{t,1}+\cdots+X_{t,\mu(t)}+Y_t,\ t=0,1,\ldots.$$

这里，变量 $X_{t,i}$ 可解释为第 t 代的第 i 个粒子的子代粒子数，而变量 Y_t 解释为迁入第 $t+1$ 代的粒子数．母函数

$$H_t(s) = \mathsf{E}\{s^{\mu(t)}|\mu(0)=0\}$$

由递推关系式

$$H_0(s) = 1,\ H_{t+1}(s) = G(s)H_t(F(s))$$

给出．如果 $\mathsf{E}X_{t,i}<1$ 且 $\mathsf{E}\ln(1+Y_t)<\infty$ 或 $\mathsf{E}X_{t,i}=1$ 且 $B=\mathsf{D}X_{t,i}>2C=2\mathsf{E}Y_t$，则相应于具有迁移的 Golton-Watson 分支过程的 Марков 链 $\mu(t)$ 是常返的；如果 $\mathsf{E}X_{t,i}=1$ 且 $B<2C$ 或 $\mathsf{E}X_{t,i}>1$，则 $\mu(t)$ 是非常返的．为使 Марков 链 $\mu(t)$ 是遍历的，即极限

$$\lim_{t\to\infty}\mathsf{P}\{\mu(t)=k\} = p_k$$

存在且满足

$$\sum_{k=0}^{\infty}p_k = 1,$$

其充分必要条件是 (见[3])

$$\int_0^1\frac{1-G(s)}{F(s)-s}ds < \infty.$$

特别地，若 $\mathsf{E}X_{t,i}<1$ 且 $\mathsf{E}\ln(1+Y_t)<\infty$，则这一条件是满足的．若 $\mathsf{E}X_{t,i}=1$，$B>0$，$C<\infty$，则 ([4])

$$\lim_{t\to\infty}\mathsf{P}\left\{\frac{2\mu(t)}{Bt}\leqslant x\right\} = \frac{1}{\Gamma(2CB^{-1})}\int_0^x y^{2CB^{-1}-1}e^{-y}dy,$$

$$x\geqslant 0.$$

如果 $A=\mathsf{E}X_{t,i}>1$ 且 $\mathsf{E}\ln(1+Y_t)<\infty$，则存在 ([5]) 数列 $c_t\downarrow 0$，$c_t/c_{t+1}\to A$，使得

$$\mathsf{P}\left\{\lim_{t\to\infty}c_t\mu(t)\ \text{存在且为正的}\right\} = 1.$$

在迁移仅发生在 $\mu(t)=0$ 的具有迁移的分支过程中，即

$$\mu(t+1) = X_{t,1}+\cdots+X_{t,\mu(t)}+\delta_{0,\mu(t)}Y_t,\ t=0,1,\ldots,$$

其中 δ_{ij} 是 Kronecker 符号，当 $\mathsf{E}X_{t,i}=1$，$1<\mathsf{E}X_{t,i}^2<\infty$ 且 $0<\mathsf{E}Y_t<\infty$ 时，下述关系式成立：

$$\lim_{t\to\infty}\mathsf{P}\left\{\frac{\ln(1+\mu(t))}{\ln t}\leqslant x\right\} = x,\ 0\leqslant x\leqslant 1.$$

参考文献

[1] Зубков, А. М., 《Теория вероят. и ее примен.》, **17** (1972), 1, 179 – 188.

[2] Pakes, A. G., Further results on the critical Galton - Watson process with immigration, *J. Austral. Math. Soc.*, **13** (1972), 3, 277 – 290.

[3] Foster, J. H. and Williamson, J. A., Limit theorems for the Galton - Watson process with time - dependent immigration, *Z. Wahrsch. Verw. Geb.*, **20** (1971), 227 – 235.

[4] Seneta, E., An explicit limit theorem for the critical Galton - Watson process with immigration, *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, **32** (1970), 1, 149 – 152.

[5] Seneta, E., On the supercritical Galton - Watson pro-

cess with immigration, *Math. Biosci.*, 7 (1970), 9－14.

[6] Foster, J. H., A limit theorem for a branching process with state-dependent immigration, *Ann. of Math. Statist.*, 42 (1971), 5, 1773－1776.

A. M. Зубков 撰

【补注】 其他参考文献见**分支过程** (branching process).

刘秀芳 译

分支过程的正则性 [**branching process, regularity of**; **ветвящихся процессов регулярность**]

分支过程的一个性质,它保证在任何时刻粒子的个数是有限的. 分支过程的正则性问题通常归结为某一微分或积分方程解的唯一性问题. 例如,在连续时间分支过程中,初始条件为 $F(0;s)=s$ 的微分方程

$$\frac{\partial F(t;s)}{\partial t}=f(F(t;s))$$

具有唯一解的充分必要条件是:对任何 $\varepsilon>0$, 积分

$$\int_{1-\varepsilon}^{1}\frac{dx}{f(x)}$$

发散. 在分支 **Bellman-Harris** 过程 (Bellman-Harris process) 中,粒子个数的母函数 $F(t;s)$ 是非线性积分方程

$$F(t;s)=\int_0^t h(F(t-u;s))dG(u)+s(1-G(t))\quad(*)$$

的解,其中 $G(t)$ 是粒子生存时间的分布函数,而 $h(t)$ 是一个粒子直接产生的子代粒子数的母函数. 如果对给定的 t_0, c_1, $c_2>0$ 和正整数 $n\geqslant1$, 不等式

$$c_1t^n\leqslant G(t)\leqslant c_2t^n$$

对一切 $0\leqslant t\leqslant t_0$ 成立,则方程 (*) 有唯一解的充分必要条件是具有初始条件

$$\varphi(0)=1,\ \varphi^{(r)}(0)=0,\ r=1,\ldots,n-1$$

的方程

$$\frac{d^n\varphi}{dt^n}=h(\varphi)-1$$

有唯一解

$$0\leqslant\varphi(t)\leqslant1.$$

为使方程 (*) 描述的分支过程是正则的,其充分必要条件是积分

$$\int_0^{\varepsilon}\frac{dx}{x^{1-1/n}(1-h(1-x))^{1/n}}$$

对任何 $\varepsilon>0$ 发散.

参考文献

[1] Севастьянов, Б. А., Ветвящиеся процессы, М., 1971.

Б. А. Севастьянов 撰

【补注】 其他参考文献见**分支过程** (branching process).

刘秀芳 译

Brandt 半群 [**Brandt semi-group**; **Брандта полугруппа**]

具有零元素的半群 S,且对它的每个非零元 a,对应了唯一确定的元素 e, f, $a'\in S$,使得 $ea=af=a$ 及 $a'a=f$,并对任何两个非零幂等元 $g_1,g_2\in S$,有 $g_1Sg_2\neq0$. 定义中的元素 e 和 f 实际上是幂等元且 $fa'=a'e=a'$, $aa'=e$. 另外,在 Brandt 半群中,条件 $ac=bc\neq0$ 及 $ca=cb\neq0$ 中的每一个都蕴含着 $a=b$,而条件 $ab\neq0$ 及 $bc\neq0$ 蕴含着 $abc\neq0$.

从 Brandt 半群中去掉零元素得到的部分广群称为 Brandt 广群 (Brandt groupoid). Brandt 半群的概念是 H. Brandt 在 [1] 中引进的, Brandt 广群的概念在同一篇文章中隐约提到. Brandt 广群的概念是半单线性代数的正规理想组对于所谓固有乘法的抽象 (见 [2], [3],第 6 章). Brandt 半群在半群理论中的意义在于下列事实: Brandt 半群恰是完全 0 单的逆半群 (见**逆半群** (inversion semi-group), **完全单半群**, (completely-simple semi-group)). 一个半群是 Brandt 半群,当且仅当它同构于增添了零元素的群上的有三对角么元矩阵的**矩阵型 Rees 半群** (Rees semi-group of matrix type).

参考文献

[1] Brandt, H., Ueb r eine Verallgemeinerung des Gruppenbegriffes, *Math. Ann.*, 96 (1927), 360－366.

[2] Deuring, M., Algebren, Springer, 1935.

[3] Jacobson, N., The theory of rings, Amer. Math. Soc., 1943.

[4] Сушкевич, А. К., Теория обобщенных групп, Хар.-К. 1937.

[5] Clifford, A. H. and Preston, G. B., The algebraic theory of semigroups, 1－2, Amer. Math. Soc., 1961－1967.

Л. Н. Шеврин 撰 石生明 译 许以超 校

Brauer 群 [**Brauer group**; **Брауэра группа**], 域 k 的

域 k 上的所有有限维**中心单代数** (central simple algebra) 按下面定义的等价类构成的群. 两个有限秩的中心单 k 代数 A 和 B 是等价的,如果存在正整数 m 和 n,使得张量积 $A\otimes_k M_m(k)$ 和 $B\otimes_k M_n(k)$ 作为 k 代数是同构的 (这里 $M_r(k)$ 是 k 上的 r 阶矩阵构成的代数). 代数的张量积诱导出此有限维中心单代数等价类的集合上的一个 Abel 群结构. 此群即为 k 的 Brauer 群,记为 $\mathrm{Br}\,k$. 此群的零元素是全矩阵代数组成的类,一个代数 A 所在的类的逆元素是它的反代数所在的

类．每一个非零的类在同构意义下恰好含有 k 上的一个可除代数(即 k 上的体)．

从 20 世纪 20 年代开始，R. Brauer，E. Noether，A. Albert，H. Hasse 和其他一些人在他们的文章中定义并研究了 Brauer 群(例如，见 [6])．对于数域，人们得到了包括其 Brauer 群的计算在内的最完美的结果，这与**类域论** (class - field theory) 的发展密切相关．互反律的一般形式是用 Brauer 群表述的．

对于任何可分闭域及有限域，其 Brauer 群都是零．实数域的 Brauer 群是二阶循环群，其非零元素是四元数代数所在的类．如果 k 是 p 进数域或对于某个离散赋值完备的局部紧域，则它的 Brauer 群同构于 $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$，这里 $\mathbf{Q}$ 是有理数加法群，$\mathbf{Z}$ 是整数加法群．这个事实在局部类域论中是重要的．

设 k 是有限次的代数数域或有限域上的一元代数函数域，则有群的正合序列

$$0 \to \operatorname{Br} k \xrightarrow{\text{inv}} \sum_v \operatorname{Br} k_v \xrightarrow{\Sigma} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to 0,$$

其中 v 取遍域 k 的所有可能的范数，k_v 是 k 的相应的完全化，而同态 inv 是由自然嵌入 $k \to k_v$ 诱导出来的．$\operatorname{Br} k$ 的一个元素在 $\operatorname{Br} k_v$ 中的象称为一个局部不变量 (local invariant)．同态 $\sum$ 是对局部不变量求和．这个事实是在整体类域论中建立起来的．

如果 k 是代数封闭域上的一元代数函数域，则它的 Brauer 群是零 (曾 (炯之) 定理 (Tsen theorem))．任意常数域的情形在 [4] 和 [7] 中进行了探讨．

Brauer 群函子地依赖于 k，即如果 K 是 k 的一个扩域，则确定了一个同态 $\operatorname{Br} k \to \operatorname{Br} K$．它的核，记为 $\operatorname{Br}(K/k)$，是由在 K 上分裂的代数所在的类组成的．

借助于因子系所构造的叉积 ([5]) 可以给出 Brauer 群一个上同调的解释．对于任意正规扩张 K/k，存在着同构

$$\operatorname{Br}(K/k) \cong H^2(K, K^*),$$

这里 $H^2(K, K^*)$ 是系数在 K 的乘法群 K^* 中的二维 Galois 上同调群．此外，$\operatorname{Br} k$ 同构于 $H^2(\bar{k}, \bar{k}^*)$，其中 $\bar{k}$ 是 k 的可分闭包．一个中心单代数在相应于正合群列

$$\delta: H^1(K, \mathrm{PGL}(n, K)) \to H^2(K, K^*)$$

的上同调序列之中的上边缘算子

$$1 \to K^* \to \mathrm{GL}(n, K) \to \mathrm{PGL}(n, K) \to 1$$

作用下映射到它在 Brauer 群中的类，其中 $\mathrm{GL}(n, k)$ 和 $\mathrm{PGL}(n, k)$ 分别是 $n \times n$ 阶线性群和射影矩阵群．这里的集合 $H^1(K, \mathrm{PGL}(n, k))$ 被解释为在 k 上分裂的秩为 n^2 的中心单代数的 k 同构类的集合，或具有 k 有理点的 $n-1$ 维 **Brauer - Severi 簇** (Brauer - Severi variety) 的 k 同构类的集合．

所有 Brauer 群都是周期群．其任何元素的阶都是 n 的因子，其中 n^2 是代表此元素的体的秩．

Brauer 群的上同调解释使得它可以被视为可分闭包 $\bar{k}/k$ 的 Galois 群被 $\bar{k}^*$ 扩张所得到的类构成的群．

Brauer 群的概念的一个推广是 Brauer - Grothendieck 群 (Brauer - Grothendieck group)，其定义类似于 Brauer 群，只是用 Azumaya 代数代替中心单代数 ([7])．

参考文献

[1] Cassels, J. W. S. and Fröhlich, A. (eds.), Algebraic number theory, Acad. Press, 1967.

[2] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Algebra: Algebraic structures. Linear algebra, 1, Addison - Wesley, 1974, Chapt. 1; 2 (译自法文).

[3] Serre, J. - P., Cohomologie Galoisienne, Springer, 1964.

[4] Фаддеев, Д. К., 《Вестник Ленингр. ун - та》, 7 (1957), 45 – 51.

[5] Чеботарев, Н. Г., Введение в теорию алгебр, М. - Л., 1949.

[6] Deuring, M., Algebren, Springer, 1935.

[7] Grothendieck, A., Le groupe de Brauer Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ, in Dix exposés sur la cohomologie des schémas, North - Holland, 1968, 46 – 188.

[8] Milne, J. S., Etale cohomology, Princeton Univ. Press, 1980.

В. А. Исковских 撰

【补注】 关于借助于因子系构造叉积亦见**叉积** (cross product)，**群扩张** (extension of a group)．后者含有因子系的概念．

Brauer 群理论中的一个近期结果是 Merkuryev 和 Suslin 的定理 ([A1])，它的最简单的形式说明了在 k 是包含所有单位根的特征零的域时，$\operatorname{Br} k$ 是由在 k 的某循环扩张上分裂的代数的类生成的．此定理的证明基于 Brauer 群理论和**代数 K 理论** (algebraic K- theory) 的密切联系．交换环 k 上的一个代数 A，如果它在 k 上是有限生成的，中心的，又是可分的，则它是**东屋代数** (Azumaya algebra)．

参考文献

[A1] Suslin, A., Plenary adress, in Proc. Internat. Congress of Mathematicians Berkely, 1986.

赵春来 译

Brauer - Severi 簇 [Brauer - Severi variety; Брауэра - Севери многообразие]

域 k 上的一个**代数簇** (algebraic variety)，如果在 k 的代数闭包 $\bar{k}$ 上研究，它同构于一个**射影空间** (projective space)．

1932 年，F. Severi 研究了这种簇的算术性质；以

后F. Châtelet发现了Brauer - Severi簇与k上**中心单代数** (central simple algebra)以及**Brauer群** (Brauer group)之间的联系.

一维Brauer - Severi簇的最简单的非平凡例子是实射影平面$\mathbf{P}_{\mathbf{R}}^2$上的射影圆锥截线$Q$:

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0.$$

在复数域$\mathbf{C}$上，这个簇同构于射影直线$\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$.在同构意义下考虑的所有的一维Brauer - Severi簇的集合与(在k上射影等价意义下考虑的)非退化射影圆锥截线的集合一一对应.后者又与k上非同构广义**四元数** (quaternion)代数的集合一一对应.在上面的例子中，圆锥截线Q对应于寻常的四元数代数.

在多维情形下，n维Brauer - Severi簇的k - 同构类的集合可以等同于**Galois上同调** (Galois cohomology)群$H^1(k, \mathrm{PGL}(n+1, k))$.这里的$\mathrm{PGL}(n+1, k)$是射影空间$\mathbf{P}_k^n$的自同构的射影群([3], [4]). 这个上同调群描述了秩为$(n+1)^2$的中心单k代数(即矩阵代数$M_{n+1}(k)$的形式)的k同构类. Brauer - Severi簇与中心单代数之间的联系可更清楚地描述如下.对于秩为r^2的一个k代数A可以联系一个它的r秩左理想的簇X，它用A中所有r维k线性子空间的**Grassmann流形** (Grassmann manifold)的一个闭子簇定义. 在某些情况,例如四元数代数的情形下,簇X可用范数方程定义. 在[1]和[4]的研究中就利用了Brauer - Severi簇与代数间的联系.

Brauer - Severi 簇的最重要性质如下述. 一个Brauer - Severi簇k同构于射影空间$\mathbf{P}_k^n$当且仅当它在域k内有一个点.所有Brauer - Severi簇都在k的某个有限可分扩张K中有一个点([1]).

Hasse原理 (Hasse principle)可应用于定义在代数数域上的Brauer - Severi簇.

Brauer - Severi簇X上的有理函数域$k(X)$就是对应代数A的分裂域; 此外k的任意扩域K是A的分裂域当且仅当X有一个K点([4]).

与把中心单代数和Brauer群的概念推广到包括概形相联系，Brauer - Severi簇被推广到Brauer - Severi概形的概念([2]). 设$f: P \to X$是概形的态射.概形P称为Brauer - Severi概形 (Brauer - Severi scheme)，如果在X的**艾达尔拓扑** (étale topology)下它局部同构于X上射影空间$\mathbf{P}_X^n$. 概形X上的概形P是一个Brauer - Severi概形当且仅当$f: P \to X$是有限出现的正常平坦态射并且它的所有几何纤维都同构于射影空间([2]).

参考文献

[1] Châtelet, F., Variations sur un thème de H. Poincaré, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (3), **61** (1944), 249~300.

[2] Grothendieck, A., Le groupe de Brauer, in Dix exposés sur la cohomologie des schémas, North - Holland, 1968, 1-21.

[3] Serre, J. - P., Cohomologie Galoisienne, Springer, 1964.

[4] Roguette, P., On the Galois cohomology of the projective linear group and its applications to the construction of generic splitting fields of algebras, *Math. Ann.*, **150** (1963), 411-439.

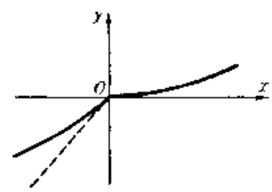
B. A. Исковских 撰

【补注】 n维Brauer - Severi簇是$\mathbf{P}_k^n$的一个$\bar{k}/k$形式.

陈志杰 译

折点 [**breaking point**; **излома точка**], **角点** (angle point)

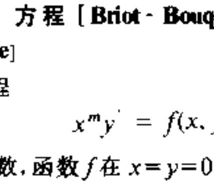
平面曲线的具有下述性质的奇点;曲线的两个分支均以这一点为端点,并且在这一点具有彼此不同的(单侧)切线. 例如,坐标原点是曲线$y = x/(1+e^{1/x})$(见图)的折点. 在折点上，左、右导数是不同的.



А. Б. Иванов 撰 张鸿林 译

Brianchon 定理 [**Brianchon theorem**; **Брианшона теорема**]

在任何外切于二次曲线的六边形(Brianchon **六边形**(Brianchon hexagon))中(见图),连接其相对**顶点**的三条直线相交于一点(Brianchon **点**(Brianchon point)). 这个定理是**Pascal定理** (Pascal theorem)的对偶,是Ch. J. Brianchon于1806年证明的.



А. В. Иванов 撰 张鸿林 译

Briot - Bouquet 方程 [**Briot - Bouquet equation**; **Брио-Буке уравнение**]

常微分方程

$$x^m y' = f(x, y), \tag{1}$$

其中m是正整数,函数f在$x=y=0$处是解析的,$f_y'(0,0) \neq 0$, $f(0,0)=0$. C. Briot和T. Bouquet([1])证明: 任何形式为

$$\alpha(z, w)w' = \beta(z, w)$$

的方程(其中$\alpha(0,0)=\beta(0,0)=0$, α和β在坐标原点上是解析的)都能通过特殊的局部变量变换化为有限个形式为(1)的方程. 方程(1)总是(除了$m=1$而$f_y'(0,0)$是自然数的情况以外)具有下列形式幂级数形式的唯一解:

$$y=\xi(x)\equiv\xi_1x+\xi_2x^2+\cdots, \tag{2}$$

如果$m=1$,则对足够小的$|x|$,级数(2)是收敛的;如果$m\neq1$,则对于一切$x\neq0$,级数(2)可能发散. 在(1)中,设

$$f\equiv f_0(x)+f_1(x)y,$$

这时,为了使级数(2)收敛,其必要和充分条件是满足$m-1$个关于f_0和f_1的Taylor级数的系数的条件;因为在这些条件中包含着一切系数,所以方程(1)的解析解$y=\xi(x)$是否存在,不能通过函数f的Taylor级数的任何部分和来证明(见[2],[3]). 对于一般函数f的情况,存在$(m-1)+(m-1)\times\infty$个这样的条件([4]). 因此,Briot - Bouquet方程有时指的是具有$m>1$的方程(1).

参考文献

[1] Briot, C. and Bouquet, T., Récherches sur les propriétés des équations différentielles, *J. École Polytechnique*, **21**(1856), 36, 133–198.

[2] Bieberbach, L., Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf funktionentheoretischer Grundlage dargestellt, Springer, 1965.

[3] Трюно, А. Д.,《Тр. Моск. матем. об-ва》, **25** (1971), 120–138(В ведение) (Bryuno, A. D., Analytical form of differential equations, Introduction, *Trans. Moscow Math. Soc.*, **25**(1971), 134–151).

[4] Martinet, J. and Ramis, J. P., Problèmes de modules, pour des équations différentielles du premier order, *Publ. Math. IHES*, **55** (1982), 63–164.

А. Д. Брюно 撰 张鸿林 译

Brouwer 格 [**Brouwer lattice; Браузра решетка**], Brouwer 结构 (Brouwer structure), Brouwer 代数 (Brouwer algebra)

一个**分配格** (distributive lattice),对其中每对元素a, b,都存在一个元素,称作伪差(pseudo difference) (常记作$a\dot{-}b$),它是具有性质$b+c\geqslant a$的最小元c. Brouwer 格的一个等价的描述是把它作为由**泛代数** (universal algebra)组成的簇, 具有三个二元运算$\bigcup$, $\bigcap$和$\dot{-}$,且满足一定的公理. 基于对Brouwer格与Brouwer **直觉主义逻辑**(intuitionistic logic)间的关联的认知,才有"Brouwer代数"这个术语的引入. Brouwer格又经常为伪Boole 代数(pseudo - Boolean algebra)所替代,后者的理论正是Brouwer格理论的对偶. 任何Brouwer格皆能转换成一个伪Boole代数,这只需引入一个新的序 $(a\leqslant'b)\Leftrightarrow(b\leqslant a)$; 根据公式

$$(a\bigcup{}'b)\Leftrightarrow(a\bigcap b),\ (a\bigcap{}'b)\Leftrightarrow(a\bigcup b)$$

引入新的并与交,以及对应于伪差$a\dot{-}b$的相对伪补运算 (operation of relative pseudo - complementation) $a\Longrightarrow b$. 反之,任何伪Boole代数都能当作一个Brouwer格. "Brouwer格"这个术语有时也用来指伪Boole代数(例如见[2]).

参考文献

[1] McKinsey, J. C. C. and Tarski, A., The algebra of topology, *Ann. of Math.* (2), **45** (1944), 1, 141–191.

[2] Birkhoff, G., Lattice theory, Amer. Math. Soc. 1967.

В. А. Янков 撰

【补注】 在西方文献中,伪Boole代数较普遍地称作Heyting 代数(Heyting algebra).对于完全Heyting代数(常称作标架(frame) 已有大量的研究, 这是由于它与拓扑学的联系;任一拓扑空间的开集所成的格是一个标架,而标架在某些方面又可视为广义拓扑空间. 见[A1], [A2], [A3].

参考文献

[A1] Fourman, M. P. and Scott, D. S., Sheaves and logic, in Applications of sheaves, **753** (1979), 302–401.

[A2] Johnstone, P. T., Stone spaces, Cam. Univ. Press, 1983.

[A3] Simmons, H., A framework for topology, in logic colloquinm '77, Studies in logic and foundations of math., **96** (1978), 239–251.

戴执中 译

Brouwer 定理 [**Brouwer theorem; Браузра теорема**]

1) Brouwer不动点定理(Brouwer fixed - point theorem):在一个n维单形到其自身的连续映射$f:S\to S$下,至少存在一点$x\in S$,使得$f(x)=x$;这个定理是L. E. J. Brouwer证明的([1]). 在稍早时, P. G. Bohl证明了一个等价定理([2]). Brouwer 定理可以扩张到n维拓扑向量空间的闭凸体上的连续映射,并且在各种方程解的存在性定理的证明中得到广泛的应用. Brouwer定理能推广到无限维拓扑向量空间.

参考文献

[1] Brouwer, L. E. J., Ueber eineindeutige, stetige Transformationen von Flächen in sich, *Math. Ann.*, **69** (1910), 176–180.

[2] Bohl, P., Ueber die Beweging eines mechanischen Systems in der Nähe einer Gleichgewichtslage, *J. Reine Angew. Math.*, **127** (1904), 179–276.

В. И. Соболев 撰

【补注】 Brouwer不动点定理有许多不同的证明. 而使用代数拓扑证明是最简短并且概念上最容易的. 也存在着完全初等的证明,例如[A1]的第四章. 1886年, H.

Poincaré 证明了连续映射 $f: E^n \to E^n$ 有一个不动点，现在知道它是与 Brouwer 不动点定理等价的([A2])．有一种有效的方法来计算(逼近)Brouwer 不动点，这些手法对包括经济平衡计算在内的多方面的应用是十分重要的([A1])．这种计算法首先由 H. Scarf 提出([A3])，后来在称之为同伦或计算函数零点的延拓法中得到发展，见 [A4]、[A5].

参考文献

[A1] Istrǎtescu, V. I., Fixed point theory, Reidel, 1981.

[A2] Poincaré, H., Sur les courbes definies par les équations differentielles, *J. de Math*, **2** (1886).

[A3] Scarf, H., The approximation of fixed points of continuous mappings, *SIAM J. Appl. Math.*, **15** (1967), 1328-1343.

[A4] Karamadian, S. (ed.), Fixed points. Algorithms and applications, Acad Press, 1977.

[A5] Allgower, E. and Georg, K., Simplicial and continuation methods for approximating fixed points and solutions to systems of equations, *SIAM Rev.*, **22** (1980), 28-85.

2) 关于区域不变性的 Brouwer 定理 (Brouwer theorem on the invariance of domain): 在从 Euclid 空间 E^n 的一个子集 A 到该空间另一子集 B 的任意同胚映射之下，A (关于 E^n)的任何内点映成 B (关于E^n)的内点，同时任何非内点映成非内点，这是由 L. E. J. Brouwer 证明的([1]).

参考文献

[1] Brouwer, L. E. J., Ueber Abbildungen von Mannigfaltigkeiten, *Math Ann.*, **71**(1912), 97-115

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 关于 Brouwer 区域不变性定理的近代表述见 [A1] 第七章第三节．这个结果对于拓扑维数 ($\dim E^n = n$) 的思想是重要的.

参考文献

[A1] Dugundji, J., Topology, Allyn and Bacon, 1966.

罗嵩龄、许依群、徐定宥 译

Brown 运动 [Brownian motion; Броуновского движения процесс]

悬浮在液体或气体中的微小粒子受介质中分子的碰撞做不规则的运动所形成的过程．有几种描述这一运动的数学模型([1])．在随机过程理论中最重要的 Brown 运动的模型是所谓的 **Wiener 过程** (Wiener process)，并且 Brown 运动的概念常常等同于这一模型.

参考文献

[1] Павлов, В. П., Броуновское движение, в кн., БСЭ, 3 изд., т 4.

【补注】 亦见 **Wiener 测度** (Wiener measure).

参考文献

[A1] Itô, K. and McKean, H. P., jr., Diffusion processes and their sample paths, Springer, 1974, Chapt. 1, 2.

刘秀芳译

Bruhat 分解 [Bruhat decomposition; Брюа разложение]

连通代数约化群 G 表成 **Borel 子群** (Borel subgroup) 的双陪集的并的一种表示式，其陪集代表以 G 的 **Weyl 群** (Weyl group) 作参数．更确切地说，令 B, B^- 是约化群 G 的两个相反的 Borel 子群；U, U^- 分别是 B, B^- 的幂幺部分，见**线性代数群** (linear algebraic group)，W 是 G 的 Weyl 群．下文中的 w 既代表 W 中的一个元素，也表示它在环面 $B \cap B^-$ 的正规化子中的代表元，因为下面所介绍的构造不依赖于代表元的选择．因此，可以对每一个元 $w \in W$ 考虑 $U_w^- = U \cap wU^-w^{-1}$．于是 G 可表示为不相交的双陪集 $BwB\,(w \in W)$的并，且态射 $U_w^- \times B \to BwB\,((x, y) \mapsto xwy)$ 是代数簇的同构．Bruhat 分解的更精确的陈述将产生投影簇 G/B 的胞腔分解．即，设 x_0 是 G/B 的(对于由 B 中元素所作的左平移)一个不动点(这样的点总存在，见 **Borel 不动点定理** (Borel fixed-point theorem))，G/B 将是形如 $U(w(x_0))\,(w \in W)$ 的不相交的 U 轨道的并，见**变换的代数群** (algebraic group of transformations)，而态射 $U_w^- \mapsto U(w(x_0))\ (u \mapsto u(w(x_0)))$ 是代数簇的同构．所有的群 U_w^- 作为簇同构于仿射空间；如果基域是复数域，则上面的每个 U 轨道在代数拓扑的意义下是胞腔，于是可计算 G/B 的同调．对许多典型群，Bruhat 分解的存在性在 1956 年由F. Bruhat 建立，一般情况是 C. Chevalley 证明的([3])．A. Borel 和 J. Tits 把 Bruhat 分解的结构推广到 k 上定义的代数群的 k 点的群 G_k([2])，Borel 子群的作用由极小抛物 k 子群承担，而群 U 的作用由它们的幂幺根承担；Weyl 群 W 则由 Weyl k 群 W_k 或相对 Weyl 群来代替.

参考文献

[1] Borel, A., Linear algebraic groups, Benjamin, 1969.

[2] Borel, A. and Tits, J., Groupes réductifs, *Publ. Math. IHES*, **27** (1965), 55-150

[3] Chevalley, C., Classification des groupes de Lie algébriques, 2, Paris, 1958.

В. П. Платонов 撰 石生明 译 许以超 校

Brun 筛法 [Brun sieve; Бруна решето]

V. Brun ([1]) 提出的初等数论中的一种**筛法** (sieve method)，它是 **Eratosthenes 筛法** (Eratosthenes sieve) 的一种进展．Brun 筛法可描述如下：在一个由不超过 x 的自然数 a_n 组成的数列中，除去("筛去")只有小的素除数的数，而留下只具有大的素除数的素数和**殆素数** (almost-prime number)．设 $P(x)$ 是留下的这些数的个数．可以证明 $P(x)$ 是界于两个项数相对比较少的和式之间，且可以估计这两个和式的上界与下界，这

样，就可以估计在一个给定区间内的孪生素数(twins)的个数的上界．Brun筛法被应用于加性数论中．Brun用他的筛法证明了：大偶数 N 可以表为 $N=P_1+P_2$，这里 P_1 和 P_2 都至多有9个素因子．

参考文献

[1] Brun, V., Le crible d'Eratosthene et le théorème de Goldbach, *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math.*, **168** (1919), 11, 544–546.

[2] Гельфонд, А. О., Линник, Ю. В., Элементарные методы в аналитической теории чисел, М., 1962 (英译本: Gel'fond, A. O. and Linnik, Yu. V., Elementary methods in the analytic theory of numbers, M. I. T., 1966).

[3] Trost, E., Primzahlen, Birkhäuser, 1953.

Н. И. Климов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Halberstam, H. and Richert, H.-E., Sieve methods, Acad. Press, 1974.

潘承彪 译 戚鸣皋 校

Brun 定理 [Brun theorem; Бруна теорема]，关于孪生素数的

当 p 取值于所有孪生素数(twins)的第一个素数时，级数 $\sum 1/p$ 收敛．这个结论意味着即使有无穷多对孪生素数，它们在自然数列中仍然是十分稀少的．这条定理是 V. Brun([1])证明的．后来，还证明了关于广义孪生素数的类似的级数也是收敛的．

参考文献

[1] Brun, V., La série 1/5+1/7+⋯ ou les dénominateurs sont "nombres premiers jumeaux" et convergente ou finie, *Bull. Sci. Math.* (2), **43** (1919), 100–104; 124–128.

[2] Trost, E., Primzahlen, Birkhäuser, 1953.

Н. И. Климов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Halberstam, H. and Richert, H. E., Sieve methods, Acad. Press, 1974.

潘承彪 译 戚鸣皋 校

Brunn-Minkowski 定理 [Brunn-Minkowski theorem; Брунна-Минковского теорема]

设 K_0 和 K_1 是 n 维 Euclid 空间中的凸集，令 K_λ ($\lambda\in[0,1]$) 是按 $\frac{\lambda}{1-\lambda}$ 之比分割两端分别落在 K_0, K_1 中的线段的点组成的集合(称为 K_0 和 K_1 的一个线性组合)；又令 $V(\lambda)$ 是集合 K_λ 的体积的 n 次方根，那么 $V(\lambda)$ 是 λ 的凹函数，即对所有 $\lambda_1,\lambda_2,\rho\in[0,1]$，成立不等式

$$V(\lambda_1(1-\rho)+\lambda_2\rho)\geqslant(1-\rho)V(\lambda_1)+\rho V(\lambda_2),$$

函数 $V(\lambda)$ 是线性的(这时不等式成为等式了)当且仅当 K_0 与 K_1 是位似的．Brunn-Minkowski 定理可以推广到若干个凸集的线性组合．它被用来解极值与唯一性问题．它是在1887年被H. Brunn发现的，并在1897年为H. Minkowski所完善并改述得更为精确．

参考文献

[1] Buseman, H., Convex surfaces, Interscience, 1958.

[2] Hadwiger, H., Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie, Springer, 1957.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Leichtweiss, K., Konvexe Mengen, Springer, 1979.

虞言林 译

Бубнов-Галёркин 法 [Bubnov-Galerkin method; Бубнова-Галёркина метод]

见 **Галёркин 法** (Galerkin method).

Budan-Fourier 定理 [Budan-Fourier theorem; Бюдана-Фурье теорема]

代数方程

$$f(x)=0$$

在区间 (a,b) $(a<b)$ 中根的个数等于或比 $\tau=t_1-t_2$ 小一个偶数，这里 t_1 是多项式 $f(x)$ 在点 a 的导数系列

$$f(a),f'(a),\ldots,f^{(n)}(a)$$

中的符号改变次数，t_2 是同一系列在 b 点的符号改变次数．每个重根根据它的重数计算个数．这是由F. Budan (1822)和J. Fourier (1820)建立的．

参考文献

[1] Энциклопедия элементарной математики, кн. 2-Алгебра, М.-Л., 1951, 331.

О. А. Иванова 撰

【补注】 Budan-Fourier 定理在数值分析中的应用可以在[A1]中找到，那里它被用于样条函数的插值．

参考文献

[A1] Boor, C. de and Schoenberg, I. J., Cardinal interpolation and spline functions Ⅶ. The Budan-Fourier theorem for splines and applications., in K. Bohmer, G. Meinardus and W. Schemp (eds.), Spline functions, Lect. Notes in Math., Vol. 501, Springer, 1976.

[A2] Householder, A. S., Unique triangularization of a nonsymmetric matrix, *J. Assoc. Comp. Mach.*, **5** (1958), 339–342

郭祥东 译

Buffon 问题 [Buffon problem; Бюффона задача]，关于投针的

几何概率(geometric probabilities)论中的一个古

典问题,被理所当然地看成是这一理论发展中的出发点. 首先由 G. Buffon 于 1733 年提出,在[1]中重新提出并给予解答. Buffon 考虑了下列情况: 一根长度为 $2r$ 的针,其中 $2r<a$,随机地扔在画有相距为 a 的平行线的平面上. 如此扔下的这根针将搁在某一根线上的概率是多少? 显然,这根针的位置由它的中心到最靠近的直线间的距离 x 和这根针同该直线的垂线之间的锐角 θ 所确定. 量 x 介乎 0 和 $a/2$ 之间,而 θ 则介乎 0 和 $\pi/2$ 之间. 假定点 (x,θ) 在相应的矩形中均匀地分布 (这等价于假定随机变量 x 和 θ 是独立的且均匀地分布在 $(0,a/2)$ 和 $(0,\pi/2)$ 上). 这时所求的概率可定义为对应于有利结果与所有可能结果的面积之比,即

$$p=\frac{1}{\frac{a}{2}\frac{\pi}{2}}\int_0^{\pi/2} r\cos\theta\,d\theta=\frac{4r}{a\pi}. \qquad (*)$$

过去 Buffon 问题曾用来作为对 **Bernoulli 定理** (Bernoulli theorem)进行实验检验的工具. 事实上, 如果这根针扔了 n 次, 且有 m 次盖住了某根线, 按照 Bernoulli 定理, 对于值大的 n, 频率 m/n 应该接近于这一概率 $(*)$. 这一思想被许多学者利用来通过试验确定数 π (见[1], [2]). Buffon 也考虑了其他的类似问题, 特别是针盖住了属于两个相互垂直的系统中的线这一问题, 那些线把平面分割成为边长分别是 a 和 b 的矩形. Buffon 所给的关于这一问题的答案是错误的. 正确的解答

$$\frac{4r(a+b)-4r^2}{\pi ab}$$

被 P. Laplace 于 1812 年找到.

参考文献

[1] Buffon, G., Essai d'arithmetique morale. Supplement à 'l'Histoire Morale', 4, 1777.

[2] Uspensky, J. V., Introduction to mathematical probability, McGraw-Hill, 1937.

[3] Kendall, M. G. and Moran, P. A. P., Geometric probability, Griffin, 1963.

A. B. Прохоров 撰　陈培德 译

丛 [bundle; связка]

【补注】 对于一个(2 维)对象族而言,通常的名称是**网**(net)(亦见**球面罗** (web of spheres)).

亦见**向量丛** (vector bundle); **纤维空间** (fibre space); **纤维化** (fibration).　　　张　平 译

Буняковский 不等式 [Bunyakovskii inequality, Буняковского неравенство]

数学分析中的一个不等式; 对于平方可积的函数 $f(x)$ 和 $g(x)$, 有

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right]^2\leqslant\int_a^b f^2(x)\,dx\int_a^b g^2(x)\,dx.$$

它是 **В. Я. Буняковский** 证明的([1]). 这个不等式类似于 Cauchy 的代数不等式

$$(a_1b_1+\cdots+a_nb_n)^2\leqslant$$
$$\leqslant(a_1^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+\cdots+b_n^2).$$

Буняковский 不等式有时也称为 Schwarz 不等式; 然而, Буняковский 早在 1859 年就发表了他的研究结果; 相反, 这个不等式直到 1884 年才在 H. A. Schwarz 的工作中出现 (完全没有参考 Буняковский 的工作).

参考文献

[1] Bounjakowsky, W., Sur quelques inegalités concernant les intégrales aux différences finis, *Mem. Acad. Sci. St. Petersbourg* (7), **1** (1859), 9.

B. И. Битюцков 撰

【补注】 在西方的文献中, 这个不等式常常称为 Cauchy 不等式 (Cauchy inequality), 或 Cauchy-Schwarz 不等式 (Cauchy-Schwarz inequlity). 它对函数 $f(x)\in L_p$ 和 $g(x)\in L_q$ $(1/p+1/q=1)$ 情况的推广, 称为 **Hölder 不等式** (Hölder inequality).

上述 Cauchy 的代数不等式对于实数 a_i, b_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 成立. 对于复数 a_i, b_i $(i=1,2,\cdots,n)$, 这个不等式写作

$$|a_1\bar b_1+\cdots+a_n\bar b_n|^2=$$
$$=|a_1^2+\cdots+a_n^2|\cdot|b_1^2+\cdots+b_n^2|.$$

它也存在类似于 Hölder 不等式的推广

参考文献

[A1] Rudin, W., Principles of mathematical analysis, McGraw-Hill, 1953 (中译本: W. 卢丁, 数学分析原理, 人民教育出版社, 1979).

张鸿林 译

Burkill 积分 [Burkill integral; Беркилла интеграл]

J. C. Burkill ([1]) 为了确定曲面面积而引进的一种概念. Burkill 积分的近代形式是为了 n 维线节(块)上的非加性函数 $F(J)$ 的积分而引入的. 设 R 为可以表示成有限个线节之并的点集 (这种集合称为图(figure)). R 的每一个表示 $R=\bigcup J_k$ 称为图 R 的一种划分 (subdivision). 线节函数 $F(J)$ 在图 R 上的 Burkill 上积分 (upper Burkill integral) 与 Burkill 下积分 (lower Burkill integral) 依次定义为, 当划分中线节的最大直径趋于 0 时, 对应的和 $\sum_k F(J_k)$ 的上极限与下极限. 假如这两个积分相等, 它们的公共值就是 F 在 R 上的 Burkill 积分 (Burkill integral) 并记为 $\int_R F$. 假如 F 在 R 上可积, 那么 F 在 R 的任意的图 $R_1\subset R$ 上也可积. 这样, 就可以引进 Burkill 不定积分 (indefinite Burkill in-

tegral)概念，后者为加性集函数．如果 F 连续，则它的 Burkill 不定积分也连续．

Burkill 积分的概念可以推广到定义在抽象测度空间中某些子集类上的集函数的情形．这种子集类必须满足一些必要条件；特别地，类中的集都可以分解成一些测度可以任意小的子集，后者仍属于同一集类．这样，类似于 n 维的情形，可以在集类中的任一集上定义 Burkill 积分，其上、下积分就定义为，当被分解的子集的测度的最大值趋于 0 时的相应和式的上、下极限．Burkill 积分还可以自然地推广到取值于某交换拓扑群的集函数．Burkill 积分不如以后引进的 **Колмогоров 积分** (Kolmogorov integral) 那样更为一般，后者又称为 Burkill-Колмогоров 积分 (Burkill-Kolmogorov integral)．将划分作适当的序化以后，凡是 Burkill 可积的函数，一定也是 Колмогоров 可积的．逆命题只有在某些外加条件满足时才成立．在各种不同空间构造 **Denjoy 积分** (Denjoy integral) 时，要用到 Burkill 积分．

Burkill 积分的名词也用来表示 **Perron 积分** (Perron integral) 的许多推广 (*AP* 积分 (*AP*-integrals)，*CP* 积分 (*CP*-integrals)，*SCP* 积分 (*SCP*-integrals)，这些积分也被 Burkill 所引入．在这些积分的定义中，代替普通导数而使用了广义导数，它们在三角级数论中也要用到．

参考文献

[1A] Burkill, J. C., Functions of intervals, *Proc. London Math. Soc.* (2), **22** (1924), 275–310.

[1B] Burkill, J. C., The expression of area as an integral, *Proc. London Math. Soc.* (2), **22** (1924), 31–336.

[2] Saks, S., Theory of the integral, Hafner, 1952 (译自波兰文).

[3] Романовский, П. И., 《Матем. сб.》, 9(1941), 1, 67–120.

[4] Burkill, J. C., Integrals and trigonometric series, *Proc. London Math. Soc.* (3), **1** (1951), 46–57.

В. А. Скворцов 撰　王斯雷 译

Bürmann-Lagrange 级数 [**Bürmann-Lagrange series**; **Бюрмана-Лагранжа ряд**], Lagrange 级数 (Lagrange series)

为全纯函数的局部反函数问题提供完全解的一种幂级数．设复变量 z 的函数 $w=g(z)$ 在点 $z=a$ 的邻域内正则，且 $g'(a)\neq 0$．令 $g(a)=b$，则在 w 平面的点 $w=b$ 的某邻域内存在正则函数 $z=h(w)$，它是 $g(z)$ 的反函数且满足 $h(b)=a$．进而，如果 $f(z)$ 是任一在点 $z=a$ 的邻域内正则的函数，则复合函数 $F(w)=f[h(w)]$ 在点 $w=b$ 的邻域内可展开为 Bürmann-Lagrange 级数：

$$F(w)=f(a)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left\{\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[f'(z)\left[\frac{z-a}{g(z)-b}\right]^{n}\right]\right\}_{z=a}(w-b)^{n}. \qquad (*)$$

函数 $w=g(z)$ 的反函数可通过令 $f(z)\equiv z$ 得到．

展开式(*)由下述 Bürmann 定理 (Bürmann's theorem) ([1]) 得到：在上述关于全纯函数 $g(z)$ 和 $f(z)$ 的假定下，函数 $f(z)$ 在 z 平面的含有点 a 的某个区域内可表示为

$$f(z)=f(a)+\sum_{n=1}^{m-1}\frac{[g(z)-b]^{n}}{n!}\left\{\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[f'(z)\left[\frac{z-a}{g(z)-b}\right]^{n}\right]\right\}_{z=a}+R_{m},$$

其中

$$R_{m}=\frac{1}{2\pi i}\int_{a}^{z}\int_{\gamma}\left[\frac{g(z)-b}{g(t)-b}\right]^{m-1}\frac{f'(t)\,g'(z)\,dt\,dz}{g(t)-g(z)},$$

而 γ 是 t 平面中包围点 a 和 z 的围道，并满足：如果 ζ 是 γ 内任一点，则除单根 $t=\zeta$ 外，方程 $g(t)=g(\zeta)$ 在 γ 上或 γ 内没有别的零点．

当 $b=0$ 时的展开式(*)是由 J. L. Lagrange 得到的 ([2])．

如果导数 $g'(t)$ 在点 $z=a$ 处有 $r-1$ 阶零点，则有下述 Bürmann-Lagrange 级数关于多值反函数的推广 ([3])：

$$F(w)=f(a)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left\{\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[f'(z)\left[\frac{z-a}{g(z)-b}\right]^{n}\right]\right\}_{z=a}(w-b)^{n/r}.$$

对于在圆环内正则的函数 $g(z)$，还有另外的推广 (例如，见 [4])；代替级数(*)的是含有差 $w-b$ 的正幂与负幂的级数．

参考文献

[1] Bürmann, H., *Mem. Inst. Nat. Sci. Arts. Sci. Math. Phys.*, **2** (1799), 13–17.

[2A] Lagrange, J. L., *Mem. Acad. R. Sci. et Belles-lettres Berlin*, **24** (1770).

[2B] Lagrange, J. L., Additions au mémoire sur la résolution des équations numériques, Oeuvres, Vol. 2, Georg Olms, 1973, 579–652.

[3] Hurwitz, A., Courant, R., Vorlesungen über allgemeine Funktionenentheorie und elliptische Funktionen, 1, Springer, 1968.

[4] Whittaker, E. T., Watson, G. N., A course of modern analysis, Cambridge Univ. Press, 1952.

[5] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967 (中译本：А. И. 马库雪维奇，解析函数论，高等教育出版社，1957).

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 在 [A1] 中有 Lagrange-Bürmann 定理和级数的详尽论述．

参考文献

[A1] Henrici, P., Applied and computational complex analysis, 1, Wiley, 1974

沈永欢 译

Burnside 问题 [Burnside problem; Бёрнсайда проблема]

1) 有限群的 Burnside 问题 (Burnside problem for finite groups): 是否存在奇阶不可解有限群? 或者换一种说法: 是否所有非 Abel 单群都是偶阶群? 这问题与 W. Burnside 的名字相联系, 他在 1897 年注意到, 当时已知的所有非 Abel 有限单群都是偶阶群 ([1]). 1962 年 W. Feit 和 J. G. Thompson 解决了这个问题 ([2]), 证明所有的奇阶有限群皆可解.

参考文献

[1] Burnside, W., Theory of groups of finite order, Cambridge Univ. Press, 1897.

[2] Feit, W. and Thompson, J. G., Solvability of groups of odd order, *Pacific J. Math.*, **13** (1964), 775 – 1029.

В. Д. Мазуров 撰

【补注】 在 [1] 中, Burnside 还证明了所有阶为 $p^a q^b$ 的群皆为可解群, 其中 p, q 是素数且 $a, b \geqslant 0$.

2) 周期群的 Burnside 问题 (Burnside problem for periodic groups): 这问题是 W. Burnside 于 1902 年提出来的 ([1]): 每个元素皆为有限阶的有限生成群是否总是有限群 (无界的 Burnside 问题 (unbounded Burnside problem))? 这问题也可叙述如下: 所有的周期群是否是**局部有限群** (locally finite group)? Burnside 本人已强调了该问题的一种重要的特殊情形, 即群的元素的阶一致有界的情形 (有界的 Burnside 问题 (bounded Burnside problem)), 也即对某个自然数 n, 恒等式 $x^n = 1$ 对该群成立. 正是有界 Burnside 问题最引人注目. 换句话说, 研究对象是商群 $B(d, n) = F/F^n$, 其中 F 是具有 $d \geqslant 2$ 个生成元的自由群, F^n 是包含所有元素 $f \in F$ 的 n 次幂 f^n 的最小正规子群. 下列结果是已知的: $B(d, 2)$ 是 2^d 阶初等 Abel 群 $B(d, 3)$ 是 3^{m_d} 阶有限群, 这里

$$m_d = \binom{d}{1} + \binom{d}{2} + \binom{d}{3}$$

([1], [2]); $B(d, 4)$ 是有限群 (如 $d=2$, 是 2^{12} 阶, $d=3$ 是 2^{69} 阶 ([1], [3], [4])); $B(d, 6)$ 是 $2^S 3^t$ 阶有限群, 其中 $S = 1 + (d-1)3^{m_d}$, $t = m$, 且 $r = 1 + (d-1)2^d$ ([5], [6]). 有界 Burnside 问题的否定回答是 1959 年宣布的 ([7]). 无界 Burnside 问题的否定的回答于 1964 年发表 ([8]). 接着给出了周期的但非局部有限的群的另外的作法 ([9]). П. С. Новиков 和 С. И. Адян 于 1968 年证明 ([10]), 对所有奇数 $n \geqslant 4381$, $B(d; n)$ $(d \geqslant 2)$ 是无限群 (无界 Burnside 问题的一个否定回答). 接着, 对这些 d, n 值证明了字的问题及共轭问题在 $B(d, n)$ 中是可解的; $B(d, n)$ 不能用有限个定义关系 (difining relationships) 表出; $B(d, n)$ 中所有有限子群是 Abel 群, 且所有 Abel 子群是循环群; $B(d, n)$ $(d \geqslant n)$ 不满足正规子群的极大和极小条件, $B(d, n)$ $(d > 2)$ 可以同构地嵌入群 $B(2, n)$. 用 [10] 中的近代方法对无限群 $B(d, n)$ 性质的一项研究, 可见专著 [11], 特别地, 书中将前面提到的奇值 n 的界减小到 $n \geqslant 655$. 一个困难的问题是给出数 n 的精确的界使 $B(d, n)$ 成为有限或无限. 值 $n=5$, 12 和 $n=2^m$ $(m \geqslant 3)$ 在这里特别有兴趣.

根据从 20 世纪 30 年代中期起而最终发展成的想法, 下列问题在有限群论中具有重要意义: 前面提到的服从恒等式 $x^n = 1$ 的 d 个生成元的有限群的阶被某自然数 $b(d, n)$ 界定, 它是否仅依赖于 d 和 n? 这是所谓限制的 Burnside 问题 (restricted Burnside problem). 对所有素指数 $n = p$, 已得到肯定的解答 ([13]). 可证明存在阶为 $b(d, p)$ 的泛有限 p 群 $\overline{B(d, p)}$, 它的诸商群同构于所有其他满足关系式 $x^p = 1$ 的 d 个生成元的有限群. 如果 $B(d, p)$ 是有限群, 那么有 $\overline{B(d, p)} = B(d, p)$. 比较 [10] 和 [13] 中的结果可导致下述结论: 设 p 充分大, 则存在指数为 p 的有限生成的无限单 p 群. 已证明 $b(2, 5) = 5^{34}$. 对于 $p \geqslant 7$, 下面将看到 $b(d, p)$ 仅有少数估值, 它们同群 $\overline{B(d, p)}$ 的幂零类数相应的估值 $c(d, p)$ 相联系. 已知 $c(2, p)$ 不能是 p 的线性函数. 更重要的是 $c(d, p)$ 随 d 无限地增长 ([14], [15]). 对 $n = p^m$ $(m > 1)$ 的 $\overline{B(d, n)}$ 的存在性问题从 $n=8$ 和 9 开始仍未解决 (1977). 同时, 对所有无平方因子的 n, 由 [6] 和 [13] 中所报告的结果、奇阶群的可解性定理 (见有限群的 **Burnside 问题** (Burnside problem)) 以及与单群分类有关的事实可得 $\overline{B(d, n)}$ 的存在性.

无界 Burnside 问题及限制的 Burnside 问题的创造性的解答 ([8] 和 [13]) 部分地根据代数理论: 前一情形是根据代数的无限维性的准则; 后一情形是根据 **Lie 代数** (Lie algebra) 中的一个恒等式, 它与群中恒等式 $x^p = 1$ 类似 ([16], [17]). 除上面提到的以外, 还有其他的 Burnside 型问题, 它们也受到了相当多的注意 ([8], [9]).

参考文献

[1] Burnside, W., On an unsettled question in the theory of discontinuous groups, *Quart. J. Pure Appl. Math.*, **33** (1902), 230 – 238.

[2] Levi, F. V. and Waerden, B. L. Van der., Ueber eine besondere klasse von Gruppen, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **9** (1932), 154 – 158.

[3] Санов, И. Н., 《Уч. зап. ЛГУ. Сер. матем.》, **10** (1940), 166 – 170.

[4] Bayes, A. J., Kautsky, J. and Wamsley, T. W., Proc. 2-nd Internat. Conf. Theory of Groups, Canberra, 1973, 82 – 89.

[5] Hall, M., Solution of the Burnside problem for exponent 6, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **43** (1957), 751 – 753.

[6] Hall, P. and Higman, G.. On the *p*-length of *p* soluble groups and reduction theorems for Burnside's problem, *Proc. London Math. Soc.* (3), **6** (1956), 1 – 42

[7] Новиков, П. С., 《Докл. АН СССР》, **127** (1959), 4, 749 – 752.

[8] Голод, Е. С., в кн., Труды Международного конгресса математиков, М , 1968, 284 – 289.

[9] Алёшин, С. В., 《 Матем. заметки 》, 11 (1972), 3, 319 – 328.

[10A] Новиков, П. С., Адян, С. И., 《 Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **32** (1968), 1, 212 – 244.

[10B] Новиков, П. С., Адян, С. И., 《Изв. АН СССР Сер. матем.》, **32** (1968), 3, 709 – 731.

[11] Адян, С. И., Проблема Бернсайда и тождества в группах, М., 1975 (英译本:Adyan, S. I., The Burnside problem and identities in groups, Springer, 1979).

[12] Шмидт, О. Ю., Избранные труды. Математика, М., 1959, 298 – 300.

[13] Кострикин, А. И., 《 Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **23** (1959), 1, 3 – 34.

[14] Bachmuth S. M., Muchizuki. H. Y. and Walkup, D. W., A nonsolvable group of exponent 5, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **76** (1970), 3, 638 – 640.

[15] Размыслов, Ю. П., Алгебра и логика, **10** (1971), 1, 33 – 44 (英译本: Razmyslov, Yu. P., On Lie algebras satisfying the Engel condition, *Algebra and Logic*, **10** (1971), 1, 21 – 29).

[16] Magnus, W., Ueber Beziehungen zwischen höheren Kommutatoren, *J. Reine Angew. Math.*, **177** (1937), 105 – 115.

[17] Higman, G., Lie ring methods in the theory of finite nilpotent groups, in Proc. Internat. Congress Mathematicians Edinburgh, 1960, Cambrige Univ. Press, 1960, 307 – 312.

[18] Курош, А. Г., 《 Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **5** (1941), 233 – 240.

А. И. Кострикин 撰

【补注】 限制的 Burnside 问题在指数为5的情形的肯定的回答首先在[A11]中得到. 1977 年至 1986 年间,关于周期群的 Burnside 问题,获得了许多新结果. R. I. Grigorchuk ([A1])提出了有限生成的无限 p 群的一个最简单的构造法. 特别地(见[A2]),给出了中间增长的,即既不是多项式增长也不是指数增长的群的构造;进而给出了这样的周期群和这样的无扭群的构造法(Milnor 问题(Milnor problem)的解).

对于奇数 $n>10^{10}$ 的有界 Burnside 问题的否定的解答,一个简单且几何直观上显然的说法是由 A. Yu. Ol'shanskiĭ 给出的([A3]). 后来他对每个足够大的素数 p 构造了一个无限 p 群(见[A4]),使得它的所有正规子群皆为 p 阶(Tarski 魔怪(Tarski monster)). 这是对 Burnside 问题的最强形式的否定解答. 对限制的 Burnside 问题已经做的每一件事都综合在[A5] 和 [A6]中. 在[A6] 中列出了完备的文献以及许多科学家的计算机试验结果:

$$|B(4,4)|=2^{422} \text{ (见[A7])},$$

$$|B(3,5)|\leqslant 5^{2282} \text{ (见[A8])},$$

$$|B(2,7)|>7^{6366},$$

$$|B(2,5)|=5^{34} \text{ (见[A9])}.$$

另外,[A10] 也表明是有用的.

参考文献

[A1] Grigorchuk, R. I., On Burnside's problem for periodic groups, *Funktsional. Anal. i Prilozhen*, **14** (1980), 1, 53 – 54 (俄文).

[A2] Grigorchuk, R. I., Milnor's problem on the growth of groups, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **271** (1983), 1, 30 – 33 (俄文).

[A3] Ol'shanskiĭ, A. Yu., On a theorem of Novikov-Adyan, *Mat. Sb.*, **118** (1982), 2, 202 – 235 (俄文).

[A4] Ol'shanskiĭ, A. Yu., Groups of bounded period in which all subgroups are of prime order, *Algebra i Logika*, **21** (1982), 5, 555 – 618 (俄文).

[A5] Vaughan-Lee, M. R., The restricted Burnside problem, *Bull. London Math. Soc.*, **17** (1985), 113 – 133.

[A6] Kostrikin, A. I., Around Burnside, Springer, 将出版.

[A7] Alford, Havas, G. and Newman, M. F., Groups of exponent four, *Notices Amer. Math. Soc.*, **22** (1975), A. 301.

[A8] Havas, G., Newman, M. F. and Vaughan-Lee, M. R., A nilpotent quotient algorithm for graded Lie rings, 将发表.

[A9] Havas, G., Wall, G. E. and Wamsley, J. W., The two generator restricted Burnside group of order five, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **10** (1974), 459 – 470.

[A10] Mennicke, J. L. (ed.), Proc. Burnside workshop, Bielefeld, 1977, Lect. Notes Math., Vol. 806, Springer, 1980.

[A11] Higman, G., On finite groups of exponent five, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **52** (1956), 381 – 390.

石生明译 许以超校

C

C^* 代数 [C^* - **algebra** ; C^* - **алгебра**]

复数域上的具有对合运算 $x \to x^*(x \in A)$ 的 **Banach 代数**(Banach algebra)A, 对于任何元素 $x \in A$, 其范数和对合是由关系式 $\| x^*x \| = \| x \|^2$ 相联系的. C^* 代数是在 1943 年([1])以全正则环(totally regular rings)的名称引入的; 它们也称为 B^* 代数. C^*代数最重要的例子是:

1) 局部紧 Hausdorff 空间 X 上的在无穷远处趋于零的连续复值函数代数 $C_0(X)$(即在 X 上有下列性质的连续函数 f 的全体: 对于任何 $\varepsilon>0$, 满足条件 $|f(x)|\geq\varepsilon$ 的点 $x \in X$ 的集合是 X 中的紧集); $C_0(X)$ 具有一致范数

$$\| f \| = \sup_{x \in X} | f(x) |.$$

$C_0(X)$中的对合被定义为对复共轭函数的转换: $f^*(x)=\overline{f(x)}$. 任何交换 C^* 代数 A 等距对称同构(即作为具有对合的 Banach 代数 A 同构)于 C^* 代数 $C_0(X)$, 其中 X 是赋予 Гельфанд 拓扑的 A 的极大理想空间([1],[2],[3]).

2) 对通常的算子线性运算和算子乘法来考虑的 Hilbert 空间 H 上的所有有界线性算子所组成的代数 $L(H)$. $L(H)$中的对合被定义为对伴随算子的转换, 范数被定义为通常的算子范数.

一个子集 $M \subset A$ 称为自伴的(self-adjoint), 如果 $M=M^*$, 这里 $M^*=\{x^*: x \in M\}$. C^* 代数 A 的任何闭自伴代数 B 关于取自 A 的线性运算、乘法、对合和范数是 C^*代数; B 称为 A 的 C^* 子代数. 任何 C^*代数等距对称同构于某个形式为 $L(H)$的 C^* 代数的 C^* 子代数. 一个 C^* 代数中的闭双边理想 I 是自伴的(从而 I 是 A 的 C^* 子代数), 而赋予自然的线性运算、乘法、对合和商空间范数后的商代数 A/I 是 C^* 代数. Hilbert 空间 H 上的全连续线性算子集合 $K(H)$是 $L(H)$中的闭双边理想. 如果 A 是 C^* 代数, $\widetilde{A}$是由 A 附加单位元后而得到的具有对合的代数, 那么 $\widetilde{A}$ 上存在唯一的范数, 使 $\widetilde{A}$ 变为 C^* 代数, 且该范数延拓了 A 上的范数. 此外, 对于 C^* 代数可定义有界直和及张量积运算 ([3], [4]).

正如在所有具有对合的对称 Banach 代数中那样, 在一个 C^* 代数 A 中有可能定义下列子集: Hermite 元的实线性空间 A_h; 正规元集; 酉元的乘法群(只要 A 包含单位元); 以及正元集 A^+. 集合 A^+ 是 A_h 中的闭锥, $A^+ \cap (-A)^+ = \{0\}$, $A^+ - A^+ = A_h$, 且锥 A^+ 使 A_h 变为实的有序向量空间. 如果 A 包含单位元 1, 那么1是锥 $A^+ \subset A_h$ 的内点. A 上的线性泛函 f称为正的(positive), 如果对于所有 $x \in A^+, f(x) \geq 0$ 成立; 这样的泛函是连续的. 如果 $x \in B$, 这里 B 是 A 的 C^* 子代数, 那么 x 在 B 中的谱重合于 x 在 A 中的谱. Hermite 元的谱是实的, 酉元的谱在单位圆周上, 而正元的谱是非负的. 对于 C^* 代数的正规元的函数演算已经建立. 任何 C^* 代数 A 有一在 A 的单位球中、且由 A 的正元形成的近似单位元. 如果 I, J 是 A 中的闭双边理想, 那么$(I+J)$ 也是 A 中的闭双边理想, 且 $(I+J)^+=I^++J^+$. 如果 I 是 J 中的闭双边理想, J 是 A 中的闭双边理想, 那么 I 是 A 中的闭双边理想. A 中的任何闭双边理想是所有包含它的本原双边理想的交; A 中的任何闭左理想是所有包含它的极大正则左理想的交.

C^* 代数的任何 * 同构是等距的. 一个具有对合的 Banach 代数 B 到一个 C^* 代数的任何 * 同态 π 是连续的, 且对于任何 $x \in B$, $\| \pi(x) \| \leq \| x \|$ 成立. 特别是, 一个具有对合的 Banach 代数的所有表示(即 B 到形式为 $L(H)$的 C^* 代数的所有 * 同态)是连续的. C^* 代数的表示理论形成 C^* 代数理论的一个重要部分,

C^* 代数理论的应用也与 C^* 代数的表示理论有关. C^* 代数的表示性质使得有可能对于每个 C^* 代数 A 来构造一个拓扑空间 $\hat{A}$, 称为 C^* 代数的谱, 且这个空间被赋予 **Mackey - Borel 结构** (Mackey - Borel structure). 在一般情形下, C^* 代数的谱不满足任何分离公理, 但它是局部紧的 **Baire 空间** (Baire space).

一个 C^* 代数 A 称为 CCR 代数 (CCR - algebra) (相应地, GCR 代数 (GCR - algebra)), 如果对于 C^* 代数在 Hilbert 空间 H 中的任何非零不可约表示 π, 关系式 $\pi(A)=K(H_\pi)$ (相应地, $\pi(A)\supset K(H_\pi)$) 满足.

一个 C^* 代数 A 称为 $NGCR$ 代数 ($NGCR$ - algebra), 如果 A 不包含非零闭双边 GCR 理想 (即本身是 GCR 代数的理想). 任何 C^* 代数包含一个极大双边 GCR 理想 I, 且商代数 A/I 是 $NGCR$ 代数. 任何 GCR 代数包含一个用序数 α ($\alpha\leqslant\rho$) 标号的闭双边理想 I_α 的递增族, 使得对于所有 $\alpha<\rho$, $I_\rho=A$, $I_1=\{0\}$, $I_{\alpha+1}/I_\alpha$ 是一个 CCR 代数, 且对于极限序数 α, $I_\alpha=\bigcup_{\alpha'<\alpha}I_{\alpha'}$ 成立. GCR 代数的谱包含一个开的、处处稠的、可分离局部紧子集.

一个 C^* 代数 A 称为 I 型 C^* 代数 (C^* - algebra of type I), 如果对于 C^* 代数 A 在 Hilbert 空间 H_π 中的任何表示 π, 由 H_π 中的族 $\pi(A)$ 所生成的 **von Neumann 代数** (von Neumann algebra) 是 I 型 von Neumann 代数. 对于 C^* 代数来说, 下列条件是等价的: a) A 是 I 型 C^* 代数; b) A 是 GCR 代数; c) C^* 代数 A 的任何商表示是不可约表示的倍数. 如果 A 满足这些条件, 那么: 1) C^* 代数 A 的两个不可约表示等价, 当且仅当它们的核恒同; 2) C^* 代数 A 的谱是 T_0 空间. 如果 A 是可分 C^* 代数, 那么条件 1) 和 2) 中的每一个都等价于条件 a) - c). 特别是, 每个有 (在等价意义下) 唯一的不可约表示的可分 C^* 代数同构于对于某个 Hilbert 空间 H 的 C^* 代数 $K(H)$.

设 A 是 C^* 代数, P 是使函数 $\pi\to\operatorname{Tr}\pi(x)$ 在 A 的谱上有限且连续的元素 $x\in A$ 的集合. 如果集合 P 的线性包在 A 中处处稠, 那么 A 称为有连续迹的 C^* 代数. 这种 C^* 代数的谱是可分离的, 且在一定附加条件下, 有连续迹的 C^* 代数可表示为它的谱 $\hat{A}$ 上的向量函数代数 ([3]).

设 A 是 C^* 代数, F 为 A 上的有范数 $\leqslant 1$ 的正线性泛函集, $P(A)$ 是凸集 F 的非零边界点集. 那么 $P(A)$ 是 A 的纯状态集 (见**对称代数的表示** (representation of a symmetric algebra)). 设 B 是 A 的 C^* 子代数. 如果 A 是 GCR 代数, 且 B 分离集合 $P(A)\cup\{0\}$ 的点, 即对于任何 $f_1, f_2\in P(A)\cup\{0\}$, $f_1\neq f_2$, 存在 $x\in B$, 使得 $f_1(x)\neq f_2(x)$, 那么 $B=A$ (Stone - Weierstrass 定理 (Stone - Weierstrass theorem)). 如果 A 是任何 C^* 代数, B 分离集合 $\overline{P(A)}\cup\{0\}$ 的点, 那么 $B=A$.

C^* 代数 A 的二次对偶空间 A^{**} 在以自然的方式赋予乘法后可变为与某个 von Neumann 代数同构的 C^* 代数; 这个代数称为 C^* 代数的包络 von Neumann 代数 (von Neumann algebra enveloping the C^* - algebra) ([3], [4]).

C^* 代数理论在群表示和对称代数理论 ([3])、动力系统理论 ([4])、统计物理和量子场论 ([5]) 中, 以至 Hilbert 空间上的算子理论 ([6]) 中都有许多应用.

参考文献

[1] Гельфанд, И. М., Наймарк, М. А., 《Матем. сб.》, 12 (1943), 2, 197 - 213.

[2] Наймарк, М. А., Нормированные кольца, М., 1956 (英译本: Naimark, M. A., Normed rings, Riedel, 1984).

[3] Dixmier, J., C^* - algebras, North - Holland, 1977 (译自法文).

[4] Sakai, S., C^* - algebras and W^* - algebras, Springer, 1971.

[5] Ruelle, D., Statistical mechanics: rigorous results, Benjamin, 1974 (译自法文).

[6] Douglas, R. G., Banach algebra techniques in operator theory, Academic Press, 1972.

А. И. Штерн 撰

【补注】 如果 C 上的 A 是具有对合的代数 (algebra with involution), 即如果存在运算 $^*: A\to A$ 满足 $(\lambda x+\mu y)^*=(\bar\lambda x^*+\bar\mu y)$, $x^{**}=x$, $(xy)^*=y^*x^*$, 那么 Hermite 元、正规元和正元可定义如下. 元素 x 是 Hermite 元 (Hermitian element), 如果 $x=x^*$; 它是正规元 (normal element), 如果 $xx^*=x^*x$, 以及它是正元 (positive element), 如果对于某个 $y\in A$ 有 $x=yy^*$. 一个元素 u 是酉元 (unitary element), 如果 $uu^*=1$. 具有对合的代数有时也称为对称代数 (symmetric algebra) (或对称环 (symmetric ring)), 例如见 [2]. 然而, 这样的名词用法与作为一种特殊的 Frobenius 代数的对称代数概念相冲突, 见 **Frobenius 代数** (Frobenius algebra).

最近的发现已经揭示了与**代数拓扑学** (algebraic topology) 的联系和在代数拓扑学上的应用. 如果 X 是紧可距空间, 那么群 Ext(X) 可以由紧算子的 C^* 扩张,

通过 $C(X)$,

$$K(H)\to\varepsilon\to C(X)$$

来形成. 在 [A3] 中指出, Ext(X) 是 X 的同伦不变函子, 它可以看作与拓扑 K 同调群 $K_1(X)$ 一样. 在 [A1] 中, M. F. Atiyah 试图用椭圆算子来刻画 K 同调 $K_*(X)$ ([A5], 58 页). 在 [A7], [A8] 中, Г. Г. Каспаров 对这个问题提出了一个解答. Каспаров 和其他人在许多情形已经用 Каспаров K 理论 (Kasparov K- theory) 的等价理论证明了对高符号差的强 Новиков 猜想 (strong Novikov conjecture) (见 [A2], 309 - 314).

此外，K **理论**(K-theory)与算子代数之间的深刻而又新奇的联系(见**算子环**(operator ring))是最近由 A. Connes([A4])发现的．最后，V. F. R. Jones([A6])已经利用算子代数来提供拓扑纽结的不变量(见**纽结理论**(knot theory))．

最近发展的进一步细节可在[A2]和[A5]中找到．

参考文献

[A1] Atiyah, M. F., Global theory of elliptic operators, in Proc. Internat. Conf. Funct. Anal. Related Topics, Univ. Tokyo Press, 1970

[A2] Blackdar, B., K-theory for operator algebras, Springer, 1986.

[A3] Brown, L. G., Douglas, R. G. and Fillmore, P. A., Extensions of C^*-algebras and K-homology, *Ann. of Math*. (2), **105** (1977), 265–324.

[A4] Connes, A., Non-commutative diffrential geometry, *Publ. Math. IHES*, **62** (1986), 257–360.

[A5] Douglas, R. G., C^*-algebra extensions and K-homology, Princeton Univ. Press, 1980.

[A6] Jones, V. F. R., A polynomial invariant for knots via von Neumann algebra, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **12** (1985), 103–111.

[A7] Kasparov, G. G., The generalized index of elliptic operators, *Func. Anal. and Its Appl.*, **7** (1973), 238–240.

[A8] Kasparov, G. G., Topological invariants of elliptic operators, 1. K-homology, *Math. USSR Izv.*, **9** (1975), 751–792 (*Izv. Akad. Nauk SSSP*, **4** (1975), 796–838).

[A9] Takesaki, M., Theory of operator algebras, 1, Springer, 1979.

史树中 译

$C\mathscr{A}$ 集 [$C\mathscr{A}$-set; $C\mathscr{A}$-множество]

完全可分度量空间 X 中 $\mathscr{A}$ 集的补集；也就是说，$P\subset X$ 是 $C\mathscr{A}$ 集，如果 $X\setminus P$ 是 $\mathscr{A}$ 集．换句话说，$C\mathscr{A}$ 集是第二类**射影集**(projective set)．存在 $C\mathscr{A}$ 集不是 $\mathscr{A}$ 集的例子．任意 $\mathscr{A}$ 集都是某个 $C\mathscr{A}$ 集的一一连续象(Mazurkiewicz 定理(Mazurkiewicz theorem))．

一点 y 称为映射 f 的 1 阶值(value of order 1)，如果只存在一点 x，使得 $y=f(x)$．任意 Borel 集上的 B 可测映射 f 的所有一阶值组成一个 $C\mathscr{A}$ 集(Лузин定理(Luzin theorem))．其逆定理也成立：设 C 为空间 X 中的任意 $C\mathscr{A}$ 集，则存在定义在无理数集的一个闭子集上的连续函数 f，使得 C 是 f 的所有 1 阶点组成的集合．Kuratowski 归约定理(Kuratowski reduction theorem)：已知 $C\mathscr{A}$ 集的一个无穷序列 $U^1, U^2, \cdots$，存在互不相交的 $C\mathscr{A}$ 集的一个序列 $V^1, V^2, \cdots$，使得 $V^n\subset U^n$ 且 $\bigcup_{n=1}^{\infty}V^n=\bigcup_{n=1}^{\infty}U^n$.

参考文献

[1] Kuratowski, K., Topology, 1, Acad. Press, 1966 (译自法文)

Б. А. Ефимов 撰

【补注】 $C\mathscr{A}$ 集也称为补解析集(co-analytic set)，它们组成的类记为 Π_1^1，亦见 $\mathscr{A}$ 集($\mathscr{A}$-set)．

张锦文、赵希顺 译

仙人掌形 [cactoid; кактоид]

局部连通的连续统 C，它是位于 Euclid 空间 E^3 中的至多可数个球面 S_i 及简单弧 D_i 之和的闭包，并且对每个闭围道 $L\subset C$，恰好有一个球面 S_i 包含它．仙人掌形，并且只有它是 2 维球面 S^2 的单调象；同时，每个仙人掌形是 S^2 的一个单调开象．

Б. А. Ефимов 撰

徐定宥、罗嵩龄、许依群 译

演算 [calculus; исчисление]

1)某些数学分支名称的组成部分，这些分支涉及一定类型对象的计算和运算法则；例如，**微分学**(differential calculus)也称为微分演算，**变分学**(variational calculus)也称为变分演算．

2)演绎系统，即通过指定其初始元素(演算的公理)及**推导规则**(derivation rule)来确定一个集合的方法，每条规则说明如何从初始元素和已构造的元素来构造新的元素．一个演算Ξ中的推导(derivation in a calculus)是一个全序集，其中每个元素 P 或者是 Ξ 的一条公理，或者是用 Ξ 中某一推导规则得到的结论，所用规则的前提条件是这个推导中位于 P 之前的元素．一个元素称为在 Ξ 中是可推导的(derivable)，如果 Ξ 中存在以它为最终结论的一个推导．有时为了更便于研究，推导也写成非线性结构(见**推导树**(derivation tree))．推导也可以被给予一个分析(analysis)，即给出一些附加信息使更容易验证推导的正确性(例如，对推导中的每个元素标出为得到它所用到的规则和前面的元素的编码)．

例．考虑由下列集合 M 所确定的演算 Ξ．M 是由只含一个字母的字母表{|}描述的所有形如 2^n($n=1, 2, \cdots$)的数字组成的集合．Ξ 有一条公理：||，有一条推导规则："从一个字符 P 可得到 PP"．很容易验证，M 中的字符，并且只有这些字符，是在 Ξ 中可推导的．

演算中有时也要用到一些辅助元素；这时需要给出一种算法，用来区分哪些是基本的元素，哪些是辅助元素．如果没有辅助元素，那么演算 Ξ 所确定的集合 M 就有**严格解释**(strict interpretation)．上面的例子就是如此．

当推导产生的不是集合的元素而是元素的编码时，要用到由演算确定的另外一些形式更为复杂的集合(这

就是说，需要一种辅助算法对基本元素予以编码）. 这样就要广泛地运用由字符对非线性对象的编码，由自然数对字符和 n 进制数的编码. 不严格解释的一种重要特殊情况是分步构造演算(stepwise-constructed calculus). 这种演算中前一步可导出对象在形成下一步时带有一种辅助性质(这种构造是极具逻辑数学理论风格的，它们是在为给出这一理论的语言而进行的一系列演算之上的步骤).

演算概念是归纳地生成集合这一直观想法的形式化. 这种集合在数学中被广泛应用；特别是，任意一种扩充理论的形式化都依赖于大量归纳地定义的集合，从最简单的集合(变元、项、公式的集合等等)出发，由理论的公理经适当的逻辑变化，最后得到所有能被推导出来的定理的集合. 这就毫不奇怪演算是数理逻辑的基本方法之一. **逻辑演算**(logical calculus)是完全形式化的演绎系统的第一批例子(基于这些演算，可以发展一般演算理论的概念和方法，并使演算概念得到长足推广；例如见 **Carnap 规则**(Carnap rule)). 一些特殊类型的演算非常适合于描述**形式文法**(grammar, formal)(这就决定了演算在**数理语言学**(mathematical linguistics)中的作用)以及对**有限自动机**(automaton, finite)可识别的集合的确定.

一般演算理论的重要应用领域之一是**算法论**(algorithms, theory of). 事实清楚地表明，演算和算法的概念同样是基本的. 实际上，可以用演算确定的集合的类和算法可枚举的字集的类是一致的(如果维持在普通用法的演算框架内，而不考虑涉及生成可推导元素的潜在可能性的推广). 由此，又得到可推导性问题不可解的演算的存在性，即不存在一种算法能对(该演算所在语言的)所有的字都给出一定的答案作为处理过程的终结(即对可推导的字给出 0，否则给出 1). 确定无论怎样复杂的可枚举集的可能性蕴涵了各种意义下通用的演算的存在性(即在一种固定的语言中模拟所有其他演算的演算，见**创造集**(creative set)). 这些事实，结合对演算的一般概念的不同变化和限制的研究，给出了得到有趣的算法不可解问题的可能性. E. L. Post 的[1]是这一方面的十分重要的工作. 这篇文章第一次给出了适于生成任意可枚举字集的演绎系统的概念(见 **Post 典范系统**(Post canonical system)). 在典范演算中形成推导规则的广泛可能性对归纳生成集合的过程是有帮助的；大多数已构造的具体演算能够被容易而自然地作为典范演算的特例而形成.

结合演算，也称为 Thue 系统，是确定和研究群和半群的方便工具(见**结合演算**(associative calculus)).

参考文献

[1] Post, E. L., Formal reductions of the general combinatorial decision problem, *Amer. J. Math.*, **65** (1943), 197–215.

[2] Марков, А. А., Теория алгорифмов, М-Л., «Тр. матем. ин-та АН СССР», **42** (1954)(英译本: Markov, A. A., Theory of algorithms. *Isrel Progr. Sci. Transl.*, 1961).

[3] «Тр. матем. ин-та АН СССР», **72** (1964), 5–56; **93** (1967), 3–42.

С. Ю. Маслов 撰

【补注】 本书其他地方叙述的作为演绎系统的一些特殊演算有**谓词演算**(predicate calculus)、**命题演算**(propositional calculus)和 **λ 演算**(λ-calculus).

除了前面已经提到的**微分学**(differential calculus)和**变分学**(variational calculus 或 calculus of variations)所体现的计算系统(更确切地说是公式的运用)之外，还有例如**积分学**(integral calculus，也称为积分演算)和伊藤演算(Itô-calculus). 后者是对**随机微分**(stochastic differential)和**随机积分**(stochastic integral)，和**随机微分方程**(stochastic differential equation)而言的微积分演算. 还有 **Malliavin 演算**(Malliavin calculus)，是一种随机变分演算. 此外还有分数次积分演算，有时也称为分数次演算(fractional calculus)，它的基础是 Riemann-Liouville 积分(Riemann-Liouville integral)，见**分数次积分和微分**(fractional integration and differentiation). 分数次演算一词也用来称呼另一种理论，它涉及范畴论中分式范畴的构作，见**范畴的局部化**(localization in categories).

沈复兴 译　王世强 校

类演算 [**calculus of classes; классов исчисление**]

惯用名，可追溯到 G. Boole，指称数理逻辑中研究类的逻辑的分支. 类演算实际上相当于这样的命题演算，在其中也考虑基本命题的主谓结构(即形如"元素 x 具有性质 P"的基本命题)；而且，对于每个谓词(性质)P，都伴随着由所讨论的范围内具有这一性质的元素组成的一个类. 类演算曾被认为是 Aristotle 三段论法的数学等价物. 其实并非如此，因为在类演算中可以有空集和单元集，而 Aristotle 并没有考虑过这一点. 一般地，类演算并不被划分为数理逻辑的一个独立的分支，因为它的所有表达能力都被包括在一元谓词演算中(一元谓词演算又是狭义谓词演算的一个可判定的片断，见**逻辑演算**(logical calculus)). Aristotle 的三段论法已经被 J. Lukasiewicz([4])用适当的方式形式化.

参考文献

[1] Hilbert, D. and Ackerman, W., Grundzüge der theoretischen Logik, Dover, reprint, 1946.

[2] Couturat, L., L'algèbre de la logique, Gauthier-Villars, 1905.

[3] Wajsberg, M., Ein erweiterer Klassenkalkül, *Monatsh. Math. Phys.*, **40** (1933), 113–126.

[4] Lukasiewicz, J., Aristotle's syllogistic from the stand-

point of modern formal logic, Clarendon Press, 1951.

[5] Яновская, С., Логика классов, в кн.: Философская энциклопедия, т. 3, М., 1964, 224－226.

B. A. Душский 撰 沈复兴 译 王世强 校

Calderón - Zygmund 算子 [Calderón - Zygmund operator; Кальдерона - Зигмунда оператор]

在 $\mathbf{R}^n$ 中具有紧支集的充分光滑函数 $\varphi(x)$ 的空间上，由公式

$$K\varphi(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x-y|>\varepsilon} k(x-y)\varphi(y)\,dy$$

定义的算子 K，其中核 k 是在单位球面 $S^{n-1}=\{x: x\in\mathbf{R}^n, |x|=1\}$ 上有零均值的 $-n$ 次齐次函数．核 k 具有形式

$$k(x) = \frac{\Omega(x)}{|x|^n},$$

其中 Ω 称为 k 的特征函数，它满足下列条件：

$$\Omega(tx) = \Omega(x) \text{ 对 } t>0,\ \Omega\in L_1(S),$$
$$\int_S \Omega(x)\,dS = 0. \qquad (*)$$

Calderón - Zygmund 算子通常写成下列形式：

$$K\varphi(x) = \text{p.v.}\int_{\mathbf{R}^n}\varphi(y)\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^n}\,dy;$$

这里 p. v. 表示积分的主值．在一维情形，Calderón-Zygmund 算子变为 Hilbert 算子 H：

$$H\varphi(x) = \text{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(t)}{x-t}\,dt.$$

Calderón - Zygmund 算子可通过连续性延拓到 $\mathbf{R}^n$ 中的 $p\ (1<p<\infty)$ 次可和函数的空间 $L_p(\mathbf{R}^n)$．这一延拓把 $L_p(\mathbf{R}^n)$ 连续地映为自身．如果 Ω 满足 $(*)$，并且还满足 Dini 条件：

$$\int_0^1\frac{\omega(t)\,dt}{t}<\infty,\quad \omega(t) = \sup_{\substack{|x-x'|\le t\\ |x|=|x'|=1}}|\Omega(x)-\Omega(x')|;$$

再对于 $1<p<\infty$ 和 $f\in L_p(\mathbf{R}^n)$，令

$$K_\varepsilon f(x) = \int_{|y|>\varepsilon}\frac{\Omega(y)}{|y|^n}f(x-y)\,dy,$$

那么

a) 存在常数 A_p(与 f 和 ε 无关)，使得

$$\|K_\varepsilon f\|_{L_p}\le A_p\|f\|_{L_p};$$

b) 极限 $\lim_{\varepsilon\to 0}K_\varepsilon f=Kf$ 在 L_p 中的收敛意义下存在，且

$$\|Kf\|_{L_p}\le A_p\|f\|_{L_p}.$$

Calderón - Zygmund 算子是 A. P. Calderón 和 A. Zygmund ([1]) 曾研究过的．

参考文献

[1] Calderón, A. P. and Zygmund, A., On the existence of certain singular integral, *Acta Math.*, **88** (1952), 85－139.

[2] Михлин, С. Г., Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, М., 1962 (中译本：С. Г. 米赫林，多维奇异积分和积分方程，上海科学技术出版社，1964).

[3] Stein, E. M., Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton Univ. Press, 1970 (中译本：E. M. Stein，奇异积分与函数的可微性，北京大学出版社，1986).

П. И. Лизоркин 撰

【补注】 上述估计 a) 和 b) 的证明可在 [3] 的第 II 章，第 4 节中找到．

在 60 年代，上面描述的算子通常称为 Михлин-Calderón - Zygmund 算子 (Mikhlin - Calderón - Zygmund operators)，因为对于它在 $L_p(\mathbf{R}^n)$ 中的主要有界性定理(估计 a))是 С. Г. Михлин 在 1938 年证明的 (发表在 [A1] 中)．

目前 Calderón - Zygmund 算子这一术语通常是对于由 G. David 和 J. L. Journé 在 [A2] 中所定义的一般的算子类来使用的．

结论 b) 已被推广到有奇次核的奇异积分和有偶次核 $\Omega\in L_2(S^{n-1})$ 的奇异积分 ([A3])，第 VI 章，第 2、3 节)．

亦见**奇异积分** (singular integral)；**Hilbert 奇异积分** (Hilbert singular integral)；**Hilbert 变换** (Hilbert transform)．

参考文献

[A1] Михлин, С. Г., 《Успехи мат. наук》, **8** (1953), 213－217.

[A2] David, G. and Journé, J. L., Une characterization des opérateurs intégraux singuliers bornés sur $L^2(\mathbf{R}^n)$, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **296** (1983), 761－764.

[A3] Stein, E. M. and Weiss, G., Fourier analysis on Euclidean spaces, Princeton Univ. Press, 1975.

史树中 译

口径 [calibre; калибр]，拓扑空间 X 的

基数 (cardinal number) τ，使得由拓扑空间 X 的非空开子集组成的基数为 τ 的任意族 $\mathfrak{V}$ 包含基数也是 τ 的子族 $\mathfrak{V}'\subset\mathfrak{V}$，其交非空，即 $\bigcap\{U: U\in\mathfrak{V}'\}\ne\varnothing$．正则不可数基数 τ 是拓扑积 $\prod X_\alpha(\alpha\in A)$ 的口径，当且仅当 τ 是每个因子 X_α 的口径．口径这个性质在连续映射下被保持；每一个不可数正则基数是任何二进紧统的口径．如果第一不可数基数是空间 X 的口径，则 X 满足 **Суслин 条件** (Suslin condition)．在集合论的某些模型中，其

逆命题几乎也都正确，即 Martin 公理和条件 $\aleph_1 < 2^{\aleph_0}$ 蕴含着下述结果：若空间 X 满足 Суслин 条件，则 X 的每一个不可数非空开集族包含一个不可数有心子族．特别地，在这个模型中，基数 $\aleph_1$ 是每个具有 Суслин 条件的紧统的口径．在另外一些集合论模型中，存在着口径不是 $\aleph_1$ 的具有 Суслин 条件的紧统．

参考文献

[1] Суслин, Н. А., О произведении топологических пространств, М.-Л., 1948 (Тр. матем. ин-та АН СССР, т. 24).

Б. А. Ефимов 撰

【补注】 calibre 通常拼作 caliber．

通常用加标(indexed)开集族来定义口径．那时，**基数**(cardinal number)κ 是 X 的口径，当且仅当对 X 的每一个非空开子集族 $\{U_\alpha : \alpha \in \kappa\}$，存在一个容量为 κ 的集合 $A \subset \kappa$，使得 $\bigcap_{\alpha\in A} U_\alpha \neq \emptyset$．

人们也讨论准口径(precalibers)：基数 κ 是 X 的准口径，当且仅当对 X 的每个非空子集族 $\{U_\alpha : \alpha \in \kappa\}$，存在容量为 κ 的集合 $A \subset \kappa$，使得 $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ 有有限交性质(finite intersection property)(即任意有限多个 U_α 的交集非空)．这样，由 Martin 公理(见 **Суслин 假设**(Suslin hypothesis))加上**连续统假设**(continuum hypothesis)的否命题可以得出每一个满足 Суслин 条件的空间以 $\aleph_1$ 为准口径，而对**紧空间**(compact space)来说，它的口径和准口径相同．

参考文献

[A1] Argyros, S. and Tsarpalias, A., Calibers of compact spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **270** (1982), 149-162.

[A2] Broverman, S., Ginsburg, J., Kunen, K. and Tall, F. D., Topologies determined by σ-ideals on ω_1, *Canad. J. Math.*, **30** (1978), 1306-1312.

[A3] Comfort, W. W. and Negrepontis, S., Chain conditions in topology, Combridge Univ. Press, 1982

[A4] Juhász, I., Cardinal functions in topology - Ten years later, MC Tracts, 123, Math. Centre, Amsterdam, 1980.

徐定宥、罗嵩龄、许依群 译

Campbell - Hausdorff 公式 [Campbell - Hausdorff formula; Кэмпбелла-Хаусдорфа формула]

在 u, v 的形式幂级数代数中计算

$$w = \ln(e^u e^v)$$

的一个公式，其中 u, v 适合结合律但不适合交换律．确切地说，设 A 为域 $\mathbf{Q}$ 上具有自由生成元 u 和 v 的含幺元的自由结合代数；设 L 为 A 的 Lie 子代数，它由 u 和 v 按照换位运算 $[x, y] = xy - yx$ 生成；记 $\hat{A}$ 和 $\hat{L}$ 分别为 A 和 L 的自然幂级数完全化，即 $\hat{A}$ 为幂级数环，具有结合而非交换的变元 u, v，而 $\hat{L}$ 为 L 在 $\hat{A}$ 中的闭包．这时，映射

$$\exp: x \to e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

为 $\hat{A}$ 到乘法群 $1 + \hat{A}_1$ 上之连续一一映射，其中 A_1 为无常数项的级数集合．它的逆映射是

$$\ln: y \to \ln(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (y-1)^n.$$

映射 exp 在 $\hat{L}$ 上的限制是 $\hat{L}$ 到群 $1 + \hat{L}_1$ 上的一一映射．所以我们能在 Lie 代数 $\hat{L}$ 的元素集中引进群运算 $x \circ y = \ln(e^x e^y)$．可以证明此群中由 u, v 生成的子群为自由群．Campbell - Hausdorff 公式为 $u \circ v$ 提供了表达式，即将 $u \circ v$ 表成 u 和 v 的幂级数

$$\sum_m \sum_{p_i, q_i} \frac{(-1)^{m-1}}{m \sum (p_i + q_i)} \times \tag{*}$$

$$\times \frac{[\cdots[\cdots[[u, u], \ldots, u]v, \ldots, v], \ldots, v]}{p_1! q_1! \cdots p_m! q_m!}$$

(此级数之一般项中出现 p_1 次 u，接下去为 q_1 次 v，…，p_m 次 u，接下去为 q_m 次 v)．或者(用伴随表示 $(\mathrm{ad}\,x)(y) = [x, y]$)：

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{\substack{r+s=n \\ r, s \geq 0}} (w'_{r,s} + w''_{r,s}),$$

其中

$$w'_{r,s} = \sum_{m \geq 1} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \times$$

$$\times \sum{}^{*} \left\{ \left[\prod_{i=1}^{m-1} \frac{(\mathrm{ad}\,u)^{r_i}}{r_i!} \frac{(\mathrm{ad}\,v)^{s_i}}{s_i!} \right] \frac{(\mathrm{ad}\,u)^{r_m}}{r_m!} \right\} (v),$$

$$w''_{r,s} = \sum_{m \geq 1} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \times \sum{}^{**} \left(\prod_{i=1}^{m-1} \frac{(\mathrm{ad}\,u)^{r_i}}{r_i!} \frac{(\mathrm{ad}\,v)^{s_i}}{s_i!} \right) (u).$$

其中 $\sum^{*}$ 表示和号取遍 $r_1 + \cdots + r_m = r$，$s_1 + \cdots + s_{m-1} = s - 1$，$r_1 + s_1 \geq 1$，…，$r_{m-1} + s_{m-1} \geq 1$；而 $\sum^{**}$ 表示和号取遍 $r_1 + \cdots + r_{m-1} = r - 1$，$s_1 + \cdots + s_{m-1} = s$，$r_1 + s_1 \geq 1$，…，$r_{m-1} + s_{m-1} \geq 1$．

J. E. Campbell ([1])首先研究 w 的表达式．F. Hausdorff ([2])证明了 w 可用 u 和 v 的换位子来表达，即证明了它是 Lie 代数 $\hat{L}$ 中元素．

如果 $\mathfrak{g}$ 为完全非离散赋范域 K 上赋范 Lie 代数，当 $u, v \in \mathfrak{g}$ 时，级数(*)在零的一个邻域中收敛．于是在 $\mathfrak{g}$ 中零的附近可以定义一个 K 上具有 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的局部 Banach Lie 群结构(在特殊情形为 Banach Lie 群结构)．这也给出了具有已知 Lie 代数的局部 Lie 群的存在性证明(Lie 第三定理(Lie third theorem))．反之，在任一局部 Lie 群中，可用 Campbell - Hausdorff 公式给出乘法在标准坐标下的表达式．

参考文献

[1A] Campbell, J. E., *Proc. London Math. Soc.*, **28** (1897),

381 – 390.

[1B] Campbell, J. E., *Proc. London Math. Soc.*, 29 (1898), 14 – 32.

[2] Hausdorff, F., Die symbolische Exponential Formel in der Gruppentheorie, *Leipziger Ber.*, 58 (1906), 19 – 48.

[3] Bourbaki, N., Elements of mathematics, Lie groups and Lie algebras, Addison - Wesley, 1975 (译自法文).

[4] Serre, J. P., Lie algebras and Lie groups, Benjamin, 1965 (译自法文).

[5] Théorie des algèbres de Lie. Topologie des groupes de Lie, in Sém. S. Lie.

[6] Magnus, W., Karras, A. and Solitar, D., Combinatorial group theory: presentations of groups in terms of generators and relations, Interscience, 1966.

Ю А Бахтурен 撰

【补注】 记A^n为A的n次非交换多项式构成的分量，则$\hat{A}=\prod_{n=1}^{\infty}A^n$，类似地，$\hat{L}=\prod_{n=1}^{\infty}L^n$.

关于$w=u\circ v$的公式也称为 Baker - Campbell - Hausdorff 公式(Baker - Campbell - Hausdorff formula)或者 Campbell - Baker - Hausdorff 公式. 它的前面几项为

$$w=u+v+\frac{1}{2}[u,v]+$$
$$+\frac{1}{12}[u,[u,v]]+\frac{1}{12}[v,[v,u]]+\cdots.$$

用$w'_{r,s}$和$w''_{r,s}$表出的公式称为 Campbell - Hausdorff 显式(Dynkin 的形式).

参考文献

[A1] Baker, H. F., Alternants and continuous groups, *Proc. London Math. Soc.* (2), 3 (1905), 24 – 47.

[A2] Varadarajan, V. S., Lie groups, Lie algebras, and their representations, Springer, 1984, Section 2.15.

许以超 译 石生明 校

管道曲面 [canal surface ; каналовая поверхность]

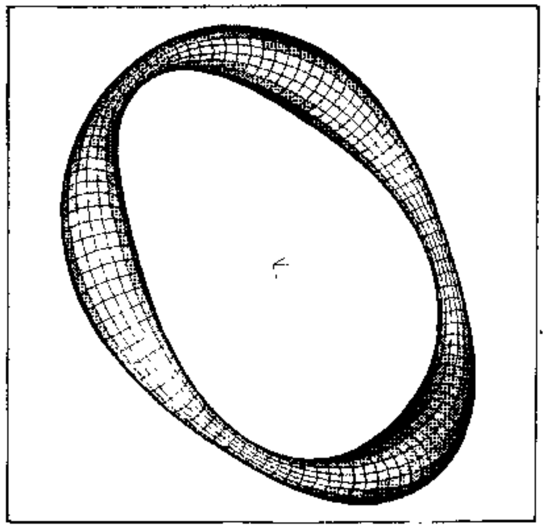
其一族曲率线由圆构成的曲面; 每个圆所在的平面沿此圆与曲面相交成定角. 管道曲面焦点集对应的分支蜕化成一曲线Γ, 因而管道曲面是单参数球面族的包络, 其相应的主曲率半径即为球面的半径. 反之, 若已给一条正则曲线$\zeta(s)$, s为弧长参数, 并设$R(s)$是中心位于$\zeta(s)$的单参数球面族的半径函数, 则作为这个族的包络的管道曲面由下列方程来表征:

$$\langle r-\zeta(s), r-\zeta(s)\rangle = R^2(s),$$
$$\langle r-\zeta(s), \zeta'(s)\rangle = -R'(s)\cdot R(s).$$

其中r是管道曲面的矢径, $\langle\cdot,\cdot\rangle$表示$E^3$中的标量积. 当且仅当$|R'(s)|\leqslant 1$时, 这组方程才可解. 若$R$=常数, 则管道曲面称为管状曲面, 圆环面可作为其中一例.

И Х Сабитов 撰

【补注】



管道曲面

关于曲率线和焦点集的概念也见**曲率线**(curvature lines); **曲率线网**(net of curvature lines)和**微分几何学**(differential geometry).

具有两族圆曲率线(即两个蜕化的焦点集分支)的曲面是 **Dupin 圆纹曲面**(Dupin cyclide). 它们可视为圆环面在外围空间共形变换下的象.

参考文献

[A1] Monge, G., Application de l'analyse à la géométrie, Bachelier, 1850, Chapt. 8.

[A2] Lie, S., Ueber Complexe, insbesondere Linien - und Kugel - Complexe, mit Anwendung auf die Theorie partieller Differentialgleichungen, *Math. Ann.*, 5 (1872), 179.

[A3] Scheffers G., Einführung in die Theorie der Flächen, Teubner, 1913.

[A4] Blaschke, W. and Leichtweiss, K., Elementare Differentialgeometrie, Springer, 1973.

[A5] Berger, M. and Gostiaux, B., Géométrie différentielle: variétés, courbes et surfaces, Presses Univ. de France, 1987.

沈一兵 译

奇点的消去 [cancellation of singularities ; устранение особенностей]

见**可去集** (removable set).

【补注】 通常, 这称为"消去奇点", 或在复分析中根本没有特别的名称. 一个函数(函数类)的可以去掉的奇点称为这个函数(函数类)的**可去奇点** (removable singular point).

侯纪欣 译

典范类 [canonical class; канонический класс]

代数簇 X 上具有最大次数的微分形式 ω 的除子的线性等价的除子类 K_X. 若 X 是非奇异代数簇且 $\dim X=n$, 则在局部坐标 $x_1,\cdots,x_n$ 中, 形式 ω 可写成

$$\omega = f(x_1,\ldots,x_n)dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n.$$

ω 的除子 (ω) 局部等于这个有理函数 f 的除子 (f). 这个构造不依赖于局部坐标的选取并且给出了 ω 在整个 X 上的除子 (ω). 由于对任意一个和 ω 同次的形 ω', 有 $\omega'=g\omega$, 这就得到 $(\omega')=(g)+(\omega)$, 且相应的除子等价. 这样构造的典范类 K_X 是 n 次正则微分形式的层 Ω_X^n 的第一陈(省身)类 (Chern class). 它的数值特征 (次数, 指数, 自交数等) 是代数簇的可有效计算的不变量.

若 X 是亏格 g 的非奇异射影曲线, 则 $\deg K_X=2g-2$. 对于椭圆曲线, 以及更一般的 Abel 簇, $K_X=0$. 若 X 是射影空间 P^n 中 d 次非奇异超曲面, 则 $K_X=(d-n-1)\cdot H$, 这里 H 是它的超平面截口.

亦见**典范嵌入** (canonical imbedding).

参考文献

[1] Шафаревич, И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972 (英译本: Shafarevich, I. R., Basic algebraic geometry, Springer, 1977). А. Н. Паршин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Iitaka, S., Algebraic geometry, Springer, 1982.

陈志杰 译

典型相关 [canonical correlation; каноническая корреляция]

两组随机变量的线性函数之间的相关在一定约束之下的最大值. 在典型相关理论中, 随机变量 $X_1,\cdots,X_s$ 及 $X_{s+1},\cdots,X_{s+t}(s<t)$, 被线性变换到典型随机变量 $Y_1,\cdots,Y_s$ 及 $Y_{s+1},\cdots,Y_{s+t}$, 使得 a) 所有的 Y 变量有均值 0 方差 1. b) 在两组 Y 变量的每一组内的各变量互不相关. c) 第一组中每个 Y 变量只与第二组中的一个 Y 相关. d) 不同组内变量之间的非零相关系数, 在与前面的 Y 不相关的约束下, (相继地) 达到最大值.

在 $s=1$ 的特例, 典型相关即为 X_1 与 $X_2,\cdots,X_{1+t}$ 的复相关. 化为典型随机变量的变换, 相应于把一个二次型化为典型形式这一代数问题. 在多元统计分析中, 典型相关的方法用于研究一个观察向量的两组分量之间的相互依赖关系, 以便实现到一个新坐标系的过渡, 在其中 $X_1,\cdots,X_s$ 和 $X_{s+1},\cdots,X_{s+t}$ 的相关变得透明和清楚. 作为典型相关分析的一个结果, 可能发现, 两组变量的相互关系完全地为几个典型随机变量之间的相关所述.

参考文献

[1] Hotelling, H., Relations between two sets of variables, *Biometrika*, **28** (1936), 321–377.

[2] Anderson, T. W., Introduction to multivariate analysis, Wiley, 1958.

[3] Kindall, M. G., Ord, J. K. and Stuart, A., The advanced theory of statistics. Design and analysis, and time series 3, Criffin, 1983

А. В. Прохоров 撰 陈希孺 译

典型相关系数 [canonical correlation coefficients; канонические коэффициенты корреляции]

两组随机变量 $X_1,\cdots,X_s$ 以及 $X_{s+1},\cdots,X_{s+t}$ 的一对线性函数

$$U=\alpha_1X_1+\cdots+\alpha_sX_s,$$

$$V=\beta_1X_{s+1}+\cdots+\beta_tX_{s+t}$$

的相关系数的极大值, 此处 U 和 V 都是典型随机变量 (见**典型相关** (canonical correlation)). 关于在条件 $\mathrm{E}U=\mathrm{E}V=0$ 和 $\mathrm{E}U^2=\mathrm{E}V^2=1$ 之下定出 U 和 V 之间的最大相关系数的问题. 可用 Lagrange 乘子法解决. 典型相关系数都是方程

$$\begin{vmatrix}-\lambda\Sigma_{11} & \Sigma_{12}\\ \Sigma_{21} & -\lambda\Sigma_{22}\end{vmatrix}=0$$

的根 $\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_s>0$, 这里 Σ_{11} 和 Σ_{22} 分别是 $X_1,\cdots,X_s$ 和 $X_{s+1},\cdots,X_{s+t}$ 的协方差阵, 而 $\Sigma_{12}=\Sigma_{21}^T$ 是两组变量间的协方差阵. 此方程的第 r 个根称为 $X_1,\cdots,X_s$ 和 $X_{s+1},\cdots,X_{s+t}$ 之间的第 r 个典型相关系数, 它等于典型变量的一对线性函数 $U^{(r)}$ 和 $V^{(r)}$ 相关系数之最大值, $U^{(r)}$ 和 $V^{(r)}$ 都有方差 1 且与前面已定出的 $r-1$ 对 U,V 不相关. $U^{(r)}$ 和 $V^{(r)}$ 的系数 $\alpha^{(r)}=(\alpha_1^{(r)},\cdots,\alpha_s^{(r)})^T$ 和 $\beta^{(r)}=(\beta_1^{(r)},\cdots,\beta_t^{(r)})$, 当 $\lambda=\lambda_r$ 时, 满足方程

$$\begin{bmatrix}-\lambda\Sigma_{11} & \Sigma_{12}\\ \Sigma_{21} & -\lambda\Sigma_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}=0.$$

И. О. Сарманов 撰 陈希孺 译

典范曲线 [canonical curve; каноническая кривая]

代数曲线在**典范嵌入** (canonical imbedding) 下的象. 如果曲线 X 不是超椭圆曲线而且亏格 $g>2$, 则在典范嵌入下它在射影空间 P^{g-1} 中的象是 $2g-2$ 次的正规曲线. 反之, P^{g-1} 中任意一条 $2g-2$ 次正规曲线是某条亏格 g 曲线的典范曲线. (满足上述条件的) 两条代数曲线是双有理同构的当且仅当它们的典范曲线射影等价. 这就把曲线的分类问题归结为射影不变量理论的分类问题, 并提供了构造代数曲线参模簇的可能性 (见[2]). 对于小的 g, 有可能给出亏格 g 的典范曲线的明显几何描述. 因而亏格 4 的典范曲线是 P^3 中二次曲

面与三次曲面的交,亏格 5 的曲线则是 P^4 中三个二次超曲面的交.

参考文献

[1] Шафаревич, И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972 (英译本: Shafarevich, I. R., Basic algebraic geometry, Springer, 1977).

[2A] Dieudonné, J. A., La géométrie des groups classiques, Springer, 1955.

[2B] Mumford, D., Geometric invariant theory, Springer, 1965.

[3] Walker, R. J., Algebraic curves, Springer, 1978.

[4] Severi, F., Vorlesungen über algebraische Geometrie, Teubner, 1921.

А. Н. Паршин 撰

【补注】 n 维射影代数簇 $V\subset P^g$ 的次数是它与 P^g 中 $g-n$ 维一般超平面的交点数. 因此 P^2 中由齐次方程 $f(X, Y, Z)=0$ 给出的平面曲线的次数等于多项式 f 的次数. 关于亏格的定义以及涉及上面的其他概念见**代数曲线** (algebraic curve).

参考文献

[A1] Arbarello, E., Cornalba, M., Griffiths, P. A., Harris, J., Geometry of algebraic curves, 1, Springer, 1984.

[A2] Mumford, D., Curves and their Jacobians, Univ. Michigan Press, 1976.

陈志杰 译

典范嵌入 [canonical imbedding; каноническое погружение]

用**典范类** (canonical class) K_X 的倍数所确定的代数簇 X 到射影空间内的嵌入 (见**线性系** (linear system)). 设 X 是亏格 g 的非奇异射影曲线; 当 $g>1$ 时, 对某 $n\geqslant 3$, 由类 nK_X 所定义的映射是一个嵌入. 这里对非超椭圆曲线可取 $n\geqslant 1$, 对亏格 $g>2$ 的超椭圆曲线可取 $n\geqslant 2$, 对亏格 2 曲线可取 $n\geqslant 3$. 这些结果已被用于亏格 $g>1$ 的代数曲线的分类 (见**典范曲线** (canonical curve)).

对于维数大于 1 的簇, 主要是曲面, 也考虑了类似的问题. 在那里, 与亏格 $g>1$ 的曲线起类似作用的曲面具有性质: 它的典范类的某个倍数 nK_X 给出了这个曲面到它在射影空间中的象的双有理映射. 它们称为一般型曲面 (surface of general type); 与这些曲面有关的主要结果是: 类 $5K_X$ 已经确定了一个到射影空间内的双有理正则映射. 例如, 当 $m>4$ 时, P^3 中 m 次非奇异曲面是一般型曲面. 这时典范类 K_X 本身给出了一个双有理映射. 若 $K_XK_X>2$ 且 $p_g(X)>1$ (这里 K_XK_X 是自交指数, $p_g(X)$ 是几何亏格), 则可把 $5K_X$ 换成 $3K_X$. 对于没有一个倍数 nK_X 能给出嵌入的曲面, 可把它们分成如下五族: 有理面, 直纹面, Abel 簇, $K3$ 曲面以及有椭圆曲线束的曲面. 在这里, 有理面和直纹面类似于有理曲线, 其他三族则类似于椭圆曲线.

上述结果向高维簇的首次推广出现于 [5].

参考文献

[1] Шафаревич, И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972 (英译本: Shafarevich, I. R., Basic algebraic geometry, Springer, 1977).

[2] Severi, F., Vorlesungen über algebraische Geometrie, Teubner (译自意大利文).

[3] Алгебраические поверхности, М., 1965 (Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 75).

[4] Bombieri, E., Husemoller, D., Classification and embeddings of surfaces, in Proc. Symp. Pure Math., Vol. 29, Amer. Math. Soc., 1975, 329–420.

[5] Ueno, K., Introduction to classification theory of algebraic varieties and compact complex spaces, in Lecture Notes in Math., Vol. 412, Springer, 1974, 288–332.

А. Н. Паршин 撰

【补注】 设线丛 $\mathcal{O}_X(K_X)$ 是由代表 K_X 的一个**除子** (divisor) 所定义的典范丛 (canonical bundle). 由它的整体截面所确定的映射 $x\mapsto(s_1(x):\cdots:s_g(x))\in P^{g-1}$ 称为典范映射 (canonical mapping) (这里 $s_1,\cdots,s_g$ 是 $\Gamma(X;L)$ 的基, 并且假设对所有 x 都有一个使 $s_i(x)\neq 0$ 的 i, 见**线性系** (linear system)). 相应地, 如果用 nK_X 代替 K_X, 即可得到多重典范映射 (multi-canonical mapping), 当它是嵌入时, 称为多重典范嵌入 (multi-canonical imbedding).

参考文献

[A1] Ueno, K., Classification theory of algebraic varieties and compact complex spaces, Springer, 1975.

[A2] Iituka, S., Algebraic geometry, an introduction to birational geometry of algebraic varieties, Springer, 1982.

[A3] Barth, W., Peters, C., Ven, A. van de, Compact complex surfaces, Springer, 1984.

[A4] Arbarello, E., Cornalba, M., Griffiths, P. A., Harris, J. E., Geometry of algebraic curves, 1, Springer, 1985.

[A5] Griffiths, P. A., Harris, J. E., Principles of algebraic geometry, Wiley, 1978.

陈志杰 译

典型积 [canonical product; каноническое произведение], Weierstrass 典型积 (Weierstrass canonical product)

以给定复数序列 $\{\alpha_k\}$ 作为其零点的整函数. 设零点 $\alpha_k\neq 0$ 按照它们的模单调增长排列, 即 $|\alpha_k|\leqslant|\alpha_{k+1}|$, 且在复平面内无极限点 (必要条件), 即 $\lim_{k\to\infty}\alpha_k=\infty$. 则典型积有下述形式

$$\prod\left(\frac{z}{\alpha_k}, q_k\right)=\prod_{k=1}^{\infty}W\left(\frac{z}{\alpha_k}, q_k\right)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\alpha_k}\right)e^{P_k(z)},$$

其中

$$P_k(z)=\frac{z}{\alpha_k}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\alpha_k}\right)^2+\cdots+\frac{1}{q_k}\left(\frac{z}{\alpha_k}\right)^{q_k}.$$

$W(z/\alpha_k, q_k)$ 称为 Weierstrass 初等因子 (Weierstrass elementary factors). 指数 q_k 的选取要求使得典型积在任意紧集上绝对一致收敛. 例如取 $q_k \geq k-1$ 即可. 若序列 $\{|\alpha_k|\}$ 有有穷的收敛指数 (exponent of convergence)

$$\beta = \inf\left\{\lambda>0: \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^{-\lambda}<\infty\right\},$$

则所有 q_k 可取相同之值. 例如从最小的要求出发: $q_k=q \leqslant \beta \leqslant q+1$; 并称 q 为典型积的格 (genus of the canonical product). 若 $\beta=\infty$, 即 $\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|^{-\lambda}$ 对任意 $\lambda>0$ 都发散, 则得一无穷格的典型积. 典型积的阶 (order of a canonical product) $\rho=\beta$ (对于典型积的型的定义, 见[1]).

参考文献

[1] Левин, Б. Я., Распределение корней целых функций, М., 1956 (英译本: Levin, B. Ya., The distribution of zeros of entire functions, *Amer. Math. Soc.*, 1980).

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 亦见 **Blaschke 积** (Blaschke product); **整函数** (entire function); **Hadamard 定理** (Hadamard theorem).

何育赞 译　容尔谦 校

典型截线 [**canonical sections**; **канонические разрезы**], 典型割线 (canonical cuts)

典型截线系是亏格为 g 且边界具有 ν 个分支的有限 **Riemann 曲面** (Riemann surface) R 上 $2g+\nu$ 条曲线所组成的集合

$$S=\{a_1, b_1, \cdots, a_g, b_g, l_1, \cdots, l_\nu\},$$

使得当这些曲线从 R 上移走, 即沿 S 中的曲线把 R 割开时, 余下的部分是一个(平面)单连通区域 R^*. 更确切地说, 如果对 S 内每一条闭的或者说循环截线 (cyclic section) $a_j\,(j=1,\cdots,g)$ (或简称循环 (cycle)), 恰有一条所谓伴随循环 (adjoint cycle) b_j 与 a_j 恰交于 S 中所有截线的一个公共固定点 $p_0\in R$, 其余的循环 $a_k, b_k\,(k\neq j)$ 及曲线 $l_s\,(s=1,\cdots,\nu)$ 只以 p_0 为公共点, 且都不从截线 a_j 的一侧通过到其另一侧; 每条曲线 l_s 连接 p_0 和相应的边界分支, 那么系统 S 就是一个典型截线集. 在一个给定的 Riemann 曲面 R 上, 存在无穷多个典型截线系. 特别, 对任一个连同其闭包 $\overline{D}$ 严格位于 R 内部的单连通区域 $D\subset R$, 可以选取典型截线系使得 $D\subset R^*$.

此外, 总可以找到一个完全由解析曲线组成的典型截线系 S. 由解析曲线所组成的系统 S 的唯一性, 可以, 例如, 由某个与 S 有关的泛函达到极值这样的附加要求来保证. 特别, 可以作出系统 S 中的循环典型截线 a_j, b_j 使得在系统 S 的同伦类中 **Robin 常数** (Robin constant) 的最大值在一个指定区域 $D\subset R$ 内一点 p_0 达到, $p_0\in D$. 曲线 l_s 的唯一性也可由要求 Robin 常数在一对指定点为最大来保证(见[2]).

参考文献

[1] Hurwitz, A. and Courant, R., Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen, I, Springer, 1964, Chapt. 8.

[2] Schiffer, M. and Spencer, D. C., Functionals of finite Riemann surfaces, Princeton Univ. Press, 1954.

Е. Д. Соломенцев 撰　侯纪欣 译

典范集 [**canonical set**; **каноническое множество**], 闭的, κa 集 (κa-set)

拓扑空间的集合 M, 它是开集的闭包. 换句话说, 它是自身内部 $\langle M\rangle$ 的闭包: $M=[\langle M\rangle]$. 每个闭集 F 包含一个极大 κa 集, 那就是 $A=[\langle F\rangle]$. 两个 κa 集的并仍是 κa 集, 但它们的交未必是 κa 集. κa 集的有限交称为 π 集 (π-set).

一个闭集内部的集合, 称为典范开集 (canonical open set) 或 κo 集; 换句话说, 它是自身闭包的内部: $M=\langle[M]\rangle$. 每个开集 G 包含在一个最小的 κo 集中, 那就是 $B=\langle[G]\rangle$. 开典范集也可以定义为闭典范集的余集, 反之亦然.

参考文献

[1] Александров, П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977.

[2] Архангельский, А. В., Пономарев, В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974 (英译本: Arkhangel'skii, A. V. and Ponomarev, V. I., Fundamentals of general topology: problems and exercises, Reidel, 1984).

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 典范集的其他名称是: 正则闭集 (regular closed set) 或闭域 (closed domain). 典范开集也称为正则开集 (regular open sets) 或开域 (open domains).

在俄文文献中, $[A]$ 表示 A 的闭包, $\langle A\rangle$ 表示 A 的内部. 在西方文献中, 它们分别表示为 Cl A 和 Int A.

正则闭集族关于下述运算构成一个 **Boole 代数** (Boolean algebra): $A\vee B=A\cup B$, $A\wedge B=\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(A\cap B))$ 及 $A'=\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(X\setminus A))$. 对于正则开集族也可以这样做.

如果 X 是紧 Hausdorff 空间, 则这些代数中随便哪一个的 **Stone 空间** (Stone space) 都是 X 的绝对形.

徐定宥、罗嵩龄、许依群 译

Cantor 公理 [**Cantor axiom**; **Кантора аксиома**]

表征实数轴的连续性的公理之一, 如下所述: 任何闭区间套序列 (即后一个区间包含在前一个区间之中), 如果其长度趋于零, 则必包含唯一的公共点. 为 G.

Cantor 于 1872 年提出. БСЭ-3 张鸿林 译

Cantor 曲线 [Cantor curve; Канторова кривая]

可度量化的一维连续统. Cantor 曲线原先归入平面无处稠密的连续统, 它是 G. Cantor 所研究的平面的一维闭连通子集的第一个(但不是本质的)特征. Cantor 曲线包含无处稠密的子连续统, 当且仅当它的支点集的闭包是一维的. 另一方面, 如果 Cantor 曲线不包含无处稠密的子连续统, 则其所有点具有有限分支指标. 不含支点的 Cantor 曲线是简单弧或简单闭直线. Cantor 曲线的端点集, 即指标为 1 的点的集合, 是零维的, 但可以是处处稠密的. 如果 Cantor 曲线的所有点有相同的有限分支指标, 则这条 Cantor 曲线是简单闭直线. 万有 Cantor 曲线 (Menger 曲线 (Menger curve)) 可以构造出来, 它是包含每一条 Cantor 曲线的拓扑象的 Cantor 曲线.

参考文献

[1] Урысон, П. С., Тр. по топологии и другим областям математики, т. 2, М.-Л., 1951.

[2] Menger, K., Kurventheorie, Teubner, 1932.

В. В. Федорчук 撰

【补注】 并不是所有可度量化的一维连续统都能够嵌入平面. 例如, 4 维单形的 1 维骨架就是这样的空间 ([A1]).

参考文献

[A1] Engelking, R., Dimension theory, North-Holland and PWN, 1978.

罗嵩龄、许依群、徐定宥 译

Cantor 密断统 [Cantor discontinuum; Канторов дисконтинуум], Cantor 完满集 (Cantor perfect set)

同 **Cantor 集** (Cantor set).

Cantor 流形 [Cantor manifold; Канторово многообразие]

n 维紧空间 $X(\dim X=n)$ 中, 非空集合之间的任意分拆 (partition) B, 有维数 $\dim B\geqslant n-1$. 其等价定义是: n 维 Cantor 流形是 n 维紧空间 X, 使得将 X 表为两个非空闭真子集 X_1 与 X_2 之并的每一种表示, 有 $\dim(X_1\cap X_2)\geqslant n-1$. 一维可度量化 Cantor 流形是一维连续统或者 **Cantor 曲线** (Cantor curve).

Cantor 流形的概念是由 П. С. Урысон 引进的 (见 [1]). n 维闭球, 进而 n 维闭流形是 Cantor 流形; n 维 Euclid 空间不可能用维数 $\leqslant n-2$ 的集合来分拆 (对 $n=3$, 这是 Урысон 定理 (Urysohn theorem), 对 $n>3$, 这是 Александров 定理 (Aleksandrov theorem)). $(n-1)$ 维 Cantor 流形是 n 维 Euclid 空间的两个区域的公共边界, 其中之一是有界的 (Александров 定理). Cantor 流形理论中, 主要事实是每个 n 维紧空间包含 n 维 Cantor 流形 (Александров 定理).

在 n 维紧空间 X 中极大 n 维 Cantor 流形称为 X 的维数分支 (dimensional component). 紧 Hausdorff 空间 X 的 n 维 Cantor 子流形包含在 X 的唯一的维数分支内. n 维紧 Hausdorff 空间 X 的两个不同的维数分支的交, 其维数 $\leqslant n-2$. 特别地, 一维紧 Hausdorff 空间的维数分支就是它的分支. 有限维紧度量空间维数分支的集合是有限的, 可数的, 或者有连续统的基数. 如果 A 是完全正规紧空间 X 的任一维数分支, B 是它的所有余维数分支的并, 则 $\dim(A\cap B)\leqslant n-2$ (Александров 定理). 在可遗传正规第一可数紧 Hausdorff 空间中, 维数分支可以包含在它的余维数分支的并中.

n 维紧空间 X 的所有维数分支的并 K_X 称为这个空间的内维数核 (interior dimensional kernel). 根据维数的单调性, 当 X 为完全正规紧空间时总有 $\dim K_X=\dim X$ 及 $\dim(X\setminus K_X)\leqslant\dim X$. 集合 $X\setminus K_X$ 不包含 n 维紧集. 但是, 即使对于 Hausdorff 紧统, 也不知道 (1978) 是否有 $\dim(X\setminus K_X)=\dim X$. 对于可遗传正规紧空间, 内维数核和它的余会有各种可能的维数; 这就是说, 假定连续统假设成立, 对任意三个整数 n, n_1 和 n_2, $n\geqslant 1$, $n_1\geqslant n$ 及 $n_2\geqslant 0$, 存在 n 维可遗传正规空间 X, 使得 $\dim K_X=n_1$ 及 $\dim(X\setminus K_X)=n_2$.

如果 $\dim X=\operatorname{ind} X$, 则 $K_X\subset N_X$, 这里 N_X (正像 Урысон 所定义的) 是归纳维数核 (inductive dimensional kernel), 也就是使得 $\operatorname{ind}_x X=n$ 的所有点 $x\in X$ 的集合. 紧度量集 X 的归纳维数核 N_X 总是一个 F_σ 集. 对于内维数核则不知道是否也有这个结论. 但是对于紧 Hausdorff 空间, 不管是归纳维数核还是内维数核, 都未必是 F_σ 集. 如果 X 是紧度量空间, 在每一点 $x\in N_X$ 处,

$$\operatorname{ind}_x N_X=\operatorname{ind}_x X$$

(Menger 定理 (Menger theorem)). 因此, 对任意紧度量空间 X, K_X 在 N_X 中处处稠密. 这一点不适用于任意紧 Hausdorff 空间. 剩下一个没有解决的问题 (1978) 是: 是否一个点被包含在连同某个非退化连续统在一起的归纳维数核之中.

内维数核 K_X 在 X 中处处稠密的有限维连续统 X 称为广义 Cantor 流形 (generalized Cantor manifold). n 维 Euclid 空间两个开子集的公共边界是 $(n-1)$ 维广义 Cantor 流形. 在可度量化的 n 维广义 Cantor 流形 X 中, 可以有一个满足 $\operatorname{ind}_x X<n$ 的点 x 的集合在 X 中处处稠密. 不论是乘积, 还是连续映射, 对于广义 Cantor 流形的性质都不保持. 对于 Cantor 流形的性质则是对的.

紧空间 X 称为无穷维 Cantor 流形 (infinite-dimensional Cantor manifold), 如果无法用弱无穷维闭子

集来分拆它.

参考文献

[1] Урысон, П. С., Тр. по топологии и другим областям математики, т. 1, М. - Л., 1951.

[2] Aleksandrov, P. S., Untersuchungen über Gestalt und lage abgeschlossener Menge beliebiger Dimension, *Ann. of Math.*, **30** (1929), 101 - 187.

[3] Aleksandrov, P. S., On the dimension of normal spaces, *Proc. Royal. Soc. London. Ser. A*, **189** (1947), 11 - 39.

[4] Александров, П. С., Пасынков, Б. А., Введение в теорию размерности …, М., 1973.

[5] Федорчук, В. В., 《Докл. АН СССР》, **215** (1974), 2, 289 - 292.

[6] Menger, K., Dimensionstheorie Teubner, 1928.

[7] Скляренко, Е. Г., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **23** (1959), 2, 197 - 212.

B. B. Федорчук 撰

【补注】 以 Александров 命名的定理不仅仅属于他: 关于 n 维 Euclid 空间分拆的定理属于 K. Menger([A5])及 Урысон([A1] 和 [A2]).

关于紧度量空间的 Cantor 流形定理属于 W. Hurewicz 与 Menger([A3]), L. A. Tumarkin([A6]). Александров 在 [3] 中将它推广到任意紧 Hausdorff 空间. 最后, 关于维数分支的交的定理是 S. Mazurkiewicz 在 [A4] 中对紧度量空间证明的, Александров 将它推广至完全正规紧空间.

并非每个无限维紧空间都包含一个无限维 Cantor 流形, 存在许多紧度量弱无限维空间, 例如, 递增维数立方的拓扑和 $\oplus_{n=1}^{\infty} I^n$ 的单点紧化.

参考文献

[A1] Urysohn, P. S., Mémoire sur les multiplicités cantoriennes, *Fund. Math.*, 7 (1925), 30 - 137.

[A2] Engelking, R., Dimension theory, PWN and North-Holland, 1978.

[A3] Hurewicz, W. and Menger, K., Dimension and Zusammenhangsstuffe, *Math. Ann.*, **100** (1928), 618 - 633.

[A4] Mazurkiewicz, S., Ein Satz über dimensionelle Komponenten, *Fund. Math.*, **20** (1933), 98 - 99.

[A5] Menger, K., Über die dimension von Punktmengen II, *Monatsh. für Math. and Phys.*, **34** (1926), 137 - 161.

[A6] Tumarkin, L. A., Sur la structure dimensionelle des ensembles fermés, *C. R. Acad. Paris*, **186** (1928), 420 - 422.

徐定宥、罗嵩龄、许依群 译

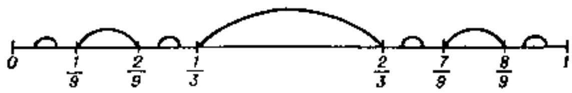
Cantor 悖论 [Cantor paradox; Кантора парадокс]

见悖论 (antinomy).

Cantor 集 [Cantor set; Канторово множество]

所有形如 $\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon_i/3^i$ 的数组成的实区间[0, 1]的子集, 其中 ε_i 是 0 或 2. 其几何描述如下(见图): 从[0, 1]中去掉它的三等分的中间部分 (1/3, 2/3); 再从剩下的区间[0, 1/3], [2/3, 1]中去掉它们的三等分的中间部分 (1/9, 2/9) 和 (7/9, 8/9); 同样从剩下的四个区间中去掉三等分的中间部分等等. 去掉所有这些区间(邻接区间 (adjacent intervals))之后剩下的部分 (全长为 1) 是 Cantor 完满集 (Cantor perfect set) (Cantor 集 (Cantor set); Cantor 三分点集 (Cantor ternary set); Cantor 密断统 (Cantor discontinuum)).

它在实直线上无处稠密但有连续统的基数.



从拓扑的观点, Cantor 集是零维、完满、可度量化的紧统 (即没有孤立点); 这样的紧统在同胚下是唯一的. 实直线的所有有界、完满, 无处稠密的子集都是相似集. Cantor 集同胚于两点空间 D 的拷贝的可数积 $D^{\aleph_0}$, 且是拓扑群 $Z_2^{\aleph_0}$ 的空间. Cantor 集在两种意义下是万有的: 1) 首先, 任一具有可数基的零维正则 Hausdorff 空间同胚于 Cantor 集的子集; 2) 其次, 任一可度量化紧统是 Cantor 集的连续象 (Александров 定理 (Aleksandrov theorem)). 这个定理表明二进紧统理论的开始, 并且从泛函的观点看, 许多紧统彼此相似. 特别地, 所有完满紧统具有典型开集的相同的 Boole 代数. 存在从 Cantor 集到紧统上的特殊映射, 依此可证明两个任意完满可度量化紧统上 (例如, 在区间上和正方形上) 的所有连续函数的 Banach 代数是线性同胚的. 进而, Cantor 集和它到任意可度量化紧统上映射的可能性是在拓扑学和函数论中构造许多有趣例子的基础. 其中之一是所谓 Cantor 阶梯 (Cantor staircase), 它是[0, 1]到自身上连续单调映射的图, 它的导数是有定义的并且在一个测度为 1 的开集上等于零. 虽然标准 Cantor 集的测度为零, 但存在单位区间上无处稠密的完满紧统, 具有任意接近于 1 的测度.

参考文献

[1] Александров, П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977.

B. B. Федорчук 撰

【补注】 上面第一直线构造的推广, 导致 Cantor 状集 (Cantor-like sets), 见 [A2].

参考文献

[A1] Arkhangel'skiĭ, A. V. and Ponomarev, V. I., Fundamentals of general topology, problems and exercises, Reidel, 1984 (译自俄文).

[A2] Hewitt, E. and Stromberg, K., Real and abstract analysis, Springer, 1965.

方嘉琳 译

Cantor 定理 [Cantor theorem ; Кантора теорема]

1) 一集合 A 的所有子集构成的集合 2^A 与 A 及其任意子集都不等势. 该定理的证明起源于 G. Cantor (1878), 它所蕴含的思想,称为"Cantor 对角线过程", 在集合论(及其他领域)中起着重要的作用. Cantor 定理蕴涵着

$$2^A,\ 2^{2^A},\ 2^{2^{2^A}},\cdots$$

中的任意两个集合都不等势. 用此法我们可以得到无穷多个截然不同的基数(cardinal number). Cantor 定理还蕴涵着不存在含有所有集合的集合. 这就意味着在集合论公理中不包含下述论断:对每个命题函数(或谓词)$\varphi(x)$都存在恰好由所有满足 $\varphi(x)$ 的元素 x 所组成的集合(见 [1], [2], [3], [8]). Б А Ефимов 撰

2) 实数的非空有界闭集的任意递降序列都有非空交. 这已推广到度量空间的紧子集上. 下面性质是度量空间 X的完全性的定义之一: 如果 X的非空闭集的递降序列的直径趋向于零, 则该序列有非空交. 下面的性质是拓扑空间 X 的紧性的定义之一: X 的非空闭集的每一全序递降族都有非空交 ([1], [2], [4], [5], [11]).

3) 实数的每一集合都是其凝聚点(见集合的凝聚点 (condensation point of a set)) 的完满集与一可数集的并. 有时这也称为 Cantor - Bendixson 定理 (Cantor - Bendixson theorem). 该定理已推广到具有可数基的度量空间的子集上 (Lindelöf 定理 (Lindelöf theorem), 见[1], [2], [3], [14], [15], [17]).

4) 若二集合中的任一个都与另一个的某一子集等势则此二集合等势. 对于二良序集, 相似陈述也成立. 有时称为 Cantor - Bernstein 定理 (Cantor - Bernstein theorem)或简称 Bernstein 定理 (Bernstein theorem) (F. Bernstein 给出了该定理的正确证明, 见[1], [2], [3], [10], [12], [16]).

5) 如果在区间 $[-\pi, \pi]$ 上除有穷多个点外有

$$A_n = a_n \cos nx + b_n \sin nx \to 0,$$

则 $a_n, b_n \to 0$. 这已推广到在正测度集上 $A_n \to 0$ 的情形 (Lebesgue 定理 (Lebesgue theorem)), 在第二范畴集上 $A_n \to 0$ 的情形 (Young 定理 (Young theorem)) 以及其他情形. 重要的推论是关于三角级数的唯一性集合的各种定理(见[1], [6], [7], [9], [18], [19]).

6) 实轴的有界闭区间上的连续函数在该区间上是一致连续的. 这已推广到由紧空间到**一致空间** (uniform space) 上的连续映射上. 有时称此定理为 Heine - Cantor 定理(Heine - Cantor theorem) (见[1], [4], [5], [13]).

参考文献

[1] Cantor, G., Gesammelte abhandlungen, E. Zermelo(ed.), Springer, 1932.

[2] Hausdorff, F., Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig, 1914. Reprinted (incomplete) English translation: Set theory, Chelsea, 1978 (中译本: F. 豪斯道夫, 集论, 科学出版社, 1960).

[3] Kuratowski, K. and Mostowski, A., Set theory, North - Holland, 1968.

[4] Александров, П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977.

[5] Bourbaki, N., Elements of mathematics. General topology, Addison - Wesley, 1966 (译自法文).

[6] Бари, Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961 (英译本: Bary, N. K., A treatise on trigonometric series, Pergamon, 1964).

[7] Whittaker, E. T. and Watson, G. N., A course of modern analysis, Cambridge Univ. Press, 1952.

[8] Cantor, G., Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre, *J. Reine Angew. Math.*, **84** (1878), 242–258.

[9] Cantor, G., Über trigonometrische Reihen, *Math. Ann.*, **4** (1871), 139–143.

[10] Cantor, G., Beiträge zur Begründung des transfiniten Mengenlehre, *Math. Ann.*, **49** (1897), 207–246.

[11] Cantor, G., Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten, *Math. Ann.*, **17** (1880), 355–358.

[12] Borel, E., Leçons sur la théorie des fonctions, Gauthier - Villars, 1928.

[13] Heine, E., Die Elemente der Funktionenlehre, *J. Reine Angew. Math.*, **74** (1872), 172–188.

[14] Lindelöf, E, Remarque sur une théorème fondamental de la théorie des ensembles, *Acta Math.*, **29** (1905), 183–190.

[15A] Cantor, G., Über eine die trigonometrischen Reihen betreffenden Lehrsatz, *J. Reine Angew. Math.*, **72** (1870), 130–138.

[15B] Cantor, G., Beweis, dass eine für jeden reellen Wert von x durch eine trigonometrische Reihe gegebene Funktion $f(x)$ sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen lässt, *J. Reine Angew. Math.*, **72** (1870), 139–142.

[16] Cantor, G., Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten, *Math. Ann.*, **21** (1883), 51–58.

[17] Bendixson, L., Quelques théorèmes de la théorie des ensembles de points, *Acta Math.*, **2** (1883), 415–429.

[18] Lebesgue, H., Leçons sur les séries trigonometriques, Gauthier - Villars, 1906.

[19] Young, W. H., *Proc. Roy. Soc.*, **87** (1912), 331–339.

[20] Bourbaki, N., Eléments d'histore des mathématiques, Hermann, 1960.

М. И Войцеховский 撰

【补注】 1) 两个集合是等势的(对等的), 如果它们之间存在一个一一映射 (bijection). 直观的意思就是它们有相同数目的元素; 换言之, 它们具有相同的基数

(cardinality). Cantor定理的证明如下：假设 $f: A \to 2^A$ 是一映射；为证明它不是到上的，考虑 $X=\{a \in A: a \notin f(a)\}$，则 X 不在 f 的值域中.

他用类似方法证明了实数集不是可数的：假设 $f: \mathbf{N} \to \{x: 0<x<1\}$ 是一个映射且用十进小数展开记 $f(n)=0.a_{n1}a_{n2}\cdots$. 令 $r=0.r_1r_2\cdots$，其中若 $a_{ii} \neq 5$，则 $r_i=5$；若 $a_{ii}=5$，则 $r_i=6$，则 r 不在 f 的值域中，上述证明是对名词"对角线过程"或"对角线论证"的最好说明.

4) 这个定理也称为 Schroeder - Bernstein 定理 (Schroeder-Bernstein theorem). 对于全序集类似结论不成立. 考虑 $\{x: 0<x<1\}$ 和 $\{x: 0<x \leqslant 1\}$.

一般的历史资料见 [2]. 关于第二范畴集见**集合的范畴** (category of a set).　　张锦文, 赵希顺 译

冠 [cap; шапка], k 冠 (k-cap), 弧 (arc)

有限射影空间 $P(n, q)$ 中无三点共线的 k 个点的集合，两个冠认为是等价的，如果在 $P(n, q)$ 中有直射变换把其中一个变换成另一个. 探求 $P(n, q)$ 中冠的最大点数 $m(n, q)$，$m(n, q)$ 冠的构作和分类都是冠研究中的重要问题，这些问题至今(1984)尚未完全解决. 下面是一些已知结果(见[2], [3])：

$m(n, 2)=2^n$；2^n 冠(在等价意义下)是唯一的，它是不位于 $P(n, 2)$ 的一个固定超平面上的一个点集；

当 q 是奇数时，$m(2, q)=q+1$；这时 $P(2, q)$ 中的 $(q+1)$ 冠是唯一的，它是二次曲线；

当 q 是偶数时，$m(2, q)=q+2$；这时 $P(2, q)$ 中的 $(q+2)$ 冠一般来说不是唯一的.

$m(3, q)=q^2+1$. 如果 q 是奇数，$P(3, q)$ 中的 q^2+1 冠是唯一的，而且是一个椭圆型二次曲面；如果 q 是偶数，则一般说来它不是唯一的.

$m(4, 3)=20$；$P(4, 3)$ 中的 20 冠是不唯一的；

$m(5, 3)=56$；$P(5, 3)$ 中的 56 冠是唯一的.

在编码理论中用到冠(如见[2]).

参考文献

[1] Bose, R. C., Mathematical theory of the symmetrical factorial design, *Shankhyā*, 8 (1947), 107 – 166.

[2] Hill, R., Caps and codes, *Discrete Math.*, 22 (1978), 111 – 137.

[3] Segre, B., Introduction to Galois geometries, *Atti Accad. Naz. Lincei Mem.*, 8 (1967), 133 – 236.

В. В. Афанасьев 撰

【补注】 在曲面的(微分)拓扑中，一个第二类冠 (cap of the second kind) 或交叉冠 (cross cap) 是其边界同胚于 **Möbius 带** (Möbius strip) 的 2 维流形，它以如下方式被用来构造(更复杂的)曲面：移去一个圆盘而代之以一个交叉冠或一个把 (bundle) (也称第一类冠 (cap of the first kind)). 详见**曲面理论** (theory of surfaces).　　李乔 译　钟集 校

容量 [capacity; емкость], 集合的

位势论 (potential theory) 中出现的一个集函数，是与静电容量这个物理概念类似的概念.

设 S 和 S^* 是 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n (n \geqslant 3)$ 中的两个光滑闭超曲面且 S^* 包围了 S. 这样一个系统称为电容器 (condenser) (S, S^*). 设 $u(x)$ 是 S 与 S^* 之间的区域 D 内的调和函数，它在 S 上取值 1，在 S^* 上取值 0. 电容器的容量 (condenser capacity) $C(S, S^*)$ 是如下数值：

$$C(S, S^*) = -\frac{1}{(n-2)\sigma_n} \int_{S'} \frac{\partial u(x)}{\partial n} d\sigma = \qquad (1)$$

$$= \frac{1}{(n-2)\sigma_n} \int_D |\operatorname{grad} u(x)|^2 d\omega,$$

其中 $\sigma_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中单位球的面积，S' 是位于 S 与 S^* 之间且包围了 S 的任意中间超曲面，$\partial u / \partial n$ 为 S' 上沿外法线方向的导数，$d\sigma$ 是 S' 上的面积元素，$d\omega$ 是体积元素. 等价地，电容器容量 $C(S, S^*)$ 可定义为下列形式的所有积分的下确界：

$$\frac{1}{(n-2)\sigma_n} \int_D |\operatorname{grad} v(x)|^2 d\omega,$$

其中 $v(x)$ 为在 D 内连续可微且在 S 与 S^* 上分别取值为 1 与 0 的函数. 如果 $S^* = S(0, R)$ 是中心在原点、半径 R 充分大的球，那么若在 (1) 中令 $R \to \infty$，就得到由 S 界定的紧集 K 的容量，也称为 K 的调和容量 (harmonic capacity) 或 Newton 容量 (Newtonian capacity)：

$$C(K) = \lim_{R \to \infty} C(S, S(0, R)),$$

且总有 $0 \leqslant C(K) < \infty$. $C(K)$ 是与绝缘导体 K 的静电容量类似的概念.

在平面 $\mathbf{R}^2$ 里，电容器 (L, L^*) 是指由两条不相交的简单光滑闭曲线 L 和 L^* 构成的系统，其中 L^* 包围了 L. 设 $u(x)$ 是在 L 和 L^* 之间的区域 D 内的调和函数，它在 L 上取值为 1 而在 L^* 上取值为 0. 电容器的容量 $C(L, L^*)$ 是如下的数值：

$$C(L, L^*) = -\frac{1}{2\pi} \int_{L'} \frac{\partial u(x)}{\partial n} ds = \frac{1}{2\pi} \int_D |\operatorname{grad} u(x)|^2 d\omega,$$

其中 ds 是位于 L 与 L^* 之间且包围了 L 的闭曲线 L' 的弧长元素. 设 $L^* = S(0, R)$ 是中心在原点、半径 R 充分大的圆；在式中令 $R \to \infty$，则极限值

$$W(K) = \lim_{R \to \infty} \left[\frac{1}{C(L, S(0, R))} - \ln R \right]$$

称为由 L 界定的紧集 K 的 Wiener 容量（Wiener capacity），或 Robin 常数（Robin constant）；Wiener 容量可以取任意值，$-\infty < W(K) < +\infty$。更常用的是对数容量（logarithmic capacity），也称为调和容量（harmonic capacity）或共形容量（conformal capacity）：

$$C(K) = e^{-W(K)} = \lim_{R\to\infty} Re^{-1/C(L,S(0,R))}, \quad (2)$$

它满足 $0 \leqslant C(K) < \infty$.

当 $n \geqslant 3$ 时，由超曲面 S 界定的紧集 K 的容量也可以用稍微不同的方法定义．设 $v_K(x)$ 是紧集 K 的**容量位势** (capacity potential) 或平衡位势 (equilibrium potential)，即在 K 的外部处处调和且在无穷远处正则并在 S 上取值为 1 的函数．那么

$$C(K) = -\frac{1}{(n-2)\sigma_n}\int_S \frac{\partial v_K(x)}{\partial n} d\sigma = \quad (3)$$

$$= \frac{1}{(n-2)\sigma_n}\int_{D'} |\operatorname{grad} v_K(x)|^2 d\omega,$$

其中 D' 是 S 的外部．公式 (3) 表明容量 $C(K)$ 是分布在 S 上的一个正测度，且由这个测度生成的单层 Newton 位势等于容量位势 $v_K(x)$，即

$$v_K(x) = \int_S \frac{d\mu(y)}{|x-y|^{n-2}}, \quad x \in D';$$

$$C(K) = \int_S d\mu(y) = \mu(S).$$

测度 μ 称为容量测度（capacity measure）或平衡测度（equilibrium measure）.

在所有满足 $\lambda(K) = \mu(S) = C(K)$ 的 K 上的正 Borel 测度 λ 中，容量测度 μ 使能量积分

$$E(\lambda) = \iint_{K\times K} \frac{d\lambda(x)d\lambda(y)}{|x-y|^{n-2}} \quad (4)$$

达到极小值．换句话说，容量 $C(K)$ 可用公式 $C(K) = 1/\inf E(\lambda)$ 来定义，其中下确界是对所有集中在 K 上且用条件 $\lambda(K) = 1$ 规范的正测度 λ 来取的.

当 $n=2$ 时，由于对数位势在无穷远处的奇异性，上面构造容量位势的方法只适用于电容器，例如 $(L, S(0,R))$，借助于圆 $S(0,R)$ 的内部 Δ 的 **Green 函数**(Green function) $G(x,y)$ 可表为下式：

$$\left.\begin{aligned} u_K(x;S(0,R)) &= \int_L G(x,y)d\mu(y), \quad x \in D; \\ C(L,S(0,R)) &= \int_L d\mu(y) = \mu(L), \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

这里容量位势 $u_k(x; S(0,R))$ 在 D 内同早先对于 $(L, S(0,R))$ 引入的调和函数 $u(x)$ 相等．公式 (5) 定义的容量有时称为 Green 容量（Green capacity）；这种构造法对任何 $n \geqslant 2$ 都是可行的．当 $n=2$ 时，由公式 $W(K) = 1/\inf E(\lambda)$, $\lambda(K)=1$，可给出紧集 K 的 Wiener 容量，但能量积分

$$E(\lambda) = \iint_{K\times K} \ln\frac{1}{|x-y|} d\lambda(x)d\lambda(y) \quad (6)$$

现在未必总为正数.

在 $\mathbf{R}^n$ $(n \geqslant 3)$ 中，任意一个紧集 K 的容量可借助于极小能量的上述性质来定义：

$$C(K) = \frac{1}{\inf E(\lambda)}, \ \lambda(K)=1, \ \lambda \geqslant 0,$$

这里能量积分 $E(\lambda)$ 按公式 (4) 计算．当 $n=2$ 时，任何一个紧集的 Wiener 容量也据此而定义为：

$$W(K) = \frac{1}{\inf E(\lambda)}, \ \lambda(K)=1, \ \lambda \geqslant 0,$$

这里能量 $E(\lambda)$ 按公式 (6) 计算．向对数容量的转变由公式 $C(K)=e^{-W(K)}$ 来实现.

一个等价的方法是构造任意一个紧集 K 的容量位势 $v_k(x)$．当 $n \geqslant 3$ 时，它可定义为满足下述条件的诸位势 $U_\lambda(x)$ 中的最大位势：正测度 λ 集中在 K 上且 $U_\lambda(x) \leqslant 1$．生成 $v_k(x)$ 的测度 μ 则为容量测度，$\mu(K) = C(K)$．当 $n=2$ 时，容量位势的构造如同上述考虑电容器 $(K, S(0,R))$ 的情况那样，借助于圆盘 Δ 的 Green 函数来建立．而紧集的容量 $C(K)$ 则通过公式 (2) 取极限得到.

若 $v_k(x)=0$，则 $C(K)=0$．当 $n=2$ 时，方程 $C(K)=0$ 和 $W(K)=+\infty$ 是等价的．零容量紧集在位势理论中的作用与零测度集在积分理论中所起的作用相同．例如，方程 $v_k(x)=1$ 在 K 上至多除去一个零容量紧集的子集以外，在其他点处处成立．任何集中在零容量紧集 K 上的正测度的位势都是无界的．而且，对任何零容量紧集 K，存在一个集中在 K 上的正测度 ν，满足 $U_\nu(x) = +\infty$, $x \in K$，和 $U_\nu(x) < +\infty$, $x \notin K$，即任意零容量紧集是**极集**（polar set）.

紧集的容量位势和容量的性质：1) 映射 $K \to v_K(x)$ 和 $K \to C(K)$ 是递增的，即 $K_1 \subset K_2$ 蕴涵 $v_{K_1}(x) \leqslant v_{K_2}(x)$ 处处成立，且 $C(K_1) \leqslant C(K_2)$；2) 这两个映射都是右连续的，即对任何固定的 $x \in \mathbf{R}^n$ 和任意 $\varepsilon > 0$，存在一个开集 ω，使得如果一个紧集 K' 满足 $K \subset K' \subset \omega$，则 $v_{K'}(x) - v_K(x) < \varepsilon$ 处处成立，且 $C(K') - C(K) < \varepsilon$；3) $v_K(x)$ 和 $C(K)$ 作为 K 的函数是强次加性的（strongly subadditive），即

$$v_{K_1\cup K_2}(x) + v_{K_1\cap K_2}(x) \leqslant v_{K_1}(x) + v_{K_2}(x),$$

$$C(K_1 \cup K_2) + C(K_1 \cap K_2) \leqslant C(K_1) + C(K_2)$$

如果 G 是球 $B=B(0,R)$ 内的一个开集，则由定义，$C(G) = C(B) - C(\bar{B}\setminus G)$．对任一集合 E，内容量（inner capacity）$\underline{C}(E)$ 定义为上确界 $\underline{C}(E) = \sup C(K)$，其中 K 取遍所有紧集 $K \subset E$．外容量 (outer capacity) $\bar{C}(E)$ 定义为

下确界 $\overline{C}(E)=\inf C(G)$, 其中 G 取遍所有开集 $G\supset E$. 一个集合 E 称为可容的 (capacitable), 如果 $\overline{C}(E)=\underline{C}(E)=C(E)$. $\mathbf{R}^n$ 内的所有 Borel 集, 甚至所有解析集都是可容的. 这样, 容量 $C(E)$ 是一个运动不变的集函数, 但不是可加的. 一个集合 E 的容量 $C(E)$ 等于零, 这是 E 的一个很重要的性质. 在位势论的许多问题中, 上述意义下的零容量集可忽略不计. 例如, 下面的强最大值原理 (strong maximum principle) 成立. 设 $w(x)$ 为区域 $G\subset \mathbf{R}^n(n\geqslant 3, \infty\notin G)$ 内的上有界次调和函数, 又设 $\lim_{x\to y}\sup w(x)\leqslant M$ 对 $y\in\partial G$ 几乎处处成立, 即可能在 ∂G 的一个子集 E 上例外, 这里 $C(E)=0$, 且 $\infty\notin E$; 那么 $w(x)\leqslant M$ 在 G 内处处成立, 仅当 $w(x)\equiv M$ 时等号成立, 甚至只在一点上成立.

容量的概念有各种推广. 从容量位势和容量测度或者能量的概念出发, 关于非 Newton 位势的容量理论已经建立, 这种位势有如 **Bessel 位势** (Bessel potential), **非线性位势** (non-linear potential), **Riesz 位势** (Riesz potential) 等. 特别是, 这种推广使得人们能够按照数学物理和分析的各种问题来变更零容量集的概念 (见 [6]).

据 G. Choquet 的理论, 在抽象的可分离拓扑空间 X 内, 容量用公理法定义为满足下述公理的数集函数 $K\to C(K)$: 它是递增的, 右连续和强次可加的. 抽象空间 X 中的容量理论, 其构造方法稍有不同, 这可在**抽象位势论** (potential theory, abstract) 或者**调和空间** (harmonic space) 理论的一般公理框架中找到. 在抽象容量理论中, 一个基本的结果是 Choquet 定理 (Choquet theorem): K 解析集 (K-analytic sets), 即紧空间内的 $K_{\sigma\delta}$ 集的连续象是可容的.

一般地说, 在函数论的各种问题, 主要是涉及用特殊函数类来逼近的问题中, 引进一个合适的容量的概念是有用的. 例如, 在用解析函数逼近的问题中, **解析容量** (analytic capacity) 的概念是最重要的. 设 K 是复 z 平面上的紧集, 函数 $f(z)$ 在 K 的外部解析, $|f(z)|\leqslant 1$, $f(\infty)=0$; 解析容量 $\gamma(K)$ 即为数值

$$\gamma(K) = \sup\left|\frac{1}{2\pi}\int_{L'} f(z)\,dz\right|,$$

其中 L' 是包围 K 的围道, 上确界是对所有满足上述条件的 $f(z)$ 来取的.

参考文献

[1] Ландкоф, Н. С., Основы современной теории потенциала, М., 1966 (英译本: Landkof, N. S., Foundations of modern potential theory, Springer, 1972).

[2] Brélot, M., Eléments de la théorie classique du potentiel, Sorbonne Univ. Centre Doc. Univ., Paris, 1959, 第 4 版, 1969.

[3] Pólya, G. and Szegö, G., Isoperimetric inequalities in mathematical physics, Princeton Univ. Press, 1951.

[4] Brélot, M., Lecture on potential theory, Tata Inst. Fundam. Res., 1960.

[5] Dellacherie, C., Capacités et processus stochastiques, Springer, 1972.

[6] Carleson, L., Selected problems on exceptional sets, van Nostrand, 1967.

[7] Витушкин, А. Г., Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 4, М., 1975, 5–12.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 关于调和空间框架内的容量可见 [A1]; [A2], [A3] 在考虑其他问题同时讨论了 **Robin 常数** (Robin constant), 其中 [A3] 着重于与 **C** 中区域内的解析函数的关系. 最近有人已开始研究 $\mathbf{C}^n$ 中容量与 $\mathbf{C}^n$ 的区域内的解析函数增长界限的关系, 见 [A4] 和它的参考文献.

参考文献

[A1] Constantinescu, C. and Cornea, A., Potential theory on harmonic spaces, Springer, 1972.

[A2] Doob, J. L., Classical potential theory and its probabilistic counterpart, Springer, 1984.

[A3] Tsuji, M., Potential theory in modern function theory, Chelsea, reprint, 1975.

[A4] Korevaar, J., Green functions, capacities, polynomial approximation numbers and applications in real and complex analysis, *Nieuw Archiet voor Wiskunde IV*, 4 (1986), 2, 133–153.

吴炯圻、高琪仁 译 卫念祖 校

容量位势 [capacity potential; емкостный потенциал], 平衡位势 (equilibrium potential)

见容量 (capacity); **Robin 问题** (Robin problem).

Carathéodory 类 [Carathéodory class; Каратеодори класс]

圆盘 $|z|<1$ 内具有正实部的正则函数

$$f(z) = 1+\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$$

所组成的函数类 C, 该函数类以 C. Carathéodory 的姓命名, 他确定出类 C 上系数组 $\{c_1,\cdots,c_n\}(n\geqslant 1)$ 的值域的精确范围 (见 [1], [2]).

Riesz-Herglotz 定理 (Riesz-Herglotz theorem). $f(z)$ 属于 C 的必要充分条件是该函数具有 Stieltjes 积分表示式

$$f(z) = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,d\mu(t),$$

其中 $\mu(t)$ 是 $[-\pi,\pi]$ 上的非减函数且 $\mu(\pi)-\mu(-\pi)=1$.

利用这一表示式容易推出关于该圆盘内凸单叶函数, 星形单叶函数及其他函数的参数积分表示式.

Carathéodory-Toeplitz 定理 (Carathéodory-Toe-

plitz theorem). 在类 C 上系数组 $\{c_1, \cdots, c_n\}$ 的值域是 n 维复 Euclid 空间中的闭凸有界点集 K_n，在该集合上诸行列式

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} 2 & c_1 & \cdots & c_k \\ \bar{c}_1 & 2 & \cdots & c_{k-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \bar{c}_k & \bar{c}_{k-1} & \cdots & 2 \end{vmatrix}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

或者均为正数，或者直到某个下标均为正数，除此之外则全为零. 对于后一情形可得到系数体 K_n 的面 Π_n，对应于 Π_n 的每一点恰好有类 C 中的一个函数，该函数具有如下形式

$$f_N(z) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \frac{e^{it_j}+z}{e^{it_j}-z},$$

其中

$$\sum_{j=1}^{N} \lambda_j = 1, \ \lambda_j > 0, \ 1 \leqslant N \leqslant n, \ -\pi < t_j \leqslant \pi, \ t_j \neq t_k$$

且对于 $j \neq k$ 有 $t_j \neq t_k$，$k, j = 1, \cdots, N$.

C 上系数 $c_n (n=1, 2, \cdots)$ 的值域是圆盘 $|c_n| \leqslant 2$；对应于圆周 $|c_n|=2$ 的，唯有函数

$$f(z) = \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}.$$

C 上 $f(z_0)$ (z_0 固定，$|z_0|<1$) 的值域是以区间 $[(1-|z_0|)/(1+|z_0|), (1+|z_0|)/(1-|z_0|)]$ 为直径的圆盘；对应于该圆盘边界的，唯有函数

$$f(z) = \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}.$$

更一般类型的泛函组的值域亦已被研究过 (见 [6]). 对于类 C，变分公式已得到，借助于这一公式，类 C 中一些极值问题得以解决且以 $f_N(z)$ 为极值函数，$N \geqslant 2$ (见 [6]).

C 的主要子类是由具有实系数 $c_n (n=1, 2, \cdots)$ 的函数 $f(z) \in C$ 所组成的类 C_r. $f(z)$ 属于 C_r 的必要充分条件是该函数具有表示式

$$f(z) = \int_0^{\pi} \frac{1-z^2}{1-2z\cos t+z^2} d\mu(t),$$

其中 $\mu(t)$ 是 $[0, \pi]$ 上的非减函数且 $\mu(\pi)-\mu(0)=1$. 借助于这一表示式，C_r 类中许多极值问题可以解决.

参考文献

[1] Carathéodory, C., Über den Variabilitätsbereich der koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen, *Math. Ann.*, **64** (1907), 95–115.

[2] Carathéodory, C., Über den Variabilitätsbereich der Fourier'schen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **32** (1911), 193–217.

[3] Toeplitz, O., Über die Fourier'sche Entwicklung positiver Funktionen, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **32** (1911), 191–192.

[4] Riesz, F., Sur certains systèmes singuliers d'equations intègrales, *Ann. Sci. Ecole Norm. Super.*, **28** (1911), 33–62.

[5] Herglotz, G., Über Potenzreihen mit positiven, reellen Teil im Einheitskreis, *Ber. Verhandl. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig. Math. - Nat. Kl.*, **63** (1911), 501–511.

[6] Голузин, Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966 (中译本: Г. М. 戈鲁辛，复变函数的几何理论，科学出版社，1956).

Е. Г. Голузина 撰 杨维奇 译

Carathéodory 区域 [Carathéodory domain; Каратеодори область]

复平面中满足如下条件的有界单连通区域 G：G 的边界同 $\bar{G}$ 的余集中包含点 ∞ 的分支 G_∞ 的边界相同. 由 Jordan 曲线围成的区域是 Carathéodory 区域的例子. 每个 Carathéodory 区域可表示为单连通区域递减收敛序列 $\{G_n\}$ 的核，

$$\bar{G} \subset G_{n+1} \subset \bar{G}_{n+1} \subset G_n, \quad n=1, 2, \ldots,$$

而且存在这种序列的每个区域，都是 Carathéodory 区域 (Carathéodory 定理 (Carathéodory theorem)，见 [1]).

参考文献

[1] Carathéodory, C., Untersuchungen über die konformen Abbildungen von festen und veränderlichen Gebieten, *Math. Ann.*, **72** (1912), 107–144.

[2] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, т. 2, М., 1968 гл. 2 (中译本: А. И. 马库雪维奇，解析函数论，高等教育出版社，1957).

Е. Г. Голузина 撰

【补注】 设 G_n 是复平面中一列单连通区域. 假定每个区域都包含以 z_0 为圆心的一个固定圆盘 D. 令 $E=\{z$: 存在邻域 N 使得对所有充分大的 n 有 $N \subset G_n\}$，则 E 是开集. 设 G_{z_0} 是 E 中包含 z_0 的分支，这一区域称为序列 $\{G_n\}$ (关于点 z_0) 的核 (kernel). 称序列 $\{G_n\}$ 收敛于 G_{z_0}，如果 $\{G_n\}$ 的每一子列关于 z_0 具有同 $\{G_n\}$ 本身相同的核. 见 [2].

杨维奇 译

Carathéodory - Fejér 问题 [Carathéodory - Fejér problem; Каратеодори - Фейера задача]

把一个多项式接续成一个幂级数的问题，要求这一幂级数表示圆盘 $|z|<1$ 内一正则函数，并且在单位圆盘内所有以所给多项式作为 MacLaurin 级数初始段的正则函数组成的类中该函数在圆盘 $|z|<1$ 上模的上确界达到最小值. 这个问题的解由如下定理给出.

Carathéodory - Fejér 定理 (Carathéodory - Fejér

theorem) [1]. 设

$$P(z)=c_0+c_1z+\cdots+c_{n-1}z^{n-1}$$

是一给定多项式，$P(z)\not\equiv 0$. 存在唯一的形如

$$R(z)=\lambda\frac{\bar{\alpha}_{n-1}+\bar{\alpha}_{n-2}z+\cdots+\bar{\alpha}_0z^{n-1}}{\alpha_0+\alpha_1z+\cdots+\alpha_{n-1}z^{n-1}},\quad \lambda>0$$

的有理函数 $R(z)=R(z,c_0,\cdots,c_{n-1})$, 在单位圆盘内正则且以 $c_0,\cdots,c_{n-1}$ 为其 MacLaurin 展开式前 n 项系数. 在单位圆盘内所有形如

$$f(z)=P(z)+a_nz^n+\cdots$$

的正则函数组成的类中，此函数且唯有此函数使

$$M_f=\sup_{|z|<1}|f(z)|$$

取最小值，而且这个最小值就是 $\lambda=\lambda(c_0,\cdots,c_{n-1})$.

数值 $\lambda(c_0,\cdots,c_{n-1})$ 等于如下 $2n$ 次方程的最大正根:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & 0 & c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-1} \\ 0 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 & c_0 & \cdots & c_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 0 & 0 & \cdots & c_0 \\ \bar{c}_0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{c}_1 & \bar{c}_0 & \cdots & 0 & 0 & -\lambda & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \bar{c}_{n-1} & \bar{c}_{n-2} & \cdots & \bar{c}_0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda \end{vmatrix}=0.$$

若 $c_0,\cdots,c_{n-1}$ 是实数，则 $\lambda(c_0,\cdots,c_{n-1})$ 是如下 n 次方程的根的绝对值的最大值:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & 0 & c_0 \\ 0 & -\lambda & \cdots & c_0 & c_1 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-1} & -\lambda \end{vmatrix}=0.$$

参考文献

[1] Carathéodory, C., and Fejér, L., Ueber den Zusammenhang der Extremen von harmonischen Funktionen mit ihren Koeffizienten und den Picard - Landau'schen Satz, *Rend. Circ. Mat. Palermo*. **32** (1911), 218－239.

[2] Голузин, Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966 (中译本: Г. М. 戈鲁辛, 复变函数的几何理论, 科学出版社, 1956).

Г. В. Кузьмина 撰　杨维奇 译

Carathéodory 测度 [Carathéodory measure; Каратеодори мера]

由 Carathéodory 外测度 μ^* (outer Carathéodory measure μ^*) 诱导的测度，前者是指定义在 (具有度量 ρ) 的度量空间 M 的一切子集类上的外测度 (outer measure)，满足条件: 当 $\rho(A,B)>0$ 时

$$\mu^*(A\cup B)=\mu^*(A)+\mu^*(B).$$

它是 C. Carathéodory 引进的 ([1]). 集合 $E\subset M$ 属于 μ 的定义域，即 μ^* 可测，当且仅当对一切 $A\subset M$，成立等式

$$\mu^*(A)=\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap CE),$$

此处 $CE=M\setminus E$. 假如 E 是 μ^* 可测，则 $\mu(E)=\mu^*(E)$. Carathéodory 测度的定义域包含一切 Borel 集. 假如 μ^* 是某度量空间所有子集类上的外测度，使每个开集均为 μ^* 可测，则 μ^* 是 Carathéodory 外测度.

参考文献

[1] Carathéodory, C., Ueber das lineare Mass von Punktmengen, eine Verallgemeinerung des Längenbegriffs, *Nachr. Gesell. Wiss. Göttingen* (1914), 404－426.

[2] Saks, S., Theory of the integral, Hafner, 1952 (译自波兰文).

[3] Halmos, P. R., Measure theory, v. Nostrand, 1950 (中译本: P. 哈尔姆斯, 测度论, 科学出版社, 1958).

В. В. Сазонов 撰

【补注】 Carathéodory 外测度也时常称为度量外测度 (metric outer measure)，见 [A1].

参考文献

[A1] Hewitt, E. and Strömberg, K., Real and abstract analysis, Springer, 1965.

王斯雷 译　郑维行 校

Carathéodory 定理 [Carathéodory theorem; Каратеодори теорема], 关于具有可变边界之区域共形映射的

C. Carathéodory [1] 得到的关于具有可变边界之区域共形映射理论的主要结果之一.

设 $B_n\,(n=1,2,\cdots)$ 是 z 平面的一列单连通区域，包含固定点 z_0, $z_0\neq\infty$. 若存在圆盘 $|z-z_0|<\rho\,(\rho>0)$ 属于所有的 B_n，则序列 $B_n\,(n=1,2,\cdots)$ 关于 z_0 的核 (kernel of a sequence) 是包含 z_0 的最大区域 B，使得对于属于 B 的每个紧集 E 存在 N，对所有 $n\geqslant N$，集合 E 属于 B_n. 所谓最大区域是这样的一个区域，它包含具有同一性质的其它区域. 若不存在这种圆盘，则以 z_0 作为序列 $B_n\,(n=1,2,\cdots)$ 的核 B (在这种情形，称序列 $B_n\,(n=1,2,\cdots)$ 具有退化核 (degenerate kernel)). 称序列 $B_n\,(n=1,2,\cdots)$ 收敛于核 B，如果 B_n 的任一子序列以 B 为核.

Carathéodory 定理. 假设给定一列函数 $z=f_n(\zeta)$, $f_n(\zeta_0)=z_0$, $f_n'(\zeta_0)>0$, $n=1,2,\cdots$, 它们在圆盘 $|\zeta-\zeta_0|<1$ 内正则单叶并分别把该圆盘映射为区域 B_n. 则序列 $f_n(\zeta)\,(n=1,2,\cdots)$，在圆盘 $|\zeta-\zeta_0|<1$ 内收敛于一个有限

函数$f(\zeta)$的必要充分条件是序列 B_n $(n=1,2,\cdots)$收敛于核B，它或者是点z_0，或者是边界点多于一个的区域．而且在圆盘$|\zeta-\zeta_0|<1$内部的紧集上此函数列一致收敛．若极限函数$f(\zeta)\equiv$常数，那么它把圆盘$|\zeta-\zeta_0|<1$单叶映射为B，并且反函数$\Phi_n(z)$ $(n=1,2,\cdots)$在B内部的紧集上一致收敛于$f(\zeta)$的反函数$\Phi(z)$.

多连通区域内单叶函数的收敛性问题可作类似讨论．以下就无界区域给出一个这样的定理．设B_n $(n=1,2,\cdots)$是z平面内包含$z=\infty$的某个固定邻域的区域序列，则序列B_n $(n=1,2,\cdots)$关于$z=\infty$的核是包含$z=\infty$的最大区域B，使得它的任一闭子区域是从某个n起的所有B_n的子集．序列B_n $(n=1,2,\cdots)$到核B的收敛性定义如前．有如下定理[2]：设A_n $(n=1,2,\cdots)$是z平面内包含$z=\infty$的一列区域且收敛于核A，假定函数$\zeta=f_n(z)$ $(n=1,2,\cdots)$把它们单叶映射为包含$\zeta=\infty$的相应区域B_n，且$f_n(\infty)=\infty$, $f_n'(\infty)=1$ $(n=1,2,\cdots)$则序列$f_n(z)$ $(n=1,2,\cdots)$在A内部的紧集上一致收敛于一个单叶函数$f(z)$的充分必要条件是序列B_n $(n=1,2,\cdots)$具有核B，并且收敛于B．在这种情形，$\zeta=f(z)$把A单叶映射为B.

亦可就函数的规范化方法给出单叶函数序列收敛性的其他定理（见[2]）.

参考文献

[1] Carathéodory, C., Untersuchungen über die konformen Abbildungen von festen und veränderlichen Gebieten, *Math. Ann.*, 72 (1912), 107–144.

[2] Голузин, Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966（中译本：Г. М. 戈鲁辛，复变函数的几何理论，科学出版社，1956）.

Г. В. Кузьмина 撰

【补注】

参考文献

[A1] Duren, P. L., Univalent functions, Springer, 1983.

杨维奇 译

Cardano 公式 [Cardano formula; Кардано формула]

复数域上的一般三次方程

$$x^3+px+q=0 \qquad (1)$$

的求根公式．任何三次方程都能化为(1)的形式．求方程(1)的根的Cardano公式具有下列形式：

$$x=\left\{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right\}^{1/3}+\left\{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right\}^{1/3}$$

在应用这个公式时，对于立方根

$$\alpha=\left\{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right\}^{1/3}$$

的三个值中的每个值，都必须选择立方根

$$\beta=\left\{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right\}^{1/3}$$

的适当的值，使得关系式$\alpha\beta=-p/3$成立（这样的β值总是存在的）．在Cardano公式中，p和q是任意复数．当系数p和q为实数时，方程的根是实数还是复数，取决于方程的判别式

$$D=-27q^2-4p^3=-108\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)$$

的符号．当$D>0$时，所有三个根都是实数且不相同．然而，根据Cardano公式，方程的根可以由复数的立方根来表示，在这种情况下，虽然系数和根都是实数，方程的根却不能由实数的根式通过系数来表示；因此，这种情况称为不可约的．当$D=0$时，三个根都是实数；如果p和q都不等于零，则存在一个重根、一个单根；如果p和q都等于零，则存在一个三重根．当$D<0$时，所有三个根都不相同，其中一个是实数，另外两个是共轭复数．

Cardano公式因G. Cardan而得名，他于1545年首先发表了这个公式．

参考文献

[1] Курош, А. Г., Курс высшей алгебры, 11 изд., М., 1975（中译本：А. Г. 库洛什，高等代数教程，高等教育出版社，1953）.

И. В. Проскуряков 撰

【补注】

参考文献

[A1] Waerden, B. L. van der, Algebra, 1–2, Springer, 1967–1971（中译本：B. L. 范德瓦尔登，代数学，科学出版社，Ⅰ 1963，Ⅱ 1976）.

张鸿林 译

基数特征 [cardinal characteristic; мощностная характеристика]，拓扑空间的

使每个空间对应一个无穷基数（cardinal number）的函数，它在同胚空间上取相同值．基数特征也称为基数不变量(cardinal invariants)．基数不变量的定义域是所有拓扑空间类或它的某一子类．下列基数不变量是在一般拓扑学发展的初级阶段产生的．设X为任意拓扑空间．一个平凡的不变量是它的基数(cardinality)$|X|$，即它的所有点的集合的基数．它的权(weight)$w(X)$是X的基(base)的最小基数．它的密度(density) $d(X)$是X的稠子集的最小基数．Суслин数(Suslin number) $c(X)$是最小的无穷基数τ，它使得

每一个两两不交的非空开集族的基数不超过 τ. Lindelöf 数(Lindelöf number) $l(X)$ 是最小的无穷基数 τ,它使得 X 的任意开覆盖都有一个基数 $\leqslant\tau$ 的子覆盖. 这些简单的概念以明确的方式出现在基本定理和问题中,从而直接显示出它们的重要性. 例如:有可数权的正则空间是可度量化的(Урысон - Тихонов 定理(Urysohn - Tikhonov theorem), 1925); 紧 Hausdorff 空间可度量化,当且仅当它的权可数; 紧群空间 X 的 Суслин 数是可数的;对每个可数权空间 X,它的 Lindelöf 数 $l(X)$ 是可数的. Суслин 问题(Suslin problem) —— 满足 $c(X)=\aleph_0$ 的每个有序连通紧 Hausdorff 空间 X 是否与区间 $[0,1]$ 同胚 —— 引出了两个基数不变量:密度和 Суслин 数之间的关系问题. 在上述假定之下,为了正确解答 Суслин 问题只要证明 $d(X)\leqslant c(X)$ 就行了. 基数不变量的比较问题 —— 它的解决,就像上例那样明显,对空间结构的确定结论具有关键的意义 —— 是基数不变量理论的中心. 之所以如此,是由于基数不变量概念的本质属性所致:基数不变量的值是基数,它的类是以数量来良序化的. 因此,人们可以试图比较任意两个基数不变量 φ_1 和 φ_2 的值. 于是,一系列与此有关的问题出现了. 对于所有的 X, 都有 $\varphi_1(X)\leqslant\varphi_2(X)$ 吗? 对哪些 X, $\varphi_1(X)\leqslant\varphi_2(X)$ 呢? 什么时候 $\varphi_1(X)=\varphi_2(X)$ 呢? 等等.

对于基数可以进行如下运算:相乘、相加以及它们的自乘. 相应地,对基数不变量也可以进行如下运算 —— 它们作为函数相乘和相加等等. 于是,利用运算就提供了比较基数不变量的新的可能性. 这里永远有

$$c(X)\leqslant d(X)\leqslant w(X),\quad l(X)\leqslant w(X),$$

即 Суслин 数不超过密度,密度不超过权, Lindelöf 数不超过权. 但密度和 Lindelöf 数在下述意义下不可比较:存在空间 X, Y 和 Z,使得

$$d(X)<l(X),\quad l(Y)<d(Y)=c(Y),$$

$$l(Z)=d(Z)=c(Z).$$

基数和权的不可比较性初看起来令人感到意外:存在着具有不可数权的可数正规 T_1 空间. 但总有 $d(X)\leqslant|X|$ 和 $l(X)\leqslant|X|$. 对于每个 T_0 空间 X,有 $|X|\leqslant\exp(w(X))$ (用 $\exp\tau$ 代替 2^τ). 对每个 Hausdorff 空间 X,有 $|X|\leqslant\exp(\exp(d(X)))$. 而 $w(X)\leqslant\exp|X|$ 总是成立的.

在比较问题中,并非恰好总是两个,有时会涉及到更多的基数特征. 在这一方面已经得到了一些漂亮的、精细的和意想不到的结果,其中具有一般性的是:对每个 Hausdorff 空间 X, $|X|\leqslant\exp(c(X)\cdot\chi(X))$, 这里 $\chi(X)$ 是最小的无穷基数 τ,它使得在 X 的每一点处,都有一个基数 $\leqslant\tau$ 的局部基(见[1], [2]). 基数不变量理论中的许多研究是由满足第一可数性公理的紧 Hausdorff 空间基数的估计问题诱发的,这个问题从 1923 年一直遗留到 1969 年还未解决. 后来弄清楚的是对每个 Hausdorff 空间 X, $|X|\leqslant\exp(l(X)\cdot\chi(X))$ (Архангельский 定理(Arkhangel'skiĭ theorem)(见[2], [4])).

由于集合论的现代特征,使得基数不变量的计算出现在一般拓扑学的所有部份中. 因此,基数不变量理论几乎在一般拓扑学的所有领域内以及在空间的研究方法中都能找到其应用.

特别地,在用覆盖研究空间时,一开始就出现了 Lindelöf 数、密度和 Суслин 数. 利用连续映射作空间的研究和分类时(特别是在二进紧统理论及绝对形理论的发展中)产生了新的基数不变量展形和 π 权, 并且起着关键的作用: 空间 X 的展形(spread) $s(X)$ 是 X 的离散子空间基数的上确界,而空间的 π 权(π - weight) $\pi w(X)$ 是族 γ(称为 π 基(π - bases))的基数的最小值, 这里 γ 是 X 中非空开集族, 使得对 X 的每个非空开集 U, 存在 $V\in\gamma$ 有 $V\subset U$. 在利用逆谱研究空间时, Суслин 数、特征和权起着重要的作用.

因此,存在一种处理一般拓扑学的手法,基数不变量在其中既作为研究空间结构的主要工具,又作为用以表达各类空间性质的基本语言,最后还可以用以作为新拓扑空间类的分类和选择的工具. 基数特征的比较问题在这里仍是基本的. 这个基本问题可以这样提出:给定拓扑空间类 $\mathscr{P}$,限定基数不变量的定义域,在这些限定下,基数不变量之间的基本关系是什么? 通过发展关于类 $\mathscr{P}$ 上的基数不变量理论得到了 $\mathscr{P}$ 的"基数模式". 两个类 $\mathscr{P}_1$ 和 $\mathscr{P}_2$ 的基数模式的比较,使人们能够判断这些类之间的关系,并给出一种有效的方法以检验某个具体空间属于这一类还是另一类.

这种处理方法能用可度量化空间类来说明. 这个空间类的特点是几个基本的基数不变量一致: Суслин 数等于密度、权和 Lindelöf 数. 这一事实常常被用到; 例如,要证明某一空间是不可度量化的,只要指出上述不变量中至少有两个不同就够了.

在可度量化空间类中,基数不变量理论与一般理论相比,其特色主要在于它的简单化,而在紧 Hausdorff 空间类中,它们就完全地、彻头彻尾地变了样. 之所以造成该理论的特殊形式,是由于在紧 Hausdorff 空间中,如同权和网络权一致,特征标和伪特征标也一致. X 在 x 处的伪特征标(pseudo - character) $\psi(x,X)$ 是其交集为一点 x 的那些开集的最小个数,而 X 在 x 处的特征标(character) $\chi(x,X)$ 是点 x 处局部基的最小基数. 网络权(network weight) $nw(X)$ 是 X 中满足下列条件的集族 S 的最小基数: 若 $x\in X$ 且 $x\in U\subset X$, 其中 U 是 X 中的开集,则存在 $P\in S$, 使 $x\in P\subset U$ (这种族称为 X 中的网络(networks)). 对于每一个紧 Hausdorff 空间 X, 下

式成立：1) 对于所有的 $x\in X$，有 $\psi(x,X)=\chi(x,X)$；2) $nw(X)=w(X)$。因此，在到紧 Hausdorff 空间上的连续映射下，权不会增加；若紧 Hausdorff 空间 X 是两个子空间 X_1 与 X_2 之并，则 $X_1\cup X_2$ 的权不超过 X_1 与 X_2 的权中最大者（权的加法定理(addition theorem for weights)）。同样的理由，紧 Hausdorff 空间的权决不会超过它的基数；特别地，每个可数紧 Hausdorff 空间是可度量化的。对于紧 Hausdorff 空间类的基数不变量理论的这些定理没有一个能拓广到完全正则空间类上去。一个特别重要的结果是：设 X 是紧 Hausdorff 空间，τ 是基数且 $\tau\leqslant\aleph_0$，若对所有的 $x\in X$，$\chi(x,X)\geqslant\tau$，则 $|X|\geqslant\exp\tau$（Čech-Pospíšil定理 (Čech-Pospíšil theorem)）。有关紧 Hausdorff 空间的几乎所有的可度量化准则也是关于基数不变量的定理。因此，紧 Hausdorff 空间 X 的可度量性与下列任一条件等价：a) $w(X)=\aleph_0$；b) $nw(X)=\aleph_0$；c) $X\times X$ 的对角线是 G_δ 集；d) X 具有点可数基。

在紧 Hausdorff 空间 X 结构的研究中，紧度 $t(X)$ 起着重要的作用。X 的紧度(tightness) $t(X)$（见 [2]，[4]）是最小基数 $\tau\geqslant\aleph_0$，使得对于 $x\in X$，$A\subset X$ 且 $x\in\bar{A}$，则有 $B\subset A$ 满足 $x\in\bar{B}$，且 $|B|\leqslant\tau$。当紧 Hausdorff 空间 X 自乘有限次时，紧度不增加（在完全正则空间类中，这是不成立的）。

如果紧 Hausdorff 空间 X 的紧度不超过 τ，那么对于每个 $x\in X$，存在 X 中一个非空开集族 γ，使得 $|\gamma|\leqslant\tau$，并且 x 的每一邻域 O_x 都包含 γ 的一个元素。因此，每个具有可数紧度的可分紧 Hausdorff 空间的 π 权等于 $\aleph_0$。紧 Hausdorff 空间的展形大于它的紧度。

二进紧统的基本性质在很大程度上也是由有关基数特征的定理决定的。对于每个二进紧统，其权、展形和紧度一致。二进紧统类包含紧 Hausdorff 拓扑群类，因而特别地，每个具有可数紧度的紧 Hausdorff 群是可度量化的。

在**二进紧统**(dyadic compactum)理论及基数不变量理论的其余部分，这些不变量在乘法之下的性状问题更为重要。下面两个定理起着本质的作用，其中第一个蕴涵第二个。若 F 是一个空间族，对每个 $X\in F$，都有 $d(X)\leqslant\tau$，并且 $|F|\leqslant\exp\tau$，则 F 中空间的积的密度不超过 τ（见 [1]－[4]）。若 X 是密度不超过 τ 的任意多个空间之积，则 $c(X)\leqslant\tau$。后一个结论对因子个数没有限制。特别是任何 Тихонов 立方体（任意多个线段之积）的 Суслин 数是可数的。因此，条件 $c(X)=\aleph_0$ 对于空间的基数没有限制。

在乘法之下基数不变量性状的许多简单陈述的问题，其结果都是非常美妙的。例如，问题：$c(X\times X)=c(X)$ 总成立吗？结果是这个问题与 Суслин 猜想和连续统假设有关。

另一方面，在连续映射 $f:X\to Y$ 之下，空间 X 变成它的象 Y 时，基数不变量的性状大体上是由一些简单而通用的法则决定的。

例如，$c(Y)\leqslant c(X)$，$d(Y)\leqslant d(X)$，$nw(Y)\leqslant nw(X)$，$l(Y)\leqslant l(X)$。若 f 是到上的商映射，则 $t(Y)\leqslant t(X)$。基数不变量的理论基础组成了这一类简单而通用的法则系统，这一点也可以视为保证该理论具有广泛应用的理由之一。

通过下述问题的研究，得到了有关空间结构的一个重要信息：在过渡到子空间时，基数不变量将会怎样变化？一个基数不变量 φ，若对于 $Y\subset X$，总有 $\varphi(Y)\leqslant\varphi(X)$，则称它为单调的 (monotone)。单调的基数不变量包括：权、网络权、紧度、特征标和展形。非单调的是 Суслин 数、密度和 Lindelöf 数。于是产生了下列问题：对哪些空间 X，使得所有 $Y\subset X$，有 $c(Y)\leqslant\tau$？对哪些空间 X，使得所有 $Y\subset X$，有 $d(Y)\leqslant\tau$？下述条件对 X 的拓扑有什么影响：对所有的 $Y\subset X$，$l(Y)\leqslant\tau$？第一个问题的回答是简单的：该条件意味着 X 的展形不超过 τ。而后面的两个条件则产生了新的空间类。结果发现，这些类的研究与集合论中的专门假设，特别是与 Martin 公理有关。

基数不变量理论在拓扑群空间上有独特的特征。例如，可度量性准则在这里简化成第一可数性公理。线性拓扑空间，特别是空间 X 上连续实值函数空间 $C(X)$ 的主要性质，可以用基数不变量的语言来描述。这指的是关于 Eberlein 紧统的定理（每个 Eberlein 紧统都是 Fréchet - Урысон 空间，Eberlein 紧统的权等于它的 Суслин 数）；以及下面的定理：如果 X 是紧 Hausdorff 空间，则在点态收敛拓扑中，$C(X)$ 的紧度是可数的。

空间 X 和 $C(X)$ 的一些基数不变量之间存在着一种对偶型对应。

参考文献

[1] Juhász, I., Cardinal functions in topology, North-Holland, 1971.

[2] Архангельский, А. В., Пономарев, В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974（英译本：Arkhangel'skiĭ, A. V. and Ponomarev, V. I., Fundamentals of general topology, problems and exercises, Reidel, 1984）.

[3] Engelking, R., Outline of general topology, North-Holland, 1968（译自波兰文）.

[4] Архангельский, А. В., 《Успехи матем. наук》, 33 (1978), 6, 29－84.

А. В. Архангельский 撰

【补注】 在文献中（见 [1]－[4]）常用的术语是基数函数(cardinal function)，或基数不变量。

空间 X 的 Суслин 数也称为它的胞腔度(cellularity)，而它的 Lindelöf 数也称为它的 Lindelöf 度（Lindelöf degree）（后者常记为 $L(X)$）。

上面提到的 Урысон-Тихонов 定理也称为 Урысон 度量化定理(Urysohn metrization theorem)。

二进紧统类包含紧 Hausdorff 拓扑群类. 这一点称为(关于紧群的) Кузминов 定理 (Kuzminov theorem).

关于 Fréchet - Урысон 空间的概念见**序列空间**(sequential space).

对每个空间 X, $c(X\times X)=c(X)$ 的问题已被 S. Todorcevič 解决了([A2]),他没有利用附加的集合论假设,找到了满足 $c(X\times X)>c(X)$ 的空间 X.

每个遗传可分空间是否为 Lindelöf 的,每个遗传 Lindelöf 空间是否为可分的, 这些问题引出了很多研究. 利用各种附加的集合论假定,特别是**连续统假设**(continuum hypothesis),造出了许多例子. Todorcevič ([A1])证明了命题"每个遗传可分空间是 Lindelöf 的"与集合论中常用公理相容. 至于更多的信息及其他的最新发展可见 [A3]中很多章节,特别是 1,2 章, 以及 [A4].

参考文献

[A1] Todorcevič, S., Forcing positive partition relations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **280** (1983), 703 – 720.

[A2] Todorcevič, S., Remarks on cellularity in products, *Compos. Math.*, **57** (1986), 357 – 372.

[A3] Kunen, K. and Vaughan, J. E. (eds.), Handbook of set - theoretic topology, North - Holland, 1984.

[A4] Juhász, I., Cardinal functions, Ten years later, North - Holland, 1980.

许依群、徐定宥、罗嵩龄 译

基数 [**cardinal number**; **кардинальное число**], 势 (cardinality),超限数 (transfinite number), Cantor 意义下的势 (power in the sense of Cantor), 集合 A 的

这种集合的性质是任何与 A 等势的集合 B 所内蕴的. 这里,称两个集合 A 和 B 是等势的 (或等价的 (equivalent))指有一个一一映上的函数 $f: A\to B$ 以 A 为定义域而以 B 为值域. G. Cantor 把集合的基数定义为这样一种性质, 它是把该集合中元素的质的性质以及它们之间的次序关系抽象掉后所保留下来的性质. 为了强调这样两次抽象的作用, Cantor 采用符号 $\overline{\overline{A}}$ 来表示 A 的基数. 在表示基数的各种记号中最常用的是 card A 和 $|A|$. 如果 A 是含有 n 个元素的有穷集, 则card $A=n$, 如果 $\mathbf{Z}^+$ 表示自然数集, 则 card $\mathbf{Z}^+=\aleph_0$(见**阿列夫** (aleph)). 如果 $\mathbf{R}$ 表示实数集, 则 card $\mathbf{R}=\mathfrak{c}$, 即连续统的势. A 的所有子集组成的集 2^A 与 A 或 A 的任何子集都不等价(Cantor 定理 (Cantor theorem)). 特别地, 下列任两个集合

$$A,\ 2^A,\ 2^{2^A},\ 2^{2^{2^A}},\ \ldots \tag{1}$$

都不等价. 当 $A=\mathbf{Z}^+$ 时, 上面的序列给出了无穷多个不同的无穷基数. 进而取 Q 为(1)中集合之并又可得到一个基数并且令 $A=Q$ 后还可以构造出类似的序列. 这个过程可以无穷延续. 所有无穷基数的规模(类)要比所有有穷基数的规模(类)大得多. 更进一步, 基数是那么多以至于不可能构作一个集合使得对每一个基数至少都有一个具该基数的集合出现在上述集合中.

对基数可以定义加法、乘法、自乘的幂等运算, 同样也可以取对数和开方. 例如, 基数 δ 为 α 与 β 之和(sum), 即 $\delta=\alpha+\beta$, 指每个具有基数 δ 的集合都可表成两个集合 A 与 B 之不相交并的形式, 并且 A 和 B 的基数分别为 α 和 β; 基数 γ 为 α 与 β 之积(product), 即 $\gamma=\alpha\beta$, 指 γ 为 Descartes 积 $A\times B$ 的基数, 其中 card $A=\alpha$ 并且 card $B=\beta$. 基数的加法和乘法是可交换和可结合的, 而且乘法对于加法是可分配的. 基数 κ 是以 α 为基底以 β 为指数的幂 (power), 即 $\kappa=\alpha^\beta$, 如果每个具基数 κ 的集合与所有 $B\to A$ 的函数集 A^B 等价, 其中 card $A=\alpha$, card $B=\beta$. 基数 α 称为小于或等于基数 β, 即 $\alpha\leqslant\beta$, 指每个具基数 α 的集合都与具基数 β 的一个集合的某个子集等价. 如果 $\alpha\leqslant\beta$ 并且 $\beta\leqslant\alpha$, 则 $\alpha=\beta$ (Cantor - Bernstein 定理 (Cantor - Bernstein theorem)), 这样, 基数的全体便被此关系所全序. 进而, 对每个基数 β, 集合 $\{\alpha: \alpha<\beta\}$ 是良序的, 这样对 $\alpha\leqslant\beta$ 就可以定义 β 关于底 α 的对数(logarithm) $\log_\alpha\beta$ 为满足 $\alpha^\gamma\geqslant\beta$ 的最小的基数 γ; 类似地, 基数 β 的第 α 次方根 $\beta^{\frac{1}{\alpha}}$ 为满足 $\delta^\alpha\geqslant\beta$ 的最小基数 δ.

任何基数 α 可以看成与具基数 α 的最小**序数**(ordinal number)一致. 特别地, $\aleph_0$ 对应于序数 ω_0, $\aleph_1$ 对应于序数 ω_1, 等等. 于是, 全体基数之类可以看成是全体序数类的子类. 序数的许多性质可以移植到基数上来. 不过, 就是这些同样的性质也可以"在内部"定义出来. 如果对每个 $t\in T$, $\alpha_t<\beta_t$ 并且 card $T\geqslant\omega_0$, 则

$$\sum\{\alpha_t: t\in T\} < \prod\{\beta_t: t\in T\} \tag{2}$$

(König 定理 (König theorem)). 如果在(2)中让 $T=\mathbf{Z}^+$ 并且如果 $1<\alpha_n<\alpha_{n+1}$, 则

$$\alpha_{\omega_0} = \alpha_1+\alpha_2+\cdots < \alpha_1\alpha_2\cdots \tag{3}$$

特别地, 对任何 $\alpha\geqslant 2$, 不可能把幂 α^{ω_0} 表成长度为 ω_0 而每个项又都小于 α^{ω_0} 的一个无穷递增序列之和的形式. 对每个基数 α, 以 cf(α) 表示其共尾特征标(cofinal character), 它是指这样一个最小的基数 γ, 使得有适当的 $\beta_t<\alpha$ 和 card $T=\gamma$ 并且 α 可以表成 $\Sigma\{\beta_t: t\in T\}$ 的形式. 如果 cf(α)=α, 则 α 称为正则的 (regular), 否则便是奇异的 (singular). 对每个基数 α, 大于 α 的最小基数 α^+ 是正则的 (假定了选择公理之后). 一个奇异基数的例子是(3)式左边的基数 α_{ω_0}, 其中假定 $\omega_0<\alpha$. 此时

$$\mathrm{cf}(\alpha_{\omega_0}) = \omega_0 < \alpha_{\omega_0}.$$

基数 α 称为极限基数(limit cardinal number)是指对任何 $\beta<\alpha$，都存在 γ 使 $\beta<\gamma<\alpha$. 极限基数的例子有 ω_0 和 α_{ω_0}，而 ω_1 为非极限基数. 一个正则的极限基数称为弱不可达的(weakly inaccessible). 基数 α 称为强极限基数是指对任何 $\beta<\alpha$，都有 $2^\beta<\alpha$. 正则的强极限基数称为强不可达的(strongly inaccessible). 由广义连续统假设(continuum hypothesis)可推知，强和弱的不可达基数类是一致的. 不可达基数类可进一步分类(即所谓的Malo模式(Malo scheme))并可导出超不可达基数的定义. 断言强(或弱)不可达基数存在性的命题，独立于通常公理集合论的公理.

基数 α 称为可测的(measurable)(更精确地为{0, 1}可测的)是指存在一个具基数 α 的集合 A 和在 2^A 的所有元素上都有定义并取值为 0 或 1 的函数 μ 使得 $\mu(A)=1$，而对所有 $a\in A$，$\mu(\{a\})=0$，并且如果 $\{X_n: n\in\omega_0\}$ 为由 A 的子集组成的两两不相交的序列，则

$$\mu(\bigcup\{X_n: n\in\omega_0\}) = \sum\{\mu(X_n): n\in\omega_0\}.$$

比第一个强不可达基数小的每一个基数都是不可测的(Ulam 定理(Ulam theorem))，而第一个可测基数当然是强不可达的. 不过，第一个可测基数远远大于第一个不可数的强不可达基数(Tarski 定理(Tarski theorem))，目前(1987)仍不知道假定可测基数的存在性是否与集合论的公理相矛盾.

参考文献

[1] Александров, П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977.

[2] Кантор, Г., в кн: Новые идеи в математике, сб. 6, СПБ, 1914, 90-184.

[3] Hausdorff, F., Set theory, Chelsea, reprint, 1978 (中译本：F. 豪斯道夫，集论，科学出版社，1960)

[4] Kuratowski, K. and Mostowski, A., Set theory, North-Holland, 1968.

[5] Sierpinski, W., Cardinal and ordinal numbers, PWN, 1965 (译自波兰文).

Б. А. Ефимов 撰

【补注】 上述的König定理常称为 König-Zermelo 定理(König-Zermelo theorem)

参考文献

[A1] Jech, T., Set theory, Acad. Press, 1987.

[A2] Levy, A., Basic set theory, Springer, 1979.

郑锡忠 译 莫绍揆 校

势 [**cardinality**; **мощность**], 基数(cardinal number), 集合 A 的

A 的这样的性质，它是任何与 A 等价的集合 B 所固有的. 这里称两个集合为等价的(equivalent)(或等势的(equipotent)或具有相同的势)指可以在它们之间建立起一一对应. 于是，"利用抽象定义"，我们可以说势是所有等价集合的共性. 由于对所有互相等价的有穷集合来说，其元素的数量或元素的个数是它们的共性，在应用到无穷集合时，势的概念便是有限数量概念的一种推广. 势是集合论的基本概念，它是由 G. Cantor 引进的. 与所有自然数的集合等价的集合称为可数的(countable)；相应的势记为 $\aleph_0$(阿列夫零). 等价于实数集的集合的势称为连续统势(cardinality of the continuum)并记为 $\mathfrak{c}$ 或 $2^{\aleph_0}$. 例如，所有代数数的集合有可数的势，而 n 维 Euclid 空间中所有闭子集的集合具有连续统的势. Cantor-Bernstein 定理(Cantor-Bernstein theorem)：对两个集合来说，如果其中每一个都等价于另一个的某个子集，则这两个集合是等价的. 在这种情况下，称这些集合具有相同的势. 如果集合 A 等价于集合 B 的一个子集，而 B 与 A 的任何子集都不等价，则称 B 的势大于 A 的势. Cantor 定理(Cantor theorem)：集合 A 的所有子集组成的集合的势大于 A 的势. 由于这个定理，我们可以构造出势的一种谱系(见基数(cardinal number)).

参考文献

[1] Александров, П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977.

Б. А. Ефимов 撰

【补注】 在条目基数(cardinal number)中可以找到更多的内容和参考文献.

【译注】 英文 cardinality 常译成"基数"，但俄文 мощность 真正的英文含义应为 power，今依俄文译为势.

郑锡忠 译 莫绍揆 校

心脏线 [**cardioid**; **кардиоида**]

当一个半径为 r 的圆沿另一个半径为 r 的圆滚动时，滚动的圆上的一点 M 所描绘的四次平面代数曲线；具有模数 $m=1$ 的圆外旋轮线. 极坐标中的心脏线的方程是

$$\rho=2r(1-\cos\varphi).$$

Descartes 坐标中的方程是

$$(x^2+y^2+2rx)^2 = 4r^2(x^2+y^2).$$

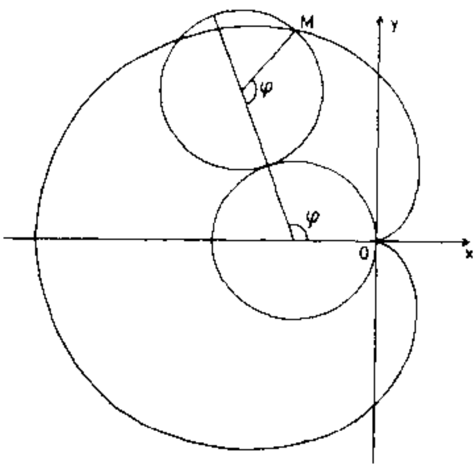
从尖点算起的弧长是

$$l = 16r\sin^2\frac{\varphi}{4}.$$

曲率半径是

$$r_k = \frac{8r}{3}\sin\frac{\varphi}{2}.$$

心脏线围成的面积等于 $S=6\pi r^2$. 心脏线的长度是 $16r$. 心脏线是圆的蚌线(conchoid)，也是 Pascal 蚶线(Pascal limaçon)和正弦螺线(sinusoidal spiral)的特殊情况.



参考文献

[1] Савелов, А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Lawrence, J. D., A catalog of special plane curves, Dover, reprint, 1972.

张鸿林 译

Carleman 边值问题 [Carleman boundary value problem; Карлемана граничная задача]

含位移的解析函数的边值问题,此位移反转边界方向.本问题首先由 T. Carleman ([1])所考虑.设 L 是复 z 平面上一简单 Ляпунов 闭曲线(见 **Ляпунов 曲面和曲线**(Lyapunov surfaces and curves)),D 是以 L 为界的有界域,令 $\alpha(t)$ 是 L 上给定的复值函数,它产生 L 到自身的一对一的映射并且反转 L 的方向,同时满足下述附加的 Carleman 条件(Carleman condition):

$$\alpha[\alpha(t)] = t, \quad t \in L \tag{*}$$

(还假设导数 $\alpha'(t)$ 满足 Hölder 条件). Carleman 边值问题是寻求一函数 $\Phi(z)$,它在 D 内除有限多个极点以外是解析的,且在 $D \cup L$ 上连续,同时满足边界条件

$$\Phi[\alpha(t)] = G(t)\Phi(t) + g(t), \quad t \in L,$$

其中函数 $G(t)$ 和 $g(t)$ 在 L 上给定且满足 Hölder 条件,在 L 上 $G(t) \neq 0$.

在下述条件下的 Carleman 边值问题亦被研究:

$$\alpha^m(t) = t, \ \alpha^1(t) = \alpha(t), \ \alpha^k(t) = \alpha(\alpha^{k-1}(t)),$$

$$k = 2, \ldots, m.$$

它较(*)更广泛.此外还有研究多个未知函数的 Carleman 边值问题(见[2],[3]).

参考文献

[1] Carleman, T., Sur la théorie des équations intégrales et ses applications, Verhandl. Internat. Mathematiker - Kongresses, Vol. 1, Orell Füssli, Zürich - Leipzig, 1932, 138-151.

[2] Мусхелишвили, Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, 3 изд., М., 1968 (中译本: Н. И. 穆斯海里什维里,奇异积分方程,上海科学技术出版社, 1966).

[3] Векуа, Н. П., Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи, 2 изд., М., 1970 (中译本: Н. П. 维库阿,奇异积分方程组及某些边值问题,上海科学技术出版社, 1963).

Е. Д. Соломенцев 撰 何育赞 译 容尔谦 校

Carleman 不等式 [Carleman inequality; Карлемана неравенство]

对于任意非负数 $a_n \geq 0$ 的不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_1 \cdots a_n)^{1/n} < e \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

是由 T. Carleman 发现的([1]).这里,常数 e 不能减小.与 Carleman 不等式类似的积分不等式具有下列形式:

$$\int_0^{\infty} \exp\left\{\frac{1}{x}\int_0^x \ln f(t)\,dt\right\} dx < e \int_0^{\infty} f(x)\,dx, \quad f(x) \geqslant 0.$$

还有 Carleman 不等式的另一些推广([2]).

参考文献

[1] Carleman, T., Wissenschaft, Vörtrage 5. Kongress Skandinavischen Mathematiker, Helsinki, 1923, 181-196.

[2] Hardy, G. H., Littlewood, J. E. and Pólya, G., Inequalities, Cambridge Univ. Press, 1934 (中译本: G. H. 哈代, J. E. 李特伍德, G. 波利亚,不等式,科学出版社, 1965).

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 这些不等式是严格的,除了平凡情况:对于一切 n, $a_n = 0$ 和几乎处处 $f = 0$ 以外.

参考文献

[A1] Bullen, P. S., Mitrinović, D. S. 和 Vasić, P. M., Means and their inequalities, Reidel, 1987.

张鸿林 译

Carleman 核 [Carlman kernel; Карлемана ядро]

一般为复值的可测函数 $K(x, s)$,满足下述条件:1)在 $E \times E$ 上几乎处处有 $\overline{K(x,s)} = K(s,x)$,其中 E 是有限维 Euclid 空间中的 Lebesque 可测的点集;2)对于几乎所有的 $x \in E$,有 $\int_E |k(x, s)|^2 ds < \infty$.

参考文献

[1] Ахиезер, Н. И., Глазман, И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 2 изд., М., 1966 (英译本: Achiezer, N. I. and Glazman, I. M., Theory of linear operators in Hilbert space, 1-2,

Pitman, 1980)　　Б. В. Хведелидзе 撰　张鸿林 译

Carleman 定理 [Carleman theorem ; Карлемана теорема]

1) 关于拟解析函数类的 Carleman 定理是对于 Hadamard 意义下的拟解析性的充分必要条件，它由 T. Carleman([1]，亦见[5]) 所发现．在区间 $[a, b]$ 上无穷次可微的实值函数类 K 称为在 Hadamard 意义下拟解析的(quasi - analytic in the sense of Hadamard)．如果在某个固定的点 c, $a<c<b$, 方程 $f^{(n)}(c)=0\ (n=0, 1, \cdots)$ 蕴涵 $f\equiv 0$. Carleman 定理叙述如下：类 K 是拟解析的当且仅当

$$(M_n(f))^{1/n} < A(f)a_n,\quad n=0, 1, \ldots, \tag{1}$$

其中

$$M_n(f) = \max_{a\leqslant x\leqslant b} |f^{(n)}(x)|,$$

$A(f)$ 是一常数，且序列 $\{a_n\}$ 满足下列等价条件之一：

$$\int_1^{\infty}\frac{\ln T(r)\,dr}{r^2} = +\infty,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\inf_{k\geqslant n} a_k^{1/k}\right)^{-1} = +\infty, \tag{2}$$

其中

$$T(r) = \sup_{n\geqslant 1}\frac{r^n}{a_n}.$$

这是在拟解析函数类中最早的权威性结果之一，由(1)，(2)确定的拟解析类通常称为 Carleman 类(Carleman class)．

2) 关于矩问题的适定性的 Carleman 定理：若正数序列 $s_n\ (n=0, 1, \cdots)$ 满足条件

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s_{2n}}\right)^{1/2n} = +\infty,$$

则矩问题

$$s_k = \int_{-\infty}^{\infty} t^k\, d\sigma(t),\quad k=0, 1, \ldots \tag{3}$$

是适定的，这意味着存在一个非减函数 $\sigma(t)$ $(-\infty<t<+\infty)$ 满足方程(3)，除去相加一个任意函数此函数在它的每一连续点的邻域是一常数外，它是唯一确定的．本定理是 T. Carleman 建立的(见 [1]，[2])．

3) 关于用整函数一致逼近的(Carleman)定理：若 $f(x)$ 为实轴上任一连续函数，$\varepsilon(r)\ (0<r<+\infty)$ 是一正值连续函数且当 $r\to+\infty$ 时是速降的，则存在复变量 $z=x+iy$ 的整函数 $g(z)$，使得

$$|f(x)-g(x)| < \varepsilon(|x|),\quad -\infty<x<+\infty.$$

这个由 T. Carleman ([3]) 建立的定理是研究用整函数逼近一函数的出发点．特别地，z 平面内的连续统 E 称为 Carleman 连续统(Carleman continuum)，如果对 E 上任意连续复值函数 $f(z)$ 和在任意有限区间上有正的下确界且当 $r\to\infty$ 时速降的函数 $\varepsilon(r)$，存在一整函数 $g(z)$，使得

$$|f(z)-g(z)| < \varepsilon(|z|),\quad z\in E.$$

一个闭集 E 是 Carleman 连续统的充要条件在 М. В. Келдыш 和 М. А. Лаврентьев 的一个定理中得到(见 [6])．Carleman 连续统的一个例是由下述射线组成的闭集

$$\arg z = 常数,\quad |z|>c>0.$$

4) 关于解析函数用多项式在一区域上平均意义下逼近的 Carleman 定理：设 D 是 z 平面 $(z=x+iy)$ 的有界域，其边界是 Jordan 曲线 Γ．又设 $f(z)$ 是 D 内的正则函数且

$$\iint_D |f(z)|^p\, dx\, dy < \infty,\quad p>0.$$

则对任意 $\varepsilon>0$，存在多项式 $P(z)$，使得

$$\iint_D |f(z)-P(z)|^p\, dx\, dy < \varepsilon.$$

这个结果由 T. Carleman ([4])建立．对于具有任意正的连续权的逼近，类似的结果亦成立，在此情形边界 Γ 可以有更一般的性质．单项式系 $\{z^n\}\ (n=0, 1, \cdots)$ 对于任意这样的权是完全的．这个系的标准正交系由 n 次多项式 $P_n(z)$ 给出，通常称为 Carleman 多项式(Carleman polynomials)．

参考文献

[1] Carleman, T., Les fonctions quasi - analytiques, Gauthier - Villars, 1926.

[2] Carleman, T., Sur les équations intégrales singulières a noyau réel et symmétrique, Uppsala, 1923.

[3] Carleman, T., Sur un théorème de Weierstrass, *Arkiv. Mat. Astron. Fys.*, **20** (1927), 4, 1－5.

[4] Carleman, T., Über die Approximation analytischer Funktionen durch lineare Aggregate von vorgegebenen Potenzen, *Arkiv. Mat. Astron. Fys.*, **17** (1922), 9.

[5] Mandelbrojt, S., Séries adhérentes, regularisation des suites, applications, Gauthier - Villars, 1952.

[6] Мергелян, С. Н., 《Успехи матем. наук》, 7 (1952), 2, 31－122.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 下述结果亦认为是 Carleman 定理．若 $F(z)$ 在域

$$G=\{z: 0<\lambda\leqslant|z|\leqslant R,\ \mathrm{Im}\, z\geqslant 0\}$$

上全纯，且 $a_k=r_k e^{i\theta_k}\ (k=1, \cdots, n)$ 是 F 在 G 内之零点(按重数计算)，则

$$\sum_{\lambda<r_k<R}\left[\frac{1}{r_k}-\frac{r_k}{R^2}\right]\sin\theta_k=\frac{1}{\pi R}\int_0^\pi \ln|F(Re^{i\theta})|\sin\theta d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_\lambda^R\left[\frac{1}{x^2}-\frac{1}{R^2}\right]\ln|F(x)F(-x)|dx + A_\lambda(F,R),$$

其中

$$A_\lambda(F,R)=-\operatorname{Im}\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \ln F(\lambda e^{i\theta})\left[\frac{\lambda e^{i\theta}}{R^2}-\frac{e^{-i\theta}}{\lambda}\right]d\theta.$$

见[A2]. 此外, [A1]是关于本条中逼近定理的一篇好的参考文献.

参考文献

[A1] Gaier, D., Vorlesungen über Approximation im Komplexen, Birkhaüser, 1980.

[A2] Levin, B. Ya., The distribution of zeros of entire functions, Amer. Math. Soc., 1980 (译自俄文).

何育赞 译　容尔谦 校

Carleson 集 [Carleson set ; Карлесона множество]

闭集 $E\subset[0,2\pi)$ 在 E 上定义且连续的函数在其上均可用形式为 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n e^{int}$ 的级数表示, 其中 $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|<+\infty$. 它由L. Carleson 引进([1]). Carleson 集构成了所谓**薄集** (thin set) 的重要的一类 (见**良集** (fine set); **集合的稀疏性** (thinness of a set)). 闭集 $E\subset[0,2\pi)$ 是 Carleson 集的充分必要条件是: 存在常数 $c>0$ 使得集中在 E 上的每一个测度 μ 的 Fourier-Stieltjes 系数

$$c_n(\mu)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-int}d\mu(t),\quad n=0,\pm1,\ldots,$$

满足不等式

$$\sup_{n\geq 0}|c_n(\mu)|>c\int_0^{2\pi}|d\mu(t)|.$$

参考文献

[1] Carleson, L., Sets of uniqueness for functions regular in the unit circle, *Acta Math.*, **87** (1952), 3-4, 325-345.

[2] Wik, I., On linear dependence in closed sets, *Arkiv. Mat.*, **4** (1960), 2-3, 209-218.

[3] Kahane, J.-P. and Salem, R., Ensembles parfaits et séries trigonométriques, Hermann, 1963, p. 142.

[4] Kahane, J.-P., Séries de Fourier absolument convergentes, Springer, 1970.

Б. И. Голубов 撰

【补注】 闭集$E\subset[0,2\pi)$称为Helson集 (Helson set), 如果在 E 上定义且连续的函数 $f(t)$ 都可用形式为 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n e^{int}$ 的级数表示, 其中 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|<\infty$, 见[A1]. 显然, Carleson 集都是 Helson 集. I. Wik 证明了一个意外的结果, 即, 反过来, 每一个 Helson 集也是 Carleson 集, 见[2]. 因此, 这两个概念相同.

利用 S. W. Drury 的技巧, N. Th. Varopoulos 在1970 年证明了: 两个 Helson 集的并集仍是 Helson 集, 见[A2].

参考文献

[A1] Helson, H., Fourier transforms on perfect sets, *Studia Math.*, **14** (1954), 209-213.

[A2] Varopoulos, N. Th., Sur la réunion de deux ensembles de Helson, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, **271** (1970), A251-A253.

朱学贤 译　潘文杰 校

Carleson 定理 [Carleson theorem ; Карлесона теорема]

$L_2(0,2\pi)$ 中函数的 Fourier 三角级数几乎处处收敛. 这一定理是由 Н. Н. Лузин 作为猜测提出 ([1]), 而由 L. Carleson 证明的 ([2]). 当 $p>1$ 时, Carleson定理的结论对于空间 L_p 中的函数仍成立 (见[3]). 但当 $p=1$ 时, 定理的结论不成立, 这个事实由 А. Н. Колмогоров 构造的例子所证明 ([4]), 该例子是一个 L_1 中的函数, 其 Fourier 三角级数几乎处处发散.

参考文献

[1] Лузин, Н. Н., Интеграл и тригонометрический ряд, М., 1915.

[2] Carleson, L., Convergence and growth of partial sums of Fourier series, *Acta Math.*, **116** (1966), 135-157.

[3] Hunt, R. A., On the convergence of Fourier series, in Proc. Conf. Orthogonal Expansions and their Continuous Analogues, Southern Illinois Univ. Press, 1968, 234-255.

[4] Kolmogoroff, A. [Колмогоров А. Н., 即 Kolmogorov, A. N.], Une série de Fourier-Lebesgue divergente presque partout, *Fund. Math.*, **4** (1923), 324-328.

С. А. Теляковский 撰

【补注】 由 [3] 的缘故, 这个定理也称为 Carleson-Hunt 定理 (Carleson-Hunt theorem) (见 [A3], 其中深刻地阐述了这个定理).

在[4] 发表后几年, Колмогоров 又证明了: 存在一个 L_1 中的函数, 它的 Fourier 三角级数处处发散 ([A1]).

参考文献

[A1] Kolmogorov, A. N., Une série de Fourier-Lebesgue divergent partout, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér A-B*, **183** (1926), 1327-1328.

[A2] Mozzochi, C. J., On the pointwise convergence of Fourier series, Lecture Notes in Math., 199, Springer, 1970.

[A3] Jørsboe, O. G. and Mejlbro, L., The Carleson-Hunt theorem on Fourier series, Lecture Notes in Math., 911, Springer, 1982.

朱学贤 译　潘文杰 校

Carlson 不等式 [Carlson inequality ; Карлсона неравенство]

设$\{a_n:1\leqslant n<\infty\}$是一些非负数，不全为零．这时有

$$(\sum a_n)^4<\pi^2\sum a_n^2\sum n^2a_n^2. \qquad (1)$$

这是由 F. Carlson 证明的([1])．存在与 Carlson 不等式类似的积分不等式：如果 $f(x)\geqslant 0$，$f(x)\neq 0$，f，$xf\in L^2(0,\infty)$，则

$$\left\{\int_0^\infty f(x)\,dx\right\}^4\leqslant\pi^2\left\{\int_0^\infty f^2(x)\,dx\right\}\left\{\int_0^\infty x^2f^2(x)\,dx\right\}. \qquad (2)$$

在下述意义下，常数 π^2 是最佳的：存在序列$\{a_n\}$，使得(1)的右边任意接近左边，且存在函数 $f(x)$，使得(2)中的等式成立．

参考文献

[1] Carlson, F., Une inegalité, *Ark. Math. Astron. Fys.*, **25B** (1934), 1, 1-5.

[2] Hardy, G. H., Littlewood, J. E. and Pólya, G., Inequalities, Cambridge Univ. Press, 1934 (中译本：G. H. 哈代，J. E. 李特伍德，G. 波利亚，不等式，科学出版社，1965).

М. И. Войцеховский 撰 张鸿林 译

Carlson 法 [Carlson method; Карлсона метод]，S_n 法(S_n-method)

用来求解核反应堆中中子输运的动理论方程的数值方法之一．由 B. Carlson 于 1953 年建议的求解球对称几何的方法的最初形式，是将中子流分段线性表达为中子速度向量和向量径间夹角的余弦的函数．在对每一基本单元中角变量积分后，我们得到一个方程组，其中每个方程只包含中子速度的两个方向，条件是从前次近似中碰撞积分(用梯形法计算)是已知的．换句话说，如在 **Владимиров 法**(Vladimirov method)中一样，输运方程的解是对碰撞积分用逐次逼近法得到的．在每次逼近中，引入一径向附加方程，并将其从球的外边界积分至球心，则方程组分解为单个的方程．各方程的每个下一方向都与以前的方向相联系，而对于这一方向未知函数已被确定了．对于决定方向的余弦的负值，积分从外边界向球心进行，对于余弦的正值，积分从球心至边界．

用 Carlson 法所得的渐近方程的解的非单调特性(中子流的振荡和取负值的可能性)导致有必要进一步发展 Carlson 法．间断 Carlson 法，DS_n法，被广泛应用．在这一方法中，差分方程用相空间网格中粒子平衡法从物理考虑推导出来．对于低阶近似，DS_n 法在多维情况下不保证足够的精度．避免这一局面的一个方法，是给 DS_n 法的方程组添加一些附加项，使得通过未知函数的线性变换，方程组变化为**球面调和函数法**(spherical harmonics, method of)中所出现的方程组．

用 Carlson 法(及其变型)对核反应堆进行的大量计算给出的结果与求解中子输运方程的其他数值方法相符良好．

参考文献

[1] Марчук, Г. И., Лебедев, В. И., Численные методы в теории переноса нейтронов, Атомиздат, М., 1981.

[2] Greenspan, H., Kelber, C. N. and Okrent, D. (eds.), Computing methods in reactor physics, Gordon and Breach, 1969.

[3] Bell, G. J. and Glasstone, S., Nuclear reactor theory, v. Nostrand Reinhold, 1971.

B. A. Чуянов 撰 沈青 译

Carnap 法则 [Carnap rule; Карнапа правило]，无限归纳法则(rule of infinite induction)，ω 法则(ω-rule)

一个推导法则(derivation rule)：对任意一个算术公式 $\varphi(x)$，如果命题 $\varphi(0)$，$\varphi(1)$，…都已被证明，那么命题$\forall x\varphi(x)$可以看作已被证明．这个法则首先由R. Carnap 引入([1])．Carnap 法则用到由前提构成的无限集，因此不能用于 D. Hilbert 形式理论的结构中．在一个具有 Carnap 法则的系统内，推导概念是不可判定的．在数理逻辑中，为了研究形式算术，使用构造性 Carnap 法则(constructive Carnap rule)：如果存在一个算法，使得对每一个自然数 n，能用此算法给出公式 $\varphi(n)$的一个推导，那么命题 $\forall x\varphi(x)$可以认为被证明了(又称限制 ω 法则(restricted ω-rule)，构造性无限归纳法则(rule of constructive infinite induction))．由 Gödel 定理，古典算术演算是不完全的；如果把构造性 Carnap 法则加到古典算术演算中去，那么就得到一个完全系统(见[2]，[3])．

参考文献

[1] Carnap, R., The logical syntax of language, Kegan Paul, Trench & Truber, London, 1937 (译自德文).

[2] Кузнецов, А. В., 《Успехи матем. наук》, **12** (1957), 4, 218-219.

[3] Shoenfield, J. R., On a restricted ω-rule, Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III, 7 (1959), 405-407.

B. E. Плиско 撰 卢景波 译 王世强 校

Carnot 定理 [Carnot theorem; Карно теорема]

关于不通过三角形顶点的代数曲线与三角形三边的交点分三边所成的单比之积的定理．设不通过三角形 ABC 的任何顶点的 n 次代数曲线 l 与每一边(或其延长线)相交于 n 个点：与边 AB 相交于点 C_1，…，C_n；与边 BC 相交于点 A_1，…，A_n；与边 CA 相交于点 B_1，…，B_n．这时，$3n$ 个单比

$$\frac{\overrightarrow{AC_i}}{\overrightarrow{C_iB}},\ \frac{\overrightarrow{BA_i}}{\overrightarrow{A_iC}},\ \frac{\overrightarrow{CB_i}}{\overrightarrow{B_iA}},\quad i=1,\ldots,n$$

之积等于 −1，如果 n 为奇数；如果 n 为偶数则等于 +1.

这个定理可以等价地叙述如下：$3n$ 个比

$$\frac{\overrightarrow{C_iA}}{\overrightarrow{C_iB}},\ \frac{\overrightarrow{A_iB}}{\overrightarrow{A_iC}},\ \frac{\overrightarrow{B_iC}}{\overrightarrow{B_iA}},\quad i=1,\ldots,n$$

之积等于 +1.

这个定理的一个特例是由 L. Carnot 证明的（[1]）.

如果 l 是直线，则得到 **Menelaus 定理**（Menelaus theorem）. Carnot 定理的推广是：假设 n 次代数曲线 l 同处于其所在平面内的直线 A_iA_{i+1}（$i=1, 2, \cdots, m$, $A_{m+1}=A_1$）的每一条恰好相交于 n 个点 B_{ij}（$i=1, 2, \cdots, m$; $j=1, 2, \cdots, n$）. 这时，有

$$\prod_{i,j}\frac{\overrightarrow{A_iB_{ij}}}{\overrightarrow{B_{ij}A_{i+1}}}=(-1)^{nm}.$$

参考文献

[1] Carnot, L., Géométrie de position, Paris, 1803.

П. С. Моденов 撰　张鸿林 译

Carson 变换 [**Carson transform**; **Карсона переобразование**]

对于 $-\infty<t<\infty$ 定义的、当 $t<0$ 时等于 0 的函数 $f(t)$ 到函数 $F(s)$ 的变换：

$$F(s)=s\int_0^{\infty}f(t)e^{-st}\,dt,$$

其中 s 是复变量. 逆变换公式是

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty}\frac{1}{s}F(s)e^{st}\,ds.$$

函数 $f(t)$ 的 Carson 变换同它的 **Laplace 变换**（Laplace transform）之间的差别在于前者存在因子 s.

A. B. Иванов 撰

【补注】 关于 Laplace 变换的两篇著名文献是 [A1]（重点在于理论）和 [A2]（重点在于应用）.

参考文献

[A1] Widder, D. V., The laplace transform, Princeton Univ. Press, 1972.

[A2] Doetsch, G., Introduction to the theory and application of the Laplac transformation, Springer, 1974（译自德文）.

张鸿林 译

Cartan 分解 [**Cartan decomposition**; **Картана разложение**]

一个实的非紧的半单 **Lie 代数**（Lie algebra, semi-simple）$\mathfrak{g}$ 被表示成向量空间的直和的一种表示式（*）. 如果 $\mathfrak{g}^C$ 表示 $\mathfrak{g}$ 的复化（复包络）（见 **Lie 代数的复化**（complexification of a Lie algebra）），那么在 $\mathfrak{g}^C$ 内存在一个与 $\mathfrak{g}$ 有相同维数的实紧子代数 $\mathfrak{g}^k$，使得以下分解成向量空间的直和的分解成立

$$\mathfrak{g}^k=\mathfrak{t}+\mathfrak{p},\quad \mathfrak{g}=\mathfrak{t}+i\mathfrak{p},\qquad (*)$$

这里 $\mathfrak{t}$ 是 $\mathfrak{g}^k$ 的某一对合自同构（对合）φ 的不变元所构成的子代数，而 $\mathfrak{p}$ 是 φ 的反不变元素所构成的集合. 第二个公式就是 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 分解（见[1]）. Cartan 分解把实的非紧半单 Lie 代数的分类问题归结为紧半单 Lie 代数和它们中的对合自同构的分类问题.

参考文献

[1] Helgason, S., Differential geometry and symmetric spaces, Acad. Press, 1962.

A. C. Феденко 撰　郝钢新 译

Cartan 引理 [**Cartan lemma**; **Картана лемма**] 若 $2p$ 个 n 元线性形式 φ_i, σ^i, $i=1,\cdots,p$ 之外乘积的和为零：

$$\sum_{i=1}^{p}\varphi_i\wedge\sigma^i=0,$$

而且 σ^i 是线性无关的，则 φ_i 为 σ^i 的线性组合而且其系数是对称的：

$$\varphi_i=\sum a_{ij}\sigma^j,\quad a_{ij}=a_{ji}.$$

这是 E. Cartan 于 1899 年证明的.

参考文献

[1] Cartan, E., Les systèmes différentielles extérieurs et leur applications géométriques, Hermann, 1945.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 此结果原来见于 [A1].

参考文献

[A1] Cartan, E., Sur certaines expressions différentielles et le problème de Pfaff, *Ann. Ec. Norm.* (3), **16** (1899), 239–332.

齐民友 译

Cartan 矩阵 [**Cartan matrix**; **Картана матрица**]

1) 特征为 0 的代数闭域 K 上的一个有限维半单 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 矩阵是矩阵

$$A=\left\|2\frac{(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_j,\alpha_j)}\right\|,\quad i,j=1,\ldots,r,$$

这里 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 是 $\mathfrak{g}$ 关于某个固定 **Cartan 子代数**（Cartan subalgebra）$\mathfrak{t}$ 的某个单根系，（ , ）是 $\mathfrak{g}$ 上 **Killing 型**（Killing form）所定义的 $\mathfrak{t}$ 的对偶空间上的内积.（关于任一根系的 Cartan 矩阵，见**根系**（root system）.）在不计由指标 $1,\cdots,r$ 的置换导出的变换时，Cartan 矩阵是 $\mathfrak{g}$ 的不变量，即它与 $\mathfrak{t}$ 的选择和单根系的选择无关. 这个不变量完全确定了 $\mathfrak{g}$：在不计由指标置换导出的变换时，两个半单 Lie 代数同构，当且仅当它们有相同的 Cartan 矩阵. 一个半单 Lie 代数是单的，当且仅

当它的 Cartan 矩阵是不可分解的(indecomposable)，即在指标的某些置换后，不可能表为对角块矩阵.

令 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1+\cdots+\mathfrak{g}_m$ 是 $\mathfrak{g}$ 分解为单子代数的直和. A_j 是单 Lie 代数 $\mathfrak{g}_j$ 的 Cartan 矩阵，则对角块矩阵

$$\begin{Vmatrix} A_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & A_m \end{Vmatrix}$$

是 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 矩阵.(对单 Lie 代数的 Cartan 矩阵的具体形式，见**半单 Lie 代数**(Lie algebra, semi-simple).)

Cartan 矩阵的分量 $a_{ij}=2(\alpha_i,\alpha_j)/(\alpha_j,\alpha_j)$ 有下列性质:

$$\left.\begin{aligned} a_{ii}=2;\ a_{ij}\leqslant 0,\ a_{ij}\in\mathbf{Z},\text{对 } i\neq j \\ a_{ij}=0\Rightarrow a_{ji}=0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Cartan 矩阵与用生成元和关系来刻画 $\mathfrak{g}$ 密切相关. 即 $\mathfrak{g}$ 中存在线性无关的生成元 $e_i,f_i,h_i\,(i=1,\cdots,r)$(称为典范生成元(canonical generators))，满足下列关系:

$$\begin{aligned} [e_i,f_j]=\delta_{ij}h_i;\ [h_i,e_j]=a_{ij}e_j; \\ [h_i,f_j]=-a_{ij}f_j;\ [h_i,h_j]=0. \end{aligned} \tag{2}$$

任意两个典范生成元组可由 $\mathfrak{g}$ 的自同构互相变换. 典范生成元还满足关系

$$(\mathrm{ad}\,e_i)^{-a_{ij}+1}e_j=0,\ (\mathrm{ad}\,f_i)^{-a_{ij}+1}f_j=0,\ i\neq j. \tag{3}$$

据定义这里 $(\mathrm{ad}\,x)y=[x,y]$. 对于给定的生成元组 e_i, $f_i,h_i(i=1,\cdots,r)$，关系(2)和(3)定义了 $\mathfrak{g}$(见[2]).

对满足(1)的任意矩阵 A，设以 $e_i,f_i,h_i\,(i=1,\cdots,r)$ 为生成子以(2)，(3)为定义关系的 k 上 Lie 代数为 $\mathfrak{g}(A)$，则 $\mathfrak{g}(A)$ 是有限维的，当且仅当 A 是一个半单 Lie 代数的 Cartan 矩阵[3].

参考文献

[1] Jacobson, N., Lie algebras, Interscience, 1962 (中译本: N. 贾柯勃逊，李代数，上海科学技术出版社，1964).

[2] Serre, J.-P., Algèbres de Lie semi-simples complexes, Benjamin, 1966

[3] Кац, В. Г., 《Изв. АН СССР Сер матем》, (6) 32 (1968), 1323－1367.

В. Л. Попов 撰

【补注】 满足条件(1)的矩阵 A 定义一个有限维 Lie 代数，当且仅当它是正定的；在其他情况，如半正定情形，出现其他有趣的代数. 见 **Kac-Moody 代数**(Kac-Moody algebra)，[A2].

设 L 是特征为 0 的代数闭域上的半单 Lie 代数，则满足条件(2)的生成元 e_i,f_i,h_i 的集合也称为 Chevalley 生成元(Chevalley generators)或 Chevalley 基(Chevalley basis). 这样的生成元的存在性定理称为 Chevalley 定理(Chevalley theorem). 关系(2)，(3)定义 Lie 代数的结果常称为 Serre 定理(Serre theorem).

参考文献

[A1] Humphreys, J. E., Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer, 1972

[A2] Kac, V. G., Infinite dimensional Lie algebras, Cambr. Univ. Press, 1985.

2) 域 K 上带单位元的有限维结合代数 A 的 Cartan 矩阵是矩阵 $(c_{ij})\,(i,j=1,\cdots,s)$，由有限维不可约左 A 模的完全集 $N_1,\cdots,N_s$ 来定义. 明确地说，c_{ij} 是满足 $\mathrm{Hom}(P_i,N_i)\neq 0$ 的不可分解投射左 A 模 P_i 的合成列中 N_j 出现的次数. 对每个 N_i，这样的 P_i 存在且在同构意义下是唯一确定的.

在一定情况下，Cartan 矩阵 C 被证明是对称正定的，甚至 $C=D^TD$，这里 D 是整数矩阵，但未必是方阵(D^T 表示 D 的转置矩阵). 对特征 $p>0$ 的域 k 上有限群 G 的群代数 $A=k[G]$ 的 Cartan 矩阵就是这种情况. 在此情况下，$P_1,\cdots,P_s$ 形成非同构的主不可分解左 A 模(principal indecomposed left A-modules)的完全集，即它们是左 A 模 A 分解为不可分解 A 模的所有直和项. 使 Cartan 矩阵等式成立的另一个例子是，A 是特征 $p>0$ 的代数闭域上的 Lie 代数 $\bar{\mathfrak{g}}$ 的限制泛包络代数，这里 $\bar{\mathfrak{g}}$ 是从复半单 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 简化到特征 p 而得到的(见[2]).

参考文献

[1] Curtis, C. W. and Reiner, I., Representation theory of finite groups and associative algebras, Interscience, 1962

[2] Humphreys, J. E., Modular representations of classical Lie algebras and semi-simple groups, *J. of Algebra*, 19 (1971), 51－79.

В. Л. Попов 撰　林亚南 译

Cartan 外形式法 [Cartan method of exterior forms ; Картана метод внешних форм]

研究微分方程组和具有各种结构之流形的一种微分-代数方法，它的代数基础是 Grassmann 代数. 设 V 是代数域 K 上的 2^n 维向量空间，它的基向量为 e^0, $e^i,e^{ij},e^{ijk},\cdots,e^{1\cdots n}(i<j<k\leqslant n)$. 除基向量外，对任何自然数 q，再按下述法则定义向量 $e^{i_1\cdots i_q}(i_1,\cdots,i_q=1,\cdots,n)$: 若自然数 $i_1,\cdots,i_q$ 中至少有两个相同，则 $e^{i_1\cdots i_q}=0$; 若 $i_1,\cdots,i_q$ 全不相同，且 $j_1<\cdots<j_q$ 是 $i_1,\cdots,i_q$ 的一个排列，则当 $i_k\to j_k\,(k=1,\cdots,q)$ 为偶排列时，$e^{i_1\cdots i_q}=e^{j_1\cdots j_q}$; 当它为奇排列时，$e^{i_1\cdots i_q}=-e^{j_1\cdots j_q}$. 在向量空间 V 中外积定义为: $e^{i_1\cdots i_p}\wedge e^{k_1\cdots k_q}=e^{i_1\cdots i_p k_1\cdots k_q}$; 此外，要求满足超复数系(即结合代数)的通常规律. 如此构造的域 K 上 2^n 维代数称为 Grassmann 代数(Grassmann algebra). 形如

$$\lambda e^{i_1\cdots i_p}=\lambda e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_p}$$

的向量称为p次单项式(monomial)．同次$p>1$的单项式之和称为p次外形式(exterior form)；一次单项式之和称为线性形式(linear form)．按定义，域K的元素是零次形式．诸向量e^i生成 Grassmann 代数，因而e^i的任意n个线性独立的组合

$$\omega^j = a^j_i e^i,\ \det(a^j_i) \neq 0,\ a^j_i \in K$$

也生成同一 Grassmann 代数．这里及下面，凡出现相同的上、下指标，就表示它们在适当的范围内求和．

p次外形式

$$\Omega_p = a_{i_1 \cdots i_p} e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_p}$$

关于符号e^i的一阶代数导数(first - order algebraic derivative)是指用下述方式从Ω_p求得的$p-1$次形式$\Omega_{p-1} = \partial\Omega_p / \partial e^i$：凡$\Omega_p$中不含$e^i$的单项式用零代替，对于其余的每个单项式，先把符号$e^i$按反交换律排到该项的最左边，再用1取代$e^i$．形式$\Omega_p$的一切$p-1$阶非零代数导数的集合称为$\Omega_p$的线性形式的相伴组(associated system)．外形式Ω_p的秩(rank)就是它的相伴组的秩．它等于借助外积运算用来表示Ω_p的线性形式的最少个数．

为了研究$\mathbf{R}^n$中的微分方程组，常采用微分 Grassmann 代数，其中K取为定义在$\mathbf{R}^n$某个区域上的n个实变量x^i的解析函数环，并用dx^i表示向量e^i．它的线性形式称为1形式(1- form)或 Pfaff 形式(Pfaffian form)，其中符号dx^i是变量x^i的微分．次数$p>1$的外形式称为p形式(p- form)或p次外微分形式(exterior differential form)．所谓p形式

$$\Omega_p = a_{i_1 \cdots i_p} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

的外微分(exterior differential)是指下列$(p+1)$形式：

$$D\Omega_p = da_{i_1 \cdots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}.$$

外微分具有如下性质：

$$D(\Omega_p \pm \Omega_p^*) = D\Omega_p \pm D\Omega_p^*,$$
$$D(\Omega_p \wedge \Omega_q) = D\Omega_p \wedge \Omega_q + (-1)^p \Omega_p \wedge D\Omega_q,$$
$$D(D\Omega_p) \equiv 0.$$

这里Ω_p, Ω_p^*是任意的p形式，Ω_q是任一q形式．

一个 Pfaff 形式$\omega = a_i dx^i$在局部上是某个函数f的全微分，当且仅当它的外微分为零．设

$$\theta^\alpha \equiv b^\alpha_a(x^b, z^\rho)\, dx^a + c^\alpha_\xi(x^b, z^\rho)\, dz^\xi - dz^\alpha = 0,$$
$$\alpha = 1, \ldots, s;\ a, b = 1, \ldots, m;\ \xi = s+1, \ldots, r;\quad (1)$$
$$\rho = 1, \ldots, r$$

是任意一组含m个独立变量x^a和r个未知函数z^ρ的线性无关 Pfaff 方程(Pfaffian equations)．$D\theta^\alpha = 0$称为方程组(1)的闭包(closure)组．如果闭包组在代数上已把原方程组(1)计算在内，即已把(1)中的量dz^α代入二次形式$D\theta^\alpha$，则称之为纯闭包(pure closure)组(记为$\overline{D\theta^\alpha} = 0$)．方程组$\theta^\alpha = 0$, $\overline{D\theta^\alpha} = 0$，或与其等价的方程组$\theta^\alpha = 0$, $\overline{D\theta^\alpha} = 0$，称为封闭方程组(closed system)．当且仅当$\overline{D\theta^\alpha} = 0$时，方程组(1)是完全可积的(completely integrable)．令$\overline{D\theta^\alpha}$关于$dx^a$和$dz^\xi$ $(a=1,\cdots,m;\ \xi = s+1,\cdots,r)$的代数导数等于零，再将 Pfaff 方程与原方程组(1)联立，就得到一个完全可积的方程组，称为(1)的特征组(characteristic system)．它的独立的首次积分的集合构成用以表达组(1)所有方程的变量的最小集合．设$m^\alpha_{\xi,h}$是代数导数$\partial\overline{D\theta^\alpha}/\partial dz^\xi$中以任意变量$x^a_h$, z^ξ_h $(h=1, \cdots, m-1)$取代dx^a和dz^ξ后的结果．方程组(1)的伴随矩阵序列是

$$M_h = \begin{pmatrix} m^\alpha_{\xi,1} \\ \cdots \\ m^\alpha_{\xi,h} \end{pmatrix}.$$

数

$$s_1 = \operatorname{rank} M_1,$$
$$s_2 = \operatorname{rank} M_2 - \operatorname{rank} M_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$s_{m-1} = \operatorname{rank} M_{m-1} - \operatorname{rank} M_{m-2},$$
$$s_m = r - s - \operatorname{rank} M_{m-1}$$

称为(1)的特征数(characteristic)，而数

$$Q = s_1 + 2s_2 + \cdots + ms_m$$

称为(1)的 Cartan 数(Cartan number)．把方程$dz^\xi = b^\xi_a dx^a$附加到封闭系$\theta^\alpha = 0$, $\overline{D\theta^\alpha} = 0$中去，其中$b^\xi_a$是新的未知函数，便得组(1)的第一次延长．设$N$是在$b^\xi_a$中函数独立的函数个数，则恒有$N \leqslant Q$．若$N = Q$，则组(1)是对合的，它的通解依赖于$m$个变量的$s_m$个任意函数，$m-1$个变量的$s_{m-1}$个函数，…，1个变量的$s_1$个函数以及$s$个任意常数．另一方面，若$N<Q$，则(1)需要延长；经有限次延长后，或者得到对合方程组或者得到不相容方程组．

例如，设方程组为

$$dz_1 = u\,dx + x^2\,dy,\quad dz_2 = u\,dy + y^2\,dx,$$

其中x, y是独立变量，u, z_1, z_2是未知函数($s=2=m$, $r=3$)．它的纯闭包组具有下列形式：

$$du \wedge dx + 2x\,dx \wedge dy = 0,\quad du \wedge dy + 2y\,dy \wedge dx = 0.$$

对此有

$$M_1 = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix},\quad s_1 = \operatorname{rank} M_1 = 1,\quad s_2 = 0,$$
$$Q = 1,\quad N = 0.$$

原方程组不是对合的．延长后的方程组

$$dz_1 = u\,dx + x^2\,dy,\quad dz_2 = u\,dy + y^2\,dx,$$

$$du = 2(y\,dx + x\,dy)$$

是完全可积的，它的通解具有下列形式：

$$u = 2xy + c_1,\quad z_1 = x(xy + c_1) + c_2,$$

$$z_2 = y(xy + c_1) + c_3,$$

其中 c_1, c_2, c_3 为任意常数．

利用Cartan的外形式法可大大简化数学与理论力学中许多定理的叙述和证明．例如，Остроградский定理由公式

$$\oint_\Gamma \Omega = \int_M D\Omega$$

给出，其中 M 是定向的 $m+1$ 维解析流形，Γ 是它的 m 维光滑边界，Ω 是 m 形式，$D\Omega$ 是它的外微分．在多重积分

$$J = \int \cdots \int_D f(x^1, \ldots, x^n)\,dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

中由公式 $x^i = \varphi^i(u^1, \cdots, u^n)$ 定义的映射 $p: \Delta \to D$ 下（其中 Δ, $D \subset \mathbf{R}^n$），变量变换公式可通过变量 x^i 及其微分 $dx^i = (\partial\varphi^i/\partial u^j)\,du^j$ 的直接代换而得到．因为

$$dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = \frac{\partial(\varphi^1, \ldots, \varphi^n)}{\partial(u^1, \ldots, u^n)}\,du^1 \wedge \cdots \wedge du^n,$$

故得

$$J = \int \cdots \int_\Delta \frac{\partial(\varphi^1, \ldots, \varphi^n)}{\partial(u^1, \ldots, u^n)}\,du^1 \wedge \cdots \wedge du^n.$$

Cartan的外形式法广泛应用于研究具有各种结构的流形．设 M 是 C^∞ 微分流形，$F = C^\infty(M)$ 是 M 上可微函数集，D^1 是 M 上一切向量场的集合，$\mathfrak{A}_s$ 是模 $D^1 \times \cdots \times D^1$（$s$ 次，$s \geqslant 1$ 为自然数）上反对称 F 多重线性映射的集合．

令 $\mathfrak{A}_0 = F$，并用 $\mathfrak{A}$ 表示 $\mathfrak{A}_s$ 的直和：

$$\mathfrak{A} = \sum_{s=0}^{\infty} \mathfrak{A}_s.$$

模 $\mathfrak{A}$ 的元素称为 M 上的**外微分形式**(exterior differential forms)；$\mathfrak{A}_s$ 的元素称为 s **形式**(s-form)．设

$$f, g \in C^\infty(M);\ \theta \in \mathfrak{A}_r,\ \Omega \in \mathfrak{A}_s,\ X_i \in D^1.$$

它们的外乘 $\wedge$ 由下列公式定义：

$$f \wedge g = fg,\quad (f \wedge \theta)(X_1, \ldots, X_r) = f\theta(X_1, \ldots, X_r),$$

$$(\Omega \wedge g)(X_1, \ldots, X_s) = g\,\Omega(X_1, \ldots, X_s),$$

$$(\theta \wedge \Omega)(X_1, \ldots, X_{r+s}) =$$

$$= \frac{1}{(r+s)!} \sum_{\sigma \in S_{r+s}} \varepsilon(\sigma)\theta(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(r)}) \times$$

$$\times \Omega(X_{\sigma(r+1)}, \ldots, X_{\sigma(r+s)}),$$

其中 S_{r+s} 表示集合 $1, \cdots, r+s$ 的置换群，$\varepsilon(\sigma) = 1$ 或 -1，取决于置换 σ 是偶的或奇的．具有外乘法的反对称 F 多重线性函数的模 $\mathfrak{A}$ 称为**流形 M 上的 Grassmann 代数**(Grassmann algebra over the manifold)．若 M 是 $\mathbf{R}^n$，则得前面考虑过的微分 Grassmann 代数．所谓外微分是指具有下述性质的 $\mathbf{R}$ 线性映射 $D: \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$：对每个 $s \geqslant 0$, $D\mathfrak{A}_s \subset \mathfrak{A}_{s+1}$；若 $f \in \mathfrak{A}_0 = C^\infty(M)$，则 Df 是由公式 $Df(X) = X(f)$ 定义的 1 形式，这里 $X \in D^1$；若 $\theta \in \mathfrak{A}_r$, $\Omega \in \mathfrak{A}$，则 $D \cdot D = 0$, $D(\theta \wedge \Omega) = D\theta \wedge \Omega + (-1)^r \theta \wedge D\Omega$．例如，设 M 是有给定仿射联络的流形．流形 M 上一个仿射联络是指一种法则 ∇，它对于每个 $X \in D^1$ 伴随一个从向量空间 D^1 到自身的线性映射 ∇_X，满足下列两个性质：

$$\nabla_{fX+gY} = f\nabla_X + g\nabla_Y;\quad \nabla_X(fY) = f\nabla_X + (Xf)Y,$$

其中 $f, g \in C^\infty(M)$, X, $Y \in D^1$．算子 ∇_X 称为关于 X 的共变导数(covariant derivative)．设 Φ 是 M 的一个微分同胚，∇ 是 M 上的仿射联络，公式

$$\nabla'_X(Y) = (\nabla_X \Phi(Y^\Phi))^{\Phi^{-1}}$$

定义了 M 上一个新仿射联络，这里 $X, Y \in D^1$．若 $\nabla' = \nabla$，则说 ∇ 关于 Φ 是不变的．这时，Φ 称为 M 的一个仿射变换．对一切 X, $Y \in D^1$，令

$$[X, Y] = XY - YX,$$

$$T(X, Y) = \nabla_X(Y) - \nabla_Y(X) - [X, Y],$$

$$R(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]},$$

并令 D_1 是 F 模 D^1 的对偶模．F 多重线性映射 $(\omega, X, Y) \to \omega(T(X, Y))$ 称为**挠率张量场**(torsion tensor field)记作 T，其中 $\omega \in D_1$ 是 Pfaff 形式；F 多重线性映射 $(\omega, Z, X, Y) \to \omega(R(X, Y) \cdot Z)$ 称为**曲率张量场**(curvature tensor field)，记作 R．设 $p \in M$，并设 $X_1, \cdots, X_n$ 为点 p 某邻域 U_p 内向量场的基．下列公式定义了 U_p 上的函数 Γ_{IJ}^K, T_{IJ}^K, R_{IJ}^K：

$$\nabla_{X_I}(X_J) = \Gamma_{IJ}^K X_K,\quad T(X_I, X_J) = T_{IJ}^K X_K,$$

$$R(X_I, X_J) \cdot X_L = R_{LIJ}^K X_K,\quad I, J, K = 1, \ldots, n.$$

对于由公式

$$\omega^I(X_J) = \delta_J^I,\quad \omega_I^J = \Gamma_{KI}^J \omega^K$$

在 U_p 上定义的 1 形式 ω^I, ω_J^K，下述 **Cartan 结构方程**(Cartan structure equations) 成立：

$$D\omega^J = \omega^K \wedge \omega_K^J + \frac{1}{2} T_{JK}^I \omega^J \wedge \omega^K,$$

$$D\omega_I^J = \omega_I^K \wedge \omega_K^J + \frac{1}{2} R_{IKL}^J \omega^K \wedge \omega^L.$$

Pfaff 方程组

$$\omega^a = \lambda_i^a \omega^i,\ i, j, k=1, \ldots, m;\ a, b=m+1, \ldots, n$$

定义了一个 m 维子流形 $\mathfrak{M}_m \subset M$. 借助于 Cartan 结构方程延长此方程组，可得子流形的一系列一阶、二阶、…基本几何对象：

$$\mathfrak{M}_m: \{\lambda_i^a\},\ \{\lambda_i^a, \lambda_{ij}^a\}, \ldots;$$

一般情况下，存在有限 k 阶基本几何对象

$$\{\lambda_i^a, \ldots, \lambda_{i_1 \cdots i_k}^a\}$$

确定子流形到只相差一些常数. 在研究流形 M 的子流形时，通常把活动标架法与Cartan的 外形式法结合起来使用(例如，见[4]).

自 1899 年起，E. Cartan 一直致力于外形式的广泛应用，后来方法就以他的名字命名.

参考文献

[1] Cartan, E., Les systèmes différentiells extérieurs et leurs application en géométrie, Hermann, 1945.

[2] Фиников, С. П., Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии, М.-Л., 1948 (中译本：С. П. 菲尼可夫，嘉当的外形式法，苏步青译，科学出版社，1956.)

[3] Helgason, S., Differential geometry and symmetric spaces, Acad. Press, 1962.

[4] Cartan, E., La géométrie des espaces de Riemann, Mém. Sci. Math., 9, Gauthier-Villars, 1925.

B. C. Малаховский 撰

【补注】 更通常的观点是把一个 p 次外形式看作一个函数 $\Omega: E^p \to K$, 使得：a) 对每个 i, $V_i \mapsto \Omega(V_1, \cdots, V_i, \cdots, V_p)$ 是 E 到 K 的线性映射；b) 若 $V_i = V_j$，$i \neq j$，则 $\Omega(V_1, \cdots, V_i, \cdots, V_j, \cdots, V_p) = 0$. 这里 E 是域 K 上某一固定的 n 维向量空间.

若 $e_1, \cdots, e_n$ 是 E 的一个基，则 $e^{i_1 \cdots i_p}$，$i_1 < \cdots < i_p$，是外形式，它在 $(e_{i_1}, \cdots, e_{i_p})$ 取值 1，而在任何包含某个 $e_j (j \notin \{i_1, \cdots, i_p\})$ 的 p 个基向量上取值 0.

取流形 M 上点 $x \in M$ 处的切空间作为 E，并令 $K=\mathbf{R}$，便可与本条目所述的流形上 Cartan 运算联系起来.

Ω 与向量 $V \in E$ 的**内积**(inner product)，或称**缩并**(contraction)，是由 $(V_1, \cdots, V_{p-1}) \mapsto \Omega(V, V_1, \cdots, V_{p-1})$ 给出的 $p-1$ 次外形式；记作 $V \rfloor \Omega$ 或 $i(V) \cdot \Omega$. 条目中的"一阶代数导数"$\partial \Omega_p / \partial e^i$ 就是 $e_i \rfloor \Omega_p$.

在微分 Grassmann 代数的定义中，解析函数集 K 不是一个域. 然而如用环代替，不会引起问题. 事实上，条目中讨论流形上 Cartan 微积分时，用的就是 C^∞ 函数环.

p 形式 Ω_p 的外微分更常用的记号是 $d\Omega_p$，而不是 $D\Omega_p$. 函数 f 的外微分是 $df = (\partial f / \partial x^i) dx^i$.

在西方文献中，Остроградский 定理常称为 **Stokes 定理**(Stokes theorem)；一个 Pfaff 形式在局部是函数的全微分，当且仅当它的外导数为零，这自然是 Poincaré 引理的一部分. 对于这两个条目，也见**微分形式**(differential form).

关于 Pfaff 方程组的完满的叙说，包括 Cartan - Kähler 定理(Cartan - Kähler theorem) 和 Cartan - 倉西定理(Cartan - Kuranishi theorem)，见 [A1] 和 **Pfaff 结构**(Pfaffian structure)；**Pfaff 方程**(Pfaffian equation)及 **Pfaff 问题**(Pfaffian problem).

附加在向量空间 V 上的 Grassmann 代数是附加在 V 和二次形式 Q 上的 **Clifford 代数**(Clifford algebra)当 $Q=0$ 时的特殊情形.

参考文献

[A1] Dieudonné, J., Treatise on analysis, Acad. Press, 1974, Chapt. 18, Sect. 8 – 14 (译自法文).

[A2] Cartan, E., Leçons sur les invariants intégraux, Hermann, 1971.

【译注】 也可参考[B1].

参考文献

[B1] Bryant, R. L., Chern, S. S., Gardner, R. B., Goldschmidt, H. L. and Griffiths, P. A., Exterior differential systems, Springer-Verlag, New York Inc., 1991.

沈一兵 译 陈维桓 校

Cartan 子代数 [**Cartan subalgebra; Картана подалгебра**]，域 k 上有限维 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的

$\mathfrak{g}$ 的一个等于它在 $\mathfrak{g}$ 内的正规化子的幂零子代数. 例如，若 $\mathfrak{g}$ 是某一固定阶的全体复方阵所构成的 Lie 代数，则一切对角方阵所构成的子代数就是 $\mathfrak{g}$ 的一个 Cartan 子代数. Cartan 子代数也可以定义为 $\mathfrak{g}$ 内一个幂零子代数 $\mathfrak{t}$，它等于它的 Fitting 零分支(Fitting null-component)(见 Lie **代数表示的权**(weight of a representation of a Lie algebra))

$$\mathfrak{g}_0 = \{X \in \mathfrak{g}: \forall H \in \mathfrak{t}\, \exists n_{X,H} \in \mathbf{Z}((\operatorname{ad} H)^{n_{X,H}}(X)=0)\},$$

这里 ad 代表 $\mathfrak{g}$ 的伴随表示(见 **Lie 代数**(Lie algebra)).

进一步假设 k 的特征是零. 这时，对于任意正则元 $X \in \mathfrak{g}$，$\mathfrak{g}$ 中一切被 ad$X$ 的幂所零化的元素的集合 $\mathfrak{n}(X, \mathfrak{g})$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个 Cartan 子代数，并且 $\mathfrak{g}$ 的每个 Cartan 子代数都具有 $\mathfrak{n}(X, \mathfrak{g})$ 的形状，X 是某一个适当的正则元. 每个正则元属于且只属于一个 Cartan 子代数. $\mathfrak{g}$ 的所有 Cartan 子代数的维数相同，等于 $\mathfrak{g}$ 的秩(rank). Cartan 子代数在 Lie 代数的满同态之下的象仍是 Cartan 子代数. 如果 k 是代数闭的，则 $\mathfrak{g}$ 的一切 Cartan子代数都是共轭的；更确切地说，它们可以被 $\mathfrak{g}$ 的自同构代数群 D 中的算子将一个变到另一个，这里 D

的 Lie 代数是ad g 的换位子代数．如果 g 是可解的，那么不假设 k 是代数闭的，上述断言仍然成立．

设 G 或是特征为零的代数闭域 k 上的一个连通线性代数群，或是一个连通 Lie 群，而 g 是它的 Lie 代数．那么 g 的一个子代数 t 是一个 Cartan 子代数，当且仅当它是 G 的一个 **Cartan 子群** (Cartan subgroup) 的 Lie 代数．

令 g 是 k 上一个有限维向量空间 V 的全体自同态所构成的 Lie 代数 gl(V) 的一个子代数，$\bar{g}$ 是 gl(V) 中包含 g 的最小的**代数的 Lie 代数** (Lie algebra, algebraic)．如果 $\bar{t}$ 是 $\bar{g}$ 的一个 Cartan 子代数，则 $\bar{t} \cap g$ 是 g 的一个 Cartan 子代数，并且如果 t 是 g 的一个 Cartan 子代数，$\bar{t}$ 是 gl(V) 中包含 t 的最小的代数子代数，则 $\bar{t}$ 是 $\bar{g}$ 的一个 Cartan 子代数且 $t = \bar{t} \cap g$．

令 $k \subset K$ 是一个域扩张．g 的一个子代数 t 是 Cartan 子代数，当且仅当 $t \otimes_k K$ 是 $g \otimes_k K$ 的 Cartan 子代数．

当 g 是一个半单 Lie 代数（这是 E. Cartan 所使用的名称）时，Cartan 子代数起着非常重要的作用．在这种情形下，g 的每个 Cartan 子代数 t 都是交换的并且由半单元素组成（见 **Jordan 分解** (Jordan decomposition)），且 **Killing 型** (Killing form) 在 t 上的限制是非奇异的．

参考文献

[1] Cartan, E., Sur la structure des groupes de transformations finis et continus, Paris, 1894.

[2] Jacobson, N., Lie algebras, Interscience, 1962（中译本：N. 贾柯勃逊，李代数，上海科学技术出版社，1964）．

[3] Chevalley, C., Theory of Lie groups, 1, Princeton Univ. Press, 1946.

[4] Théorie des algèbres de Lie, Topologie des groupes de Lie, Sém. S. Lie, le année 1954－1955, Ecole Norm. Super., 1955.

B. Л. Попов 撰

【补注】 g 的一个元素 h 叫做正则的 (regular)，如果 g 的自同态 ad h 的 Fitting 零分支的维数最小．在以元素是正则的条件定义一个 Zariski 开子集的意义下，g 中"几乎所有的"元素是正则的．对于正则元 h 来说，ad$h$ 的 Fitting 零分支是 Cartan 子代数这一结果对于任意无限域上的有限维 Lie 代数都成立（[A4], p.59）．

参考文献

[A1] Bourbaki, N., Elements of mathematics, Lie groups and Lie algebras, Addison - Wesley, 1975（译自法文）．

[A2] Humphreys, J. E., Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer, 1972（中译本：李代数及其表示理论导引，上海科学技术出版社，1981）．

[A3] Serre, J.-P., Lie algebras and Lie groups, Benjamin, 1965.

[A4] Jacobson, N., Lie algebras, Dover, reprint, 1979（中译本：N. 贾柯勃逊，李代数，上海科学技术出版社，1964）．

郝钢新 译

Cartan 子群 [Cartan subgroup; Картана подгруппа]，群 G 的

G 的极大的幂零子群 C，它的每个具有有限指数的正规子群在 G 中的正规化子中也具有有限指数．设 G 是特征零的域上连通的线性代数群，则 G 的 Cartan 子群也被定义成为闭的连通子群，它的 Lie 代数是 G 的 Lie 代数的 **Cartan 子代数** (Cartan subalgebra)．Cartan 子群的一个例子是全部非异矩阵群 $GL_n(k)$ 中全部对角矩阵的子群 D．

在连通线性代数群 G 中，Cartan 子群也能定义为 G 的极大环面的中心化子，或定义为连通的闭幂零子群，它同它在 G 中正规化子的单位的连通分支（单位分支）重合．C 的全部半单元和幂么元集合 C_s 和 C_u（见 **Jordan 分解** (Jordan decomposition)）是 C 的闭子群，且 $C = C_s \times C_u$．此外，C_s 是 G 的位于 C 中的唯一极大环面．G 的 Cartan 子群的维数称为 G 的秩 (rank)．G 的全体 Cartan 子群的并对于 Zariski 拓扑包含 G 的一个开子集（一般不是整个 G）．G 的每个半单元落在至少一个 Cartan 子群中，且每个正则元恰好落在一个 Cartan 子群中．设 $\varphi: G \to G'$ 是线性代数群的满态射，则 G' 的 Cartan 子群是 G 的 Cartan 子群在 φ 下的象．G 的任何两个 Cartan 子群共轭．连通半单群（或更一般地，约化群）G 的 Cartan 子群是 G 的极大环面．

设群 G 定义在域 k 上，则在 G 中有一个定义在域 k 上的 Cartan 子群；实际上 G 由定义在 k 上的 Cartan 子群生成．G 的定义在 k 上的两个 Cartan 子群不一定在 k 上共轭（当 G 是可解时，它们是共轭的）．G 的 Cartan 子群的簇在 k 上是有理的．

令 G 是连通实 Lie 群，具有 Lie 代数 g，则 G 的 Cartan 子群在 G 中是闭的（但不一定连通），且它们的 Lie 代数是 g 的 Cartan 子代数．设 G 是 $GL_n(\mathbf{R})$ 的解析子群，而 $\overline{G}$ 是 $GL_n(\mathbf{R})$ 的包含 G 的最小的代数群，则 G 的 Cartan 子群是 G 同 $\overline{G}$ 的 Cartan 子群的交．当 G 是紧的情形，Cartan 子群是连通的 Abel 群（正是极大环面）且互相共轭，而且 G 的每个元素皆落在某个 Cartan 子群中．

参考文献

[1A] Chevalley, C., Theory of Lie groups, I, Princeton Univ. Press, 1946.

[1B] Chevalley, C., Théorie des groupes de Lie, 2－3, Hermann, 1951－1955.

[2] Borel, A., Linear algebraic groups, Benjamin, 1969.

[3] Borel, A. and Tits, J., Groupes réductifs, *Publ. Math. IHES*, 27 (1965), 55－150.

[4] Demazure, M. and Grothendieck, A., Schemas en groupes I－III, Lecture Notes in Math., 151－153, Springer, 1970.
B. Л. Попов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Borel, A. and Springer, T. A., Rationality properties of linear algebraic groups, *Tohoku Math. J.* (2), **20** (1968), 443－497.
石生明译 许以超校

Cartan 定理 [Cartan theorem; Картана теорема]

1)关于最高权向量的 Cartan 定理．令 $\mathfrak{g}$ 是一个复半单 Lie 代数，且令 e_i, f_i, h_i $(i=1,\cdots,r)$ 是它的典范生成元(canonical generators)；即满足以下关系的一组线性无关的生成元：

$$[e_i,f_j]=\delta_{ij}h_i,\ [h_i,e_j]=a_{ij}e_j,\ [h_i,f_j]=-a_{ij}f_j,$$
$$[h_i,h_j]=0,$$

其中 $a_{ii}=2$，当 $i\neq j$ 时 a_{ij} 是非正整数 $(i,j=1,\cdots,r)$，若 $a_{ij}=0$，则 $a_{ji}=0$，且令 $\mathfrak{t}$ 是由 $h_1,\cdots,h_r$ 线性张成的 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数，而 ρ 是 $\mathfrak{g}$ 在一个复有限维空间 V 内的线性表示．此时，存在一个非零向量 $v\in V$，使得

$$\rho(e_i)v=0,\ \rho(h_i)v=k_iv,\ i=1,\ldots,r,$$

此处 k_i 是某些数．这个定理是由 E. Cartan 建立的([1])．向量 v 称为表示 ρ 的最高权向量(heighest weight vector)，$\mathfrak{t}$ 上由条件 $\Lambda(h_i)=k_i$ $(i=1,\cdots,r)$ 所定义的线性函数 Λ 称为对应于 v 的表示 ρ 的最高权(heighest weight)．序组 $(k_1,\cdots,k_r)$ 称为最高权 Λ 的数值标志集(set of numerical marks of the heighest weight)．Cartan 定理给出了复半单有限维 Lie 代数的不可约有限维表示的完全分类．由此可断言 $\mathfrak{g}$ 的每一个有限维复不可约表示有唯一的最高权向量(成比例的向量看作同一个)，并且对应的最高权的数值标志是非负整数．两个有限维不可约表示是等价的，当且仅当对应的最高权相同．任意一组非负整数都是某一个有限维复不可约表示的最高权的数值标志集．

参考文献

[1] Cartan, E., Les tenseurs irréductibles et les groupes linéaires simples et semi-simples, *Bull. Sci. Math.*, **49** (1925), 130－152.

[2] Jacobson, N., Lie algebras, Interscience, 1962 (中译本：N. 贾柯勃逊，李代数，上海科学技术出版社，1964).

[3] Théorie des algèbres de Lie, Topologie des groupes de Lie, Sém. S. Lie, le année 1954－1955, Ecole Norm. Super., 1955.

[4] Желобенко, Д. П., Компактные группы Ли и их представления, M., 1970 (英译本：Zhelobenko, D. P., Compact Lie groups and their representations, Amer. Math. Soc., 1973).

[5] Dixmier, J., Algèbres enveloppants, Gauthier-Villars, 1974 (英译本：Dixmier, J., Enveloping algebras, North-Holland, 1977).

[6] Borel, A. and Cartan, E., et al., (eds.), Seminar on algebraic groups and related finite groups, Lecture Notes in Math., 131, Springer, 1970.
B. Л. Попов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Humphreys, J. E., Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer, 1972 (中译本：李代数及其表示理论导引，上海科学技术出版社，1981).

2)多复变函数论中的 Cartan 定理．首先由 H. Cartan([1])证明的 Stein 流形上凝聚解析层上所谓定理 A 和 B．令 $\mathcal{O}$ 是一个复流形 X 上全纯函数的芽层．X 上 $\mathcal{O}$ 模的一个层 $\mathcal{S}$ 称为一个凝聚解析层(coherent analytic sheaf)，如果在每一点 $x\in X$ 的一个邻域内，对某些自然数 p,q，存在层的正合列

$$\mathcal{O}^p\to\mathcal{O}^q\to\mathcal{S}\to0.$$

$\mathcal{O}^p$ 的所有局部有限生成的子层就是这样的例子．

定理 A．令 $\mathcal{S}$ 是 **Stein 流形**(Stein manifold) X 上一个凝聚解析层，那么对于每一点 $x\in X$，存在 $\mathcal{S}$ 的有限个整体截影 $s_1,\cdots,s_N$，使得纤维 $\mathcal{S}_x$ 的任何元素 s 可以表示成

$$s=h_1(s_1)_x+\cdots+h_N(s_N)_x$$

的形式，其中所有 $h_j\in\mathcal{O}_x$．(换句话说，局部地看，$\mathcal{S}$ 是由它的整体截影在 $\mathcal{O}$ 上有限生成的．)

定理 B．令 $\mathcal{S}$ 是 Stein 流形 X 上一个凝聚解析层，那么 X 的一切系数在 $\mathcal{S}$ 内的阶 $p\geqslant1$ 的上同调群都是平凡的：

$$H^p(X,\mathcal{S})=0,\ 对\ p\geqslant1.$$

这两个 Cartan 定理有很多应用．由定理 A 可以得出若干在 Stein 流形上整体解析对象的存在定理．定理 B 的主要推论是 $\bar\partial$ 问题的可解性：在一个 Stein 流形上，带有相容性条件 $\bar\partial g=0$ 的方程 $\bar\partial f=g$ 总是可解的．

定理 B 的应用大致如下：如果

$$0\to\mathcal{S}\to F\to G\to0$$

是 X 上一个层的正合列，那么序列

$$\cdots\to H^p(X,\mathcal{S})\to H^p(X,F)\xrightarrow{\varphi_p}H^p(X,G)\to$$
$$\to H^{p+1}(X,\mathcal{S})\to\cdots$$

也是正合的．如果 X 是一个 Stein 流形，则

$$H^p(X,\mathcal{S})=0,\ p\geqslant1,$$

因而 φ_0 是满射并且 φ_p $(p\geqslant1)$ 是同构．

定理 B 就是说，如果在一个复流形 X 上，对于每

个凝聚解析层$\mathscr{S}$来说，群 $H^1(X, \mathscr{S})=0$，那么 X 是一个 Stein 流形．定理 A 和 B 连同它们众多的推论构成 Stein 流形上所谓冈潔 - Cartan 理论（Oka - Cartan theory）这些定理的一个直接结果就是多维复分析中所有经典问题，诸如 Cousin 问题、**Levi 问题**（Levi problem）、Poincaré 问题以及其他问题在 Stein 流形上可解．定理 A 和 B 可以逐字逐句地推广到 **Stein 空间**（Stein space）．

参考文献

[1] Cartan, H., Variétés analitiques complexes et cohomologie, in R. Remmert and J.-P. Serre (eds.): Collected works, Springer, 1979, 669 - 683.

[2] Gunning, R. C. and Rossi, H., Analytic functions of several complex variables, Prentice - Hall, 1965.

[3] Hormunder, L., An introduction to complex analysis in several variables, North - Holland, 1973.

E. M. Чирка 撰

【补注】 在 [A1] 里，有关 Cartan 定理 A 和 B 的理论是在积分表示的基础上阐述的，而不是象 [2] 或 [A2] 里那样在层的基础上阐述的，也不是象 [3] 里那样，在 Cauchy - Riemann 方程的基础上阐述的．

在 [A2] 里是推广到 Stein 空间上的．

亦见 **Cousin 问题**（Cousin problems）．关于 Poincaré 问题（在亚纯函数上），见 **Stein 空间**（Stein space）和**亚纯函数**（meromorphic function）．

参考文献

[A1] Henkin, G. M. and Letterer, J., Theory of functions on complex manifolds, Birkhauser, 1984（译自俄文）．

[A2] Grauert, H. and Remmert, R., Theory of Stein spaces, Springer, 1977（译自德文）．

[A3] Krantz, S. G., Function theory of several complex variables, Wiley, 1982.

[A4] Range, R. M., Holomorphic functions and integral representations in several complex variables, Springer, 1986, Chapt. VI, Par. 6.

郝钢新 译

Cartan - Weyl 基［**Cartan - Weyl basis**；**Картана - Вейля базис**］，有限维半单复 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的

$\mathfrak{g}$ 中由 $\mathfrak{g}$ 的一个 **Cartan 子代数**（Cartan subalgebra）$\mathfrak{t}$ 的元素和根向量 $X_\alpha (\alpha\in\Delta)$ 所组成的基，这里 Δ 是 $\mathfrak{g}$ 关于 $\mathfrak{t}$ 的非零根系．Cartan - Weyl 基的取法不是唯一的．作为 $\mathfrak{t}$ 上一个线性型，一个根 $\alpha(h)$，$h\in\mathfrak{t}$，与向量 $h_\alpha'\in\mathfrak{t}$ 这样地等同起来，使得 $d(h)=(h_\alpha, h)$，其中 (x, y) 是 $\mathfrak{g}$ 内的 **Killing 型**（Killing form）．在这里，对于每个 $h\in\mathfrak{t}$ 来说，

$$[h, X_\alpha] = (h_\alpha', h)X_\alpha .$$

如果 $\alpha\in\Delta$，则 $-\alpha\in\Delta$，根向量 X_α 可以如此选取，使得 $[X_\alpha, X_{-\alpha}]=h_\alpha'$．如果 $\alpha+\beta\in\Delta$，则

$$[X_\alpha, X_\beta] = N_{\alpha\beta}X_{\alpha+\beta},$$

这里 $N_{\alpha\beta}\neq 0$．如果 $\alpha, \beta, \gamma\in\Delta$，$\alpha+\beta+\gamma=0$，则 $N_{\alpha\beta}=N_{\beta\gamma}=N_{\gamma\alpha}$．存在向量 X_α 的一种正规化，使得 $N_{\alpha\beta}=-N_{-\alpha,-\beta}$，这里所得到的 $N_{\alpha\beta}$ 都是有理数．存在向量 X_α 的一种正规化，在这种正规化之下 $N_{\alpha\beta}$ 都是整数（见 **Chevalley 群**（Chevalley group））．Cartan - Weyl 基（由 H. Weyl 在 [1] 中引入的）的定义以及上面所提到的关于向量 X_α，h_α' 和数 $N_{\alpha\beta}$，可以逐字逐句地过渡到一个特征为零的域上任意有限维可裂半单 Lie 代数和它关于一个可裂 Cartan 子代数的根分解上．

参考文献

[1] Weyl, H., Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb - einfacher Gruppen durch lineare Transformationen I, *Math. Z*, **23**(1925), 271 - 309.

[2] Jacobson, N., Lie algebras, Interscience, 1962（中译本：N. 贾柯勃逊，李代数，上海科学技术出版社，1964）．

[3] Bourbaki, N., Elements de mathématique, Groupes et algèbre de Lie, Actualités Sci. Ind., Hermann, 1960, 1968（英译本：Bourbaki, N., Elements of mathematics, Lie groups and Lie algebras, Addison - Wesley, 1975）．

Д. П. Желобенко 撰

【补注】 关于 Chevalley 基（Chevalley basis）的特殊情形的描述，亦见**半单 Lie 代数**（Lie algebra, semi - simple）．

参考文献

[A1] Serre, J.-P., Algèbres de Lie semi - simples complexes, Benjamin, 1966.

[A2] Humphreys, J. E., Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer, 1972（中译本：J. E. 汉弗莱斯李代数及其表示理论导引，上海科学技术出版社，1981）．

[A3] Carter, R., Simple groups of Lie type, Wiley, 1972.

郝钢新 译

Carter 子群［**Carter subgroup**；**Картера подгруппа**］

群与其正规化子重合的幂零子群．是由 R. Carter（[1]）引进的．任意有限可解群 G 具有 Carter 子群，且 G 的所有 Carter 子群皆共轭（Carter 定理（Carter's theorem））．

参考文献

[1] Carter, R. W, Nilpotent selfnormalizing subgroups of soluble groups, *Math. Z.*, **75** (1961), 2, 136 - 139.

[2] Кострикин, А. И., Конечная группа, Итоги науки. Алгебра. 1964, М., 1966, 23 - 24.

Н. Н. Вильямс 撰

【补注】 没有 Carter 子群的非可解群的一个例子是 5 阶交错群 A_5．

有限可解群的任何 Carter 子群是极大幂零子群．

参考文献

[A1] Huppert, B., Endliche Gruppen, 1, Springer, 1979.

石生明译 许以超校

Descartes 坐标 [Cartesian coordinates; Декартовы координаты]

用平面上的点到两个固定的相互垂直的直线(轴)的两个距离来确定点的位置的方法．坐标概念在两千多年前的 Archimedes 和 Apollonius 的著作中，甚至在古代埃及人的著作中就已经出现．R. Descartes 和 P. Fermat 首先系统地发展了这种思想，但是在他们的表述中，距离仅取正值或零．使一个距离或两个距离取负值的想法是 J. Newton 提出的．G. Leibniz 首先把这些距离称为"坐标"．见 **Descartes 直角坐标系** (Cartesian orthogonal coordinate system)．

М. И. Войцеховский 撰 张鸿林 译

Descartes 因子分解 [Cartesian factorization; Декартово разложение]，*拓扑中的*

空间分成拓扑积的因子分解．关于非平凡 Descartes 因子分解的一个重要问题涉及立方 I^n 和 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$．例如，如果空间 M 是从 $\mathbf{R}^m(3\leq m<n)$ 通过粘合 $\pi_1(\mathbf{R}^m\setminus l)\neq 1$ 的弧 $l\subset\mathbf{R}^m$ 上的点(见**非驯嵌入** (wild imbedding))而得到的，则 $M\times\mathbf{R}=\mathbf{R}^{m+1}$，且 $M\times M=\mathbf{R}^{2m}$．任何光滑紧可缩流形 M^m 是 $I^n(n>m)$ 的一个因子．$I^n(n<4)$ 的任何因子是 I^m $(m<n)$．

参考文献

[1] Itogi Nauk. Algebra. Topol. Geom. 1965 (1967), 227, 243.

А. В. Чернавский 撰

【补注】 另一个著名的例子是 3 维 Euclid 空间中，Bing 的"犬骨状"分解，它与直线的乘积同胚于 4 维 Euclid 空间．

参考文献

[A1] Bing, R. H., The cartesian product of a certain non-manifold and a line is E_4, *Ann. of Math.*, **70** (1959), 399–412.

[A2] Daverman, R. J., Decompositions of manifolds, Acad. Press, 1986.

徐定宥、罗嵩龄、许依群 译

Descartes 直角坐标系 [Cartesian orthogonal coordinate system; Декартова прямоугольная система координат] *标准正交的*

Euclid 空间中的直线坐标系．

在平面上，Descartes 直角坐标系由两条相互垂直的直线——坐标轴(coordinate axes)来确定，在每一个坐标轴上都指定了正方向和单位长的线段．两个坐标轴的交点(O)称为坐标原点(coordinate origin)．一个坐标轴(Ox)称为横轴(abscissa axis)，另一个坐标轴(Oy)称为纵轴(ordinate axis)，两坐标轴把平面分成四个相等的区域，它们称为象限(quarters 或 quatrants)．

点 M 的 Descartes 直角坐标(Cartesian rectangular coordinates)由有序实数对(x,y)来表示，其中第一个数(横坐标(abscissa)等于有向线段 OM 在横轴上的正射影，第二个数(纵坐标(ordinate)是有向线段 OM 在纵轴上的正射影．

三维空间中的 Descartes 直角坐标系的建立和平面情况是类似的：由横坐标轴、纵坐标轴和竖轴(applicate axis)以及坐标原点 O 来定义．通过两个坐标轴的平面称为坐标平面(coordinate plane)．三个坐标平面把空间分成八个相等的区域——卦限(octants)．

有时也采用(一般) Descartes 斜角坐标系(Cartesian skewangled (general) coordinate system)，它与直角坐标系的差别在于坐标轴之间的夹角不一定是直角．

直线坐标方法是 R. Descartes 引入的([1])，因而得名．

参考文献

[1] Descartes, R., Geometria, Leiden, 1646.

А. В. Иванов 撰 张鸿林 译

Descartes 积 [Cartesian product; Декартово произведение]

同完全直积 (direct product)．

Descartes 正方形 [Cartesian square; Декартов квадрат]，上泛正方形(co-universal square)，拉回正方形(pull-back square)，*在范畴中的*

图

$$\begin{array}{ccc} A\prod_S B & \xrightarrow{p_A} & A \\ p_B\downarrow & & \downarrow\alpha \\ B & \xrightarrow[\beta]{} & S. \end{array}$$

此处 $A\prod_S B$(有时也用记号 $A\times_S B$)是对象 A 与 B 的纤维积，它与

$$\begin{array}{ccc} & & A \\ & & \downarrow\alpha \\ B & \xrightarrow[\beta]{} & S \end{array}$$

相关联，而 p_A 与 p_B 都是典范射影．图

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\delta} & A \\ \gamma\downarrow & & \downarrow\alpha \\ B & \xrightarrow[\beta]{} & S \end{array}$$

是一个 Descartes 正方形当且仅当它是可交换的，且对任何一对态射 $\mu: V\to A$, $\nu: V\to B$ 当 $\alpha\mu=\beta\nu$ 时必有唯一的态射 $\lambda: V\to P$，满足条件 $\mu=\delta\lambda$, $\nu=\gamma\lambda$．

参考文献

[1] Bucur, I. and Deleanu, A., Introduction to the theory of categories and functors, Wiley, 1968.

O. A. Иванова 撰 周伯埙 译

制图投影 [**cartographic projection** ; **картографическая проекция**], 地图投影(map projection)

整个地球椭球或其一部分在平面上的映象. 通常, 这一映象是为绘制地图的目的而实现的.

地图投影用一定的比例尺绘制. 通过将理想地球椭球缩小 M 倍, 即得到它的几何模型——地球仪, 而以真实尺寸将其映象到平面上, 即给出这一椭球的表面的地图. 比值 $1:M$ 决定了地图的主比例尺 (principal scale). 但是, 在地图上任一点上制图投影的基本特征是实际比例尺 (actual scale) μ. 这是地球椭球上的无穷小面元 dS 与其在平面映象 $d\sigma$ 之比的倒数: $1/\mu = dS/d\sigma$. 数 μ 依赖于该点在椭球上的位置, 并依赖于所选中的面元的方向. 比值 μ/M 称为相对比例尺 (relative scale) 或长度增加, 而差值 $(\mu/M)-1$ 称为长度变形 (linear deformation). 主比例尺的数值 M 只是在计算制图投影的点的坐标以及在用地图时加以估计; 在研究制图投影学时一般设 $M=1$.

在制图投影学中经常局限于讨论半径为 R 的球对平面的映射, 此球与地球椭球的差别或可以忽略或用某种方法加以考虑. 因此, 以下将讨论以地理坐标 φ(纬度)及 λ(经度) 代表的球面向平面 xOy 的映射.

制图投影学方程有如下形式

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(\varphi, \lambda), \\ y &= f_2(\varphi, \lambda), \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

其中 f_1 与 f_2 是满足某些一般条件的函数. (制图投影学也可以用某些不同的平面坐标而不是直角坐标 x, y 的方程定义.) 在所讨论的制图投影中经线 $\lambda=$ 常数与纬线 $\varphi=$ 常数的映象构成了制图网格 (cartographic network) (或称网格图 (graticule)).

在绘制包括地理南北极的区域时, 有时不采用地理坐标而采用其他坐标, 这时南北极点变为坐标系的普通点. 譬如, 采用坐标线为所谓竖直线(其上条件经度 $a=$ 常数) 和横直线(其上极距 $z=$ 常数) 的球坐标, 与地理经线和纬线类似, 但其极点 $z_0(\varphi_0, \lambda_0)$ 与地理极点 P_0 不符(图 1). 由式(*)给出的任何制图投影称为法向的 (normal) 或正则的 (regular) $(\varphi_0=\pi/2)$. 如果地球的投影按照式(*)计算, 但其中代替 φ, λ 用 z, a 为参量, 则当 $\varphi_0=0$ 时这一投影称为横向 (transverse) 投影, 如果 $0<\varphi_0<\pi/2$, 则称为斜向 (oblique) 投影. 在图 2 中给出地球的法向 (A), 横向 (B) 和斜向 (C) 正视投影.

在投影某点附近无穷小区域的畸变服从某些一般规律. 在由非保角投影(见后)绘制的地图的任何点上, 存在两个互相垂直的方向——与其相对应在被映象的表面上也有互相垂直的方向——所谓映象的主方向. 沿这两个方向的比例尺具有极值

$$\mu_{\max}=a \text{ 及 } \mu_{\min}=b.$$

如果在某一制图投影中经线与纬线的图形是以直角相交的, 那么它们的方向亦即此制图投影的主方向. 在制图投影一点上长度的变形由畸变椭圆 (ellipse of distortion) 明显地表示出来, 此椭圆与被映象表面相应点周围绘出的无穷小圆周图形相对应并有相同的方位. 此椭圆的半径数值上等于该点在相应方向上的相对比例尺, 椭圆的半轴等于极值比例尺, 而它们的方向为主方向.

在共形 (conformal) (或等角 (equiangular)) 地图投影中, 比例尺只依赖于点的位置而不依赖于方向. 畸变椭圆为圆. 例: Mercator 投影, 球面投影, 等角锥面投影等(见图 3A, 5A, 4A).

在等面积 (equal-area) (或等价 (equivalent)) 地图投影中面积保持不变; 精确些说, 如此投影下地图上的面积或图形与原本图形的面积成比例. 等于地图的主比例尺平方的倒数的等面积系数对于由等面积投影而成的地图是一常数. 畸变椭圆在所有点上具有同样的面积, 而其形状和方位不同(例如, 见图 3C, 4C, 5C). 有些地图投影(例如, 见图 7)既非共形的, 又非等面积的. 它们称为任意的. 其中所谓等距投影 (equidistant projection) 给出一点或两点与每一其他点的、或沿每一子午线的真实距离(见 3B, 4B, 5B), 而大圆 (orthodromic) 投影中球的大圆由直线表示.

将一球形投影到平面上时, 等角、等面积、等距和大圆诸性质是不相容的.

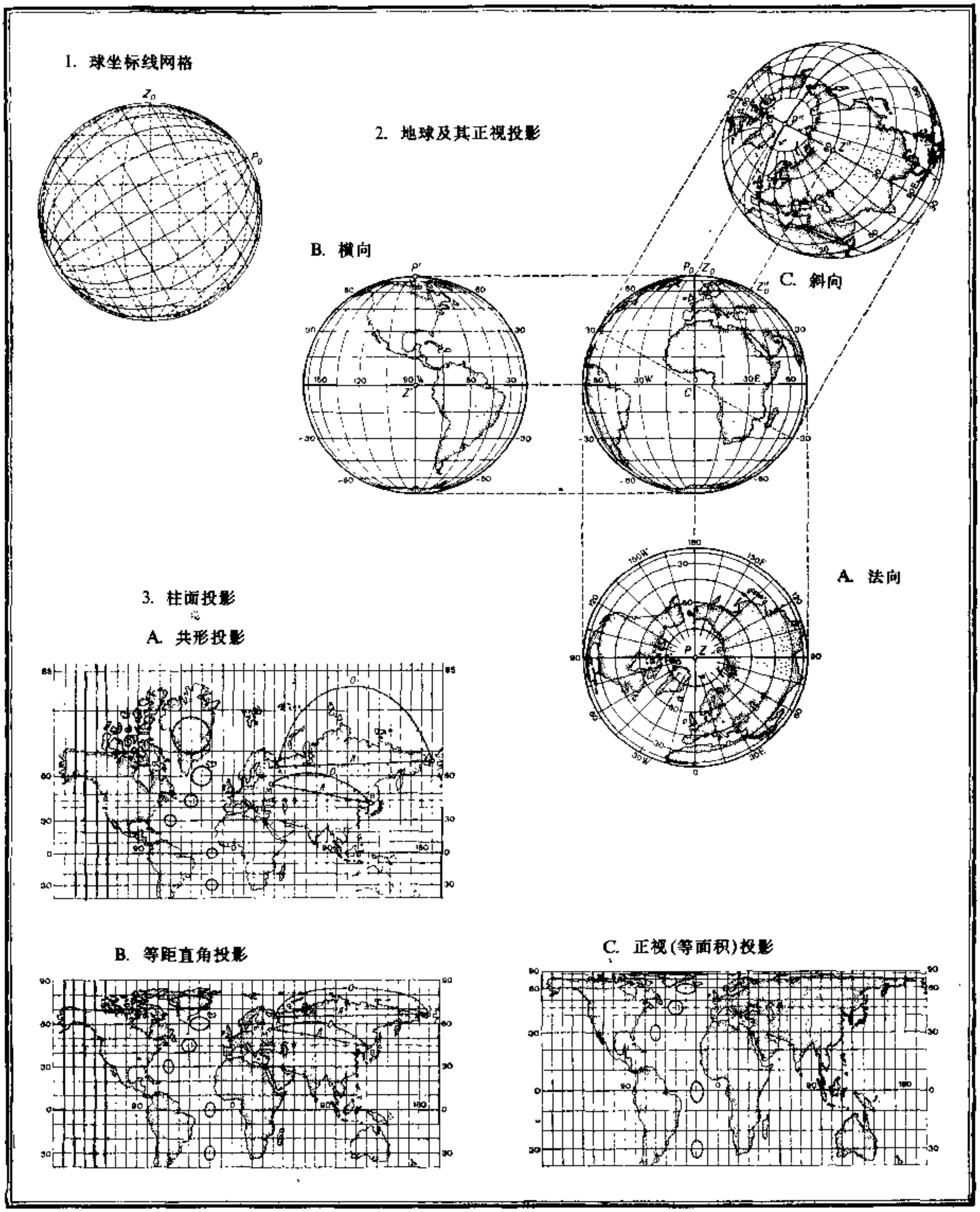
为了描述一个被绘制区域中不同位置上的畸变, 一般利用畸变椭圆(例如, 见图 3, 4); 等倾线 (isoclines), 即相等畸变线(如在图 8C 中可见最大角时变等倾线和面积变化等倾线); 某些球面线通常是大圆的映象 "O", 以及子午线上斜驶线的等角轨线 "L" (例如, 见图 3A, 3B).

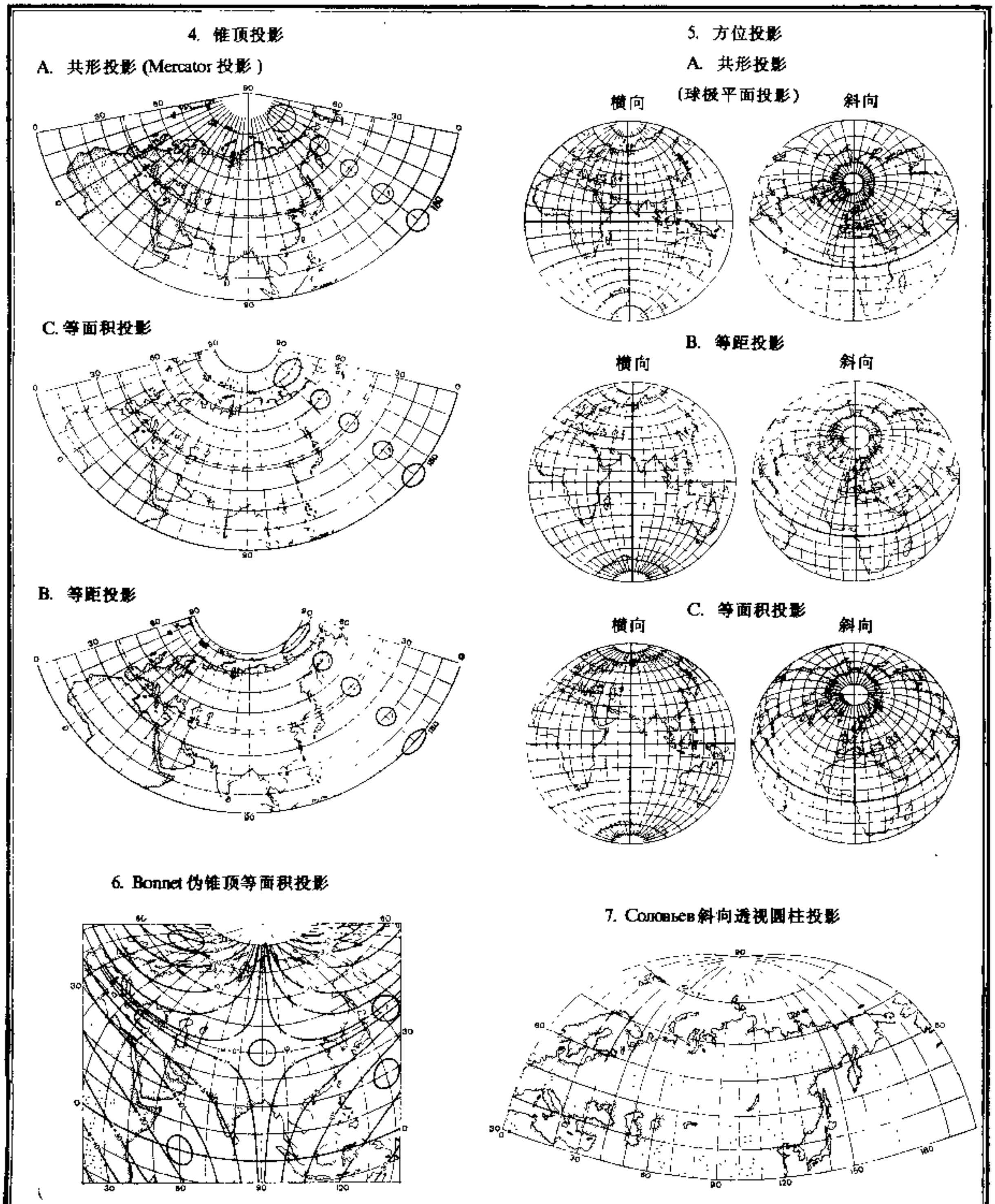
根据制图网格的外观, 地图投影分为以下几组:

柱面投影 (cylindrical projections)——子午线由等距平行直线所表示, 而纬线为与子午线垂直的直线(见图 3).

锥顶投影 (conical projections)——纬线由同心圆所表示, 而子午线由与之垂直的直线所表示, 其间的夹角正比于相应的经度差(见图 4).

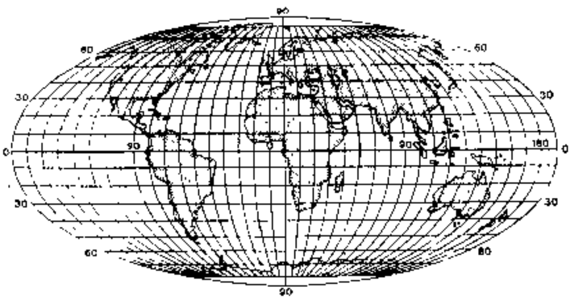
方位投影 (azimuthal projections)——纬线由同心圆所表示, 而子午线由它们的半径表示, 其间的夹


1. 球坐标线网格
2. 地球及其正视投影
B. 横向
C. 斜向
A. 法向
3. 柱面投影
A. 共形投影
B. 等距直角投影
C. 正视(等面积)投影


4. 锥顶投影
A. 共形投影 (Mercator 投影)
C. 等面积投影
B. 等距投影
5. 方位投影
A. 共形投影
横向
(球极平面投影)
斜向
B. 等距投影
横向
斜向
C. 等面积投影
横向
斜向
6. Bonnet 伪锥顶等面积投影
7. Соловьев斜向透视圆柱投影

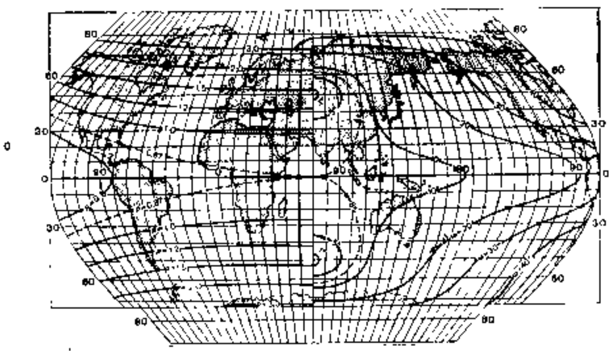
8. 伪柱面投影

A. Mollweide 等面积投影



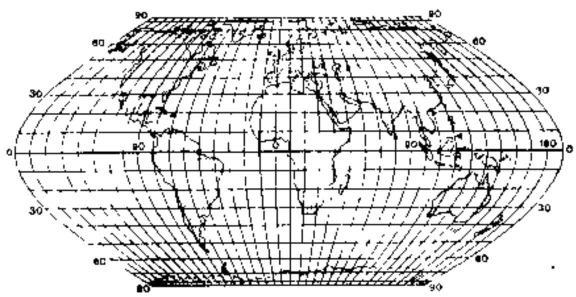
经线图形为椭圆．纬度 $\varphi=\pm40.7^{\circ}$ 的纬线上尺度不变

C. Znieg 与 Co 任意投影



尺度沿赤道及所有经线保持不变

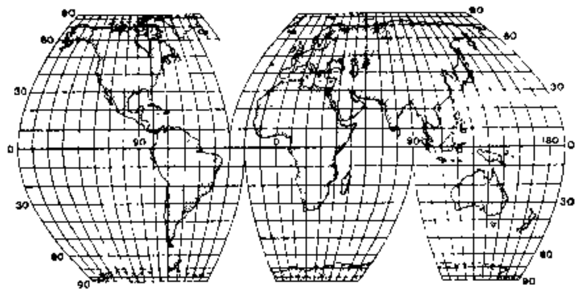
B. В. В. Каврайский 等面积正弦投影



经线图形为正弦曲线、

纬度 $\varphi=\pm46.5^{\circ}$ 的纬线上尺度不变

D. БСАМ投影

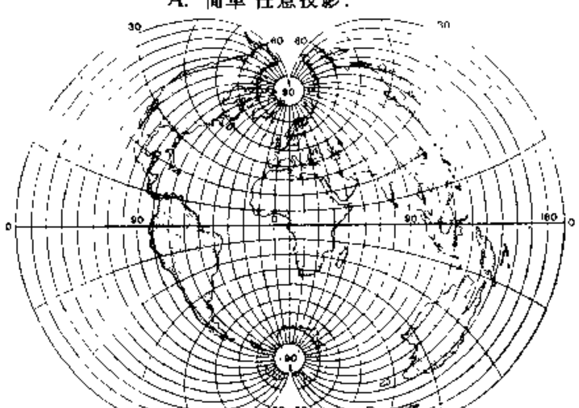


利用 Good 投影法允许大洋位置有图形断裂

以使陆地上畸变最小

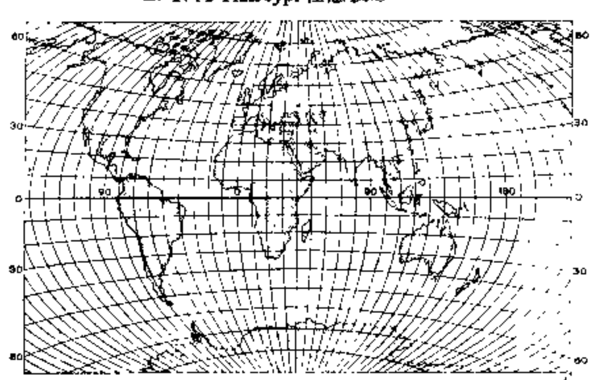
9. 多锥顶投影

A. 简单 任意投影．



尺度沿所有纬线及中心经线保持不变

B. Г. А. Гинзбург 任意投影



纬度 $\varphi=\pm45^{\circ}$ 的纬线上

尺度不变

角等于相应的经度差(见图 5).

伪锥顶投影(pseudo - conical projections)——纬线由同心圆所表示，中央子午线由一直线表示，而其余子午线由相对于中央子午线映象为对称的曲线所表示(例如见图 6).

伪柱面投影(pseudo - cylindrical projections)——纬线由平行直线表示，中央子午线由一与它们垂直的直线表示 其余子午线由曲线表示(见图 8).

多锥顶投影(poly - conical projections)——纬线由圆心位于代表中央子午线的直线上的圆所表示，而其他子午线由对此直线对称的曲线所表示(见图 9). 在构成具体的多锥投影时，要附加另外的条件.

还有不属于以上各种类型的投影. 柱面、锥顶和方位投影称为最简单投影，常常划归为广义的圆投影，而从中单独划分出狭义的圆投影，即所有子午线和纬线均由圆来表示的投影.

有关制图投影学的利用、选择、性质研究和变换见**制图学中的数学问题** (cartography, mathematical problems in) 及所引文献. Г. А. Мещеряков 撰

【补注】 有关地图投影学的一些注释:

8B. B. B. Каврайский 的等面积投影与 Eckert Ⅵ 投影几乎全同. 极为赤道长度的一半; 子午线为正弦曲线.

8D. БСАМ 投影. БСАМ 是 Большой Советский Атлас Мира (《苏联世界地图集》)的缩写，最早于1937年出版. 在该地图集中称此地给出的投影为分瓣正弦投影(interrupted sinusoidal projection).

9B. 俄国人为减少靠近方格图边缘的子午线的比例夸张对多锥顶投影作了各种修正.

畸变椭圆还称为 Tissot 指标线(Tissot indicatrix) (亦见**制图学中的数学问题**)以纪念 N. A. Tissot，他在 1859 年首先发表了在地图投影中产生畸变的经典分析.

斜驶线(loxodrome 或 rumb line)是球面上常值方向线. 关于大圆见**制图学中的数学问题**.

参考文献

[A1] Snyder, J. P., Map projections - a working manual, U. S. Geol. Survey, 1393, U. S. Government Printing Office 1987.

沈 青 译

制图学中的数学问题[cartography, mathematical problems in; картографии математические задачи]

在建立地理学的及特殊的地图的数学基础时，即在发展**制图投影**(cartographic projection)(也称地图投影(map projection))理论，研究其性质、变换、勘测方法时产生的问题. 这时或设地球表面为球形，或设为旋转椭球.

数学制图学中研究的基本对象是制图投影学: 将地椭球(地球)整个表面或某一部分投射到平面上:

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(u,v), \\ y &= f_2(u,v), \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

其中 u, v 是点 $P\in\Delta$(Δ—— 椭球面的单连通域)的纬度和经度; x, y 在平面上定义点 Q —— 点 P 的映象，$Q\in D$, D —— Δ映象区. 函数 f_1 与 f_2 满足以下条件: 单值，两次连续可微，有不为零的 Jacobi 式 $h=\partial(x,y)/\partial(u,v)\neq 0$(对于在大地测量学和制图学中所应用的保持方位不变的映射，$h>0$). 数学制图学的大部分事实不只与椭球向平面的映射有关，而且适用于任意表面的映射，因此以后将制图投影(1)理解为 $\Delta\subset S_1$ 向 $D\subset S_2$ 的映射，其中

$$\begin{aligned} S_1: ds^2 &= \lambda_1^2(u,v)[du^2+dv^2]; \\ S_2: d\sigma^2 &= \lambda_2^2(x,y)[dx^2+dy^2] \end{aligned} \qquad (2)$$

为任意的正则表面; Δ 与 D 是单连通区域，ds, $d\sigma$ 为表面上相应的线元. 之所以选择这样的坐标系，除了在其中线元的表述简单以及以后计算中利用它们方便外，还因为，从表面上任意曲线坐标转变到它们，直接给出表面向平面的共形映射(见[6], [3]). 这种坐标有时甚至在任意表面上称为地图坐标(见[9]); 在大地测量学和制图学中，它们称为等度量坐标.

知道由 S_1 向 S_2 映射的方程(1)使我们可以研究映射的度量性质(见 [7], [2])，即求得它的特性: 映射比例 $\mu=d\sigma/ds$, $\mu=\mu(u,v,\alpha)$. 其中包括沿坐标线的比例尺 $m=\mu|_{v-常数}$, $n=\mu|_{u-常数}$:

$$m^2 = \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}(x_u^2+y_u^2),$$

$$n^2 = \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}(x_v^2+y_v^2);$$

映象在线 u 方向上的转角 ψ 及其在线 v 上的转角 χ:

$$\tan\psi = \frac{y_u}{x_u},$$

$$\tan\chi = \frac{y_v}{x_v};$$

此二线的映象间的交角 θ:

$$\theta = \chi - \psi;$$

角畸变:

$$\varepsilon = \theta - \frac{\pi}{2};$$

面积比例尺:

$$p = \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}h;$$

最大角畸变 ω 由下式给出:

$$\sin\frac{\omega}{2} = \frac{|a-b|}{a+b},$$

其中 a 和 b 是相对比例尺

$$a = \left(\frac{\mu}{M}\right)_{\max},$$

$$b = \left(\frac{\mu}{M}\right)_{\min},$$

而 M 是椭球被缩小的因子. 相对比例尺相应于在 S_1 和 S_2 上均为正交的主方向, 并与 m, n 及 θ 由 Apollonius 定理相关联:

$$a^2+b^2 = m^2+n^2,$$

$$ab = mn\sin\theta = p.$$

取 A_0 为任意点处的方向, α_0 为这一方向的映象, 我们有

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{2f}{e-g}$$

(其中 $e=x_u^2+y_u^2$, $f=x_u x_v+y_u y_v$, $g=x_v^2+y_v^2$), 而

$$\tan A_0 = \frac{b}{a}\tan\alpha_0.$$

与此相关的是映射的 Tissot 指示线, 即畸变椭圆 $\{a, b, A_0, \psi\}$, 这是点 Q 处与 S_2 相切平面上的椭圆, 此椭圆与如下无穷小椭圆(映象的主部)相似并有相同的方位: 它精确到 $o(\rho)$ 为点 P 处与 S_1 相切的平面上的半径为无穷小的 ρ 的圆的映象. 以上由相互映射表面(2)的头几个二次型及映射函数(1)的一阶偏导数表达的特征量中, 独立的只有四个. 独立特征量组的选择不是唯一的, 有时取 $\{m, n, \psi, \theta\}$ 代替 $\{a, b, A_0, \psi\}$.

按照畸变的性质将制图投影区分为以下的投影: a) 共形的 (conformal) 或等角的 (equiangular) ($m=n$, $\theta=\pi/2$); b) 等价的 (equivalent) 或等面积的 (equal-area) ($p=1$); c) 等距的 (equidistant) 或等间隔的 (equal-spaced) ($a=1$ 或 $b=1$); d) 测地的 (geodesic), 在制图学中称为大圆的 (orthodromic) (大圆为球面上的最短线或测地线), 其中 S_1 上的最短线转变为 S_2 上的最短线; 等等. 进行同时具有以上性质中的至少两个的投影, 只有在将一表面映射到与之等度量的表面上时, 以及在其他一些简单情况下才是可能的. 由于共形性质和等面积性条件对于制图学目的是互不相容的, 所以对制图学来说等距投影具有特殊的意义, 此投影按照畸变特性占据投影 a) 与 b) 间的中间地位. 选择地图投影的个别总合通常是通过指出这些投影的固有性质, 譬如像 a) – c), 即给出它们的特征方程, 而后者藉助于畸变理论容易转换为一阶偏微分方程. 由两个这样方程组成的具体方程组的解的集合描述一个特定的投影类 (class of projections). 根据这些方程的类型给投影以一定的类型(椭圆、双曲型, 等等).

以上给出的畸变理论的公式使我们可以合适地选择为一定目的所需要的投影: 通过一定方法建立方程(1) (例如, 通过在平面上给出椭球的坐标线的映象, 并且可能还利用像共形或等价性等附加条件)后, 我们就可以研究基于这些公式的映象, 并且通过改变它的参数选择最适合的投影来绘制给定区域 $\Delta\subset S_1$ 的地图. 除去这种正问题的解法外, 还采用其他方法(几何方法, 图形-解析方法, 等等).

制图学的反问题是在事先给定投影的畸变的基础上来找到投影(见[11]). 这里所要求的投影存在与否的问题是最重要的. 这一问题的回答由表面映象理论中的基本方程组所给出(见[4]):

$$\left.\begin{aligned} m_v^* - n_u^*\cos\theta + \psi_u n^*\sin\theta + \theta_u n^*\sin\theta &= 0, \\ \psi_v m^* - n_u^*\sin\theta - \psi_u n^*\cos\theta - \theta_u n^*\cos\theta &= 0, \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

其中

$$m^* = \frac{\lambda_1(u,v)}{\lambda_2(x,y)}m,$$

$$n^* = \frac{\lambda_1(u,v)}{\lambda_2(x,y)}n.$$

对于由一表面映射到一平面, $\lambda_2(x,y)\equiv 1$, 而对于由一平面区映射到另一平面区, 还有 $\lambda_1(u,v)\equiv 1$. 方程组(3)是不确定的: 映象的四个独立特征量由它的两个方程关联起来; 使方程组确定和解释方程组的各种方法使得有各种利用此方程组的可能性. 方程组(3)相对于任何一对特征量都是准线性的. 以下两定理成立:

定理 1. 由在 Δ 中具有常符号 Jacobi 式, 单值, 二次连续可微函数(1)的集合给出的区域 $\Delta\subset S_1$ 向区域 $D\subset S_2$ 的映象的特征量 m, n, ψ, θ 在区域 Δ 中所有点上满足(3).

定理 2. 令 Δ 为在一给定正则曲线上的一个单连通区域, 并令 $\varphi_i=\varphi_i(u,v)$ 为四个在 Δ 中定义并连续的给定函数, 且其一阶偏导数亦有定义且连续, 这些函数在属于如下四维平行六面体的单连通域 Π 中取值

$$\{0<\varphi_1<k_1;\ 0<\varphi_2<k_2;\ k_i=\text{常数},\ i=1,2;\ -\pi<\varphi_3\leqslant\pi;\ 0<\varphi_4<\pi\}.$$

如果这些函数取为 $\Delta\subset S_1$ 向平面的某一映射的特征量

$$m=\varphi_1,\ n=\varphi_2,\ \psi=\varphi_3,\ \theta=\varphi_4,$$

且它们在整个 Δ 满足(3), 那么根据它们建立起来的 $\Delta\subset S_1$ 向平面 xOy 的某一区域 D 的映射是同拓扑的, 两次连续可微的, 在 Δ 中具有大于零的 Jacobi 式 $h>0$,

并将任意点 $(u_0, v_0) \in \Delta$ 转变为平面 xOy 上的给定点 (x_0, y_0).

定理 2 给出了特征量的一定分布下表面 S_1 的单连通区 Δ 向平面 S_2 的区域 D 映射存在的条件，此时一个内点 (u_0, v_0) 要对应于平面上自己的映象 (x_0, y_0)；区域 D 的边界是未知的．映象区域是未知的对于制图学数学问题是有代表性的：映象区域在建立映射函数 (1) 以后被确定，或者应该在附加条件 —— 例如投影中畸变最小的条件 —— 的基础上而得到．

在球面向平面映射时，方程组 (3) 转变为所谓的 Euler - Урмаев 方程组 (Euler - Urmaev system) (见[5], [11])，而在映射平面区域时，此时有以特征值表达的映射方程组使方程组 (3) 被完全确定，它因此给出拟共形映射的导出方程组 (见[12])．将表面的映射归结为平面区域的拟共形映射 (只有有限的畸变) 是十分自然的．前者，即给定区域 $\Delta \subset S_1$ 向给定区域 $D \subset S_2$ 的映射 (1)，可以解释为"三重"投影：区域 $\Delta \subset S_1$ 共形地映射到平面 uOv 的区域 $\tilde{\Delta}$，区域 $D \subset S_2$ 共形地映射到平面 xOy 的区域 $\tilde{D}$；平面 uOv 的区域 $\tilde{\Delta}$ 拟共形地转变为平面 xOy 的区域 $\tilde{D}$．伴随 $\Delta \subset S_1$ 向 $D \subset S_2$ 映射的 $\tilde{\Delta}$ 向 $\tilde{D}$ 的平面区域拟共形映射具有如下的特征量：$V = m^*$，$\alpha = \psi$，$W = n^* \sin\theta$，角 θ 的意义与前同．所讨论的映射间的联系使得有可能 (见[4]) 在制图数学问题中利用平面区域拟共形映射理论．这时制图投影任何类别的方程组，或者更一般地，任何形如

$$F_i(u, v, x_u, x_v, y_u, y_v) = 0, \quad i = 1, 2 \qquad (4)$$

的非线性微分方程组，在将其写为特征值表达的形式

$$J_i(u, v, m^*, n^*, \psi, \theta) = 0, \quad i = 1, 2 \qquad (5)$$

后，均可简化为拟线性方程组，它们由方程组 (3) 在附加方程组 (5) 以使其确定后导出，并视为原始方程组 (4) 的导出方程组．不过，这两个方程组 —— 原始方程组与导出方程组 —— 的类型间的关系的问题尚未解决．

平面区域 (具有两对特征值的) 拟共形映射这一工具可以用来做为制图投影的仪器 (藉助机械的、光学的、电学的以及其他设备) 转换的理论基础，更准确些说，用来进行两个给定的单连通平面区域的互相转换，其中每一个均为地椭球在同一区域的地图投影的结果，只不过投影法不同而已．

制图学 (在绘制小比例尺及部分中比例尺地图的领域) 的基本任务之一是最佳的制图投影问题，即找到表面 S 的给定区域 Δ 向平面的这样的映射，其中的畸变 (在某种事先约定的意义上) 为最小 (见[2])．制图投影是否优良的最常用的判别准则是以下几种：

Airy 准则 (Airy criterion)：

$$\Phi_A = \int_\Delta \varepsilon_E^2 \, d\Delta, \quad \varepsilon_A^2 = \frac{1}{2}[(a-1)^2 + (b-1)^2];$$

Jordan 准则 (Jordan criterion)：

$$\Phi_J = \int_\Delta \varepsilon_J^2 \, d\Delta, \quad \varepsilon_J^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\mu - 1)^2 \, d\alpha;$$

Airy - Каврайский 准则 (Airy - Kavraĭskiĭ criterion)：

$$\Phi_{A-K} = \int_\Delta \varepsilon_{E-K}^2 \, d\Delta, \quad \varepsilon_{A-K}^2 = \frac{1}{2}(\ln^2 a + \ln^2 b);$$

Jordan - Каврайский 准则 (Jordan - Kavraĭskiĭ criterion)：

$$\Phi_{J-K} = \int_\Delta \varepsilon_{J-K}^2 \, d\Delta, \quad \varepsilon_{J-K}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^2 \mu \, d\alpha$$

(以上均为变分类型)，以及

Чебышев 准则 (Chebyshev criterion) (这是极值类型的判据)，根据此判据一个投影的质量或由量

$$\delta = \frac{\sup a|_\Delta}{\inf b|_\Delta}$$

的大小，或由其对数或由映射地表范围的比例尺对数的最大模值估价．相应于在建立投影时利用哪一种判据，区分变分与极小类型的最佳投影．这样，建立最佳投影问题就在于，对于表面 S 的给定单连通域 Δ，要求寻找到 (在上列函数 Φ 或量 δ 之一为最小的条件下) Δ 向平面的投影，如果是从整个集合 (1) 中寻找，则这种投影称为理想的 (ideal)，如果是从其某个子集中 (譬如，从相应于某类型的方程组 (4) 的解所描述的这类投影中) 寻找，则这种投影称为该子集 (类型) 的最佳 (best) 投影．对于每一个这样的问题，都应研究问题提法的正确性．

对于截球面 (由小圆圆周为界的球面区域) 根据 Чебышев 判据理想投影 (见[2], [13]) 是 Postel 等间距投影；最佳保角投影是球极平面投影 (见[8])；最佳等价投影是 Lamber 等面积投影 (见[2])．在变分判据的基础上，G.B.Airy (见[14]) 计算出了截球形的最佳方位投影．对于球面梯形 —— 以两条经线和两条纬线为界的球面区 —— 及 (在某种意义上) 接近球面梯形的区域，在地图绘制时采用锥顶投影 (conical projection)．

在用来绘制球面梯形的这些投影中，已知极值类型的最佳投影 (Марков 投影，见[10])，以及 (同样类型的) 最佳共形及等价投影 (见[2])．制定了建立按照 Airy 判据为最佳的锥顶 (共形的、等价的、等间距的) 投影的一般方法，用于绘制任意轮廓线的单连通区域 (见[15], [2])．但是对于以共形投影将球面梯形映射到平面的情况，以用根据 Чебышев - Граве 定理 (Chebyshev-Grave theorem) (见[8], [9]) 计算出的 (见[9], [11]) 投影给出的比例尺对数的振荡最小．根据此定理，为使

具有同一符号的总曲率的表面 S 的单连通域 Δ 向平面的共形投影($m=n, \varepsilon=0$)的比例尺对数与零的偏离为最小，必要和充分条件是在被映射地域的轮廓线上比例尺为常值．满足这定理的条件的共形投影称为 Чебышев 投影(Chebyshev projections)．它们具有许多有利的性质(对于它们有 $(\sup\mu|_\Delta)/(\inf\mu|_\Delta)=\min$，$\Phi_{J-K}=\min$，表面 S 测地线映象的平均曲率为最小，$\max_\Delta|\ln p|=\min$)，因而在实践中它们是很有价值的．П. Л. Чебышев 解决了对于 $\Delta\subset S$ 寻找到最小面积畸变的共形投影的问题，即寻求最接近等价投影的共形投影的问题．

反问题也是重要的：在所有将区域 $\Delta\subset S$ 向平面映射的等价投影中找出形状失真最小的投影．解决这一问题的一个方法是这样的．由于这两种投影集合具有不同的基数(保角投影集由两个偏微分方程 $m=n$，$\varepsilon=0$ 所描述，而对于等价投影集只有一个偏微分方程 $mn\cos\varepsilon=1$)，首先从等价投影的总和中区分出某类与共形投影相接近的投影，然后再在其中寻求形状失真最小的投影．在经典遗产中已有一类这样的投影，即 Euler 投影：$p=1$，$\varepsilon=0$ (见[5])；如今建议了接近于共形投影的等价投影的其他类别，例如如下类别：$p=1$，$(m-n)+k\varepsilon=0$，$k=k(u,v)$ 是类别参数(见[4])．

对于上述及其他新类别制图投影的研究，以及对于极值类型最佳投影的寻求，导致了条件极值问题的提出(见[16])．这种问题的实质在于，对于应在给定区域 Δ 求得解答的已知偏微分方程组，要求确定出附加条件(边值的、初值的等等)有时还要确定出这些条件应与之关联的曲线的形状，使得在带着这些条件积分方程组时，它在区域 Δ 中的解答之一与零的偏离最小．对于这类问题的研究只知道有基于微分方程解的臆断估价法的个别的情况．对于椭圆型方程组所得到的结果是将 Чебышев - Граве 定理推广到两个新的投影类别：由特征值方程组 $n=km$，$\varepsilon=0$，$k=\text{const}>0$ 所描述的类别(见[17])，和 $m=n^c$，$\varepsilon=0$，$c=\text{const}>0$ 类别(见[19])．对于描述 Euler 投影的双曲方程组，用特征线方法建立了经线上(见[16])及纬线上(见[18])的这样的初始条件，使得方程组的解中的一个(比例尺对数)在初值影响区与零的偏离为最小．Чебышев 定理这一类比的制图学含义是：Cauchy 数据的"携带者"应该是共形线，即其上的比例尺为1．当在经线上给定初始条件时，这一结果对于更广泛类别的投影 $m=n^c$，$\varepsilon=0$，$c=\text{const}$ 也成立(见[19])．还研究了对于给定球面梯形的 Euler 投影的情况，在利用了能量积分而考虑混合问题时，建立了初始条件(对于梯形的南面)和边界条件(在其边界经线的弧上)，使得在这区域中得以找到变分类型的最佳 Euler 投影：在区域的上述三个边上比例尺应等于 1(见[20])．对于任意区域 $\Delta\subset S$ 寻求最佳变分类型投影的一般方法归结为求解带自由边界的变分问题(见[4])．

参考文献

[1] Итоги науки и техники. Картография. т. 7, М., 1976, 45－57.

[2] Каврайский, В. В., Избр. труды, т. 2, в. 1－3, М., 1958－1960.

[3] Каган, В. Ф., Основы теории поверхностей…, ч. 1－2, М.-Л., 1947－1948.

[4] Мещеряков, Г. А., Теоретические основы математической картографии. М., 1968.

[5] Эйлер, Л., Избр. картографические статьи, М., 1959 (译自德文).

[6] Гаусс, К. Ф., Избр. геодезические соч., т. 2, М., 1958.

[7] Тиссо, М. А., Изображение одной поверхности на другой и составление географических карт, М., 1899 (译自法文).

[8] Чебышев, П. Л., Соч., т. 1, СПБ, 1899.

[9] Граве, Д. А., Об основных задачах математической теории построения географических карт, СПБ, 1896.

[10] Марков, А. А., 《Изв. АН》, сер. 5, 2 (1895), 3, 177－187.

[11] Урмаев, Н. А., Методы изыскания новых картографических проекций, М., 1947.

[12] Лаврентьев, М. А., Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа, М., 1962.

[13] Milnor, J., A problem in cartography, *Amer. Math. Monthly*, **76** (1969), 1101－1112.

[14] Airy, G. B., *Philos. Mag. Ser.*, **4**, **22** (1861), 409－421.

[15] Цингер, Н. Я., 《Изв. АН》, сер. 6, **10** (1916), 17, 1693－1704.

[16] Мещеряков, Г. А., 《Докл. АН СССР》, **136** (1961), 5, 1026－1029.

[17] Топчилов, М. А., 《Изв. ВУЗов Геод. и аэрофотосъемка》, 1970, 4, 91－96.

[18] Тучин, Я. И., 《Тр. Новосиб. ин-та инженеров геод., аэрофотосъемки и картографии》, **30** (1973), 65－67.

[19] Юзефович, Ю. М., 《Сб. научн. трудов Белорусск. сельхоз. академии》, **86** (1972), 245－253.

[20] Тучин, Я. И., 《Труды Новосибирск. ин-та инженеров геод., аэрофотосъемки и картографии》, **34** (1975), 55－64.

Г. А. Мещеряков 撰

【补注】 在西方文献中与制图投影学相比更常用地图投影(map projection)一词．总是建立椭球与一 xOy 平面上点间的对应(见(1))．代替 u，v 常用 φ，λ 以标记纬度(latitude)和经度(longitude)．坐标 x，y 称为地图坐标(map coordinates)．

测地线或大圆线(orthodrome)是给出表面上两点间的最短距离的线(见测地线(geodesic line))．西方文献中很少用"测地线投影"一词．在本条文中没有

提到的一个著名的投影是心射切面投影(gnomonic projection)．这是从球心将地球投向在表面某点的切平面的透视投影．

参考文献见**制图投影**(cartographic projection).

参考文献

[A1] Robinson, A. H., Elements of cartography, Wiley, 1960.

沈 青 译

瀑布 [**cascade**; **каскад**]，动力系统理论中的，离散时间动力系统(discrete - time dynamical system)

由整数加法群 **Z**(或自然数加法半群 **N**)在某个相空间 W 上的作用所定义的**动力系统** (dynamical system). 按照群(或半群)的作用的一般定义，这表示对每一整数(或自然数)均有一变换 $S_n: W \to W$，使得

$$S_{n+m}(w) = S_n(S_m(w)) \qquad (*)$$

对所有 $w \in W$ 均成立．所以每一变换 S_n 均可由单个变换 S_1 经迭代或(当 $n<0$ 时)反演来得出：

$$S_n = (S)^n \text{，对 } n>0,\quad S_n = (S^{-1})^{-n} \text{，对 } n<0.$$

这样，研究一瀑布归结为研究生成它的变换 S_1 的性质，在此意义下，瀑布是最简单的动力系统．由此原因，尽管在应用中最常遇到的是连续时间动力系统(见**流(连续时间动力系统)**(flow(continuous - time dynamical system)))，对瀑布已经有了很彻底的研究．通常，瀑布和流的主要特点相同，但在方法上瀑布较易处理；同时，它们所得的结果可以移植到流上而无特殊的困难，有时只需将流的性质形式地归结为瀑布的性质，但更常见的是要对证明作些修改．

至于一般的动力系统，相空间 W 通常要赋以某种结构，而变换 S_n 会保存这种结构．例如，W 可以是一光滑流形，一拓扑空间或一测度空间；相应的瀑布也就称为光滑的(smooth)，连续的(continuous)或可测的(measurable)(在最后一种情况，对定义常要修改，即要求每个变换 S_n 只是几乎处处有定义，而对任一组 n, m，方程(*)也只对几乎所有 w 成立)．在这些情况下，生成瀑布的变换 S(当变换构成群时)就分别是**微分同胚**(diffeomorphism)，**同胚** (homeomorphism)或测度空间的自同构，或(当变换构成半群时)是一光滑映射，连续映射或测度空间的自同态．

Д. В. Аносов 撰　齐民友 译

级联法 [**cascade method**; **каскадный метод**]，亦称瀑布法，Laplace 法 (Laplace method)

偏微分方程理论中的一种方法，在某些情形能求得线性双曲型偏微分方程

$$Lu \equiv u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y) \qquad (1)$$

的通解，通过构造一串方程

$$L_i u \equiv u_{xy} + a_i(x,y)u_x + b_i(x,y)u_y + c_i(x,y)u = f_i(x,y), \qquad (2_i)$$

$i = \pm 1, \pm 2, \cdots$，使得(1)的解可由(2)的解表示出来．

方程(1)可以写成下面形式中的一种：

$$v_x + bv - hu = f,\quad w_y + aw - ku = f,$$

其中

$$h = a_x + ab - c,\quad k = b_y + ab - c,$$

$$v = u_y + au,\quad w = u_x + bu.$$

函数 h 和 k 称为方程(1)的不变量．

当 $h=0$ 时，求解(1)的问题化为常微分方程的积分，解具有形式

$$u = e^{-\int a\,dy}\left[X + \int\left\{Y + \int f e^{\int b\,dx}\,dx\right\}e^{\int a\,dy\ \ b\,dx}\,dy\right],$$

其中 X 和 Y 分别是 x 和 y 的任意函数．类似地，若 $k=0$，则(1)的解可写成

$$u = e^{-\int b\,dx}\left[Y + \int\left\{X + \int f e^{\int a\,dy}\,dy\right\}e^{\int b\,dx\ \ a\,dy}\,dx\right].$$

$h \neq 0$ 的情形，(1)的解 u 可以从(2_1)的解 u_1 通过公式

$$u = \frac{u_{1x} + bu_1 - f}{h}$$

得到，而(2_1)的系数 a_1, b_1, c_1 及右端项 f_1 具有形式

$$a_1 = a - (\ln h)_y,\quad b_1 = b,\quad c_1 = c - a_x + b_y - b(\ln h)_y,$$

$$f_1 = f_0 \cdot (a - (\ln h)_y) + f_y.$$

对于方程(2_1)不变量 h_1 和 k_1 由下列公式表出：

$$h_1 = 2h - k - (\ln h)_{xy},\quad k_1 = h.$$

若 $h_1 = 0$，则(2_1)的解由前面说过的方法得到；若 $h_1 \neq 0$，则这个过程将通过构造方程(2_i)继续下去($i=2, 3, \cdots$)；(1)的解可通过这串方程的解的求积表示出来．对 $k \neq 0$ 的情形，一串方程(2_i) ($i=-1, -2, \cdots$)可类似地构造出来．如果在某一步 h_i (或 k_i)等于零，则通过求积分就得到(1)的通解．

级联法可用来把一个给定的问题转化成另一个问题，而对后一个问题可容易地应用已知的解析的或数值的解法；也可用来得到一族方程，其解是已知的．其系数很好地逼近于在重要的应用问题中碰到的方程的系数；最后是用来得到算子摄动理论中的基本算子．

级联法是由 P. Laplace ([1])于 1773 年发现并由 G. Darboux ([2])发展了的．

参考文献

[1] Laplace, P. S., Oeuvres complètes, Vol. 9, Paris, 1983, 5–68.

[2] Darboux, G., Leçons sur la théorie génerale des surfaces, 2 ed., Vol. 2, Paris, 1915.

[3] Трикоми, Ф., Лекции по уравнениям в частных производных, пер. с итал., М., 1957, 177－186.

[4] Бабич, В. М. и др., Линейные уравнения математической физики, М., 1964.

[5] Домбровский, Г. А., Метод аппроксимации адиабаты в теории плоских течений газа, М., 1964.

[6] Чекмарев, Т. В., 《Изв. ВУЗов. Математика》, 1972, 11, 72－79.

[7] Пашковский, В. И., 《Дифференциальные уравнения》, **12** (1976), 1, 118－128.

В. И. Пашковский 撰　叶其孝 译

Casimir 元素 [Casimir element; Казимира элемент], Casimir 算子(Casimir operator)

半单 Lie 代数的泛包络代数中一个具有特殊形式的中心元素. 对于一种特殊情况, 这种算子首先由 H. Casimir 引进([1]).

设 $\mathfrak{g}$ 是特征为零的域上半单有限维 Lie 代数, B 是 $\mathfrak{g}$ 上一个不变对称双线性型(即 $B([x, y], z)=B(x, [y, z])$, $x, y, z\in\mathfrak{g}$),它在 Cartan 子代数 $\mathfrak{g}_0\subset\mathfrak{g}$ 上非退化. 那么 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 关于型 B 的一个 Casimir 元素(Casimir element)是泛包络代数 $U(\mathfrak{g})$ 的一个元素, 它可表为

$$b=\sum_{i=1}^{k}e_if_i.$$

这里$\{e_i\}$, $\{f_i\}$是 $\mathfrak{g}_0$ 关于 B 的对偶基, 即 $B(e_i, f_j)=\delta_{ij}$, $(i, j=1,\cdots,k)$, δ_{ij} 是 Kronecker 符号, $k=\dim\mathfrak{g}_0$. 元素 b 不依赖于 $\mathfrak{g}_0$ 中对偶基的选取, 它是 $U(\mathfrak{g}_0)$的中心元. 如果 $\mathfrak{g}$ 是单代数, 则由 **Killing 型**(Killing form)所定义的 $\mathfrak{g}$ 的 Carimir 元素在不计纯量因子时是 $U(\mathfrak{g})$ 中唯一确定的中心元, 它可表为 $\mathfrak{g}$ 中元素的齐次二次多项式.

半单代数 $\mathfrak{g}$ 在有限维空间 V 中的每一个线性表示 φ 定义了一个 $\mathfrak{g}$ 上不变对称双线性型

$$B_\varphi(x, y)=\mathrm{Tr}(\varphi(x)\varphi(y)),$$

它在与 Ker φ 互补的子代数 $\mathfrak{g}_0\subset\mathfrak{g}$ 上是非退化的, 所以也定义一个 Casimir 元素 $b_\varphi\in U(\mathfrak{g})$. 如果 φ 是不可约表示, 则 φ 到 $U(\mathfrak{g})$的扩张使 b_φ 映入 $(k/\dim V)e$.

参考文献

[1] Casimir, H. and Waerden, B. L., van der, Algebraischer Beweis der Vollständigen Reduzibilität der Darstellungen hal beinfacher Liescher Gruppen, *Math. Ann.*, **111** (1935), 1－2.

[2] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Lie groups and Lie algebras, Addison - Wesley, 1975 (译自法文).

[3] Serre, J.- P. Lie algebras and Lie groups, Benjamin, 1965 (译自法文).

[4] Jacobson, N., Lie algebras, Interscience, 1962 (中译本: N. 贾柯勃逊, 李代数, 上海科学技术出版社, 1964).

[5] Наймарк, М. А., Теория представлений групп, М., 1976 (英译本: Naimark, M. A., Theory of group representations, Springer, 1982).

[6] Dixmier, J., Enveloping algebras, North-Holland, 1977.

Д. П. Желобенко 撰

【补注】 由 φ 确定的 Casimir 元素 b_φ 称为线性表示 φ 的Casimir 元素(Casimir element).

附加一篇好的参考文献[A1].

参考文献

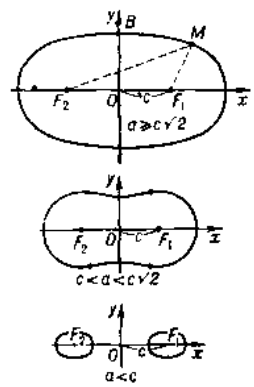
[A1] Humpreys, J. E., Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer, 1972.

林亚南 译

Cassini 卵形线 [Cassini oval 或 Cassinian oval; Кассини овал]

四次平面代数曲线, 它在 Destartes 坐标中的方程具有下列形式:

$$(x^2+y^2)^2-2c^2(x^2-y^2)=a^4-c^4.$$



Cassini 卵形线是这样一些点的集合(见图), 由其中每一点到两给定点 $F_2=(-c, 0)$ 和 $F_1=(c, 0)$ (焦点(foci))的距离之积为常数. 当 $a\geq c\sqrt{2}$ 时, Cassini 卵形线是凸曲线; 当 $c<a<c\sqrt{2}$ 时, 是带"腰"(凹部分)曲线; 当 $a=c$ 时, 是 **Bernoulli 双纽线**(Bernoulli lemniscate), 当 $a<c$ 时, 则由相隔的两部分组成. Cassini 卵形线同**双纽线**(lemniscates)密切相关. G. Cassini (17 世纪)在试图确定地球轨道的形状时曾研究过这种卵形线, 因而得名.

参考文献

[1] Савелов, А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Lawrence, J. D., A catalog of special plane curves, Dover, reprint, 1972.

[A2] Bruce, J. W. and Giblin, P. J., Curves and singularities: a geometrical introduction to singularity theory, Cambridge Univ. Press, 1984.

张鸿林 译

Catalan 曲面 [Catalan surface; Каталана поверхность]

直母线平行于同一平面的**直纹曲面**(ruled surface). 它的腰曲线是平面曲线. Catalan 曲面的位置向量是 $r=\rho(u)+v\,l(u)$, 其中 $l''(u)\neq 0$, $(l, l', l'')=0$. 如果 Catalan 曲面的所有母线都交于同一直线, 那么这个曲面就是**劈锥曲面**(conoid).

参考文献

[1] Catalan, E., Mémoire sur les surfaces gauches à plan directeur, Paris, 1843.

И. Х. Сабитов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Klingenberg, W., A course in differential geometry, Springer, 1978 (译自德文).

[A2] Millman, R. S., Parker, G. D., Elements of differential geometry, Prentice-Hall, 1977.

陈志杰 译

范畴公理系统 [categoric system of axioms; категоричная система аксиом]

任一公理系统 Σ, Σ 的表征的所有满足这些公理的模型彼此同构. 由 Mal'tsev-Tarski 初等扩充定理, 范畴一阶公理系统 Σ 的模型其基数有限. 这个定理的逆定理也成立: 对任一有限模型 A, 存在一个范畴一阶公理系统 Σ, 使得 Σ 的模型都同构于 A. 设 Σ_0 是下列公式的全称闭包构成的集合:

1) $0\neq x+1$;

2) $x+1=y+1\to x=y$;

3) $x+0=x$;

4) $x+(y+1)=(x+y)+1$;

5) $x\cdot 0=0$;

6) $x\cdot(y+1)=x\cdot y+x$;

7) $(\varphi(0)\&\ \forall x(\varphi(x)\to\varphi(x+1)))\to\forall x\varphi(x)$,

其中 $\varphi(x)$ 是表征为 $\langle +, \cdot, 0, 1\rangle$ 的任一公式.

这个公理系统 Σ_0 称为 Peano **算术**(Peano arithmetic). 自然数的模型 $N=\langle \mathrm{N}, +, \cdot, 0, 1\rangle$ 是 Σ_0 的一个模型. 然而还存在不同构于 N 的 Σ_0 的模型. 设 Σ_1 是把 Σ_0 中的初等归纳图式 7) 换为下面的用二阶语言表示的完全归纳公理所得的系统

$$\forall P\,((P(0)\&\forall x\,(P(x)\to P(x+1)))\to\forall x\,P(x)),$$

那么系统 Σ_1 是范畴的, 并且 Σ_1 的所有模型同构于 N. N 的另一个范畴刻画方法是对 Σ_0 增补(语言 $L_{\omega_1\omega}$ 中的)下列无限公理:

$$\forall x\,(x=0\vee\cdots\vee x=n\vee\cdots),$$

其中 n 是 n 个 1 的和 $1+\cdots+1$ 的缩写.

参考文献

[1] Shoenfield, J. R., Mathematical logic, Addison-Wesley, 1967.

Е. А. Палютин 撰 卢景波 译 王世强 校

κ 范畴性 [categoricity in cardinality κ; категоричность в мощности κ], 亦称**对于基数 κ 的范畴性**

代数系统(模型)类的性质, 此代数系统(模型)类的所有基数为 κ 的系统彼此同构. 如果一阶理论 T 的所有基数为 κ 的模型彼此同构, 则称 T 是**对于基数 κ 范畴的**(categorical in cardinality κ)(简称理论 T 是 **κ 范畴的**). 对于一个可数完全理论 T, T 是可数范畴的($\aleph$ 范畴的)当且仅当对每一自然数 n, 存在 T 的语言的公式的一个有限集合 F_n, 使得 F_n 的每一个公式的自由变数在 $x_1,\cdots,x_n$ 中, 并且 T 的语言的每个自由变数为 $x_1,\cdots,x_n$ 的公式在理论 T 中都等价于 F_n 中的一个公式. 设 T_0 由下列公理构成:

1) $x<y\to\neg(y<x)$,

2) $(x<y\ \&\ y<z)\to x<z$,

3) $x<y\cup x=y\vee y<x$,

4) $\exists u\exists v\exists t\ (x<y\to u<x<v<y<t)$,

T_0 是稠密线性序理论, 它是 $\aleph$ 范畴的, 但是 T_0 对于所有不可数基数都不是范畴的. 特征为 0 的代数闭域的理论 T_1 对于所有不可数基数是范畴的, 但 T_1 不是 $\aleph$ 范畴的. 下面的一般定理成立: 如果一个一阶可数理论对于某一个不可数基数是范畴的, 那么 T 对于所有不可数基数都是范畴的. 这个定理可以推广到不可数理论, 但要把不可数基数这个条件换为比 T 的基数大的基数. 形如

$$(Q_0\&\cdots\&Q_n)\to P$$

的公式的全称闭包称为一个**拟等式**(quasi-identity), 其中 Q_i 和 P 是原子公式. 对于由拟等式构成的一阶可数理论 T', 其可能范畴的基数的分布情况更窄: 如果理论 T' 是可数范畴的, 那么 T' 对于所有无限基数都是范畴的. 如果对 T_0 增加关于常数的下列公理:

5) $c_i<c_{i+1}$ (i 遍及一切自然数), 把得到的理论叫做 T_3, 则(从同构的观点来看)理论 T_3 恰好有三个可数模型, 这是因为仅有下面三种可能的情况: 集合 $\{c_0, c_1,\cdots\}$ 没有上界; $\{c_0, c_1,\cdots\}$ 有上界, 但没有最小上界; $\{c_0, c_1,\cdots\}$ 有最小上界. 如果理论 T_3 的两个可数型模

型 M_1 与 M_2 为上述三种情况中的同一种情况，那么 M_1 与 M_2 同构．在对于不可数基数范畴的理论中不可能有与上面类似的例子．于是，如果一个一阶理论 T 对于不可数基数范畴，那么它的可数模型的个数(从同构的观点来看)或是一个，或是无限多个．

参考文献

[1] Sacks, G. E., Saturated model theory, Benjamin, 1972.

[2] Палютин, Е. А.,《Алгебра и логика》, 14 (1975), 2, 145－185 (英译本: Palyutin, E. A., Description of categorical quasivarieties, *Algebra and logic*, 14 (1976), 86－111).

[3] Shelah, S., Categovicity of uncountable theories, in Proc. Tarski Symp., Proc. Symp. Pure Math., Vol. 25, 1974, 187－203.

E. A. Палютин 撰

【补注】拟等式的定义也可在代数系统拟簇(algebraic systems, quasi－variety of)中找到．

文中提到的"一般定理"是 J. Loś 所猜测的([A1])，"范畴性"一词也是由他提出的．这一猜测后来被 M. Morley 证明([A2])．

参考文献

[A1] Loś, J., On the categoricity in power of elementary deductive systems and some related problems, *Colloq. Math.*, 3 (1954), 58－62.

[A2] Morely, M., Categoricity in power, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 114 (1965), 514－538.

[A3] Chang, C. C. and Keisler, H. J., Model theory, North－Holland, 1973.

[A4] Shelah, S., Classification theory and the number of non－isomorphic models, North－Holland, 1978.

卢景波 译　王世强 校

范畴 [category; категория]

一个概念，它将同样类型的数学对象(集合、拓扑空间、群等等)之间的态射所组成的集体的若干代数性质形式化，这里要求这些集体都包含恒等映射，并且映射的逐次合成(或积)是封闭的．一个范畴 $\mathfrak{C}$ 是由一个类 Ob $\mathfrak{C}$ 与一个类 Mor $\mathfrak{C}$ 所组成的，Ob $\mathfrak{C}$ 中的元素称为范畴的对象(objects of the category)，而 Mor $\mathfrak{C}$ 中的元素称为范畴的态射(morphisms of the category)．这些类都必须满足下列的条件:

1) 对每一对对象 A, B 所组成的有序对，有一个由 Mor 的成员所组成的集合 $H_{\mathfrak{C}}(A, B)$ (也表以 $\mathfrak{C}(A, B)$，$\mathrm{Hom}(A, B)$，或 $H(A, B)$)与之对应．如果 $\alpha \in H(A, B)$，则 A 称为态射 α 的源，或定义域，B 称为 α 的靶，或值域，或 α 的上域；当 $\alpha \in H(A, B)$ 时，我们常写成 $\alpha: A \to B$ 或 $A \xrightarrow{\alpha} B$;

2) 范畴 $\mathfrak{C}$ 中的每一个态射只能属于一个集合 $H_{\mathfrak{C}}(A, B)$;

3) 在类 Mor $\mathfrak{C}$ 中，给定了下列的部分合成(积)的规则：两个射 $\alpha: A \to B$ 与 $\beta: C \to D$ 的积有定义当且仅当 $B=C$，此时它属于 $H(A, D)$；α 与 β 之积表成 $\alpha\beta$，或者，为了方便起见，有时也写成 $\beta\alpha$；

4) 对任何 $\alpha: A \to B$, $\beta: B \to C$, 与 $\gamma: C \to D$，有下列的结合律

$$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma);$$

5) 每一个集合 $H_{\mathfrak{C}}(A, A)$ 都包含一个(特异)的态射 1_A，使得对任何 $\alpha: X \to A$，与 $\beta: A \to Y$，恒有 $\alpha \cdot 1_A = \alpha$，$1_A \cdot \beta = \beta$；这些态射 1_A 称为单位(units)，或单位元(identities)或 1(ones)．

在范畴的定义中使用类的概念时，事先已假定了集合论中的公理系，它将集合与类区分开来．最常用到的是 Gödel－Bernays －von Neumann 的公理系．

在一个范畴的定义中，有时并不要求类 $H(A, B)$ 是集合．此时假定存在一个泛集，用它代替类的概念，并要求类 Ob $\mathfrak{C}$ 与 Mor $\mathfrak{C}$ 都属于一个固定的泛集．

因为在一个范畴 $\mathfrak{C}$ 的单位元与类 Ob $\mathfrak{C}$ 之间有一个一一的对应关系，一个范畴 $\mathfrak{C}$ 可以定义为具有部分乘积的一类态射，这些乘积需要满足另外的一些条件(例如，见[6]，[9])．

范畴的概念是 1945 年提出来的([8])．范畴理论的起源以及发展的最初的促进来自代数拓扑学．其后的研究显示出范畴的概念以及与其相关的函子(functor)的概念在数学的许多分支中都起着同样的作用．

范畴的例子．1) 集范畴(category of sets) Ens．类 Ob Ens 是由所有的集合组成的；类 Mor Ens 是由集合之间的函数所组成的；态射的合成是函数的合成，见**集范畴**(sets, category of)．

2) 拓扑空间范畴(category of topological spaces) Top (或 $\mathfrak{T}$)．类 Ob Top 是由所有的拓扑空间所组成的，类 Mor Top 是所有的连续映射，而合成又是映射的合成．

3) 群范畴(category of groups) Gr (或 $\mathfrak{G}$)．类 Ob Gr 是由所有的群所组成的，类 Mor Gr 是所有的群同态，合成仍是同态的合成，见**群范畴**(category of groups)．我们用同样方式定义某域上的向量空间的范畴，环范畴，等等．

4) 集合间二元关系范畴(category of binary relations) Rel Ens (或 $R(\mathfrak{S})$)．这个范畴的对象类是 Ob Ens，但是从 A 到 B 的态射，我们取所有的二元关系，即，Descartes 积 $A \times B$ 的所有子集；合成是二元关系的合成，见**二元关系**(binary relation)．

5) 一个有单位元的半群是一个只有一个对象的范畴；反过来，只由一个对象所组成的范畴是一个有单位元的半群．

6) 一个前序集合 N 可被看成为一个范畴 $\mathfrak{N}$，其中

$\mathrm{Ob}\,\mathfrak{N}=N$, $\mathrm{Mor}\,\mathfrak{N}=\{(a,b);\ a,b\in N,\ a\leqslant b\}$，而乘积是由等式$(a,b)(b,c)=(a,c)$来定义的．

上面所列举的范畴容许一个到集合的范畴的"同构嵌入"．具有这种性质的范畴称为一个具体范畴(concrete category)．并不是每一个范畴都是具体的；例如，以所有拓扑空间为对象，其态射定义为连续映射的同伦类([10])的范畴就不是．

范畴的例子的数量还可以由各种不同的构造来大大地增加，最多的是由范畴的函子所得的范畴，或图的范畴．

两个范畴$\mathfrak{C}$与$\mathfrak{C}'$之间的一个映射$F:\mathfrak{C}\to\mathfrak{C}'$称为一个共变函子(covariant functor)(亦见函子(functor))，如果对每一个对象$A\in\mathrm{Ob}\,\mathfrak{C}$，$F(A)\in\mathrm{Ob}\,\mathfrak{C}'$，而对每一个态射$\alpha\in H_{\mathfrak{C}}(A,B)$，其象$F(\alpha)\in H_{\mathfrak{C}'}(F(A),F(B))$，$F(1_A)=1_{F(A)}$，并且，$F(\alpha\beta)=F(\alpha)F(\beta)$，只要乘积$\alpha\beta$是有定义的．如果$\mathfrak{C}$的对象组成一个集合，那么，我们就可以构造图范畴(category of diagrams)$\mathrm{Funct}(\mathfrak{C},\mathfrak{C}')$或$F(\mathfrak{C},\mathfrak{C}')$，它的对象是所有从$\mathfrak{C}$到$\mathfrak{C}'$的共变函子，而以这些函子的所有自然变换为其态射．

对每一个范畴$\mathfrak{C}$，我们可以取其对偶范畴(dual category)$\mathfrak{C}^*$，或$\mathfrak{C}^T$，或$\mathfrak{C}^{op}$，对此范畴，$\mathrm{Ob}\,\mathfrak{C}^*=\mathrm{Ob}\,\mathfrak{C}$，且对任何$A,B\in\mathrm{Ob}\,\mathfrak{C}$，$H_{\mathfrak{C}^*}(A,B)=H_{\mathfrak{C}}(B,A)$．从$\mathfrak{C}^*$到$\mathfrak{C}'$的一个共变函子称为从$\mathfrak{C}$到$\mathfrak{C}'$的一个反变函子．在讨论一个变量的函子的同时，我们也可考虑多位函子或多变量函子(functor)．

在范畴理论中，对每一句陈述语，总有一句对偶陈述语，它是在形式上由"反转箭头"来得到的．就此而论，所谓对偶原理成立：在范畴论中，一个陈述语p是真实的当且仅当其对偶陈述语p^*是真实的．

数学中的许多概念与结果从范畴理论的观点来看结果是相互对偶的；内射与投射，幂零性与在Люстерник-Шнирельман意义下拓扑空间的范畴的概念，代数中的簇与根，等等．

用范畴的理论来分析同调理论的基础，使在50年代中期，引进所谓**Abel范畴**(Abelian category)．可以在这个体制下来理解同调代数的基本构造([2])．在20世纪60年代，作为逻辑、一般代数学拓扑学与代数几何学的一些问题的一个结果，对于非Abel范畴的兴趣增长了．泛代数的深入发展，与同伦理论的公理化结构标志着几个方面的研究的开始：泛代数的簇的范畴理论的研究，直分解的同构理论，伴随函子的理论，以及函子的对偶理论．稍后的发展揭示了这些方面的研究之间的关系的存在性．作为广泛应用了伴随函子与闭范畴的技巧的关系范畴的近代理论的一个结果，在同伦论与泛代数之间已建立了对偶性，这是基于在一个适当的函子范畴内对带幺半群与上带幺半群的范畴定义的理解(例如，见[7])．在关系范畴的一般理论发展时，也引进了这样的范畴的特殊类型：2范畴或形式范畴；具有对合的范畴或1范畴，特别地，包含二元关系的范畴；等等．2范畴的一个特殊情况是小范畴，它可以被安置在数学的公理化结构的基础上．

上面所列举的范畴类有一个特性，它们的态射集$H(A,B)$都具有另外的结构．对一个范畴引进其他结构的另一种方法是对这个范畴提供一个Grothendieck拓扑，并且在拓扑化了的范畴上构造层的范畴(所谓拓扑斯(topos))．

参考文献

[1] Bucur, I. and Deleanu, A., Introduction to the theory of categories and functors, Wiley, 1968.

[2] Grothendieck, A., Sur quelques points d'algèbre homologique, *Tôhoku Math. J.*, **9** (1957), 119－221.

[3] Курош, А. Г., Лившиц, А. Х. Шульгейфер, Е. Г., 《Успехи матем. наук》, **15** (1960), 6, 3－52.

[4] Итоги науки Алгебра. Топология, 1962 М., 1963, 90－106.

[5] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1967 М., 1969, 9－57.

[6] Цаленко, М. Ш., Шульгейфер, Е. Г, Основы теории категорий, М., 1974.

[7] Bunge, M. C., Relative functor categories and categories of algebras, *J. of Algebra*, **11** (1969), 64－101.

[8] Eilenberg, S. and MacLane, S., *Trans. Amer. Math. Soc.*, **58** (1945), 231－294.

[9] Freyd, P., Abelian categories, Harper & Row, 1964.

[10] Freyd, P., On the concreteness of certain categories, Symp. Math., 4, Acad. Press, 1970, 431－456.

[11] MacLane, S., Categories for the working mathematician, Springer, 1971.

[12] Schubert, H., Categories, 1－2, Springer, 1972.

[13] Mitchell, B., Theory of categories, Acad. Press, 1965.

М. Ш. Цаленко 撰

【补注】 范畴的概念是在1942年由S. Eilenberg与S. MacLane引进的([A1])，自那时起已找到这个概念在代数、拓扑学与数学基础等方面的许多应用．直观思想是，范畴是数学某方面的所有对象以及它们之间的所有映射所组成的．让一个对象等同其恒等态射，那么就可以只用态射来定义一个范畴．直观上比较清楚，更符合习惯的还是既用对象又用态射．在上面的条目中，这两种途径在某种程度上是混在一起的．用对象与态射所下的定义如下．一个范畴$\mathfrak{C}$是由以下的项目组成的．

A1)一个类$\mathrm{Ob}\,\mathfrak{C}$，其元素称为$\mathfrak{C}$的对象(objects)，与一个类$\mathrm{Mor}\,\mathfrak{C}$，它的元素称为$\mathfrak{C}$的态射(morphisms)或矢(arrows)；

A2) 一种规则，对 $\mathbb{C}$ 的每一个态射 α 指定一对对象 $(d_0(\alpha), d_1(\alpha))$，称为 α 的定义域(domain)与上定义域(codomain)，或源(source)与靶(target)．我们写成 $\alpha: A\to B$ 或 $A\xrightarrow{\alpha}B$，意思是 α 是一个态射，其定义域为 A，上定义域为 B：这重述了上面的 1)．

A3) 一种规则，对 $\mathbb{C}$ 的每一个对象 A 指定一个态射 $1_A: A\to A$，称为 A 上的恒等态射(identity morphism)，这是上面的 5)的准确含义．

A4) 对态射规定了一种部分的(二元)乘法运算，积 $\alpha\beta$(称为 α 与 β 的合成(composition))有定义，当且仅当 $d_0(\alpha)=d_1(\beta)$，并且满足 $d_1(\alpha\beta)=d_1(\alpha)$ 与 $d_0(\alpha\beta)=d_0(\beta)$，只要它是有定义的．这重述了 3)．

这些项目都应服从以下的公理．

A5) 合成是结合的，即，$(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma)$，只要两边都是有定义的；这重述了 4)．

A6) 恒等态射对合成来说是单位元，即 $\alpha 1_A=\alpha$，$1_A\beta=\beta$，只要合成是有定义的．这与 A3)重述了 5)．

类 Ob $\mathbb{C}$ 与 Mor $\mathbb{C}$ 并不要求是集合．在许多重要的例子中(例如见上述条目，以及下面的(A1)－(A4)，(A7))，它们不是集合．可是，在大多数的例子中有下列的性质：对每一对对象 (A, B)，使 $d_0(\alpha)=A$，$d_1(\alpha)=B$ 的态射 α 的集体形成一个集合(通常表以 $\mathbb{C}(A,B)$ 或 $\mathrm{Hom}(A, B)$)；这样的范畴有时称为局部小的(locally small)，虽然其他的作者把这条件包含在范畴的定义内．一个范畴 $\mathbb{C}$ 称为小的(small)如果 Ob $\mathbb{C}$ 与 Mor $\mathbb{C}$ 都是集合(见小范畴(small category))；实际上很多的基本数学结构都可看成是小范畴(例如下面的(A6)与(A7))．

由定义，一个范畴中的每一个对象都有唯一的一个恒等态射；因此就有可能将对象与它们的恒等态射等同起来，这样就使得在范畴的公理中，"态射"与"态射的合成"是仅有的原始概念(见[9])．

范畴的例子．(A1)见条目本身．集合的范畴 Ens 更常表以 Set．

(A3)在范畴 Gr 之下，我们可考虑 Abel 群的范畴 Ab，固定的环 R 上的(右)模 Mod_R 等等．

(A4)集合之间的二元关系之范畴常被表示为 Rel．

(A5)有单位元的半群 M 也称为一个**幺半群**(monoid)．它定义了一个只有一个对象 $*$ 的范畴，M 的元素就是态射 $*\to*$．

(A6)**偏序集**(partially ordered set)$(A\ \leqslant)$定义一个范畴，其对象就是 A 的元素，其态射是序关系的状况，若 $a\leqslant b$，只有一个态射 $a\to b$，否则没有态射．

(A7)类似地，有向图(graph)(或图概形(diagram scheme))可被理解为一个范畴，其对象是顶点，从 v_1 到 v_2 的态射是定向的道路，包括平凡的对所有顶点 v 的自 v 到 v 的恒等道路．反过来，一个范畴可以看成为一(很大的)有环行道路与多重边的有向图，其中用一个等价关系将某些道路等同起来，见[11]，第 11.7 节．

(A8)同伦范畴(homotopy category)Htpy 或 Htp 与 Top 有相同的对象，但其态射是连续映射的同伦类．可以证明这个范畴是非具体的．

在范畴的研究中，函子(范畴的态射)起着本质的作用．一个**函子**(functor)$F: \mathbb{C}\to\mathbb{D}$ 由两个函数组成，一个函数是对 $\mathbb{C}$ 的每一个对象 A 指定 $\mathbb{D}$ 的一个对象 FA，另一个函数是对 $\mathbb{C}$ 的每一个态射 α 指定 $\mathbb{D}$ 的一个态射 $F\alpha$，使保持范畴的结构：$d_i(F\alpha)=F(d_i(\alpha))(i=0,1)$，$F(1_A)=1_{FA}$，且 $F(\alpha\beta)=(F\alpha)(F\beta)$ 只要 $\alpha\beta$ 是有定义的．还有第三层结构：如果 F 与 G 都是函子 $\mathbb{C}\to\mathbb{D}$，一个自然变换(natural transformation)(或函子的态射(functorial morphism))$\eta: F\to G$ 是一个函数，它对 $\mathbb{C}$ 的每一个对象 A 指定 $\mathbb{D}$ 中的一个射 $\eta_A: FA\to GA$，使对 $\mathbb{C}$ 中的每一个 $A\xrightarrow{\alpha}B$，图

$$\begin{array}{ccc} FA & \xrightarrow{F\alpha} & FB \\ \eta_A\downarrow & & \downarrow\eta_B \\ GA & \xrightarrow[G\alpha]{} & GB \end{array}$$

可交换(即 $(G\alpha)(\eta_A)=(\eta_B)(F\alpha)$)．函子是可以合成的(每一个范畴都有一个恒等函子)；因此，有一个(小)范畴的范畴 Cat，其态射就是范畴之间的函子．自然变换是可以合成的，所以，给定两个范畴 $\mathbb{C}$ 与 $\mathbb{D}$，有一个范畴 $[\mathbb{C},\mathbb{D}]$(或 $\mathbb{D}^{\mathbb{C}}$)它是由函子 $\mathbb{C}\to\mathbb{D}$ 与函子间的自然变换所构成的．这是一种从现有的范畴构造出新的范畴的很重要的方法．所得的范畴称为函子范畴(category of functors)或图范畴(category of diagrams)．当 $\mathbb{C}$ 是对应了一个图概形(有向图)的范畴时，后面这个名称是特别容易理解的．的确如此，这时一个函子 $\mathbb{C}\to\mathbb{D}$ "是" $\mathbb{D}$ 中的一个图．其他得到新范畴的重要构造方法是：取商(见**商范畴**(quotient category))，取局部化(见**范畴的局部化**(localization in categories))，构造相对与逗号范畴．**导出范畴**(derived category)这个重要概念牵涉到几种这样的构造．如果 $\mathbb{C}$ 是一个范畴而 $\mathfrak{B}$ 是 $\mathbb{C}$ 的一个对象，那么，在 $\mathfrak{B}$ 上对象的相对范畴(relative category)$\mathbb{C}/B$ 以 $\mathbb{C}$ 上所有到 B 的态射 $\alpha: A\to B$ 为对象，对于 $\mathbb{C}/\mathfrak{B}$ 中的对象 $\alpha': A'\to B$，从 α 到 α' 的态射是一个态射 $\varphi: A\to A'$，使 $\alpha'\circ\varphi=\alpha$．对偶地，也有在一个给定的对象下 $\mathbb{C}$ 中的对象的相对范畴的概念．直观地，$\mathbb{C}/B$ 的一个对象 $\alpha: A\to B$ 是 $\mathbb{C}$ 中由 B 或由一个纤维对象(fibre object)所参数化了的一族对象．对这些相对对象，即纤维对象(与它们的对偶)作系统的研究，连同**换基**(base change)与**形变**(deformation)的思想已经在数学的许多部分中变成一种最重要的技巧，特别是在代数学(显著地是同调代数)．代数几何学与微分几何学、拓扑学、微分拓扑与代数拓扑中．特别重要

的是要找到对定义、定理与概念的正确纤维化的提法.(第二种附加的但不是无关连的主要趋向牵涉到找出其正确等价的提法,其中存在一组对称性.)

逗号范畴的思想推广了在一个给定的对象之上或之下的对象之范畴的思想. 假定有三个范畴 $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}$, 与两个函子 S,T, 安排如下

$$\mathfrak{A} \xrightarrow{T} \mathfrak{C} \xleftarrow{S} \mathfrak{B},$$

那么, 逗号范畴(comma category)(T,S)或$(T\downarrow S)$就以所有的三元组(a,f,b)为其对象, 这个三元组是由一个对象 $a\in\mathfrak{A}$, 一个对象 $b\in\mathfrak{B}$, 与 $\mathfrak{C}$ 中的一个态射 f: $TA\to SB$ 所组成的. 从 (a,f,b) 到 (a',f',b') 的态射(α,β)是由一对态射 $\alpha: A\to A'$, 与 $\beta: B\to B'$ 所组成的, 这里要求 $f'\circ T\alpha = T\beta\circ f$.

函子的例子. (A9)忘却函子(forgetful functor)Top $\to$ Set 将每个拓扑空间送到它的基本集, 把每个连续函数送到它自己("忘却"其连续性). 同样地, 有忘却函子 Gr $\to$ Set, $\mathrm{Mod}_R\to\mathrm{Ab}$, 等等.

(A10)如果 $\mathfrak{C}$ 是一个局部小范畴, 那么, 对每一个 $A\in\mathrm{Ob}\,\mathfrak{C}$, 有一个函子 $\mathfrak{C}(A,-)$: $\mathfrak{C}\to\mathrm{Set}$, 它将 B 送到集合 $\mathfrak{C}(A,B)$, 并且将 $B\xrightarrow{\alpha}B'$ 送到这样一个函数, 它将 β 送到 $\alpha\beta$. 这样的函子(或者在$[\mathfrak{C},\mathrm{Set}]$ 中与它们同构的函子)都称为可表示的(representable), 见**可表示函子**(representable functor).

(A11)有一个函子 F: Set $\to$ Gr, 它将一个集合 A 变成由 A 所生成的自由群, 并且将一个函数 $A\xrightarrow{\alpha}B$ 变成唯一的同态 $FA\to FB$, 这个同态将 FA 的每一个生成元 a 映射为 $\alpha(a)\in FB$.

(A12)空间的(连续)同调群(见**同调群**(homology group))定义函子 Htpy $\to$ AB(对每一个维数 $\geqslant 0$ 有一个函子).

(A13)将带幺半群看成范畴, 那么, 带幺半群之间的函子恰是带幺半群的同态.

(A14)将半序集看成范畴, 那么, 半序集之间的函子恰是保序映射.

(A15)如果 G 是一个群, 看成一个范畴, 一个函子 $G\to\mathrm{Set}$(相应地 $G\to\mathrm{Mod}_R$)是 G 的一个置换(相应地, 一个 R 线性表示). 见**群的表示**(representation of a group).

一个函子 $F:\mathfrak{C}\to\mathfrak{D}$ 称为忠实的(见**忠实函子**(faithful functor)), 如果它在 Hom 集合上是单射的, 即在 $\mathfrak{C}$ 中给定两个态射 $A\xrightarrow{\alpha}B$ 与 $A\xrightarrow{\beta}B$, 它们有相同的定义域与相同的上域, 则 $F\alpha=F\beta$ 蕴含着 $\alpha=\beta$. F 称为满的(full), 如果在类似的意义下它在 Hom 集合上是满射的. 忘却函子总是忠实的(见上面的(A9)). 一个范畴 $\mathfrak{C}$ 是具体的这个性质现在可以重述成: 有一个忠实的函子 $\mathfrak{C}\to\mathrm{Set}$.

给定一个范畴 $\mathfrak{C}$, 可以作出其逆范畴(opposite category)或**对偶范畴**(dual category)$\mathfrak{C}^{op}$, 办法是保留 $\mathfrak{C}$ 的所有对象, 但将其态射反转方向. 范畴 Rel 与其逆范畴同构, 虽然大多数熟悉的范畴不是这样. 一个函子 $\mathfrak{C}^{op}\to\mathfrak{D}$ 有时称为从 $\mathfrak{C}$ 到 $\mathfrak{D}$ 的一个反变函子(contravariant functor); 为了强调此性质, 函子 $\mathfrak{C}\to\mathfrak{D}$ 于是就称为共变的(covariant). (例如, 如果 $\mathfrak{C}$ 是局部小的, 则可以用与上面的例子(A10)定义共变函子 $\mathfrak{C}(A,-)$相类似的办法, 定义一个从 $\mathfrak{C}$ 到 Set 的逆变函子 $\mathfrak{C}(-,A)$). 范畴论的**对偶原理**(duality principle)本质上是断言, 一个命题若在所有范畴上都是真实的, 那么它的对偶也在所有范畴上真实.

S. MacLane([A4])引进了一个思想, Descartes 积可以用范畴的术语, 由一个泛性质来刻画; 这给出一般范畴的极限(limit)概念(以及其对偶上极限(colimit)的概念), 它包含积作为一种特殊情况(见**极限与泛问题**(limit and universal problems)).

其后出现了关键性概念伴随(adjoint)([A5]): 给定函子 $F:\mathfrak{C}\to\mathfrak{D}$ 和 $G:\mathfrak{D}\to\mathfrak{C}$, 我们说 F 对 G 是左伴随的(left adjoint)(写成 $F\dashv G$)如果在态射 $FA\to B$ 与态射 $A\to GB$ 之间有一个一一映射, 它对 A 与 B 都是自然的, 这等价于存在自然变换 $\eta: 1_{\mathfrak{C}}\to GF$ 与 $\varepsilon: FG\to 1_{\mathfrak{D}}$ 使满足某些恒等式([11]), 见**伴随函子**(adjoint functor). 例如, 自由群函子(上面的例子(A11))对于忘却函子 Gr $\to$ Set 是左伴随的; Galois 联络(见 **Galois 对应**(Galois correspondence))是在半序集之间的(反变)伴随的例子. 一个有左伴随的函子能保持所有的极限, 在某些适当"小条件"下, 其逆也真. (伴随函子定理(adjoint functor theorem), 见[9]).

给定一个伴随$(F\dashv G)$如上, 合成函子 $T=GF$: $\mathfrak{C}\to\mathfrak{C}$ 附带上两个自然变换 $\eta: 1_{\mathfrak{C}}\to T$ 与 $\mu=G\varepsilon_F: TT\to T$ 满足某些恒等式, 这些论据定义了范畴中**三元组**(triple)的概念, 它在60年代以及以后的多年中, 在许多范畴的研究中起了中心的作用. 三元组也称单子(monad).

在一个范畴 $\mathfrak{C}$ 上的一个三元组(T,μ,η)所要求满足的恒等式如下: $\mu_A\circ T(\mu_A)=\mu_A\circ\mu_{T(A)}$, $\mu_A\circ T(\eta_A)=1_{T(A)}$, $\mu_A\circ\eta_{T(A)}=1_{T(A)}$. 对于三元组 T 的一个代数, 即 T 代数(T-algebra), 是 $\mathfrak{C}$ 的一个对象 X 连同一个态射 $\xi: TX\to X$, 使下列的恒等式成立: $\xi\circ\eta_X=1_X$, $\xi\circ T(\xi)=\xi\circ\mu_X$. 将这些要求用交换图的方式写出来是很好的想法. 它们对于结合律与对单位的要求都是便于记忆的.

对偶地, 即将所有的箭头都反转方向, 有上三元组(cotriple)的概念, 与这种上三元组上的上代数的相应概念. 有单位元的交换环范畴 Ring 内的一个上三元组的重要例子是大 Witt 向量连同 $W(R)$上的一个特殊 λ 环结构的函子 W: Ring $\to$ Ring. 对这个上三元

组的上代数恰恰就是这些特殊的 λ 代数，见 **Witt 向量**(Witt vector)与 λ 环(λ-ring).

三元组的重要的例子来自牵涉到忘却函子的伴随．例如，让 V: Ring → Set 为从有单位元的交换环的范畴到集合的范畴的忘却函子．这个函子有一个伴随 F: Set → Ring, 它对一个集合 $E \in$ Set 指定以 E 为生成元的自由交换环，即，就是变量 $x_e(e \in E)$ 在 Z 上的交换多项式环 $\mathbf{Z}[x_e: e \in E]$. 这个环的自由性就是，对每一个环 A, 以及 A 的每一个元素组$(a_e)_{e\in E}$, 恰有一个环同态 $\varphi: \mathbf{Z}[X_e: e\in E] \to A$使对所有的 $e \in E$ 都有 $\varphi(x_e)=a_e$. 这个自由性的性质准确表达了 V 与 F 是伴随函子这个事实：Set$(E, V(A)) \cong$ Ring(FE, A). 相应的自然变换 id → VF 是由 $e \mapsto x_e$ 来给出的．(亦见**伴随函子**(adjoint functor).)

每一个单子(即三元组)与上单子都可从一个伴随引出来;事实上,对该单子有一个"最好可能的"这样的伴随，其中 $\mathfrak{D}$ 取成相应的(Eilenberg-Moore)代数的范畴(category of (Eilenberg-Moore) algebras)([A7]). 一个一般的伴随($F \dashv G$)称为单子的(monadic)(或称 $\mathfrak{D}$ 是 $\mathfrak{C}$ 上单子的)，如果 $\mathfrak{D}$ 是(典范地)等价于 $\mathfrak{C}$ 上导出的单子之代数的范畴．上面所提到的 Set 与 Gr 之间的伴随是单子的；更一般地，在 Set 上单子的范畴可以刻画为从泛代数的簇得来的范畴(只要允许无穷性，以及有限代数运算；有限性的情况也可以借助代数理论中的概念用范畴的术语来刻画)．亦见**泛代数簇**(variety of universal algebras).

另外一种用来表示一个三元组(T, μ, η)的语句是范畴 $\mathfrak{C}$ 上的代数理论(algebraic theory)(用单子的形式)．它可以说是 T代数的范畴的理论.至少还有两个等价的方法来得到这个概念．一种是[A6] 中的方法．一个克隆型$(T, \eta, \circ)$的代数理论(algebraic theory in clone form)，对 $\mathfrak{C}$ 中对象的每个三元有序组(A, B, C)，此型是由以下三个项目所组成的:对所有对象 A的一个"对象指定函数" $A \mapsto TA$(=T项，变量在 A 内)，对所有 A 的一个"变量嵌入映射" η_A: $A \to TA$, 与一个"克隆-合成函数" $\mathfrak{C}(B, TC) \times \mathfrak{C}(A, TB) \to \mathfrak{C}(A, TC)$. 对 $\mathfrak{C}$ 中的每一个 f: $A \to B$, 设 $f^{\#}$为 $A \to B \xrightarrow{\eta_B} TB$的合成，那么，数据$(T, \eta, \circ)$都被假定满足下述的公理．对所有的 α: $A \to TB$, β: $B \to TC$, γ: $C \to TD$, 与 f: $A \to B$,

$$(\gamma\circ\beta)\circ\alpha=\gamma\circ(\beta\circ\alpha),$$

$$\eta_B\circ\alpha=\alpha,$$

$$\alpha\circ f^{\#}=\alpha f.$$

这定义了一个新的范畴 $\mathfrak{C}_T$, $(T, \eta, \circ)$的 Kleishi 范畴(Kleishi category)．$\mathfrak{C}_T$ 的对象就是 $\mathfrak{C}$ 的对象，$\mathfrak{C}_T(A, B)=\mathfrak{C}(A, TB)$，合成是由 $\circ$ 给出的，而恒等态射则是 $\mathfrak{C}_T(A, A)=\mathfrak{C}(A, TA)$中的 η_A.

克隆型的一个代数理论的简单例子如下．让 R 为一个有单位元的环．对于一个集合 A, 让 TA 为向量空间 $R^{(A)}=\{(r_a)_{a\in A}: r_a \in R$, 且只有有限个 r_a不为 0$\}$. 以 B 为列的指标，以 A 为行的指标的一个矩阵是一个映射 α: $B \to TA$, 即, Set 中的一个态射; $\alpha(b)$是矩阵的第 b 列．给定一个 $A \times B$ 矩阵 α: $B \to TA$ 与一个 $B \times C$ 矩阵 β: $C \to TB$, 定义它们的合成 $\alpha\circ\beta$: $C \to TA$ 为通常的矩阵乘法，即 $(\alpha\circ\beta)(c)$是以

$$(\alpha\circ\beta)(c)_a=\sum_b \alpha(b)_a\beta(c)_b$$

为分量的 A 向量．指定变量的嵌入 η: $A \to TA$ 定义为 $\eta(a)_{a'}=\delta_{a,a'}$，其中 δ 表示 Kronecker δ (见 **Kronecker 符号**(Kronecker symbol))．容易检验上述公理都是满足的．

设$(T, \eta, \circ)$是一个克隆型的代数理论．对于 $\mathfrak{C}$ 中的 f: $A \to B$, 定义 Tf: $TA \to TB$为合成 $f^{\#}\circ \mathrm{id}_{TA}$. 于是易知 T是一个函子，而 η: id → T是一个自然变换．又定义 μ_A: $TTA \to TA$ 为合成 $1_{TA}\circ 1_{TTA}$, 于是 μ 也是一个自然变换，而(T, μ, η)是一个三元组．再者，这种对每一个克隆型的代数理论提出一个三元组的构造形成一个一一映射.对于来自泛代数的代数理论(克隆与单子型)的讨论，和观察泛代数的第三种范畴方法，见**泛代数**(universal algebra).

最初，范畴与函子的语言是为满足代数拓扑与同调代数的需要而引进的([A1]，[A4])．在 50年代与 60年代早期，许多注意力都集合在 **Abel 范畴**(Abelian category)上，它可以定义为满足 Ab 的所有基本性质的范畴，在[2] 中曾指出，它对同调代数的发展提供一个充足的基础，而且在[A11] 中证明了，每一个小 Abel 范畴都可完全嵌入到某一个 R 的 Mod_R 中并且保持有限极限与上极限．

在一个 Abel 范畴 $\mathfrak{C}$ 中，"Hom 集" $\mathfrak{C}(A, B)$有一个自然的 **Abel 群**(Abelian group)结构，这个事实促进了充实的(enriched)(或相对的(relative))范畴的理论的发展([A12])，这是一种范畴，它的"Hom 集"是某些"基础范畴" $\mathfrak{B}$ 的对象.那些被它们自己充实的范畴(如 Ab 与 Cat)称为**闭范畴**(closed categories)([A13])．很重要的一类闭范畴(包括 Cat 但不包括 Ab)是由这样的范畴组成的，它们的闭结构("内部 Hom")是由一个伴随来与范畴积结构相关联的——这样的范畴称为 Descartes 闭的(Cartesian closed)．Descartes 闭范畴的概念在 F. W. Lawvere 的关于小范畴的范畴的公理化作为数学的基础([A14])，并在其后 M. Tierney 的初等拓扑斯(topos)的概念的发展上都起着很重要的作用，而在 70年代与 80年代、拓扑斯曾主导着很多的范畴的研究

(见[A15]). Descartes 闭范畴也在逻辑学上有其重要性，因为它们提供了(型的)λ算法的模型(见[A16]).

在 Cat 上充实了的范畴(通常称 2 范畴)近年来也受到了大量的注意. 它们与被充实的范畴的一般研究殊异，因为可考虑其中的图，它们可交换(在同构的意义下)但并不正合；**双范畴**(bicategory)([A17])这个较弱的概念是这种想法的更进一步的表达. 3 范畴与更高维的范畴也已被研究，并已被证明在同伦型([A18])的代数研究方面有其重要性. 在范畴理论的这些领域，凝聚定理(coherence theorems)起着重要的作用；这些定理允许我们从某些特殊的图来推出大量的图的可交换性(例如，见[A19]).

在范畴理论中，近年来做了很多工作的方面包括：纤维范畴(fibred category)的理论([A2])(它与丰富的范畴的理论一起表达了这样的思想，即 Set 可以被换成更一般的基本范畴来作为数学的许多方面的基础)，与拓扑范畴(topological categories)的理论([A3])(这个理论研究具体范畴，它们到 Set 的忘却函子有很好的无限性性质，类似于那些忘却函子 Top → Set 也见**拓扑化范畴**(topologized category)).

除了[9]与[11]以外，[12]与[13]也可推荐作为范畴理论的一般介绍.

参考文献

[A1] Eilenberg, S. and MacLane, S., Natural isomorphisms in group theory, *Proc. Nat. Sci. USA*, **28** (1942), 537 – 543.

[A2] Bénabou, J., Fibred categories and the foundations of naive category theory, *J. Symbolic Logic*, **50** (1985), 10 – 37.

[A3] Brümmer, G. C. L., Topological categories, *Topology Appl.*, **18** (1984), 27 – 41.

[A4] MacLane, S., Duality for groups, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **56** (1950), 485 – 516.

[A5] Kan, D. M., Adjoint functors, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **87** (1958), 294 – 329.

[A6] Manes, E. G., Algebraic theories, Springer, 1976.

[A7] Eilenberg, S. and Moore, J. C., Adjoint functors and triples, Ⅲ. *J. Math.*, **9** (1965), 381 – 398.

[A8] Linton, F. E. J., Some aspects of equational categories, in Proc. Conf. on Categorical Algebra, La Jolla 1965, Springer, 1966, 84 – 94.

[A9] Lawvere, F. W., Functorial semantics of algebraic theories, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **50** (1963), 869 – 872.

[A10] Pareigis, B., Categories and functors, Acad. Press, 1970.

[A11] Mitchell, B., The full imbedding theorem, *Amer. J. Math.*, **86** (1964), 619 – 637.

[A12] Kelly, G. M., Basic concepts of enriched category theory, Cambridge Univ. Press, 1982.

[A13] Eilenberg, S. and Kelly, G. M., Closed categories, in Proc. Conf. on Categorical Algebra, La Jolla 1965, Springer, 1966, 421 – 562.

[A14] Lawvere, F. W., The category of categories as a foundation for mathematics, in Proc. Conf. on Categorical Algebra, La Jolla 1965, Springer, 1966, 1 – 20.

[A15] Johnstone, P. T., Topos theory, Acad. Press, 1977.

[A16] Lambek, J. and Scott, P. J., Introduction to higher order categorical logic, Cambridge Univ. Press, 1986.

[A17] Bénabou, J., Introduction to bicategories, in Reports of the Midwest Category Seminar 1, Lectures Notes in Math., Vol 47, Springer, 1967, 1 – 77.

[A18] Brown, R. and Higgins, P. J., The equivalence of ∞-groupoids and crossed complexes, *Cahiers Top. of Géom. Diff.*, **22** (1981), 371 – 386.

[A19] MacLane, S., Why commutative diagrams coincide with equivalent proofs, in Algebraists' Homage, Contemp. Math. Vol. 13, Amer. Math. Soc., 1982, 387 – 401.

周伯埙 译

范畴(Люстерник - Шнирельман 意义下的)[category (in the sense of Lyusternik - Shnirel'man); категория (в смысле Люстерника - Шнирельмана)]

Люстерник - Шнирельман 范畴(Lyusternik - Shnirel'man Category)是拓扑空间 E 的一个特征——覆盖 E 的闭集 $A_i \subset E$ 的最小数 cat E，这里每一个 A_i 都可以通过 E 中连续形变收缩成一点. Люстерник - Шнирельман 范畴是一个同伦不变量(即它对所有具有相同**伦型**(homotopy type)的拓扑空间都是一样的). 它在**大范围变分学**(variational calculus in the large)中特别重要，因为它给出闭流形上光滑函数平稳(临界)点数的下界. 在没有临界点的非闭流形上，甚至有最简单的例子，就像在整个实数轴上函数 $f(x)=x$ 那样，表明在闭流形类之外，这种估计已不再可能对所有光滑函数有效了. 虽然，在许多情况下，变分学中所讨论的各种函数，作为无穷维函数空间上的函数，其临界点数可能有一个类似的界. 对于Люстерник - Шнирельман 范畴的计算没有一般的方法(尽管对一些具体的空间，它的值是知道的)；一般地仅有如下估计：

$$\operatorname{cat} E \geqslant \operatorname{long} E + 1,$$

其中(上同调)长度((cohomological) length) long E 定义为积非零的正维数上同调类的最大数. 因此，这个断言有时可以直接用上同调积(或对偶地，用闭链的交)来加以表述而不涉及范畴.

范畴是在[1]中引进的. 它由Л. Г. Шнирельман首

先在非平凡情形下对实射影空间计算,其后,它被直接用来解决一些问题,诸如在与二维球面同胚的曲面上关于三条闭测地线的 Poincaré 问题.

参考文献

[1] Lusternik, L., Sur quelques méthodes topologique dans la géométrie différentielle, in Atti del Congresso Internazionale dei Matematici 1928 (Bologna), Vol. 4, Zanicheli, 1931, 291－296.

[2] Люстерник, Л. А., Шнирельман, Л. Г., 《Успехи матем. наук》, 2 (1947), 1, 166－217.

Д. В. Аносов 撰

【补注】 关于闭测地线的 Люстерник - Шнирельман 定理 (Lyusternik - Shnirel'man theorem on closed geodesics)是说,在具有任意 Riemann 度量的二维球面上存在着不自交的三条闭测地线([A2], p.214).

参考文献

[A1] Lusternik, L. [L. A. Lyusternik] and Schnirel'man, L. [L. G. Shnirel'man], Méthodes topologiques dans les problémes variationels, Hermann, 1934.

[A2] Klingenberg, W., Lectures on closed geodesics, Springer, 1978.

[A3] Seifert, H. and Threifall, W., Variationsrechnung im Grossen, Chelsea, reprint, 1948, 91－92.

罗嵩龄、许依群、徐定宥 译

集合的范畴 [category of a set; категория множества]

一个集合"总体"的拓扑特征. 拓扑空间 X 的子集 E 称为在 X 中是第一范畴的 (of the first category), 如果它能够表成 X 中无处稠密集的有限或可数并. 否则称 E 是第二范畴的 (of the second category). 有时也称第一范畴集在 X 中的余集为第二范畴集. 在近代文献中(见[2]), 这种集合(在 Baire 空间(Baire space)中)称为剩余的(residual)或同贫的(comeager). 实数的一个非空闭集,特别是一个区间,在实数空间中不是第一范畴的([1]). 这个结论可以推广到任意完全度量空间上去. 这种推广在分析中有着广泛的应用. 第一范畴集在分析中的作用类似于测度论中的零集. 但是,第一范畴集可以是满测度集,而零集之中也有第二范畴集.

参考文献

[1] Baire, R., Leçons sur les fonctions discontinues, professées au collège de France, Gauthier - Villars, 1905.

[2] Oxtoby, J. C., Measure and category, Springer, 1971.

В. А. Скворцов 撰

【补注】 第一范畴集也称为贫集(meager set),众所周知的 Baire 范畴定理 (Baire category theorem) (见[A1]) 指出,一个完全度量空间不是自身的第一范畴集.

非零的贫集以及非贫的零集的例子可以在 [A2]中定理 5.5 找到.

参考文献

[A1] Royden, H. L., Real analysis, MacMillan, 1968.

[A2] Rooy, A. C. M. van and Schikhof, W. H., A second course on real functions, Combridge Univ. Press, 1982.

罗嵩龄、许依群、徐定宥 译

群范畴 [category of groups; групп категория]

范畴 Gr, 其对象是所有的群,其态射是所有的群同态. 常常假定所研究的群都属于一个泛集 (universal set). 群范畴是一个局部小的双完全的范畴并有零态射. 它有一个唯一的双范畴(bicategory)的结构, 其中可容许的满态射是正规的(见**正规满态射**(normal epimorphism)), 而所有的**单态射**(monomorphism)都是容许的. 正规满态射事实上是满同态,而单态射实是单同态. 群范畴中的射影对象确切地说是自由群(见**范畴的投射对象**(projective object of a category)); 其唯一的内射对象就是单位群,它们也同样是零对象(见**范畴的内射对象**; **零对象** (injective object; null object of a category)). P. Leroux 曾对群范畴给过一个公理的描述([3]).

群范畴是一个任意的范畴 K 上的群范畴之一般定义的一个特殊的情况. 范畴 Gr K 是由 K 中所有的**群对象**(group object)与它们之间的同态所组成的; 这个范畴有 K 的某些性质; 特别地, 如果 K 是完全的, 那么它也是完全的.

参考文献

[1] Курош, А. Г., Лившиц, А. Х., Шульгейфер, Е. Г., 《Успехи матем. наук》, 15 (1960), 6, 3－52.

[2A] Eckmann, B. and Hilton, P. J., Group-like structures in general categories I. Multiplications and comultiplications, *Math. Ann.*, **145** (1963), 3, 227－255.

[2B] Eckmann, B. and Hilton, P. J., Group - like structures in general categories II. Equalizers, limits, lengths. *Math. Ann.*, **151** (1963), 2, 150－186.

[2C] Eckmann, B. and Hilton, P. J., Group - like structures in general categories III. Primitive categories. *Math. Ann.*, **150** (1963), 2, 165－187.

[3] Leroux, P., Une charactérisation de la catégorie des groupes, *Canad. Math. Bull.*, **15** (1972), 3, 375－380.

М. Ш. Цаленко 撰　周伯埙 译

具有对合的范畴 [category with involution; категория с инволюцией]

具有一些二元关系的范畴的特性的范畴. 一个具有对合的范畴是一个范畴, 其中每一个集合 $H(A, B)$ 都由关系 $\subset$ 成为半序集; 又规定了一个映射, 即所谓"对合", 它对每一个态射 α 指定一个态射 $\alpha^{\#}$, 满足下列的条件:

a) 若 $\alpha \in H(A, B)$, 则 $\alpha^{\#} \in H(B, A)$;

b) $\alpha^{\#\#}=\alpha$;

c) 若 $\alpha\in H(A,B)$, $\beta\in H(B,C)$, 则 $(\alpha\beta)^{\#}=\beta^{\#}\alpha^{\#}$;

d) 若 $\alpha\subset\beta$, α, $\beta\in H(A,B)$ 且 $\gamma\in H(B,C)$, 则 $\alpha\gamma\subset\beta\gamma$.

在一个具有对合的范畴中，与正确的陈述语相对偶的陈述语也是正确的(强对偶原理(strong duality priciple))．具有对合的范畴之对偶也是一个具有对合的范畴．每一个群都可被看成是一个具有对合的范畴，此范畴只有单独一个对象，而其序关系是恒等关系(平凡的半序)，而对合则是将每一个群元素变成其逆的映射．

一个具有对合的范畴的重要例子是在集合的范畴 $\mathfrak{S}$ 上的二元关系范畴 $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$(category of binary relations $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$)．构造法如下．Ob $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$ = Ob $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$ 的态射是具有通常的积的二元关系，而其半序则是 Descartes 积的子集的包含关系．这个范畴中的对合定义为交换 Descartes 积中的因子．用同样的方式，二元关系的范畴可以在群、环、拓扑群等等的范畴上来构造．可是，对于拓扑空间的范畴，上述的构造依赖于选择一个双范畴结构，并能有非结合的积．

关于各类具有对合的范畴的构造的描述，它们与各类正合，Abel 的与正则的范畴的联系，以及它们在同调代数中的应用，可在[1]－[4]中找到．

参考文献

[1] Brinkmann, H. B. and Puppe, D., Abelsche und exakte Kategorien, Springer, 1969.

[2] Kawahara, J., Relations in categories with pullbacks, *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A. Math.*, 27 (1973), 1, 149－173.

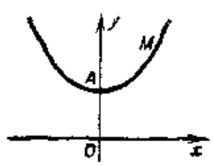
[3] Kawahara, J., Matrix calculus in *I*-categories and an axiomatic characterization of relations in a regular category, *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A. Math.*, 27 (1973), 2, 249－273.

[4] Цаленко, М. Ш., 《Докл. АН СССР》, 211 (1973), 2, 297－299.

М. Ш. Цаленко 撰　周伯埙 译

悬链线 [catenary; цепная линия]

长度不变、两端固定的均质柔韧绳在重力作用下所呈现的平面超越曲线(见图)．



在 Destartes 坐标中，其方程是

$$y=\frac{a}{2}(e^{x/a}+e^{-x/a})=a\cosh\frac{x}{a}.$$

从点 $x=0$ 算起的弧长是

$$l=\frac{1}{2}(e^{x/a}-e^{-x/a})=a\sinh\frac{x}{a}.$$

曲率半径是

$$r=a\cosh^2\frac{x}{a}.$$

由一段悬链线弧、过其两端点的纵坐标和 x 轴所围成的面积是

$$S=a\sqrt{y_2^2-a^2}-a\sqrt{y_1^2-a^2}=$$
$$=a^2\sinh\frac{x_2}{a}-a^2\sinh\frac{x_1}{a}.$$

如果使一段悬链线弧绕 x 轴悬转，则形成**悬链面**(catenoid)．

参考文献

[1] Савелов, А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов 撰

【补注】

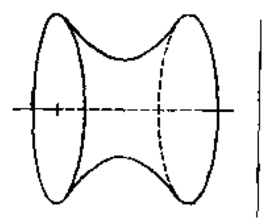
参考文献

[A1] Lawrence, J. D., A catalog of special plane curves, Dover, reprint, 1972.

张鸿林 译

悬链面 [catenoid; катеноид]

由悬链线 $y=a\cosh x/b$ 绕 x 轴旋转而形成的曲面；它是一个**极小曲面**(minimal surface)．设两金属圈相对放置，使其中心连线垂直于圈面，这时张在两金属圈上的肥皂膜呈现的曲面就是悬链面(见图)．



БСЭ-3

【补注】

参考文献

[A1] Hsiung, C. C., A first course in differential geometry, Wiley (interscience), 1981.

张鸿林 译

直角边 [cathetus; катет]

在直角三角形中同直角相邻的边．

Cauchy 特征问题 [Cauchy characteristic problem; Коши характеристическая задача]

值给出在特征流形上的求偏微分方程(或偏微分方程组)的解的问题．

对于广泛的一类双曲型方程和抛物型方程，在自变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n, t$ 的空间 E_{n+1} 中，以确定方式定向的非闭 n 维曲面 S 可以作为它的给值面. 例如，如果 S 是类空曲面，那么 **Cauchy 问题**(Cauchy problem)(初值给在 S 上)的提法总是适定的. 在 Cauchy 特征问题中给值面总是特征流形(或者它的某个确定部分). 在此情形 Cauchy 问题可以没有解；如果有解，也可以是不唯一的.

例如，对方程 ($n=1$, $x_1=x$)

$$u_{xt}=0$$

在特征 $t=0$ 上给值

$$u(x, 0)=\tau(x),\ u_t(x, 0)=v(x)$$

的 Cauchy 特征问题是不适定的. 如果 Cauchy 特征问题的解存在，那么从方程和第二个初始条件导出的问题可解的必要条件是 $v'(x)=0$，即仅当 $v(x)=$ 常数 $=\alpha$ 时 Cauchy 特征问题的解可以存在. 在此情形，如果 $\tau(x)\in C^2$, $t\geqslant 0$，解事实上存在，并由下列公式给出:

$$u(x, t)=\tau(x)+\alpha t+\rho(t),$$

其中 $\rho(t)$ 是 C^2 类的任意函数，$t\geqslant 0$，满足条件 $\rho(0)=\rho'(0)=0$.

为使线性双曲型方程组的 Cauchy 特征问题的解存在，要求方程组的增广矩阵的阶等于沿特征曲面 S 的退化矩阵的阶.

存在广泛的一类双曲型方程和方程组，特征曲面可以作为它们的给值面. 例如，对于方程

$$\sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}-u_{tt}=0, \qquad (1)$$

它的特征曲面 S 是锥面

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i^0)^2-(t-t_0)^2=0. \qquad (2)$$

Cauchy 特征问题为：求方程 (1) 在锥面 (2) 内正则的解，它在锥面 (2) 上取预先给定的值.

在一个空间变量 ($n=1$, $x_1=x$) 的情形，锥面 (2) 成为一对通过点 (x_0, t_0) 的直线 $(x-x_0)^2=(t-t_0)^2$. 这两条直线将变量 x, t 的平面 E_2 划分为四个角. 设域 Ω 是这些角中的一个. 在此情形特征问题被称为 Goursat 问题：确定方程

$$u_{xx}-u_{tt}=0$$

在域 Ω 正则的解 $u(x, t)$，它满足条件

$$u=\varphi,\ 若\ x-x_0=t-t_0,$$

$$u=\psi,\ 若\ x-x_0=t_0-t,$$

$$\varphi(x_0, t_0)=\psi(x_0, t_0).$$

如果特征曲面 S 同时是退化型或退化阶的曲面，那么 Cauchy 特征问题可以是适定的.

方程

$$y^m u_{yy}-u_{xx}+au_x+bu_y+cu=f \qquad (3)$$

当 $y>0$ 时是双曲型的，退化线 $y=0$ 是特征线. 当 $0<m<1$ 时方程 (3) 的 Cauchy 问题

$$u(x, 0)=\tau(x),\ u_y(x, 0)=v(x) \qquad (4)$$

是适定的，而当 $m\geqslant 1$ 时它就成为不适定的. 在此情形研究这一问题自然的是提变态的初始数据

$$\lim_{y\to 0}\alpha(x, y)u(x, y)=\tau(x),$$

$$\lim_{y\to 0}\beta(x, y)u_y(x, y)=v(x),$$

$$\lim_{y\to 0}\alpha(x, y)=0,\ \lim_{y\to 0}\beta(x, y)=0,$$

或者提不完全初始数据，即将 (4) 中条件去掉一个.

参考文献

[1] Владимиров, В. С., Уравнения математической физики, 3 изд., М., 1976.

[2] Годунов, С. К., Уравнения математической физики, М., 1971.

[3] Tricomi, F., Equazioni a derivate parziali, Cremonese, 1957.

[4] Bers, L., John, F. and Schechter, M., Partial differential equations, Interscience, 1964.

[5] Бицадзе, А. В., Калиниченко, Д. Ф., Сборник задач по уравнениям математической физики, М., 1977 (英译本: Bitsadze, A. V. and Kalinichenko, D. F., A collection of problems on the equations of mathematical physics, Mir Publishers, 1980).

[6] Бицадзе, А. В., Линейные уравнения с частными производными смешанного типа, в кн. Тр. третьего Всесоюзного математического съезда, т. 3, М., 1958.

B. A. Елеев 撰

【补注】 对这问题更通用的英文用语是 "characteristic Cauchy problem" (特征 Cauchy 问题). [A1] 中 12.8 节给出一般讨论.

参考文献

[A1] Hörmander, L., The analysis of linear partial differential operators, 2, Springer, 1983.

[A2] Bitsadze, A. V., Equations of mixed type, Pergamon, 1964 (译自俄文).

[A3] Courant, R. and Hilbert, D., Methods of mathematical physics, Partial differential equations, 2, Interscience, 1965 (译自德文) (中译本: R. 柯朗, D. 希尔伯特, 数学物理方法, II, 科学出版社, 1977).

孙和生 译 陆柱家 校

Cauchy 准则 [**Cauchy criteria; Коши критерий**]

1) 关于数列收敛性的 Cauchy 准则. (实数或复数

的)数列$\{x_n\}$ $(n=1, 2, \cdots)$收敛于一个极限,其充分必要条件是:当给定任何$\varepsilon>0$时,存在序数N,使得对于一切$n\geqslant N$和$m\geqslant N$,均有

$$|x_n-x_m|<\varepsilon .$$

关于数列收敛性的判别准则可以推广为关于完全度量空间中的点列收敛性的判别准则.

完全度量空间中的点列$\{x_n\}$是收敛的,其充分必要条件是:当给定任何$\varepsilon>0$时,存在N,使得对于一切$n\geqslant N$和$m\geqslant N$,不等式$\rho(x_n, x_m)<\varepsilon$成立.

2)关于$n(n\geqslant1)$个变量的函数存在极限的Cauchy准则. 设f是定义在n维空间$\mathbf{R}^n$中的集合X上的实值或复值的函数,a是集合X的一个极限点(或者符号∞,在这种情况下,集合X是无界的). 有限的极限$\lim_{z\to a, z\in X} f(z)$存在的充分必要条件是:当给定任何$\varepsilon>0$时,存在$a$的邻域$U=U(a)$,使得对于任何$x'\in U\cap X$和$x''\in U\cap X$,均有

$$|f(x'')-f(x')|<\varepsilon .$$

这个判别准则可以推广到更一般的映射:设X是一个拓扑空间,a是X的使得第一可数公理成立的极限点,Y是一个完全度量空间,f是X到Y的映射. 这时,极限$\lim_{x\to a} f(x)$存在的充分必要条件是:当给定任何$\varepsilon>0$时,存在a的邻域$U=U(a)$,使得对于一切$x'\in U$和$x''\in U$,均有

$$\rho(f(x''), f(x'))<\varepsilon .$$

3)关于函数族一致收敛性的Cauchy准则. 设X是一个集合,Y是一个拓扑空间,$y_0\in Y$是Y的使得第一可数公理成立的极限点,R是一个完全度量空间,$f(x,y)$是集合$X\times Y$到R的映射$(x\in X, y\in Y)$. 这时,对于固定的$y\in Y$,把集合X映射到R的函数族$f(x, y)$当$y\to y_0$时在X上一致收敛,如果当给定$\varepsilon>0$时,存在y_0的邻域$U=U(y_0)$,使得对于一切$y'\in U$, $y''\in U$和一切$x\in X$,均有

$$\rho(f(x, y''), f(x, y'))<\varepsilon .$$

特别是,如果Y是自然数集合,而$f_n(x)=f(x, n)$,则当$n\to\infty$时,序列$\{f_n(x)\}$在X上一致收敛,其充分必要条件是:当给定$\varepsilon>0$时,存在序数N,使得对于一切$x\in X$和$n\geqslant N$, $m\geqslant N$,均有

$$|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon .$$

4)关于级数收敛性的Cauchy准则. 实数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$是收敛的,其充分必要条件是:当给定任何$\varepsilon>0$时,存在序数N,使得对于一切$n\geqslant N$和一切整数$p\geqslant0$,均有

$$\left|\sum_{k=1}^{p}u_{n+k}\right|<\varepsilon .$$

关于多重级数的类似判别准则称为Cauchy-Stolz准则(Cauchy-Stolz criteria). 例如,二重级数

$$\sum_{n, m=1}^{\infty}u_{nm}$$

在矩形部分和

$$S_{nm}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}u_{kl}$$

收敛性的意义下是收敛的,其充分必要条件是:对任意给定的$\varepsilon>0$,都存在序数N,使得对于一切$n\geqslant N$, $m\geqslant N$和一切整数$p\geqslant0$, $q\geqslant0$,均有

$$|S_{n+p,m+q}-S_{nm}|<\varepsilon .$$

这些判别准则可以推广到Banach空间中的级数的情况(用适当的范数来代替绝对值).

5)关于级数一致收敛性的Cauchy准则. 设$u_n=u_n(x)(n=1, 2, \cdots)$是定义在某个集合$X$上的实值函数. 级数

$$\sum_{m=1}^{\infty}u_n(x)$$

在集合X上一致收敛,其充分必要条件是:当给定任何$\varepsilon>0$时,存在序数N,使得对于一切$n\geqslant N$,一切整数$p\geqslant0$和一切$x\in X$,均有

$$\left|\sum_{k=1}^{p}u_{n+k}(x)\right|<\varepsilon .$$

这些判别准则可以推广到多重级数的情况,而且,不仅适用于数项级数,还适用于其各项属于Banach空间的级数,即其项$u_n(x)$为X到Banach空间的映射的级数.

6)关于反常积分收敛性的Cauchy准则. 设f是定义在一个半闭区间$[a, b)$ $(-\infty<a<b\leqslant+\infty)$上的数值函数. 假设对于任何$c\in(a,b)$,函数$f$在$[a,c]$上是(Riemann或Lebesque)可积的. 这时,广义积分

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

是收敛的,其充分必要条件是:当给定任何$\varepsilon>0$时,存在$\eta\in(a, b)$,使得对于一切满足条件$\eta<\eta'<b$, $\eta<\eta''<b$的η'和η'',均有

$$\left|\int_{\eta'}^{\eta''}f(x)\,dx\right|<\varepsilon .$$

对于其他类型的广义积分,这个判别准则可以用类似的方式来表述,它还可以推广到函数f依赖于多个变量且在Banach空间中取值的情况.

7)关于反常积分一致收敛性的Cauchy准则. 设Y

是某个集合，并且假设：对于每个固定的 $y\in Y$，$f(x,y)$ 是定义在半闭区间 $[a,b)$ $(-\infty<a<b\leqslant+\infty)$ 上的数值函数．还假设对于任何 $c\in(a,b)$，函数 $f(x,y)$ 在 $[a,c]$ 上关于 x 是可积的．这时，积分

$$\int_a^b f(x,y)\,dx,\quad y\in Y$$

在 Y 上一致收敛，其充分必要条件是：当给定任何 $\varepsilon>0$ 时，存在 $\eta\in(a,b)$，使得对于一切满足条件 $\eta<\eta'<b$，$\eta<\eta''<b$ 的 η' 和 η'' 以及一切 $y\in Y$，均有

$$\left|\int_{\eta'}^{\eta''} f(x,y)\,dx\right|<\varepsilon.$$

对于其他类型的广义积分，也存在类似的判别准则；这个判别准则也可推广到依赖于多个变量且在 Banach 空间中取值的函数的情况．

参考文献

[1] Cauchy, A. L., Analyse algébrique, Paris, 1821.

[2] Stolz, O., *Math. Ann.*, **24** (1884), 154–171.

[3] Dieudonné, J. A., Foundations of modern analysis, Acad. Press, 1961（中译本：J. 迪厄多内，现代分析基础，科学出版社，1982）.

[4] Ильин, В. А., Позняк, Э. Г., Основы математического анализа, 3 изд., т. 1, М., 1971, т. 2, М., 1973（英译本：Il'in, V. A. and Poznyak, E. G., Fundamentals of mathematical analysis, 1–2, Mir, 1971–1973）.

[5] Кудрявцев, Л. Д., Курс математического анализа, т. 1–2, М., 1981.

[6] Никольский, С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1–2, М., 1975（英译本：Nikol'skiĭ, S. M., A course of mathematical analysis, 1–2, Mir, 1977）.

[7] Whittaker, E. T. and Watson, G. N., A course of modern analysis, Cambridge Univ. Press, 1952.

Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】 1) 中的判别准则可以用另一种方式表述如下：一个数列是收敛的，当且仅当它是 **Cauchy 序列**（Cauchy sequence）（亦见[A1]）．度量空间元素序列的这个性质，通常取作度量空间的完全性的定义：一个度量空间称为完全的，如果其中每个 Cauchy 序列都收敛．

参考文献

[A1] Rudin, W., Principles of mathematical analysis, McGraw-Hill, 1953（中译本：W. 卢丁，数学分析原理，高等教育出版社，1979）.

张鸿林 译

Cauchy 判别法 [Cauchy criterion; Коши признак]

1) 级数收敛性的 Cauchy 判别法：给定非负实数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，如果存在数 $q\,(0\leqslant q<1)$，使得对于一切足够大的 n，不等式 $(u_n)^{1/n}\leqslant q$ 成立，这个不等式等价于条件 $\lim_{n\to\infty}\sup(u_n)^{1/n}<1$，则给定的级数收敛．反之，如果对于一切足够大的 n，不等式 $(u_n)^{1/n}\geqslant1$ 成立，甚或较弱的条件"存在子序列 $u_{n_k}(k=1,2,3,\cdots)$，其各项满足不等式 $(u_{n_k})^{1/n_k}\geqslant1$"成立，则给定的级数发散．

特别是，如果 $\lim_{n\to\infty}(u_n)^{1/n}$ 存在且 <1，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；如果这个极限 >1，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散．这是由 A. L. Cauchy 证明的([1])．当级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的各项 u_n 具有任意符号时，如果条件 $\lim_{n\to\infty}\inf|u_n|^{1/n}>1$ 成立，则这个级数发散；如果 $\lim_{n\to\infty}\sup|u_n|^{1/n}<1$，则这个级数绝对收敛．

2) Cauchy 积分判别法（Cauchy integral criterion）或 Cauchy-Maclaurin 积分判别法（Cauchy-Maclaurin integral criterion）：给定非负实数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，如果存在关于 $x\geqslant1$ 有定义的非增、非负函数 $f(x)$，使得 $f(n)=u_n\,(n=1,2,3,\cdots)$，则当且仅当积分 $\int_1^{+\infty}f(x)\,dx$ 收敛时，给定的级数收敛．这个判别法首先是 C. Maclaurin 以几何形式给出的([2])，后来 A. L. Cauchy 又重新发现([3])．

参考文献

[1] Cauchy, A. L., Analyse algébrique, Gauthier-Villars, 1821, 132–135. 德译本：Springer, 1885.

[2] Maclaurin, C., Treatise of fluxions, 1, Edinburgh, 1742, 289–290.

[3] Cauchy, A. L., Sur la convergence des séries, in Oeuvres complètes Sér. 2, Vol. 7, Gauthier-Villars, 1889, 267–279.

[4] Никольский, С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1, М., 1975（英译本：Nikol'skiĭ, S. M., A course of mathematical analysis, 1, Mir, 1977）.

【补注】 亦见 **Cauchy 准则**（Cauchy criteria）．下述命题也称为 Cauchy 并项检验法（Cauchy condensation test）或 Cauchy 收敛定理（准则）（Cauchy convergence theorem (criterion)）：如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的各项 a_n 构成单调递减序列，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 和

$$\sum_{k=0}^{\infty}2^k a_{2^k}(\equiv a_1+2a_2+4a_4+\cdots)$$

是**同等收敛级数**（equiconvergent series），即都收敛，或都发散(见[A1]，[A2])．

参考文献

[A1] Knopp, K., Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, Springer, 1964. 英译本：Blackie, 1951.

[A2] Hardy, G. H., A course of pure mathematics, Cambridge Univ. Press, 1975.

张鸿林 译 蒋正新 校

Cauchy 分布 [Cauchy distribution; Коши распределение]

具有密度

$$p(x;\lambda,\mu)=\frac{1}{\pi}\frac{\lambda}{\lambda^2+(x-\mu)^2},\quad -\infty<x<\infty$$

和分布函数

$$F(x;\lambda,\mu)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan\frac{x-\mu}{\lambda}$$

的连续概率分布，其中 $-\infty<\mu<\infty$ 和 $\lambda>0$ 是参数。Cauchy 分布是单峰的，且关于点 $x=\mu$ 对称，该点既是它的峰值，也是它的中位数。正整数阶的矩（包括数学期望）都不存在，特征函数形如 $\exp(i\mu t-\lambda|t|)$。Cauchy 分布的类在线性变换下是封闭的：如果一个随机变量 X 具有参数 λ 和 μ 的 Cauchy 分布，那么随机变量 $Y=aX+b$ 也具有 Cauchy 分布，其参数为 $\lambda'=|a|\lambda$ 和 $\mu'=a\mu+b$。Cauchy 分布的类在卷积运算下封闭：

$$p(x;\lambda_1,\mu_1)*\cdots*p(x;\lambda_n,\mu_n)=$$
$$=p(x;\lambda_1+\cdots+\lambda_n,\mu_1+\cdots+\mu_n);\qquad (*)$$

换句话说，具有 Cauchy 分布的独立随机变量之和还是一个具有 Cauchy 分布的随机变量。这样，就象正态分布一样，Cauchy 分布属于稳定分布的类，准确地说，它是具有指标 1 的对称**稳定分布**（stable distribution）。Cauchy 分布的下述性质是 (*) 的一个推论：如果 $X_1,\cdots,X_n$ 是具有相同 Cauchy 分布的独立随机变量，那么它们的算术平均 $(X_1+\cdots+X_n)/n$ 具有与每一个 X_k 相同的分布。Cauchy 分布还有一个性质：在 Cauchy 分布族里，即使是相关的随机变量，其和的分布也可能由 (*) 给出。例如，若 X 和 Y 独立且具有相同的 Cauchy 分布，那么随机变量 $X+X$ 和 $X+Y$ 具有相同的 Cauchy 分布。具有参数 $\lambda=1$ 和 $\mu=0$ 的 Cauchy 分布是具有一个自由度的 Student t 分布。具有参数 (λ,μ) 的 Cauchy 分布同随机变量 $\mu+(X/Y)$ 的分布相同，其中 X 和 Y 是独立的，且具有参数分别为 $(0,\lambda^2)$ 和 $(0,1)$ 的正态分布。一个具有这一分布的随机变量是函数 $\mu+\lambda\tan z$，其中 z 是区间 $[-\pi/2,\pi/2]$ 上均匀分布的随机变量。对维数大于 1 的空间，也可以定义 Cauchy 分布。这一概念首先由 A. L. Cauchy 研究。

参考文献

[1] Feller, W., On introduction to probability theory and its applications, 2, Wiley, 1966.

A. B. Прохоров 撰　陈培德 译

Cauchy 滤子 [Cauchy filter; Коши фильтр]

一致空间 X 上的滤子 F，对 X 的一致结构的任意近域 V，存在属于 F 的 V 小集。换言之，Cauchy 滤子是一致空间 X 中含有任意小集的滤子。这个概念是度量空间中 Cauchy 序列概念的推广。

任何收敛滤子都是 Cauchy 滤子。细于 Cauchy 滤子的任何滤子也是 Cauchy 滤子。在一致连续映射下 Cauchy 滤子基的象也是 Cauchy 滤子基。任意 Cauchy 滤子都收敛的一致空间是完全空间。

参考文献

[1] Bourbaki, N., Elements of mathematics, General topology, Addison - Wesley, 1966, Chapt. II: Uniform structures（译自法文）.

Б. А. Ефимов 撰

【补注】 在度量空间（metric space）(X,d) 中，Cauchy 滤子基（Cauchy filterbase）（或 Cauchy d 滤子基（Cauchy d - filterbase））$\mathfrak{A}=\{A_\alpha:\alpha\in\mathscr{A}\}$ 是对任意 $\varepsilon>0$，存在某 $\alpha\in\mathscr{A}$，使 $\operatorname{diam}A_\alpha<\varepsilon$ 的滤子基（见 [A1]）。

空间 X 的滤子基（filterbase）是 X 的子集族 $\{A_\alpha:\alpha\in\mathscr{A}\}$，具有如下性质：1）对所有 α，$A_\alpha\neq\emptyset$；2）对任意 α,β，存在 $\gamma\in\mathscr{A}$，使 $A_\gamma\subset A_\alpha\cap A_\beta$（亦见滤子（filter））。

参考文献

[A1] Dugundji, J., Topology, Allyn & Bacon, 1978.

方嘉琳 译

Cauchy - Hadamard 定理 [Cauchy - Hadamard theorem; Коши - Адамара теорема]

考虑复幂级数

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k(z-a)^k \qquad (1)$$

并且设

$$\Lambda=\lim_{k\to\infty}\sup|c_k|^{1/k}. \qquad (2)$$

如果 $\Lambda=\infty$，则级数 (1) 仅在点 $z=a$ 上收敛；如果 $0<\Lambda<\infty$，则级数 (1) 在圆盘 $|z-a|<R$ 内绝对收敛，这里

$$R=\frac{1}{\Lambda},$$

而在这个圆盘外，即当 $|z-a|>R$ 时是发散的；如果 $\Lambda=0$，则级数 (1) 对于一切 $z\in\mathbf{C}$ 绝对收敛。因此，Cauchy - Hadamard 定理的内容可以用 Cauchy - Hadamard 公式（Cauchy - Hadamard formula）来表达，这里应当从广义的角度来理解这个公式，即包括 $1/\infty=0$ 和 $1/0=\infty$。换句话说，Cauchy - Hadamard 定理如下所述：使得级数 (1)（绝对）收敛的点的集合的内部是半径为 (2) 的圆盘 $|z-a|<R$。在实幂级数 (1) 的情况下，公式 (2) 定义了收敛区间的"半径"：$a-R<x<a+R$。实际上，Cauchy - Hadamard 定理是 A. L. Cauchy 于 1821 年在他的讲义 [1] 中提出的；而给予完全清晰的表述和证明的则是 J. Hadamard（[2]）。

对于 n 个复变量 $z=(z_1,\cdots,z_n)$ $(n\geqslant1)$ 的幂级数

$$f(z)=\sum_{k_1,\cdots,k_n=0}^{\infty}c_{k_1\cdots k_n}(z_1-a_1)^{k_1}\cdots(z_n-a_n)^{k_n}, \qquad (3)$$

存在 Cauchy - Hadamard 公式的下述推广：

$$\lim_{|k|\to\infty}|c_{k_1\cdots k_n}|^{1/|k|}r_1^{k_1}\cdots r_n^{k_n}=1, \qquad (4)$$

$$|k|=k_1+\cdots+k_n.$$

对于级数 (3) 的收敛共轭半径 $r_1,\cdots,r_n$，这个公式成

立(见**收敛圆盘**(disc of convergence). 把(4)写成 $\Phi(r_1, \cdots, r_n)=0$ 的形式,便得到确定某个以 a 为中心的对数性凸 **Reinhardt 域**(Reinhardt domain)的边界的方程,这个区域是使得级数(3) $(n>1)$ 绝对收敛的那些点的集合的内部.

参考文献

[1] Cauchy, A. L., Analyse algébrique, Leipzig, 1894.

[2] Hadamard, J., Essai sur l'étude des functions données par leur développement de Taylor, *J Math. Pures Appl.*, **8** (1892), 4. 101-186.

[3] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967 (英译本: Markushevich, A. I., Theory of functions of a complex variable, 1, Chelsea, 1977).

[4] Шабат, Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., М., 1976.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 Cauchy-Hadamard 定理同 Abel 引理(Abel lemma)是有联系的:在(3)中,设 $a_1=\cdots=a_n=0$,并且假设对于某个常数 a,某个 $\omega\in\mathbf{C}^n$,以及对于一切 $k_1, \cdots, k_n\geqslant 0$,有

$$|c_{k_1,\ldots,k_n}w_1^{k_1}\cdots w_n^{k_n}|\leqslant A.$$

这时,(3)中的幂级数在**多圆盘**(polydisc) $\{z\in\mathbf{C}^n:|z_j|<|w_j|, j=1, \cdots, n\}$ 中绝对收敛(见[A1], 2.4). 这一事实使得幂级数成为研究多变量解析函数的**解析延拓** analytic continuation)的有效工具(亦见 **Hartogs 定理**(Hartogs theorem)).

参考文献

[A1] Hörmander, L., An introduction to complex analysis in several variables, North-Holland, 1973.

张鸿林 译

Cauchy 不等式 [Cauchy inequality; Коши неравенство]

1) 关于实数的有限和的 Cauchy 不等式是指不等式

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n}a_k^2\sum_{k=1}^{n}b_k^2.$$

它是由 A. L. Cauchy 证明的 (1821);关于积分的类似不等式称为 **Буняковский 不等式**(Bunykovskiǐ inequality).

2) Cauchy不等式这个名称也用来称呼关于正则解析函数 $f(z)$ 在复平面 $\mathbf{C}$ 的固定点 a 上的导数的模 $|f^k(a)|$ 的一个不等式,或者关于 $f(z)$ 的幂级数展开式

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-a)^k$$

的系数的模 $|c_k|$ 的不等式. 这两个不等式是

$$|f^{(k)}(a)| \leqslant k!\frac{M(r)}{r^k}, \quad |c_k| \leqslant \frac{M(r)}{r^k}, \qquad (*)$$

其中 r 是使得 $f(z)$ 为正则的任何圆盘 $U=\{z\in\mathbf{C}:|z-a|\leqslant r\}$ 的半径, $M(r)$ 是 $|f(z)|$ 在圆周 $|z-a|=r$ 上的最大模. 不等式(*)出现于 A. L. Cauchy 的著作中(例如见[1]). 由这两个不等式可以直接推出 Cauchy-Hardamard **不等式**(Cauchy-Hadamard inequality)(见[2]):

$$\limsup_{k\to\infty}\left\{\frac{|f^{(k)}(a)|}{k!}\right\}^{1/k} \leqslant \frac{1}{d(a, \partial D)},$$

其中 $d(a, \partial D)$ 是从 a 到 $f(z)$ 的**全纯域**(domain of holomorphy)的边界 ∂D 的距离. 特别是,如果 $f(z)$ 是整函数,则在任何点 $a\in\mathbf{C}$上,有

$$\limsup_{k\to\infty}\left\{\frac{|f^{(k)}(a)|}{k!}\right\}^{1/k} = 0.$$

对于多复变量 $z=(z_1, \cdots, z_n)$ $(n>1)$ 的全纯函数 $f(z)$, Cauchy 不等式是

$$\left|\frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n}f(a)}{\partial z_1^{k_1}\cdots\partial z_n^{k_n}}\right| \leqslant k_1!\cdots k_n!\frac{M(r_1,\ldots,r_n)}{r_1^{k_1}\cdots r_n^{k_n}}$$

或

$$\left|c_{k_1,\ldots,k_n}\right| \leqslant \frac{M(r_1,\ldots,r_n)}{r_1^{k_1}\cdots r_n^{k_n}},$$

$$a=(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbf{C}^n,\quad k_1,\ldots,k_n=0,1,\ldots,$$

其中 $c_{k_1}, \cdots, {}_{k_n}$ 是 $f(z)$ 的下列幂级数展开式的系数:

$$f(z) = \sum_{k_1,\ldots,k_n=0}^{\infty}c_{k_1,\ldots,k_n}(z_1-a_1)^{k_1}\cdots(z_n-a_n)^{k_n},$$

其中 $r_1, \cdots, r_n$ 是使得 $f(z)$ 为全纯的多圆柱 $U^n=\{z\in\mathbf{C}^n:|z_j-a_j|\leqslant r_j, j=1, \cdots, r_n\}$ 的各个半径, $M(r_1, \cdots, r_n)$ 是 $|f(z)|$ 在 U^n 的特异边界上的最大值.

关于参考文献,见 **Cauchy-Hardamard 定理**(Cauchy-Hadamard theorem).

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 在西方的文献中很少使用Буняковский 不等式这个名称,不论是关于实数的有限和的不等式,还是它在复数情况的推广(见 **Буняковский 不等式**(Bunyakovskiǐ inequality)),以及关于积分的类似不等式,通常都称为 Schwarz **不等式** (Schwarz inequality) 或 Cauchy-Schwarz **不等式**(Cauchy-Schwarz inequality).

上述多圆柱 U^n 的特异边界是集合 $T^n=\{z\in\mathbf{C}^n:|z_\nu-a_\nu|=r_\nu, \nu=1, \cdots, n\}$.

张鸿林 译

Cauchy 积分 [Cauchy integral; Коши интеграл]

1) Cauchy 积分是一元实连续函数的定积分. 设

$f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数. 又设 $a=x_0<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b$, $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, $i=1,\cdots,n$. 极限

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x_i$$

称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Cauchy 意义下的定积分，记为

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Cauchy 积分是 **Riemann 积分** (Riemann integral) 的特殊情形. 此定义属于 A. L. Cauchy([1]).

参考文献

[1] Cauchy, A. L., Résumé des leçons données à l'Ecole Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal, 1, Paris, 1823.

2) Cauchy 积分是带有 Cauchy 核 (Cauchy kernel)

$$\frac{1}{2\pi i(\zeta-z)}$$

的积分，它用在闭曲线 L 内正则解析的函数 $f(z)$ 在 L 上的值来表达 f 在 L 内的值. 更精确些，设 $f(z)$ 在区域 D 内为复变量 z 的正则解析函数，又设 L 为位于 D 内的逐段光滑的闭 Jordan 曲线，它的内部也含于 D 内；此外还假设 L 上的方向是逆时针方向. 于是，在单复变解析函数理论中起着最基本作用的公式，也就是所谓 Cauchy 积分公式 (Cauchy integral formula) 成立：

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}. \qquad (1)$$

(1) 式右方的积分称为 Cauchy 积分 (Cauchy integral).

Cauchy 积分以某些特殊的形式首先出现在 A. L. Cauchy 的工作 ([1]) 中.

于是 Cauchy 积分被下面两种条件所刻画：1) 它们是沿着一条闭的光滑(或至少是逐段光滑)曲线 L 来计算的；2) 它们的被积函数具有形式

$$\frac{f(\zeta)}{2\pi i(\zeta-z)},$$

其中 $\zeta\in L$，而 $f(z)$ 是在 L 上及其内部正则解析的函数. 若 $z\in C\overline{G}$ ($\overline{G}$ 的余集)，即 z 位于 L 之外部，那么只要条件 1) 与 2) 成立，就有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}=0,\quad z\in C\overline{G}. \qquad (2)$$

特别地，当 L 是以 z 为中心 ρ 为半径的圆周，即

$$L=\{\zeta=z+\rho e^{i\theta}: 0\leqslant\theta<2\pi\},$$

则 (1) 意味着

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} f(z+\rho e^{i\theta})\,d\theta.$$

这就是说，$f(z)$ 在任意点 $z\in D$ 的值等于它在以 z 为中心的充分小的圆周 $L\subset D$ 上的算术平均值. 公式 (1) 可以用来证明解析函数的许多基本性质.

另一方面，若 $f(z)$ 是无限区域 $C\overline{G}$ (闭曲线 L 的外部) 以及 L 上的正则解析函数，并且若定义

$$f(\infty)=\lim_{z\to\infty} f(z),$$

那么下面的称为无限区域上的 Cauchy 积分公式成立：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}=\begin{cases} f(\infty)-f(z), & z\in C\overline{G}, \\ f(\infty), & z\in G. \end{cases}$$

现在设 Γ 为有限平面上 (不一定是闭) 的逐段光滑曲线，$z\neq\infty$，而 $\varphi(\zeta)$ 为 Γ 上的连续复函数，z 是不在 Γ 上的一点. Cauchy 积分的如下一种推广称为 Cauchy 型积分 (integral of Cauchy type)：

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z},\quad z\notin\Gamma. \qquad (3)$$

函数 $\varphi(\zeta)$ 称为 Cauchy 型积分的密度 (density of the integral of Cauchy type). Cauchy 型积分的基本性质有：

1) 在任意不含 Γ 的点的区域上，$F(z)$ 为正则解析函数.

2) 导数 $F^{(n)}(z)$ 由公式

$$F^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^{n+1}},\quad z\notin\Gamma;\ n=0,1,\cdots$$

给出.

3) $F(z)$ 在无穷远处正则，且 $F(\infty)=0$，$F(z)=O(1/z)$，$z\to\infty$.

从解析函数一般理论以及它对力学物理学的应用这一观点出发，研究 Cauchy 型积分当自变量趋于 Γ 时的边值存在性及其解析表达式有着十分重要的意义. Cauchy 积分 (1) 在 L 内部等于 $f(z)$，而在外部恒为 0. 因此，若 Cauchy 型积分 (3) 成为 Cauchy 积分，即条件 1) 与 2) 均满足时，则从左边 (即从内部) 趋于 L 时，函数 $F(z)$ 具有边值 $F^+(\zeta_0)=f(\zeta_0)$，从而它在每点 $\zeta_0\in L$ 是左连续的，如果它在 L 上赋予这些值的话；当从右边趋于 L (即从外部) 时，函数 $F(z)$ 具有边值 0，即 $F^-(\zeta_0)=0$，因此它在 L 上是右连续的，假如它在 L 上赋予 0 值. 这样，对于 Cauchy 积分，

$$F^+(\zeta_0)-F^-(\zeta_0)=f(\zeta_0).$$

对于一般形式的 Cauchy 型积分，情况将复杂得多. 假设曲线 Γ 的方程是 $\zeta=\zeta(s)$，其中 s 表示从某点

算起的曲线弧长,又设 $\zeta_0=\zeta(s_0)$ 表示 Γ 上任一固定点,而 Γ_ε 表示从曲线 Γ 上除去以 $\zeta(s_0-\varepsilon)$ 与 $\zeta(s_0+\varepsilon)$ 为端点的一段小弧后的剩余部分. 假如极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{\zeta-\zeta_0}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{\zeta-\zeta_0},\ \zeta_0\in\Gamma \quad (4)$$

存在且有限,则称为奇异积分(singular integral). 可以证明,例如当曲线 Γ 在点 ζ_0 的一个邻域内光滑,而 ζ_0 不是 Γ 的端点, 此外密度 $\varphi(\zeta)$ 满足 Hölder 条件

$$|\varphi(\zeta')-\varphi(\zeta'')|\leqslant C|\zeta'-\zeta''|^{\mu},\ \mu>0,$$

那么奇异积分(4)存在.

在上述条件下,还存在着边值,它们可以用 Сохоцкий 公式 (Sokhotskiĭ formulas)来表达:

$$F^{\pm}(\zeta_0)=\pm\frac{1}{2}\varphi(\zeta_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{\zeta-\zeta_0},\ \zeta_0\in\Gamma,\quad (5)$$

并且,函数 $F^{+}(z)$ 与 $F^{-}(z)$ 在 $\zeta_0\in\Gamma$ 的一个邻域内分别在 Γ 上为左连续与右连续. 在 Cauchy 积分的情形,奇异积分等于

$$\frac{f(\zeta_0)}{2},$$

$$F^{+}(\zeta_0)-F^{-}(\zeta_0)=f(\zeta_0),\quad F^{+}(\zeta_0)+F^{-}(\zeta_0)=f(\zeta_0).$$

与(5)等价的公式是

$$F^{+}(\zeta_0)-F^{-}(\zeta_0)=\varphi(\zeta_0), \quad (6)$$

$$F^{+}(\zeta_0)+F^{-}(\zeta_0)=\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{\zeta-\zeta_0},\ \zeta_0\in\Gamma. \quad (7)$$

Сохоцкий 公式(5)-(7)在**解析函数论的边值问题**(boundary value problems of analytic function theory)求解,与 Cauchy 型积分相联系的**奇异积分方程**(singalar integral equation)求解,以及在流体力学、弹性力学的各种问题的求解中都是十分重要的.

今设 Γ 为任意的长为 l 的可求长曲线,为简单计,假设 Γ 是闭的. 又设 $\psi=\psi(s)$ 表示 Γ 在点 $\zeta=\zeta(s)\in\Gamma$ 的切线与 x 轴正方向之间的夹角,它可以看成是弧长 s 的函数,此外再设 $\Phi(s)$ 是定义在 $[0,l]$ 上的有界变差函数. 表达式

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{e^{i\psi}d\Phi(s)}{\zeta-z},\ \zeta=\zeta(s),\ z\notin\Gamma \quad (8)$$

称为 Cauchy - Stieltjes 型积分 (integral of Cauchy - Stieltjes type). 换言之,一个 Cauchy - Stieltjes 型积分是关于支集在 Γ 上的复值 Borel 测度的 Cauchy 型积分. 假如 $\Phi(s)$ 绝对连续,那么 Cauchy - Stieltjes 型积分就成为 Cauchy - Lebesgue 型积分 (integral of Cauchy - Lebesgue type),通常简称为 Cauchy 型积分 (integral of Cauchy type):

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{\zeta-z},\ z\notin\Gamma, \quad (9)$$

其中 $\varphi(\zeta)=\varphi[\zeta(s)]=\Phi'(s)$.

设 ζ_0 为 Γ 上的点,并且在这点存在切线,后者与 x 轴的夹角为 ψ_0;在可求长曲线上,这样的点几乎处处存在. 又设 z 是过 ζ_0 且与法线的交角为 α_0 的直线上的一点,它与 ζ_0 的距离为 $|z-\zeta_0|=\varepsilon$,即 $z=\zeta_0\pm\varepsilon i e^{i(\psi_0+\alpha_0)}$. Cauchy - Stieltjes 型积分(8)与 Γ_ε 上的积分之差

$$W(\zeta_0;\varepsilon,\alpha_0)=\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{\Gamma}\frac{e^{i\psi}d\Phi(s)}{\zeta-z}-\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{e^{i\psi}d\Phi(s)}{\zeta-\zeta_0}\right]$$

对于具有切线的一切点 $\zeta_0\in\Gamma$ 都是有定义的,从而在 Γ 上几乎处处有定义. Cauchy - Stieltjes 型积分理论中的一个重要命题是 Привалов 基本引理(Privalov fundamental lemma):极限

$$\lim_{\epsilon\to 0}W(\zeta_0;\epsilon,\alpha_0)=\pm\frac{1}{2}\Phi'(\zeta_0)$$

可能除了 Γ 上的一个零测度集以外,对所有点 $\zeta_0\in\Gamma$ 都存在且不依赖于 α_0;并且对于 $|\alpha_0|<\pi/2-\delta,\ \delta>0$,收敛关于 α_0 是均匀的. 假如奇异积分在 Γ 上几乎处处存在,那么 Cauchy - Stieltjes 型积分在 Γ 上几乎处处具有角形边值 $F^{\pm}(\zeta_0)$,并且它们满足 Сохоцкий 公式 (Sokhotskiĭ formulas):

$$F^{\pm}(\zeta_0)=\pm\frac{1}{2}\Phi'(s_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{e^{i\psi}d\Phi(s)}{\zeta-\zeta_0},\ \zeta_0\in\Gamma. \quad (10)$$

逆命题也成立:假如一个 Cauchy - Stieltjes 型积分在 Γ 上几乎处处具有从 Γ 内部和外部趋于边界的角形边值,那么奇异积分存在,而且公式(10)在 Γ 上几乎处处成立. 至于要找出合理的简单的充要条件使 Cauchy - Stieltjes 型积分或即使 Cauchy - Lebesgue 型积分具有边值的问题,直到 1987 年还没有完全解决.

和上面所讨论的在光滑曲线 Γ 上 Cauchy 型积分相反,一个 Cauchy - Stieltjes 型积分,即使有角形边值,也未必在 $\zeta_0\in\Gamma$ 的一个邻域内是 Γ 上的左连续或右连续函数. 例如,已经知道,一个 Cauchy - Lebesgue 型积分(9), 在边界为可求长的闭区域 $\bar{D}$ 上是连续的,只要再假定它的密度 $\varphi(\zeta)$ 在曲线 Γ 上满足 Lipschitz 条件:

$$|\varphi(\zeta')-\varphi(\zeta'')|\leqslant C|\zeta'-\zeta''|,\ \zeta',\ \zeta''\in\Gamma.$$

称一个Cauchy - Lebesgue 型积分(9)成为Lebesgue 意义下的 Cauchy 积分

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{\zeta-z},\qquad(11)$$

假如它从 Γ 内部趋于 Γ 时的角形边值 $F^{+}(\zeta_0)$ 在 Γ上几乎处处等于 $\varphi(\zeta_0)$，即在 Γ上几乎处处有 $F^{-}(\zeta_0)=0$. 与此相关，Голубев-Привалов 定理（Golubev - Privalov theorem）成立：Γ上的可积函数 $\varphi(\zeta)$是某个 Cauchy 积分从 Γ 内部趋向边界的角形边值的充要条件是，它的一切矩皆为 0：

$$\int_{\Gamma}\zeta^{n}\varphi(\zeta)d\zeta=0,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.\qquad(12)$$

假如类似的条件

$$\int_{\Gamma}\zeta^{n}e^{i\psi}\,d\Phi(s)=0,\ \ n=0,1,\ldots\qquad(13)$$

成立，那么 Cauchy - Stieltjes 型积分 (8) 成为 Cauchy - Stieltjes 积分 (Cauchy - Stieltjes integral)：

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{e^{i\psi}\,d\Phi(s)}{\zeta-z}.\qquad(14)$$

即从Γ内部得到的角形边值 $F^{+}(\zeta_0)$ 在 Γ上几乎处处等于 $\Phi'(s_0)$，或换言之，从 F 外部得到的角形边值 $F^{-}(\zeta_0)$在 Γ 上几乎处处等于 0. 条件 (13) 立刻导致函数 $\Phi(s)$ 在 $[0, l]$ 上的绝对连续性，从而在此情形下，Cauchy - Stieltjes 积分 (14) 实际上是密度为 $\varphi(\zeta)=\varphi[\zeta(s)]=\Phi'(s)$ 的 Cauchy - Lebesgue 积分 (Cauchy - Lebesgue integral). 所以用 Cauchy - Stieltjes 积分表达的函数类重合于 Cauchy - Lebesgue 积分表达的函数类.

一个重要的问题是，如何对下列函数类进行内在的刻画：由闭的可求长曲线 Γ 所围区域 D 上正则且通过 Cauchy 积分 (11) 表示，通过 Cauchy - Lebesgue 型积分 (9) 表示或通过 Cauchy - Stieltjes 型积分 (8) 表示的函数类；函数类 $A(D)$, $B(D)=H_{\infty}(D)$, $H_p(D)$ 以及 $N^{*}(D)$, 参见**解析函数的边界性质** (boundary properties of analytic functions).

在最简单的情形，当 $D=\{z:|z|<1\}$ 为单位圆盘而 $\Gamma=\{z:|z|=1\}$ 为单位圆周时，一个 Cauchy - Stieltjes 型积分，此时有如下形式：

$$F(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\frac{\zeta\,d\Phi(\theta)}{\zeta-z},\ \ |z|<1,\ \ \zeta=e^{i\theta}.\qquad(15)$$

它表示了函数类 $H_p(0<p<1)$ 中的一个函数. 反之不真：事实上，H_p $(0<p<1)$ 中的函数集远比用 (15) 表达的函数类来得广. 另一方面，D 上可用 Cauchy - Stieltjes 或 Cauchy 积分表达的函数类等同于 H_1 类.

对于边界为可求长曲线的任意单连通区域 D，在 D 上可用 Cauchy - Stieltjes 或 Cauchy 积分表达的函数类与 Смирнов 类 E_1 相重合 (见**解析函数的边界性质** (boundary properties of analytic functions). 可用 Cauchy - Stieltjes 型积分或 Cauchy - Lebesgue 型积分表达的函数类的特征性质将更为复杂.

设 $f(z)$ 是有限闭区域 $\bar{D}$ 上任意(非解析)的 C^1 类函数，这里，$\bar{D}$ 的边界为逐段光滑的 Jordan 曲线 L. 经典公式(1)的如下推广有时也称为 Cauchy 积分公式 (Cauchy integral formula)：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}-\frac{1}{\pi}\iint_{D}\frac{\partial f}{\partial\bar{\zeta}}\frac{d\xi d\eta}{\zeta-z}=\qquad(16)$$
$$=\begin{cases}f(z), & z\in D,\\ 0, & z\in C\bar{D}.\end{cases}$$

其中

$$\frac{\partial f}{\partial\bar{\zeta}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial\xi}+i\frac{\partial f}{\partial\eta}\right),\ \ \zeta=\xi+i\eta.$$

上述公式似乎在 D. Pompeiu 的工作 (1912) 中第一次出现. 它也称为 Pompeiu 公式 (Pompeiu formula)，Borel - Pompeiu 公式 (Borel - Pompeiu formula)，或 Cauchy - Green 公式 (Cauchy - Green formula)，它在广义解析函数论，奇异积分方程以及各种应用问题中都有广泛应用.

设 $f(z)$ 是闭多圆柱 $\bar{D}$，$D=\{z\in\mathbf{C}^n:|z_\nu-a_\nu|<r_\nu\}$上关于多个复变数 $z=(z_1,\cdots,z_n)$ 的正则解析函数. 于是，在 D 的每一点，$f(z)$ 可用多重 Cauchy积分 (multiple Cauchy integral)

$$f(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{T}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}\qquad(17)$$

表示，其中 $T=\{\zeta\in\mathbf{C}^n:|\zeta_\nu-a_\nu|=r_\nu,\nu=1,\cdots,n\}$ 是多圆柱的特征边界，$\zeta=(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)$，$d\zeta=d\zeta_1\cdots d\zeta_n$，$\zeta-z=(\zeta_1-z_1)\cdots(\zeta_n-z_n)$. 公式 (17) 给出了与单位圆周 $L=\{z\in\mathbf{C}:|z-a|=r\}$ 相似的 Cauchy公式，但当$n>1$时，积分 (17) 并非展布在多圆柱的整个边界上，而仅仅展布在它的特征边界上. 一般地，设 $D=D_1\times\cdots\times D_n$ 为 $\mathbf{C}^n$ 中的多圆区域—— 具有光滑边界 $\partial D_\nu=\{z_\nu=z_\nu(t_\nu):0\leqslant t_\nu\leqslant1\}$ 的单连通平面区域 D_ν 的乘积；又设 $T=\partial D_1\times\cdots\times\partial D_n$ 为 D 的特征边界，它是 n 维的光滑流形. 公式 (17) 也可推广到这种情形.

Cauchy 积分公式的更为深刻的推广，在多复变解析函数论中显得特别重要；例如 **Leray 公式** (Leray formula) (J. Leray 本人则称它为 Cauchy - Fantappiè 公式(Cauchy - Fantappiè formula)) 以及 **Bochner - Martinelli 表示** (Bochner - Martinelli representation formula) 就是这种推广. 在这方面，当$n>1$ 时，人们更关心的是积分表达式的边值性质，而不是公式 (17).

参考文献

[1] Cauchy, A. L., Sur la mécanique céleste et sur un nouveau calcul appelé calcul des limites, Turin, 1831.

[2] Шабат, Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 1–2, 1976.
[3] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1. М., 1967 (中译本: А. И. 马库雪维奇,解析函数,人民教育出版社,1960).
[4] Мусхелишвили, Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, 3 изд., М., 1968 (英译本: Muskhelishvili, N. I., Singular integral equations Wolters-Noordhoff, 1972).
[5] Владимиров, В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964 (英译本: Vladimirov, V. S., Methods of the theory of functions of several complex variables, M. I. T. 1966).
[6] Привалов, И. И., Интеграл Cauchy, Саратов, 1918.
[7] Привалов, И. И., Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.-Л., 1950 (中译本:И. И. 普里瓦洛夫,解析函数的边界性质,科学出版社, 1956).
[8] Хавинсон, С. Я., в кн.: Итоги науки. Математический анализ, 1963, М., 1965, 5–80.
[9] Хведелидзе, Б. В., в кн.: 《Современные проблемы математики》, 7 (1975), М., 5–162.
[10] Calderón, A. P., Cauchy integrals on Lipschitz curves and related operators, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* **74** (1977), 4, 1324–1327.
Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 在非俄文文献中, Plemelj 公式(Plemelj formula)就是这里所称的 Сохоцкий 公式.

与 Cauchy 型积分相关联的奇异积分算子(singular integral operator)的映射性质,构成了一个重要的研究课题. 设 Γ 为 Lipschitz 函数 $\varphi(x)$ 的图形. 由 A. P. Calderón 发展而被 G. David 完满推广的主要结果是,设 f 为 Γ 上光滑且在 Γ 上有紧支集的函数,那么最初作为主值意义下的积分

$$f \to \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{z-\zeta}\, d\zeta$$

的奇异积分算子,可以推广为 $L_2(\Gamma)$ 上的有界算子,从而也是 $L_p(\Gamma)$ 上($1<p<\infty$)以及 $L_\infty(\Gamma)$ 到 BMO(有界平均振动函数(functions of bounded mean oscillation))的有界算子.

形式上,可把积分写成

$$\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{z-\zeta}\, d\zeta=$$

$$=\int_R \frac{f(\xi+i\varphi(\xi))}{x-\xi+i(\varphi(x)-\varphi(\xi))}(1+\varphi'(\xi))\,d\xi=$$

$$=\sum_0^\infty\int_R \frac{f(\xi+i\varphi(\xi))(1+i\varphi(\xi))}{x-\xi}\times$$

$$\times\left[\frac{(-i)(\varphi(x)-\varphi(\xi))}{x-\xi}\right]^n d\xi.$$

带核

$$\frac{1}{x-\xi}\left[\frac{\varphi(x)-\varphi(\xi)}{x-\xi}\right]^n$$

的积分算子 $C_n(\varphi)$ 称为 Calderón 换位子(commutators of Calderón). 它们在偏微分方程论(见偏微分方程(differential equation, partial))中有独立的意义. R. R. Coifman, A. McIntosh 和 Y. Meyer 证明了算子 $C_n(\varphi)$ 和 Cauchy 积分算子具有相同的映射性质. 如今(1987)知道的最佳的范数估计是, 对每个 $\delta>0$, 有 $c_\delta>0$ 使

$$\| C_n(\varphi) \| \leqslant c_\delta (n+1)^{1+\delta} \| \varphi' \|_\infty^n.$$

这是 M. Christ 和 J. L. Journé 所得到的估计.

Cauchy 积分算子以及 Calderón 换位子都是所谓 Calderón-Zygmund 算子(Calderón-Zygmund operators)的例子. 关于这些结果以及进一步的文献可见 [10], [A2], [A3] 及 [A4].

关于 $H_p(0<p<1)$ 中可以表示为 Cauchy 积分的函数的一些结果, 见 [A1].

参考文献

[A1] Aleksandrov, A. B., Essays on non locally convex Hardy classes, in V. P. Havin (V. P. Khavin) and N. K. Nikol'skii (eds.): Complex analysis and spectral theory, Springer, 1981, 1–89.
[A2] Christ, M. and Journé, J. L., Estimates for multilinear singular integral operators with polynomial growth, 1986, Preprint, Dept. of Math. Princeton Univ.
[A3] Coifman, R. R. and Meyer, Y., Non linear harmonic analysis, operator theory and P. D. E. in E. M. Stein (ed.): Beijing lectures in harmonic analysis, Princeton Univ. Press, 1986, 3–46.
[A4] Journé, J. L., Calderón-Zygmund operators, pseudodifferential operators and the Cauchy integral of Calderón, Springer, 1983.
王斯雷 译 郑维行 校

Cauchy 积分定理 [Cauchy integral theorem; Коши интегральная теорема]

如果 $f(z)$ 是单复量 z 在复平面 $\mathbf{C}=\mathbf{C}^1$ 的单连通域 D 内的正则解析函数,则 $f(z)$ 沿 D 内任一可求长闭曲线 γ 的积分等于零:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Cauchy 积分定理的一个等价叙述是:积分

$$\int_a^b f(z)\,dz,\quad a, b\in D$$

不依赖于域 D 内定点 a, b 之间的积分路径的选择. 这在本质上是 A. L. Cauchy 提出这条定理(1825)时的原始表述(见[1]);在 C. F. Gauss 的一封信(1811)

中，也能发现类似的表述．Cauchy 的证明中用了导数 $f'(z)$ 为连续的附加假设；E.Goursat ([2])给出了第一个完整的证明．Cauchy 积分定理所表达的解析函数的特性完全刻画了这类函数（见 **Morera 定理**(Morera theorem)），因而解析函数的所有基本性质都可由Cauchy 积分定理推出．

对于平面 **C** 中或 Riemann 曲面上任意的区域 D，Cauchy 积分定理可表述如下：如果 $f(z)$ 是区域 D 内的正则解析函数，则沿在 D 内同伦于 0 的任一可求长闭曲线 $\gamma\subset D$，$f(z)$ 的积分等于零．

Cauchy积分定理在多复变量解析函数情形的推广是 Cauchy - Poincaré 定理 (Cauchy - Poincaré theorem)：如果 $f(z)(z=(z_1,\cdots,z_n))$ 是复空间 $\mathbf{C}^n(n\geqslant 1)$ 的区域 D 内的正则解析函数，则对任一具有光滑边界 $\gamma=\partial G$ 的 $n+1$ 维曲面 $G\subset D$，有

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0,$$

其中 $f(z)dz$ 是同调微分形式的简写：

$$f(z)dz=f(z_1,\cdots,z_n)dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n.$$

当 $n=1$ 时，曲面 G 与域 D 具有相同的维数：$n+1=2n$（此即经典 Cauchy 定理的情形)；当 $n>1$ 时，G 的维数比 D 的维数低：$n+1<2n$．亦见**解析函数的残数**(residue of an analytic function)；**Cauchy 积分** (Cauchy integral).

参考文献

[1] Cauchy, A. L., Oeuvres complètes, Ser. 1, 4, Paris, 1890.

[2] Goursat, E., Démonstration du théorème de Cauchy, *Acta Math.*, **4** (1884), 197－200.

[3] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967 (中译本：А. И. 马库雪维奇，解析函数论，高等教育出版社，1957).

[4] Владимиров, В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964 (英译本：Vladimirov, V. S., Methods of the theory of functions of several complex variables, M. I. T., 1966).

[5] Шабат, Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 1－2, М., 1976.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 在 [2] 中，Goursat 仍假定了 $f'(z)$ 的连续性，很快他就看出如何去掉这个假定，见 [A1].

参考文献

[A1] Goursat, E., Sur la définition générale des fonctions analytiques d'après Cauchy, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1 (1900) 14－16.

沈永欢 译

Cauchy 核 [Cauchy kernel; Коши ядро]

形如 $1/(t-x)$ 的函数，它是 **Cauchy** 积分(Cauchy integral)的核．在单位圆的情况下，Cauchy 核与 **Hilbert** 核(Hilbert kernel)之间存在下列关系：

$$\frac{dt}{t-\tau} = \frac{1}{2}\left[\operatorname{ctg}\frac{x-s}{2}+i\right]dx,$$

其中

$$t = e^{ix},\quad \tau = e^{is}$$

有时把形如

$$\frac{1}{2\pi i(t-x)}$$

的函数称为 Cauchy 核．

А. Б. Иванов 撰

【补注】 亦见**核函数**(kernel function)；**积分算子的核**(kernel of an integral operator).

参考文献

[A1] Markushevich, A. I., Theory of functions of a complex variable, 1－3, Chelsea, 1977 (译自俄文).

[A2] Titchmarsh, E. C., Introduction to the theory of Fourier integrals, Oxford Univ. Press, 1948.

[A3] Rudin, W., Real and complex analysis, McGraw-Hill, 1974(中译本：W. 卢丁，实分析和复分析，人民教育出版社，1981).

张鸿林 译

Cauchy-Ковалевская 定理 [Cauchy - Kovalevskaya theorem; Коши-Ковалевской теорема]

下述定理：如果微分方程或微分方程组所给出的函数和所有的初始数据以及它们的非特征给值面都是解析的，那么 Cauchy 问题的解析解局部存在(唯一).

对于具有 k 个未知函数 $u_1(x,x_0),\cdots,u_k(x,x_0)$ 的 k 个偏微分方程的组

$$\frac{\partial^m u_i}{\partial x_0^m} = F_i\left[x_0, x, u, \frac{\partial^{m_0+\cdots+m_n}u}{\partial x_0^{m_0}\cdots\partial x_n^{m_n}}\right], \tag{1}$$

其中

$$i=1,\ldots,k,\quad x=(x_1,\ldots,x_n),\quad u=(u_1,\ldots,u_k)$$

$$\sum_{j=0}^{n} m_j \leqslant m,\quad m_0<m,\quad m\geqslant 1.$$

Cauchy - Ковалевская 定理可以这样叙述：考虑具有初始数据 φ_{ij} 的 Cauchy 问题

$$\left.\frac{\partial^j u_i}{\partial x_0^j}\right|_\sigma = \varphi_{ij}(x),\quad i=1,\ldots,k;\ j=0,\ldots,m-1, \tag{2}$$

其中 $\sigma=\{(x,x_0),\ x_0=0,\ x\in\Omega_0\}$ 是数据 φ_{ij} 的初始曲面，如果 F_i 和 φ_{ij} 关于自己所有的变元都是解析的，那么在变量 (x_0,x) 空间中的包含 $\Omega_0\times\{x_0\}$ 的某个域 Ω 中这问题总有唯一的解析解 $u(x,x_0)$.

考虑线性微分方程组

$$P(x,D)u \equiv \sum_{|\alpha|\leqslant m} A_\alpha(x)D^\alpha u = B(x), \tag{3}$$

其中 $\alpha=(\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 是具有非负整数坐标的向量；

$$|\alpha| = \sum_{j=0}^{n}\alpha_j$$

是微分算子

$$D^\alpha = D_0^{\alpha_0}\cdots D_n^{\alpha_n},\ D_j = \frac{\partial}{\partial x_j},\ j=0,\ldots,n$$

的阶，$A_\alpha(x)(x=(x_0,\cdots,x_n))$ 是已给的 N 阶方阵；$u(x)=\|u_j(x)\|\ (j=1,\cdots,N)$ 是未知函数列向量；$B(x)$ 是具有 N 个分量的已知向量．

一般说来，Cauchy - Ковалевская 定理并不排除 Cauchy 问题除解析解外存在非解析解的可能性．然而，对具有解析系数 $A_\alpha(x)$ 和在解析非特征曲面 σ 上具有 Cauchy 条件的线性微分方程组(3)，在曲面 σ 的某个邻域 Ω_0 中 Cauchy 问题有不多于一个的解．这里不需假定初始数据和解 $u(x)$ 的解析性．

由 Cauchy - Ковалевская 定理保证存在的 Cauchy 问题(1)，(2)的解可以是不稳定的(因为初始数据 $\varphi_{ij}(x)$ 的小的变动可以引起解的大的变动)，例如，在方程组(1)属于椭圆型的情形．在非解析初始数据的情形下，如果不限制方程组(1)是双曲型的，那么 Cauchy 问题(1)、(2)可以失去意义．

对广泛的一类方程，Cauchy - Ковалевская 定理可以推广到初始流形在每一点上都是特征的情形(见[1]，[2])．在此情形，初始函数不可以任意给定，它们应该满足某些确定的条件，这些条件由微分方程所支配．

特征 Cauchy 问题(见 **Cauchy 特征问题**(Cauchy characteristic problem))可以有非唯一的解．特别地，有下面的结论．设 $P(x,D)$ 是具有主部 $P_m(x,D)$ 和具有定义在 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 中一点 x^0 的邻域 Ω 中的实解析系数的 m 阶微分算子，φ 是 Ω 中的实解析函数：

$$\operatorname{grad}\varphi(x^0)\neq 0 \text{ 和 } P_m(x,\operatorname{grad}\varphi)=0,$$

但当 $x=x^0$ 时对某个 j，$P_m^{(j)}(x,\operatorname{grad}\varphi)\neq 0$．于是存在点 x^0 的这样的邻域 Ω_0 和属于 $\mathbf{C}^\infty(\Omega_0)$ 的、当 $\varphi(x)\neq\varphi(x^0)$ 时解析的函数 $u(x)$，使得 $P(x,D)u=0$ 和

$$\operatorname{supp} u=\{x:\ x\in\Omega_0,\ \varphi(x)\leqslant\varphi(x^0)\}.$$

如果初始流形沿某一曲线是特征的，那么，一般说来，特征 Cauchy 问题的解在初始曲面的某个邻域中不是唯一的，而分歧的程度由对应的特征曲面的几何性质决定．这定理是 С. В. Ковалевская 证明的(1875)．

参考文献

[1] Bers, L., John, F. and Schechter, M., Partial differential equations, Interscience, 1964.

[2] Бицадзе, А. В., Уравнения математической физики, М., 1976(英译本：Bitsadze, A. V., Equations of mathematical physics, Mir Publishers, 1980).

[3] Владимиров, В. С., Уравнения математической физики, 2 изд., М., 1971.

[4] Courant, R. and Hilbert, D., Methods of mathematical physics, Partial differential equations, 2, Interscience, 1965(译自德文)(中译本：R. 柯朗，D. 希尔伯特，数学物理方法，II，科学出版社，1977).

[5] Hörmander, L., Linear partial differential operators, Springer, 1963(中译本：L. 霍曼德尔，线性偏微分算子，科学出版社，1980).

А. М. Нахушев 撰

【补注】 非解析数据情形的唯一性结果是 Holmgren 定理(Holmgren theorem)(见[5]第 II 部分第 5 章，或见[A2]定理 8.6.5)．线性情形的 Cauchy - Ковалевская 定理的一个现代证明可以在[A2]9.4 节中找到．一个相当短的证明可以在[A1]中找到．

定理也被称为 Cauchy - Kovalevski 或 Cauchy - Kowalewsky 定理(Cauchy - Kowalewsky theorem)．

参考文献

[A1] Chazarain, J. and Piriou, A., Introduction to the theory of linear partial differential equations, North - Holland, 1982(译自法文).

[A2] Hörmander, L., The analysis of linear partial differential operators, 1, Springer, 1983.

孙和生 译　陆柱家 校

Cauchy 矩阵 [**Cauchy matrix**; **Коши матрица**]，线性常微分方程组的

确定该方程组关于空间 $\mathbf{R}^n$(或 $\mathbf{C}^n$)中与 θ 和 τ 无关的某组基的 **Cauchy 算子**(Cauchy operator) $X(\theta,\tau)$ 的矩阵．

В. М. Миллионщиков 撰　周之英 译

Cauchy 算子 [**Cauchy operator**; **Коши оператор**]

常微分方程组

$$\dot{x} = f(t,x),\quad x\in\mathbf{R}^n \tag{1}$$

的 Cauchy 算子是依赖于两个参数 θ 和 τ 的算子 $X(\theta,\tau)$：$\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$，对系统(1)的任何解 $x(t)$ 在点 $t=\tau$ 的值给定的情况下，它给出此解在点 $t=\theta$ 的值

$$X(\theta,\tau)x(\tau) = x(\theta).$$

如果(1)为一线性系统，即

$$\dot{x} = A(t)x, \tag{2}$$

其中 $A(\cdot)$ 是 $(\alpha,\beta)\to\operatorname{Hom}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n)$(或求 $(\alpha,\beta)\to\operatorname{Hom}(\mathbf{C}^n,\mathbf{C}^n)$)的一个映射，在每个区间内可和，那么对任何 $\theta,\tau\in(\alpha,\beta)$，Cauchy 算子是一个 $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$(或 $\mathbf{C}^n\to\mathbf{C}^n$)的非奇异线性映射，并且对任何 $\theta,\tau,\eta\in(\alpha,\beta)$，它满足

$$\left.\begin{aligned} X(\theta,\theta) = I,\quad X(\theta,\tau) &= X^{-1}(\tau,\theta),\\ X(\theta,\eta)X(\eta,\tau) &= X(\theta,\tau)\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

和不等式

$$\| X(\theta,\tau) \| \leqslant \exp\left|\int_{\tau}^{\theta}\| A(t) \| dt\right|.$$

(方程(3)对满足 Cauchy 问题解的存在和唯一性条件的非线性系统(1)也是成立的，只要对其中描述的算子的定义域作一些必要的规定.)系统

$$\dot{x} = A(t)x+h(t)$$

的通解是用系统(2)的 Cauchy 算子 $X(\theta,\tau)$ 由**常数变易**(variation of constants)公式

$$x(t) = X(t,\tau)x(\tau)+\int_{\tau}^{t}X(t,\theta)h(\theta)d\theta$$

表示的，其中 $h(\cdot)$ 是一个在每个区间上可求和的映射

$$(\alpha,\beta)\to\mathbf{R}^n\ \ (\text{或}(\alpha,\beta)\to\mathbf{C}^n).$$

系统(2)的 Cauchy 算子满足 **Liouville - Остроградский 公式**(Liouville - Ostrogradski formula):

$$\det X(\theta,\tau) = \exp\int_{\tau}^{\theta}\operatorname{tr}A(\xi)d\xi,$$

其中 $\operatorname{tr} A(\xi)$ 是算子 $A(\xi)$ 的迹.

系统(1)的 Cauchy 算子 $X(\theta,\tau)$ 在点 $x\in\mathbf{R}^n$ 的导数等于系统(1)沿着解 $x(t)$ 的变分方程系统的 Cauchy 算子，其中 $x(t)$ 在 $t=\tau$ 处的值为 x(基于这样的假定，即对以 θ 和 τ 为端点的区间内所有的 t, $x(t)$ 的图形落在区域 $G\subset\mathbf{R}^{n+1}$ 内，使得 f 为在 G 内具有连续导数的连续映射 $G\to\mathbf{R}^n$；这是判断解对初值的可微性(differentiability of the solution with respect to the initial value)定理的一种表示).

对常系数($A(t)\equiv A$)的线性系统(2)，Cauchy 算子由

$$X(\theta,\tau) = \exp((\theta-\tau)A) \tag{4}$$

定义(给定了线性算子 B, $\exp B$ 定义为 $\sum_{k=0}^{\infty}B^k/k!$；采用另一种方法，置 $\theta=\tau+1$，可通过式(4)定义 $\exp A$). 由(4)明显看出，Cauchy 算子仅依赖于参数的差 $\theta-\tau$:

$$X(\theta+t,\tau+t) = X(\theta,\tau).$$

这一方程是系统自治性的结果——一个适合于每个**自治系统**(autonomous system)

$$\dot{x} = f(x),\ \ x\in\mathbf{R}^n \tag{5}$$

的特性. 用 $f^{\theta-\tau}$ 表示系统(5)的 Cauchy 算子 $X(\theta,\tau)$，可从(3)获得以下公式:

$$f^0 = I;\ (f^t)^{-1} = f^{-t};\ f^t f^\tau = f^{t+\tau}$$

(亦见**动力系统**(dynamical system)；**群在流形上的作用**(action of a group on a manifold)).

对一个具有周期系数，即对某个 $T>0$ 和所有 $t\in\mathbf{R}$

$$A(t+T) = A(t)$$

的线性系统(2)，恒等式

$$X(\theta+T,\tau+T) = X(\theta,\tau)$$

对所有 $\theta,\tau\in\mathbf{R}$ 成立；在此情况下算子 $X(\tau+T,\tau)$ 称为单值算子(monodromy operator)，其中 $\tau\in\mathbf{R}$ 是任意的. 定义算子 $X(\tau+T,\tau)$(或者说 $X(T,0)$)与某组基有关的矩阵称为**单值矩阵**(monodromy matrix). 一个具有周期系数的固定线性系统的所有单值算子是相似的:

$$X(\theta+T,\theta) = X(\theta,\tau)X(\tau+T,\tau)X^{-1}(\theta,\tau).$$

因此，单值算子 $X(\tau+T,\tau)$ 的谱不依赖于 τ. 此单值算子的本征值称为系统的乘子；可用这些乘子来表示系统的稳定性和条件稳定性的条件(见 **Ляпунов 特征指数**(Lyapunov characteristic exponent)；**Ляпунов 稳定性**(Lyapunov stability)；**稳定性理论**(stability theory)). 如果系统(2)具有复周期系数，对某个 $T>0$ 和所有 $t\in\mathbf{R}$,

$$A(\cdot):\mathbf{R}\to\operatorname{Hom}(\mathbf{C}^n,\mathbf{C}^n),\ \ A(t+T) = A(t),$$

那么就有 Ляпунов 定理(Lyapunov theorem)

$$X(\theta,\tau) = S_\tau(\theta)\exp((\theta-\tau)B_\tau),$$

其中 $B_\tau=(1/T)\ln X(\tau+T,\tau)$，$S_\tau(\theta)$ 对任何 $\theta,\tau\in\mathbf{R}$ 为非奇异线性算子 $\mathbf{C}^n\to\mathbf{C}^n$，且 θ 的周期函数:

$$S_\tau(\theta+T) = S_\tau(\theta).$$

Cauchy 算子有时也使用别的名称(例如线性系统的“矩阵子”或“沿轨道的转换算子”).

В. М. Миллионщиков 撰

【补注】 在西方文献中算子 $X(\theta,\tau)$ 通常不附加 Cauchy 的名字，事实上通常并不赋予它任何特殊的名字. 在文献[A2]的 2.1 节中，对 Cauchy 的作用在(1)的分析中作了简述. Liouville - Остроградский 公式以 Liouville 公式(Liouville formula)的名字而更为人们所熟知. [A1]包含了这个公式的一个证明.

参考文献

[A1] Hartman, P., Ordinary differential equations, Birkhäuser, 1982.

[A2] Hille, E., Ordinary differential equations in the complex domain, Wiley (Interscience), 1976.

[A3] Hirsch, M. W. and Smale, S., Differential equations, dynamical systems and linear algebra, Acad. Press, 1974.

周芝英 译

Cauchy 问题 [Cauchy problem; Коши задача]

(常和偏)微分方程理论的基本问题之一：求微分方程的满足所谓的初始条件(初始数据)的解(积分).

Cauchy 问题通常出现在由一微分定律和一初始状态所定义的过程的分析中，它的数学表达是微分方程和初始条件(因此术语和符号的选择是：初始数据对 $t=0$ 给出，而对 $t\geqslant 0$ 求解)．Cauchy 问题与边值问题的区别在于所求解的定义域预先是不指定的．虽然如此，Cauchy 问题，和边值问题一样，是由对解在定义域的边界(部分边界)上加上极限条件来定义的．

与 Cauchy 问题有关的主要问题是：

1) 解是否存在(即使只是局部地)？

2) 如果解存在，那么它属于哪个空间？特别，它的存在域是什么？

3) 解是否唯一？

4) 如果解是唯一的，那么问题是否适定，即解是否在某种意义下是初始数据的连续函数？

最简单的 Cauchy 问题是求一函数 $u(x)$，它定义在半直线 $x\geqslant x_0$ 上，满足一阶常微分方程

$$\frac{du}{dx}=f(x,u) \tag{1}$$

(f 是已知函数)，且在 $x=x_0$ 处取给定值 u_0：

$$u(x_0)=u_0. \tag{2}$$

这在几何上意味着：考虑方程(1)在 (x,u) 平面上的积分曲线族，求出通过点 (x_0,u_0) 的一条曲线．

关于这种函数的存在性的第一个命题(在 f 对所有 x 连续且关于 u 连续可微的假定下)是由 A. L. Cauchy 证明的(1820－1830)，并被 E. Picard 所推广(1891－1896)(他将关于 u 的可微性条件换为 Lipschitz 条件)．结果是：在这些条件下，Cauchy 问题有唯一解，而且连续地依赖于初始数据．Cauchy 问题的近代概念本质上是这个问题的深远推广．

问题 1)到 4)深刻地涉及到事物的本质，即为了令人满意地回答它们就要求加上某些确定的条件，这个事实在常微分方程理论中已阐明．这样，对于方程(1)具有条件(2)的 Cauchy 问题，当 f 被给出在一开集 G 上且仅是连续的时，它的解在某个依赖于 G 和 (x_0,u_0) 的区间上存在(见 **Peano 定理**(Peano theorem))，但它可能不是唯一的．解也可能不一定在 f 的定义域中所有的点上存在．

对常微分方程组的 Cauchy 问题，即对具有初始条件(2)的型为(1)的常微分方程组，其中 $u=u(x)$ 是在有限维向量空间 E 中取值的函数，$u(x_0)=u_0\in E$，而 $f(x,u)$ 是定义在 $\mathbf{R}^+\times E$ 上的函数，它的提法几乎逐字地重复上面的叙述．这里，Picard 条件对于解的存在性和唯一性以及问题的适定性也是充分的．

对高阶常微分方程

$$\frac{d^n u}{dx^n}=f(x,u,u',\ldots,u^{(n-1)})$$

的 Cauchy 问题，其初始数据，除函数本身外，还包含有导数：

$$u(x_0)=u_0,\ u'(x_0)=u_0',\ \ldots,u^{(n-1)}(x_0)=u_0^{(n-1)},$$

可利用标准手段化为形如(1)，(2)的对应问题．

在一阶常微分方程不能用未知函数的导数直接表达(如方程(1)中那样)的情形，Cauchy 问题的提法，除了很大程度上依赖于几何阐明之外，也是类似的；但是，由于不可能将方程(甚至局部地)化为标准形(1)，方程的实际研究可以是复杂的．

如果说对常微分方程 Cauchy 问题的提法和研究都不存在本质的困难，那么在偏微分方程的情形状况就要复杂得多(特别在问题 1)到 4)的回答上)，甚至如果所考虑的函数充分正则(光滑)也是如此．困难主要在于在(代数)可解性的问题中导出的自变量的空间是高维的．例如，考虑全微分形式方程组

$$\omega^\alpha \overset{\text{def}}{=} \sum_i A_i^\alpha(x)\,dx^i=0,$$

$$i=1,\ldots,n,\quad \alpha=1,\ldots,k<n$$

的 Cauchy 问题，这样的方程在某种意义下介乎"常"和"偏"微分方程之间．这里的问题是要确定通过一给定点的 $(n-k)$ 维积分曲面．于是，可解性条件是

$$d\omega^\alpha\wedge\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^k=0$$

(在给定点的邻域中；这里 d，$\wedge$ 分别是外微分和外积的符号)(见 **Frobenius 定理**(Frobenius theorem))．

对线性偏微分方程

$$Lu=\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha(x)\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}=f(x), \tag{3}$$

Cauchy 问题的提法如下：在变量 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 的某个域 G 中要求出一解满足初始条件，即解和直到 $m-1$ 阶的导数在 G 中某个 $(n-1)$ 维超曲面 S 上取给定值．这个超曲面被称为初始条件承载集(carrier of the initial conditions)(或初始曲面(initial surface))．初始条件可以给成 u 关于 S 的单位法线方向 ν 的导数形式：

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial\nu^k}\right|_S=\varphi_k,\quad 0\leqslant k\leqslant m-1, \tag{4}$$

其中 $\varphi_k(x)(x\in S)$ 都是已知函数(Cauchy 数据(Cauchy data))．

对非线性方程，Cauchy 问题的提法是类似的．

与 Cauchy 问题有关的一个概念是非特征曲面．如果一非奇异坐标变换 $x\to x'$ 将 x_0 邻域中的曲面 S "拉直"，即将它转变为超平面 $x_n'=0$ 的一部分，那么在变换后的方程(3)中 $(\partial/\partial x_n')^m$ 的系数正比于

$$Q(x,\nu)=\sum_{|\alpha|=m}a_\alpha(x)\nu^\alpha,\ \nu^\alpha=\nu_1^{\alpha_1}\cdots\nu_n^{\alpha_n}.$$

如果

$$Q(x_0,\nu)\neq 0, \tag{5}$$

那么曲面 S 被称作在点 x_0 是非特征的 (non - characteristic). 在此情形方程(3)可以在 x_0 的邻域中写成所谓的正规形式:

$$\frac{\partial^m u}{\partial x_n'^m} = F\left\{x_i', \frac{\partial^\alpha u}{\partial x'^\alpha}\right\},\ \alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n),\ \alpha_n<m. \quad (6)$$

Cauchy 问题通常在初始数据的承载集是非特征曲面,即当条件(5)对所有 $x_0\in S$ 成立时被研究.

Cauchy-Ковалевская 定理 (Cauchy - Kovalevskaya theorem) 在 Cauchy 问题的理论中占有重要位置,它可叙述如下:如果 S 在它的一点 x_0 的邻域中是解析曲面,如果诸函数 a_α, f 和 $\varphi_k(0\leqslant k\leqslant m-1)$ 都在同一邻域中是解析的,且如果条件(5)满足,那么 Cauchy 问题(3),(4)在这点的邻域中有一解析解 $u(x)$,且这个解在解析函数类中是唯一的. 在解析性的假定下,这个定理对一般非线性方程也成立,只要方程可以化为正规形式(6),而且对这样的方程的组也是成立的. 这个定理实际上具有普遍性质,因为它可应用于解析方程,而不管它们是什么型的(椭圆型的,双曲型的等等),且给出解的局部存在性. 解在非解析函数类中是唯一的.

对高于一阶的偏微分方程的 Cauchy 问题, 如果在 Cauchy - Ковалевская 定理中对方程或对 Cauchy 数据去掉解析性的假定,那么它可以是不适定的. Hadamard 例(Hadamard example)可足以说明: 对 Laplace 方程

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

和初始条件

$$u(x,y,0) = \varphi_0(x,y),\ \frac{\partial u}{\partial z}(x,y,0) = 0$$

的Cauchy 问题, 只要 $\varphi_0(x,y)$ 不是解析函数, 就没有解.

双曲型方程是一大类方程,对于它们 Cauchy 问题是适定的. 在此情形 Cauchy 问题实际上是整体的,但是 S 是非特征的这个条件不再是充分的. S 必须是空向(或类空)曲面. 典型的双曲型方程是波动方程

$$\Box u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0, \quad (7)$$

它在具有变量 $(x,t)=(x_1,\cdots,x_n,t)$ 的 $(n+1)$ 维域中考虑. 这个方程在超平面 $t=0$ 上具有初始数据

$$u(x,0) = \varphi_0(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \varphi_1(x)$$

的 Cauchy 问题,对任意的充分光滑函数 φ_0, φ_1 是唯一可解的,且解连续地(在某个 C^k 度量中)依赖于这些函数. 对 $n=1,2$ 和 $n=3$ 的情形分别由 d'Alembert 公式 (d'Alembert formula)、Poisson 公式 (Poissou formula) 和 Kirchhoff 公式 (Kirchhoff formula) 给出解的显式表示:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi_0(x+t)+\varphi_0(x-t)]+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\varphi_1(\tau)d\tau;$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{|y-x|^2\leqslant t^2}\frac{\varphi_1(y)dy}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_{|y-x|^2\leqslant t^2}\frac{\varphi_0(y)dy}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}},$$

其中 $x=(x_1,x_2),\ y=(y_1,y_2)$;

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi}t\int_{|\xi|=1}\varphi_1(x+t\xi)d\sigma+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left[t\int_{|\xi|=1}\varphi_0(x+t\xi)d\sigma\right],$$

其中 $x=(x_1,x_2,x_3),\ \xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$, $d\sigma$ 是在单位球面 $|\xi|=1$ 上的面元.

$t=0$ 平面上的某个点集上的 Cauchy 数据完全决定了波动方程(7)的解 $u(x,t)$ 在一点 (x,t) 的值,这种点集称为这一点的依赖域(domain of dependence). 点 (x,t) 的依赖域在 $n=1$, 2 和 $n=3$ 的情形(在相应的空间 $\mathbf{R}^n$ 中)分别是由 $|y-x|^2\leqslant t^2$ 所定义的闭区间,圆盘和球. 如果 Cauchy 数据的承载集是超平面 $t=0$ 上的某个域 S,那么在此域上的 Cauchy 数据在使得交集 $S\cap\{|y-x|^2\leqslant t^2\}$ 是非空的所有点 (x,t) 处影响解;这些点的集合称为影响域(domain of influence).

点 $(x,t)\in\mathbf{R}^{n+1}$ 的集合,在这些点上解 u 完全由 S 上的 Cauchy 数据所决定,称为具有 S 上初始数据的 $u(x,t)$ 的定义域(domain of definition)或决定域(domain of determinacy). 在 $n=1$, 2 和 3 的情形,定义域由所有这样的点 (x,t) 所组成,对这些点由 $|y-x|^2\leqslant t^2$ 所分别定义的闭区间,圆盘或球落在 S 中.

这些结果可推广到更一般的情形,在那里 Cauchy 数据的承载集是空间型的曲面 S,即是使(5)中的量 Q 在 S 上恒为正的曲面.

除 Cauchy 问题外,还有别的问题对双曲型方程也是适定的;例如 **Cauchy 特征问题**(Cauchy characteristic problem)和混合初边值问题. 在后一类型问题中解存在于一 $(n+1)$ 维柱体中,此柱体的母线平行于 t 轴,它的基底 S 是在变量 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 的空间中具有边界 Γ 的某个域. 初始条件的承载集是 S,而函数值,它的法导数(在二阶方程情形),或更一般的边值条件是给出在柱体的侧面 $\Gamma\times\{t>0\}$ 上.

在退化方程情形,Cauchy 问题的提法也要有所变更. 例如,如果方程是双曲型的,且 Cauchy 数据的承载集是这样的曲面,方程在其上为抛物退化的,那么依

赖于退化的性质，初值条件可能用到某个权函数.

参考文献

[1] Ковалевская, С. В., Научные работы, М., 1948.
[2] Hadamard, J., Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations, Dover, reprint, 1952（译自法文）.
[3] Bers, L., John, F. and Schechter, M., Partial differential equations, Interscience, 1964.
[4] Бицадзе, А. В., Уравнения математической физики, М., 1976（英译本：Bitsadze, A. V., Equations of mathematical physics, Mir Publishers, 1980）.
[5] Courant, R. and Hilbert, D., Methods of mathematical physics, Partial differential equations, 2, Interscience, 1965（译自德文）（中译本：R. 柯朗，D. 希尔伯特，数学物理方法，II，科学出版社，1977）.
[6] Mizohata, S., The theory of partial differential equations, Cambridge Univ. Press, 1973（译自日文）.
[7] Тихонов, А. Н., Самарский, А. А., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1972.
[8] Hörmander, L., Linear partial differential operators, Springer, 1964（中译本：L. 霍曼德尔，线性偏微分算子，科学出版社，1980）.

A. П. Солдатов 撰

【补注】 术语"Cauchy 问题"大多用于和双曲型初值问题有关的问题中. Hörmander[8]之后又出版了4卷. 其中的两卷[A2]与 Cauchy 问题有关.

从(7)的 Kirchhoff 解（$n=3$）显见，点(x,t)的依赖域实际上是球面$\{y\in\mathbf{R}^3:|y-x|^2=t^2\}$. 和这附注有关的，双曲型偏微分方程的依赖域的一般定义在[5]中第VI.7节中讨论.

近代实践把偏微分算子的双曲性定义为 Cauchy 问题的适定性的一个必要条件，见[A2]第2卷12.3节.

参考文献

[A1] Garabedian, P. R., Partial differential equations, Wiley, 1964.
[A2] Hörmander, L., The analysis of linear partial differential operators, 1–2, Springer, 1985.
[A3] Treves, F., Basic partial differential equations, Acad. Press, 1975（中译本：F. 特勒弗斯，基本线性偏微分方程，上海科学技术出版社，1982）.

孙和生 译 陆柱家 校

Cauchy 问题，常微分方程的数值方法 [Cauchy problem, numerical methods for ordinary differential equations; Коши задача, численные методы решения для обыкновенного дифференциального уравнения]

Cauchy 问题是求满足一个微分方程（或微分方程组）的一个函数（或几个函数），并在某固定点上取给定值的问题. 设

$$y(x)=\{y_1(x),\ldots,y_n(x)\},$$
$$f(x,y)=\{f_1(x,y),\ldots,f_n(x,y)\}$$

为分别在闭区间$I=\{x:|x-a|\leqslant A\}$上和闭区域$\Pi=\{(x,y):|x-a|\leqslant A,\ \|y-b\|\leqslant B\}$内有定义并连续的向量函数，其中$\|\cdot\|$是有限维空间$\mathbf{R}^n$的范数. 使用这个记号，我们可将一阶常微分方程的 Cauchy 问题写成：

$$y'(x)=f(x,y),\ y(x_0)=y_0,\ x_0\in I,\ y_0\in\Pi. \tag{1}$$

适当选择新未知函数可将任一常微分方程组（任意阶的）的 Cauchy 问题简化成这种形式.

如果函数$f(x,y)$在Π中连续，问题(1)有解. 对解的唯一性的充分条件是 Osgood 条件（Osgood condition）：

$$\|f(x,y_1)-f(x,y_2)\|\leqslant\omega(\|y_1-y_2\|), \tag{2}$$

其中$\omega(t)$函数满足

$$\int_\varepsilon^c\frac{dt}{\omega(t)}\to\infty,\ \varepsilon\to0,\ c>0,$$

或者是更强的 Lipschitz 条件（Lipschitz condition）：

$$\|f(x,y_1)-f(x,y_2)\|\leqslant L\|y_1-y_2\| \tag{3}$$

成立，数L称为 Lipschitz 常数（Lipschitz constant）. 如果$f(x,y)$对y连续可微，那么 Lipschitz 常数的一个可能值为

$$L=\sup_{\substack{x\in I\\ y\in\Pi}}\left\|\frac{\partial f}{\partial y}\right\|. \tag{4}$$

在 Lipschitz 常数(4)太大的各种情况下，用数值方法成功地解 Cauchy 问题要求专门的数值技术，尽管从理论上讲这个问题是唯一可解的. 特别是矩阵$(\partial f/\partial x)$的本征值"很分散"时，即最大的本征值是最小的几百倍甚至几千倍，就出现这种情况. 这样的微分方程组称为刚性系统（stiff systems），对应的问题称为刚性 Cauchy 问题（stiff Cauchy problems）. 刚性系统的一个"源"是偏微分方程（例如通过直线方法）到常微分方程组的转换.

常微分方程的数值方法通常包括一个或数个公式，它们确定在离散点列x_k（$k=0,1,\cdots$）上要找的函数$y(x)$的关系. 这些点的集合称为网格. 一般的数值方法以及特别用于微分方程的数值方法，其基础是由 L. Euler 建立的. 解 Cauchy 问题的最简单的方法之一就是以他的名字命名的. 这个方法如下. 将问题(1)的解展成关于点x_k的 Taylor 级数：

$$y(x)=y(x_k)+y'(x_k)(x-x_k)+y''(x_k)\frac{(x-x_k)^2}{2}+\cdots$$

如果$x-x_k$的绝对值很小，那么，舍去$(x-x_k)^2$及更高阶项，便得到一个近似公式

$y(x) \approx y(x_k)+y'(x_k)(x-x_k),\ y'(x_k)=f(x_k,y(x_k)).$
现在就可在点 x_{k+1} 用公式

$$y_{k+1}=y_k+(x_{k+1}-x_k)f(x_k,y_k)$$

估计出近似解．这就是 Euler 法(Euler method)．

数值方法在很大程度上陆续被改进．这种发展趋于两个主要方向：称为 **Runge-Kutta 法**(Runge-Kutta method)的方法以及线性多步法(linear multistep methods)，其中最重要的是 **Adams 法**(Adams method)．

Runge-Kutta 法的一个优点是他们所提出的算法是均匀的，即在一个网格到另一个网格的路径上保持不变．另外，积分的基本步长在 Runge-Kutta 法中，可以根据计算精度的要求来改动，而不使算法本身复杂(见 **Kutta-Merson 法**(Kutta-Merson method)；**Runge 法则**(Runge rule))．在这些方法的基础上，已建立了相当可靠的双边方法．一个主要缺点是，为了在网格的一个点估计出近似解，就必须算出微分方程(1)右边的 $f(x,y)$ 项的一些值．这就意味着——特别当等式的右边各项是复杂的时候——计算时间将会大量增加．

在线性多步法中，包括 Adams 法中，只需在网格的一点计算右边的项．这是这类方法的主要优点．但是用线性多步公式开始计算前，首先必须计算另外的"起始值"．因此这个算法不是自行起动的：最初的几个值必须用其他公式来计算．线性多步法更为严重的缺点是积分的步长不能简单地改变：必须用定步长网格．

线性多步法对被称为预估-校正法(predictor-corrector methods)的发展提供了基础，预估-校正法由一对线性多步公式组成，其中一个(预报式)通常是显式，而另一个(校正式)则是隐式；例如预报式可以是

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}(3f_n-f_{n-1}),$$

而校正式则可以是

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}(f_{n+1}+f_n),$$

其中

$$f_n=f(x_n,y_n).$$

预报-校正法被成功地用于常微分方程刚性系统的解．

尽管高阶微分方程形式上可以化为一阶方程，但适合于实际微分方程形式的方法有时更为有效．在这方面，利用高阶导数的线性多步法已获得很大发展，如 **Störmer 法**(Störmer method)．

参考文献

[1] Березин, И. С., Жидков, Н. П., Методы вычислений, 2 изд., т. 2, М., 1962 (英译本: Berezin, I. S. and Zhidkov, N. P., Computing methods, Pergamon, 1973).

[2] Бахвалов, Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975 (英译本: Bakhvalov, N. S., Numerical methods: analysis, algebra, ordinary differential equations, Mir, 1977).

[3] Hall, G. and Watt, J. M., Modern numerical methods for ordinary differential equations, Clorendon Press, 1976.

В. В. Поспелов 撰

【补注】 在本文的最后一组公式中，预报式是 2 步 Adams-Bashforth 法(2-step Adams-Bashforth method)，校正式是梯形法则(trapezoidal rule)．

在英文数学文献中，有关常微分方程和依赖时间的偏微分方程的 Cauchy 问题通常称为初值问题．

看来，在[A2]中，刚性常微分方程是首先被认识到要求特殊积分方法的方程，也就是说，要求的方法或多或少是无条件稳定的．在[A2]中提出的后向数值积分公式基础上建立的线性多步法，仍然是刚性问题最有效的积分方法之一，特别是 C. W. Gear 的工作是这样认为的(见[A6])．但是，对非刚性问题，情况就不是如此：对这类问题以及在线性多步法这类方法中，Adams 法仍然是最有用的方法(见[A8])．

如[A7]中所描述，直线法可以回溯到 J. L. Lagrange([A9]), J. Fourier([A17])和 E. Rothe([A18])的早期工作，现在是解决与时间有关的偏微分方程初值问题的有效方法．

[A5]是关于 Euler 方法的原始参考文献．尽管作为数值积分方法有它的简单性及证明性，但它便于与较复杂的方法比较，并能用于描述许多重要的现象(见[A8])．

除了 Runge-Kutta 法和线性多步法外，Taylor 级数法可以看作是发展的第三个主要方向．这三类常微分方程数值解法具有的特性分别是利用较多的右边估计、较多的返回值和较多的导数．可以用这三个主要类型的方法组合成各种新的方法．这些新方法中的重要一类是多级多步法；它们具有不同的名称，例如称为混合法(hybrid methods)(见[A1])，或者简单地称为多步 Runge-Kutta 法(multistep Runge-Kutta methods)．多步-多导数法构成了第二类新方法，即所谓的 Obreshkov 法(Obreshkov methods)[A15]．

Kutta-Merson 法([A11])属于所谓的嵌入 Runge-Kutta 法(imbedded Runge-Kutta methods)的一类．这些方法在每一步都提供局部误差的估计．但是由于真(整体)误差和局部误差的关系一般是未知的，并且由于局部误差估计可能是保守的，嵌入法不对解的误差提供可靠的信息，因此，如何将它们用于构成可靠的双边方法的起始点是不清楚的．尽管如此，这些方法特别有用，

因为它们提供了一种方法来监督在积分过程中计算的准确度. 应该提出的是 J. R. Dormand 和 P. J. Prince([A4])最近改进的嵌入法比 Merson 法好得多(见[A7]).

多步法的缺点是它的系数依赖于步长. 这并不意味着必须使用定步长网格. 对以任意网格点位置表示的系数, 很可能导出一般表示式. 但是所谓的 Nordsieck 法(Nordsieck method)([A14])提供了另一个更巧妙的方法. 这一方法, 在每一网格点, 以与所用特定步长无关的形式, 存贮了计算数值解所需的信息. 由于每个 Nordsieck 法与一个线性多步法等价(例如见[A7]), 它可作为补充线性多步法中的一个方法(见[A6]).

预报-校正法是解隐线性多步方程的定点迭代方法. 这些方法在[A12]和[A13]中作了介绍. 因为收敛的原因, 它们不适于积分刚性系统. 在刚性系统情况下, 应将 Newton 型迭代与充分稳定的隐常微分方程方法, 例如隐后向微分法, 一起使用.

[A7](Vol. Ⅱ, 刚性问题, 将出版)和较早期的[A10]是优秀教科书, 它们提供了刚性和非刚性微分方程解法的全部情况. 专著[A3]对刚性方程的 Runge-Kutta 法和这些方法的非线性稳定性分析给出了最新说明. 有关常微分方程的较高级的教科书[A8], [A16]和 J. C. Butcher 近期的书[A1], 有 2000 多篇的参考文献, 提供了关于常微分方程数值分析领域直至 1984 年的几乎全部书目.

参考文献

[A1] Butcher, J. C., The numerical analysis of ordinary differential equations, Runge-Kutta and general linear methods, Wiley, 1987.

[A2] Curtiss, C. F. and Hirschfelder, J. O., Integration of stiff equations, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **38** (1952), 235–243.

[A3] Dekker, K. and Verwer, J. G., Stability of Runge-Kutta methods for stiff nonlinear differential equations, North-Holland, 1984.

[A4] Dormand, J. R. and Prince, P. J., A family of embedded Runge-Kutta formulae, *J. Comp. Appl. Math.*, **6** (19–26).

[A5] Euler, L., Institutionum calculi integralis. Volumen Secundum (1769), in Opera Ommia Ser. 1, Vol. 12, 1914.

[A6] Cear, C. W., Numerical initial value problems in ordinary differential equations, Prentice Hall, 1973.

[A7] Hairer, E., Nørsett, S. P. and Wanner, G. Solving ordinary differential equations, I. Nonstiff problems, Springer, 1987.

[A8] Henrici, P., Discrete variable methods in ordinary differential equations, Wiley, 1962.

[A9] Lagrange, J. L., Solutions des problèmes en calcule, in Oeuvres, Vol. 1, 471–668.

[A10] Lambert, J. D., Computational methods in ordinary differential equations, Wiley, 1973.

[A11] Merson, R. H., An operational method for the study of integration processes, in Proc. Symp. Data Processing, Weapons Res. Establishment, Salisbury, 1957, 110–125.

[A12] Milne, W. E., Numerical integration of ordinary differential equations, *Amer. Math. Monthly*, **33** (1926), 455–460.

[A13] Moulton, F. R., New methods in exterior ballistics, Univ. Chicago Press, 1926.

[A14] Nordsieck, A., On numerical integration of ordinary differential equations, *Math. Comp.*, **16** (1962), 22–49.

[A15] Obrechkoff, N. [N. Obreshkov], Neue Kwadraturformuln, *Abh. Preuss. Akad. Wissenschaft. Math. Nat. Kl.*, 4 (1940).

[A16] Stetter, H. J., Analysis of discretization methods for ordinary differential equations, Springer, 1973.

[A17] Fourier, J. B. J., Théorie analytique de la chaleur, Paris, 1822.

[A18] Rothe, E., Two-dimensional parabolic boundary-value problems as special case of one-dimensional boundary-value problems, *Math. Ann.*, **102** (1930), 650–670.

周芝英 译

Cauchy-Riemann 条件 [Cauchy-Riemann conditions; Коши-Римана условия], d'Alembert-Euler 条件 (d'Alembert-Euler conditions)

为了使复函数 $w=f(z)=u+iv(z=x+iy)$ 作为单复变函数是单演的和解析的, 其实部 $u=u(x,y)$ 和虚部 $v=v(x,y)$ 必须满足的条件.

在复平面的某个区域 D 内定义的函数 $w=f(z)$, 作为复变量 z 的函数, 在点 $z_0=x_0+iy_0$ 上是单演的(monogenic), 即在点 z_0 上具有导数, 当且仅当其实部和虚部 u 和 v 作为实变量 x 和 y 的函数在点 (x_0, y_0) 上是可微的, 而且在这一点上满足 Cauchy-Riemann 方程 (Cauchy-Riemann equations)

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1}$$

如果 Cauchy-Riemann 方程成立, 则 $f'(z)$ 能够表示为下列任何一种形式:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=$$
$$=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

在区域 D 内定义的单值函数 $f(z)$ 在 D 内是解析的，当且仅当其实部和虚部是在整个 D 内处处满足 Cauchy - Riemann方程的可微函数. 满足Cauchy-Riemann 方程(1)的 $C^2(D)$ 类的函数 u 和 v 中的每一个都是 x 和 y 的调和函数；条件(1)是这两个调和函数的共轭条件(conjugacy conditions)：知道其中一个函数便可通过积分求出另一个函数.

对于任何两个正交方向 s 和 n，只要它们相对的方位与 x 轴和 y 轴的情况相同，条件(1)都成立，形式为

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial v}{\partial n},\ \frac{\partial u}{\partial n}=-\frac{\partial v}{\partial s}.$$

例如，在极坐标 $(r,\ \varphi)$ 中，当 $r\neq 0$ 时，

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi},\ \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}=-\frac{\partial v}{\partial r}.$$

如果定义复微分算子(complex differential operator)

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right),\ \frac{\partial}{\partial \bar z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

则可以把 Cauchy - Riemann 方程(1)写成

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z}=0.$$

于是，变量 z 和 $\bar z$ 的可微函数 $f(z,\bar z)$ 是 z 的解析函数，当且仅当 $\partial f/\partial \bar z=0$.

对于解析的多复变函数 $z=(z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_n)$ $(z_k=x_k+iy_k,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，Cauchy - Riemann 方程成为关于函数

$$u=\mathrm{Re}\,f(z)=u(x_1,\ldots,x_n;y_1,\ldots,y_n),$$

$$v=\mathrm{Im}\,f(z)=v(x_1,\ldots,x_n;y_1,\ldots,y_n)$$

的一个偏微分方程组(当 $n>1$ 时为超定的)：

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}=\frac{\partial v}{\partial y_k},\ \frac{\partial u}{\partial y_k}=-\frac{\partial v}{\partial x_k},\ k=1,\ldots,n, \qquad (2)$$

或者利用复微分算子，写成

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z_k}=0,\ k=1,\ldots,n.$$

两个满足条件(2)的 C^2 类的函数 u 和 v 中的每一个都是变量 x_k 和 y_k 的**多重调和函数**(pluriharmonic function) $(n\geqslant 1)$. 当 $n>1$ 时，多重调和函数构成调和函数类的真子类. 条件(2)是两个多重调和函数 u 和 v 的共轭性条件(conjugacy conditions)：知道其中一个，便可通过积分求出另一个.

条件(1)首次明显地出现在 J. d'Alembert 的著作中([1]). 而在 L. Euler 于1777 年送交彼得堡科学院的论文中，第一次把条件(1)作为判断函数解析性的准则([2]). A. L. Cauchy 利用条件(1)建立函数的理论，始于 1814 年提交巴黎科学院的学术报告(见[3]). B. Riemann 的关于函数论基础的著名学位论文完成于 1851 年(见[4]).

参考文献

[1] d'Alembert, J., Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides, Paris, 1752.

[2] Euler, L., *Nova Acta Acad. Sci. Petrop.*, **10** (1797), 3-19.

[3] Cauchy, A. L., Mémoire sur les intégrales définies, in Oeuvres complètes Ser. 1, Vol. 1, Paris, 1882, pp. 319-506.

[4] Weber, H. (ed.), Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen komplexen Grösse, in Riemann's gesammelte mathematische Werke, Dover, reprint, 1953, 3-48.

[5] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967, гл. 1 (Markushevich, A. I., Theory of functions of a complex variable, 1, Chelsea, Chapt. 1).

[6] Шабат, Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., М., 1976, ч. 1, гл. 1; ч. 2, гл. 1.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Ahlfors, L. V., Complex analysis, McGraw - Hill, 1979, 24-26.

张鸿林 译

Cauchy 序列 [Cauchy sequence; Коши последовательность]

同**基本序列** (fundamental sequence).

Cauchy 定理 [Cauchy theorem; Коши теорема]

1)关于多面体的 Cauchy 定理 (Cauchy theorem on polyhedra)：两个闭凸多面体是全等的，如果它们的真正的面、棱和顶点保持一一对应，并且对应面是全等的. 这是关于凸曲面唯一确定性的第一个定理，因为其中所说的两个多面体在内蕴度量的意义下是等距的. Cauchy 定理是下述定理的特殊情况：每个闭凸曲面由它的度量唯一确定(见[4]).

这个定理是 A. L. Cauchy 首先证明的(见[1]).

参考文献

[1] Cauchy, A. L., *J. Ecole Polytechnique*, 9 (1813), 87-98.

[2] Александров, А. Д., Выпуклые многогранники, М.-Л., 1950.

[3] Hadamard, J. S., Leçons de géométrie élémentaire Ⅱ, Armand Colin, second edition, 1906.

[4] Погорелов, А. В., Однозначная определенность вы-

пуклых поверхностей, М.-Л., 1949 (Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 29).
Е. В Шикин 撰

2)关于闭区间上的连续函数的 Cauchy 介值定理(Cauchy intermediate-value theorem):设 f 是 $[a,b]$ 上的连续实值函数,C 是 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的一个数.这时,存在一点 $\xi\in[a,b]$,使得 $f(\xi)=c$.特别是,如果 $f(a)$ 和 $f(b)$ 符号相反,则存在一点 ξ,使得 $f(\xi)=0$.这种形式的 Cauchy 定理可以用来确定存在函数零点的那些区间.由 Cauchy 定理可知:实轴上的一个区间,在从实轴到实轴的连续映射之下的象也是一个区间.这个定理可以推广到拓扑空间:定义在连通的拓扑空间 X 上的任何连续函数 $f: X\to\mathbf{R}^1$,如果取某两个不同的值,则也取这两个值之间的任何值;因此,X 的象也是实数轴上的一个区间.

Cauchy 定理是由 B. Bolzano(1817)和 A. L. Cauchy(1821)各自独立地阐述的.

3) Cauchy 介值定理(Cauchy intermediate-value theorem)是 Lagrange 中值定理的一个推广.如果 f 和 g 是在 $[a,b]$ 上连续、在 (a,b) 上可微的实函数,且在 (a,b) 上 $g'\neq 0$(因此,$g(a)\neq g(b)$),则存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得

$$[f(b)-f(a)]\,g'(\xi)=[g(b)-g(a)]\,f'(\xi).$$

令 $g(t)=t\ (a\leqslant t\leqslant b)$,则得到通常的 Lagrange 中值定理.Cauchy 中间值定理的几何意义是:对于 xy 平面上的任何连续曲线 $x=f(t),\ y=g(t)\ (a\leqslant t\leqslant b)$,如果在其每一点 $(f(t),g(t))$ 处都具有切线,则必存在一点 $(f(\xi),g(\xi))$,过这一点的切线平行于连接曲线两个端点 $(f(a),g(a))$ 和 $(f(b),g(b))$ 的弦.

参考文献

[1] Ильин, В. А., Позняк, Э. Г., Основы математического анализа, 3 изд., ч. 1, М., 1971 (英译本:Il'in, V. A. and Poznyak, E. G., Fundamentals of mathematical analysis, 1-2, Mir, 1982).

[2] Кудрявцев, Л. Д., Математический анализ, 2 изд., т. 1, М., 1973.

[3] Никольский, С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1, М., 1975 (中译本:C. M. 尼柯尔斯基,数学分析教程,第一卷,人民教育出版社,1980, 1981).

Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】(3)中的陈述可以推广.对于在 $[a,b]$ 上连续、在 (a,b) 上可微的实函数 f 和 g,存在一点 $x\in(a,b)$,使得

$$[f(b)-f(a)]\,g'(x)=[g(b)-g(a)]\,f'(x)$$

(见[A1]).

参考文献

[A1] Rudin, W., Principles of mathematical analysis, McGraw-Hill, 1976, pp. 107-108 (中译本:W. 卢丁,数学分析原理,上、下册,人民教育出版社,1979).

4)群论中的 Cauchy 定理(Cauchy thorem in group thory):如果有限群 G 的阶数可被素数 p 整除,则 G 含有 p 阶的元素.

A. L. Cauchy 首先对于置换群证明了这个定理(见[1]).

参考文献

[1] Cauchy, A. L., Exercise d'analyse et de physique mathématique, 3, Paris, 1844, 151-252.

[2] Курош, А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967 (英译本:Kurosh, A. G., The theory of groups, 1-2, Chelsea, 1955-1956).

【补注】

参考文献

[A1] Suzuki, M., Group theory, 1, Springer, 1982.

张鸿林 译 蒋正新 校

焦散线 [caustic; каустика]

被一给定曲线反射或折射后的射线的包络.反射线的焦散线称为反射焦散线(catacaustic),折射线的焦散线称为透射焦散线(diacaustic).

例如,平行光束关于半圆弧的反射焦散线是外摆线(epicycloid)的一部分(见图1);从稠密媒质中一点 A 发出的一束射线被一直线折射后的透射焦散线是以 A' 为尖点的星形线(astroid)的一部分,点 A' 与直线的距离等于点 A 与直线的距离的 $1/n$(其中 n 为折射指数)(见图2).

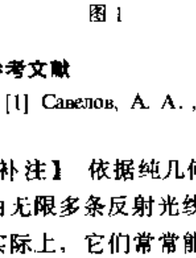


图 1

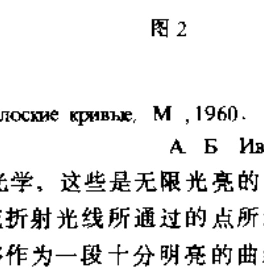


图 2

参考文献

[1] Савелов, А. А., Плоские кривые, М., 1960.

А. Б. Иванов 撰

【补注】依据纯几何光学,这些是无限光亮的曲线,由无限多条反射光线或折射光线所通过的点所组成.实际上,它们常常能够作为一段十分明亮的曲线而被观察到.例如,在阳光明媚的海滨一片水波的底部,或在光线照射下一杯茶的杯底.焦散线也可解释为有三个控制变量的初等突变的分歧(bifurcation)集.为了不仅讨论焦散线的形状,而且也讨论它们的亮度,需要波动光学,并导致研究波动方程的渐近解和振荡积

分([A2], [A3], [A4]).

对于从一点 Q 发出的射线被一曲线 γ 反射后的焦散线，一种描述它的方法是：在 γ 上取一点 T，并过 T 作 γ 的切线 l；从 Q 引切线 l 的垂线，设 R 为垂线上关于 l 与 Q 对称的点．那么，当点 T 沿 γ 移动时，点 R 的轨迹曲线的**渐屈线**(evolute)就是关于 γ 的反射焦线．此结果属于 A. Quetelet．易见，圆的反射焦散线(caustic by reflection)是 **Pascal 蜗线**(Pascal limaçon)．对于透射焦散线(caustic by refraction)也有类似的结果．

参考文献

[A1] Salmon, G., Higher plane curves, Hodges, Foster and Figgis, 1879.

[A2] Chazarain, J., Solutions asymptotiques et caustiques, in F. Pham (ed.), Rencontre de Congrés sur les singularités et leurs applications, Univ. Nice, 1975, 43-78.

[A3] Duistermaat, J. J., Oscillatory integrals, Lagrange immersions, and unfolding of singularities, *Comm. Pure Appl. Math.*, **27** (1974), 207-281.

[A4] Poston, T. and Stewart, I., Catastrophe theory and its applications, Pitman, 1978, Chapt. 12.

[A5] Bruce, J. W. and Giblin, P. J., Curves and singularities: a geometrical introduction to singularity theory, Cambridge Univ. Press, 1984.

沈一兵 译

Cavalieri 原理 [Cavalieri principle; Кавальери принцип]

如果两个立体(或平面图形)被平行于某一给定平面(或直线)的任何平面(或直线)所截，其对应截口(或截线段)的面积(或长度)都相等，则它们的体积(或面积)相等．这一命题古希腊人就已经知道，但一般称为 Cavalieri 原理，虽然 B. Cavalieri (1635)并未把它当作一个原理，而是证明了它．

【译注】 中国南北朝时代南朝的数学家祖冲之的儿子祖暅，在研究立体的体积时提出"幂势既同则积不容异"，也就是说："两个立体，如果等高处的截面积相等，则两个立体的体积相等．"这个原理与 Cavalieri 原理相仿，但早提出1100多年，应称为祖暅原理(Tsu Keng principle)．

张鸿林 译

Cayley 代数 [Cayley algebra; Кэли алгебра]

Cayley 数(Cayley numbers)的代数．

Cayley - Darboux 方程 [Cayley - Darboux equation; Кэли - Дарбу уравнение]

为使曲面族 $u(x_1, x_2, x_3)$ = 常数能够补充到一个三重正交曲面系，函数 $u(x_1, x_2, x_3)$ 必须满足的三阶偏微分方程．Cayley-Darboux 方程可以写成

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{22} & c_{33} & 2c_{12} & 2c_{23} & 2c_{31} \\ u_{11} & u_{22} & u_{33} & 2u_{12} & 2u_{23} & 2u_{31} \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ u_1 & 0 & 0 & u_2 & 0 & u_3 \\ 0 & u_2 & 0 & u_1 & u_3 & 0 \\ 0 & 0 & u_3 & 0 & u_2 & u_1 \end{vmatrix} = 0,$$

其中

$$c_{\alpha\beta} = \sum_{k=1}^{3}(u_k u_{\alpha\beta k} - 2u_{\alpha k}u_{\beta k}),$$

和

$$u_k = u_{x_k}, \ldots, u_{\alpha\beta\gamma} = u_{x_\alpha x_\beta x_\gamma}.$$

A. Cayley 首先以明确的形式得到这个方程([1])．而上述形式则是由 G. Darboux 推出的([2])．

参考文献

[1] Cayley, A., Sur la condition pour qu'une famille de surfaces données puisse faire partie d'un système orthogonal, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **75** (1872), 324-330; 381-385. 亦见：Collected mathematical papers, Vol. 8 (1891), 269-291.

[2] Darboux, G., Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes, Paris, 1898.

[3] Каган, В. Ф., Основы теории поверхностей в тензорном изложении, ч. 2, М.-Л., 1948.

Е. В. Шикин 撰　张鸿林 译

Cayley - Dickson 代数 [Cayley - Dickson algebra; Кэли - Диксона алгебра]

交错 8 维代数，由广义四元数代数经过 Cayley-Dickson 过程(Cayley-Dickson process)导出，见**四元数**(quaternion)和**交错环与交错代数**(alternative rings and algebras)．后者是从一个给定的代数 A 出发去构造一个新的代数 A_1(维数是 A 的维数的 2 倍)，并且是加倍过程的一个推广，见**超复数**(hyper complex number)．即设 A 是域 F 上有单位元 1 的代数，δ 是 F 的某个非零元；并且设 $x \to x^*$ 是 A 的 F 线性映射并且是一个对合，使得

$$x + x^* = \operatorname{tr}(x) \in F, \quad xx^* = n(x) \in F.$$

公式

$$(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1b_1 - \delta b_2 a_2^*, a_1^* b_2 + b_1 a_2)$$

定义了线性空间直和 $A_1 = A \oplus A$ 上的乘法运算，A_1 关于这个运算是一个代数．代数 A 可以嵌入到 A_1 中而作为子代数：$x \to (x, 0)$，并且对合 * 可扩充为 A_1 的对合：$(a_1, a_2)^* = (a_1^*, -a_2)$．而且，

$$\operatorname{tr}(a_1, a_2) = \operatorname{tr}(a_1),\ \ n(a_1, a_2) = n(a_1) + \delta n(a_2).$$

A 到 A_1 的扩张可以重复进行而导出代数的升链 $A \subset A_1 \subset A_2 \subset \cdots$；在每一步扩张过程中 δ 不必相同．如果 Cayley - Dickson 过程是从带有基 $\{1, u\}$，乘法表 $u^2 = u + \alpha$，$\alpha \in F$，$4\alpha + 1 \neq 0$，并且对合 $1^* = 1$，$u^* = 1 - u$，的代数 A 开始，那么这个过程的第一次应用产生一个广义四元数代数 A_1(4维结合代数)，而第二次应用产生一个 8 维代数，这就称为 Cayley - Dickson 代数．

任何一个 Cayley - Dickson 代数是交错但非结合的、F 上的中心单代数；反之，一个单交错环或者是结合的，或者是其中心上的 Cayley - Dickson 代数．定义在一个 Cayley - Dickson 代数上的 8 个变量的二次型 $n(x)$ (这 8 个变量相应子基元素) 有乘法性质：$n(xy) = n(x)n(y)$．这就建立了 Cayley - Dickson 代数和二次型合成的存在问题之间的一个联系．一个 Cayley - Dickson 代数是可除代数，当且仅当二次型 $n(x)$ (x 的范数(norm)) 在 F 中不表示零．如果 F 是特征不为 2 的域，那么一个 Cayley - Dickson 代数有基 $\{1\ \ u_1, \cdots, u_7\}$，具有下列乘法表：

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7
u_1	$-\alpha$	u_3	$-\alpha u_2$	$-u_5$	αu_4	$-u_7$	αu_6
u_2	$-u_3$	$-\beta$	βu_1	$-u_6$	u_7	βu_4	$-\beta u_5$
u_3	αu_2	$-\beta u_1$	$-\alpha\beta$	$-u_7$	$-\alpha u_6$	βu_5	$\alpha\beta u_4$
u_4	u_5	u_6	u_7	$-\gamma$	$-\gamma u_1$	$-\gamma u_2$	$-\gamma u_3$
u_5	$-\alpha u_4$	$-u_7$	αu_6	γu_1	$-\alpha\gamma$	$-\gamma u_3$	$\alpha\gamma u_4$
u_6	u_7	$-\beta u_4$	$-\beta u_5$	γu_2	γu_3	$-\beta\gamma$	$-\beta\gamma u_1$
u_7	$-\alpha u_6$	βu_5	$-\alpha\beta u_4$	γu_3	$-\alpha\gamma u_2$	$\beta\gamma u_1$	$-\alpha\beta\gamma$

这里 $\alpha, \beta, \gamma \in F$，$\alpha\beta\gamma \neq 0$，并且对合由条件 $1^* = 1$，$u_i^* = -u_i (i = 1, \cdots, 7)$ 所定义．记这个代数为 $A(\alpha, \beta, \gamma)$．代数 $A(\alpha, \beta, \gamma)$ 和 $A(\alpha', \beta', \gamma')$ 同构，当且仅当它们的二次型 $n(x)$ 等价．如果 $n(x)$ 表示零，那么相应的 Cayley - Dickson 代数同构于 $A(-1, 1, 1)$，这被称为 Cayley 分裂代数 (Cayley splitting algebra)，或向量矩阵代数 (vector - matrix algebra)．它的元素可以被表示为矩阵

$$\begin{Vmatrix} \alpha & a \\ b & \beta \end{Vmatrix},$$

这里 $\alpha, \beta \in F$，$a, b \in V$，其中 V 是具有通常标量积 $\langle a, b \rangle$ 和向量积 $a \times b$ 的 F 上的 3 维向量空间．矩阵乘法由

$$\begin{Vmatrix} \alpha & a \\ b & \beta \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \gamma & c \\ d & \delta \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \alpha\gamma - \langle a, d \rangle & \alpha c + \delta a + b \times d \\ \gamma b + \beta d + a \times c & \beta\delta - \langle b, c \rangle \end{Vmatrix}$$

所定义．

如果 $F = \mathbf{R}$ 是实数域，那么 $A(1, 1, 1)$ 是 **Cayley 数** (Cayley numbers) 代数 (一个可除代数)．$\mathbf{R}$ 上任何一个 Cayley - Dickson 代数或者同构于 $A(1, 1, 1)$，或者同构于 $A(-1, 1, 1)$．

任意域上 Cayley - Dickson 代数的构造归功于 L. E. Dickson，他也研究了这些代数的基本性质(见[1]，[2])．

设 A 是一个交错环．它的结合可交换的中心异于零并且不包含零因子，设 F 是 C 的分式域，那么有一个自然嵌入 $A \to A \otimes_C F$．如果 $A \otimes_C F$ 是 F 上的 Cayley - Dickson 代数，那么就称 A 为 Cayley - Dickson 环 (Cayley - Dickson ring)．

参考文献

[1] Dickson, L. E., Linear algebras, Cambridge Univ. Press, 1930.

[2] Schafer, R. D., An introduction to nonassociative, algebras, Acad. Press, 1966.

[3] Жевлаков, К. А., Слинько, А. М., Шестаков И. Ц., Ширшов, А. И., Кольца, близкие к ассоциативным М., 1978.

Е. Н. Кузьмин 撰　彭联刚 译

Cayley 型 [Cayley form ; Кэли форма]

一个 $(n+1)(N+1)$ 个变量的型，其中 $n = \dim X$，X 是 N 维射影空间 $\mathbf{P}^N$ 里的闭代数子簇，这个型被 X 确定到只差一个常数因子，反过来它又唯一确定 X．其精确定义如下：设 $\tilde{\mathbf{P}}^N$ 是 $\mathbf{P}^N$ 内所有超平面的 N 维射影空间，Γ 是簇 ($n+1$ 个因子 $\tilde{\mathbf{P}}^N$)

$$\tilde{\mathbf{P}}^N \times \cdots \times \tilde{\mathbf{P}}^N \times X$$

的子集，它由所有 $(n+2)$ 元组 $(\pi_1, \cdots, \pi_{n+1}, x)$ 构成，其中 $x \in X$ 是超平面 $\pi_1, \cdots, \pi_{n+1}$ 的一个交点，再设

$$\varphi: \tilde{\mathbf{P}}^N \times \cdots \times \tilde{\mathbf{P}}^N \times X \to \tilde{\mathbf{P}}^N \times \cdots \times \tilde{\mathbf{P}}^N$$

(两边都是 $n+1$ 个因子 $\tilde{\mathbf{P}}^N$) 是自然射影，则 $\varphi(\Gamma)$ 是在

$$\tilde{\mathbf{P}}^N \times \cdots \times \tilde{\mathbf{P}}^N$$

($n+1$ 个因子) 里的一个余维数为 1 的不可约子簇，所以 $\varphi(\Gamma)$ 是某个型 F_X 在

$$\tilde{\mathbf{P}}^N \times \cdots \times \tilde{\mathbf{P}}^N$$

($n+1$ 个因子) 里的零簇．

总可假定 F_X 没有重因子，于是给出 X 后，F_X 可被确定到仅差一个常数因子．反之，F_X 唯一确定了 $\mathbf{P}^N$ 内在 X 的点上相交的所有可能的 $n+1$ 组超平面的集合，从而 F_X 唯一确定 X．型 F_X 称为 X 的 Cayley 型 (Cayley form)．

Cayley 型往往也称为簇 X 的周(炜良)型 (Chow form of the variety) 或相伴型 (associated form)．利用 $\mathbf{P}^N$ 内与 X 相交的 $N-n-1$ 维线性子空间的复形来定义 X 的想法可追溯到 A. Cayley ([5])，他把这一想法应用到 $n=1$，$N=3$ 的情形．Cayley 型的系数就是簇 X

的周(炜良)坐标(Chow coordinates of the variety).

Cayley 型 F_X 关于空间

$$\tilde{\mathbf{P}}^N \times \cdots \times \tilde{\mathbf{P}}^N$$

($n+1$ 个因子)的 $n+1$ 个坐标系的每一个都是齐次的(第 i 个坐标系是这个空间的第 i 个因子的坐标系).型 F_X 关于每一个坐标系都有相同的齐次次数;这个公共次数 d 记为deg X并称为子簇 X 的次数(degree of the subvariety X).对它有一个几何解释:d 是 X与 $\mathbf{P}^N$ 内使 $X\cap L$ 为有限集的所有($N-n$)维线性空间 L 的交点的最大数(即 d 是 X 与"一般"($N-n$)维线性子空间的交点数).

在 $n+1$ 个由 $N+1$ 个变量组成的变量组中每组变量的次数都是 d 的所有的型(可以相差一个非零常数因子)的集合,构成一个 $\nu_{N,n,d}$ 维的射影空间 $\mathbf{P}^{\nu_{N,n,d}}$. Cayley型可与 $\mathbf{P}^{\nu_{N,n,d}}$ 里的点等同.$\mathbf{P}^{\nu_{N,n,d}}$ 中能作为 $\mathbf{P}^N$ 中 d 次 n 维闭子簇的 Cayley 型的点的集合 $C_{N,n,d}$ 是一个拟射影簇;它参数化了所有这种子簇的族,按此方法这个族关于此参数化是代数的.一般地,$C_{N,n,d}$ 在 $\mathbf{P}^{\nu_{N,n,d}}$ 中不一定是闭的.

Cayley型的构造可以自然地移到 $\mathbf{P}^N$ 中的闭 n 维闭链,即 $\mathbf{P}^N$ 中闭 n 维子簇 $X_1,\cdots,X_s$ 的形式线性组合 $m_1X_1+\cdots+m_sX_s$,其中的整系数 $m_i>0$.事实上,令

$$\deg X = \sum_{i=1}^{s} m_i \deg X_i,$$

$F_X=F_{X_1}^{m_1}\cdots F_{X_s}^{m_s}$,则 $\mathbf{P}^N$ 中 d 次 n 维闭链的所有 Cayley 型的集合 $\overline{C_{N,n,d}}$ 是 $\mathbf{P}^{\nu_{N,n,d}}$ 中的闭集.

对 Cayley 型以及簇 $C_{N,n,d}$ 和 $\overline{C_{N,n,d}}$ 性质的研究构成了 $\mathbf{P}^N$ 中子簇和闭链分类问题的一个重要方面.这种分类的第一步是研究 $\overline{C_{N,n,d}}$ 到不可约分支的分解.例如,若 $N=3$, $n=1$, $d=2$(三维空间中二次曲线),则簇 $\overline{C_{3,1,2}}$ 分解为两个不可约 8 维分支.第一个对应于平面二次曲线,第二个对应于一对直线.簇 $C_{N,n,d}$ 的双有理分类是一个重要的问题(在所有已知的例子中,这些簇都是有理的).

参考文献

[1] Шафаревич, И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972(英译本:Shafarevich, I. R., Basic algebraic geometry, Springer, 1977).

[2] Hodge, W. V. D., Pedoe, D., Methods of algebraic geometry, 2, Cambridge Univ. Press, 1952.

[3] Samuel, P., Méthodes d'algébre abstraite en géométrie algébrique, Springer, 1955.

[4] Chow, W.-L., Waerden, B. L. van der, Zur algebraische Geometrie IX, *Math. Ann.*, 113(1937), 692-704.

[5] Cayley, A., On a new analytical representation of curves in space, in *Collected mathematical papers*, Vol. 4, Cambridge Univ. Press, 1891, 446-455, *Quart. J. Pure Appl. Math.*, 3(1860), 225-236.

В. Л. Попов 撰

【补注】 簇 $C_{N,n,d}$ 是 **Hilbert 概形**(Hilbert scheme)的特殊情形.

陈志杰 译

Cayley - Klein 参数 [**Cayley - Klein parameters**; **Кэли-Клейна параметры**]

三维空间的旋转群 SO(3) 的特殊坐标,它的构造归根到底基于分析 SO(3) 和行列式为 1 的 2×2 酉矩阵的群 SU(2) 间的关系:存在一个映射 φ: SU(2)→SO(3),此映射从代数性质来看是一个**满态射**(epimorphism),从拓扑性质来看是双重**覆叠**(covering)(限制在单位矩阵的某个邻域,则 φ 是一个同构;换句话说,SO(3)和 SU(2) 是局部同构).每个矩阵 $V\in$ SU(2) 可写成

$$\left\|\begin{matrix}\alpha & \beta\\ -\bar\beta & \bar\alpha\end{matrix}\right\|,$$

其中 α, β 为复数,且 $|\alpha|^2+|\beta|^2=1$. α, β 取作为 $A=\varphi(V)$ 的 Caylay - Klein 参数.(Cayley - Klein 参数有时可取矩阵 V 的四个元素.)可以用许多方法去具体构造具有上面性质的映射,不同的作者采取了稍许不同的途径来定义 Cayley - Klein 参数(见[2], [3]).

由于 φ 不是真的同构,而只是双重覆叠映射,所以不可能将 Cayley - Klein 参数作为 SO(3) 的整体(连续)坐标;而仅能作为局部坐标.不过在 A 是单实参数 t 的连续函数时(不必用任何方式来限制 A 可能取的值域),Cayley - Klein 参数仍可用来研究旋转的过程.事实上,如果在 $t=t_0$ 时取固定值 $V(t_0)=\varphi^{-1}(A(t_0))$,则用对所有 t 的连续性,$V(t)$ 的对应值便唯一决定.(完全逆 φ^{-1} 是双值的这一事实只引导了不仅当 $V(t)=V(s)$ 时,而且当 $V(t)=-V(s)$ 时有 $A(t)=A(s)$.)因此 Cayley - Klein 参数用来刻画绕固定点的刚体运动(其构形空间为 SO(3)).这种做法在[1]中被采用,但是并未达到普及.

群 SU(2) 同构于模为 1 的**四元数**(quaternion)构成之群;将 V 换成对应的四元数 $\rho+\lambda i+\mu j+\gamma k$,就能用适合条件 $\rho^2+\lambda^2+\mu^2+\gamma^2=1$ 的所谓 Euler - Rodriguez 参数的四个实数 ρ,λ,μ,γ 来代替 Caylay - Klein 参数. Euler - Rodriguez 参数与 Caylay - Klein 参数具有简单的关系(见[1], [2])和同样的"双值性"性质(此问题的历史见[1]),在[1]中实质上第一次引向旋转群的双值表示(见**旋量**(spinor)).

参考文献

[1] Klein, F. and Sommerfeld, A., Ueber die Theorie des Kreises, 1-2, Teubner, 1965.

[2] Goldstein, H., Classical mechanics, Addison-Wesley,

1953.

[3] Synge, J. L., Classical dynamics, 3/1, Springer, 1960, 1－225.

Д. В. Аносов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Val, P. Du., Homographies, quaternions and rotations, Clarendon Press, 1964. 许以超 译 石生明 校

Cayley 数 [Cayley numbers；Кэли число]

一种**超复数**(hypercomplex number)，即实数域上 8 维代数(Cayley 代数(Cayley algebra))的元素．这是由 A. Cayley 首先研究的．Cayley 代数可以通过 Cayley - Dickson 过程由四元数代数导出(见 **Cayley-Dickson 代数**(Cayley - Dickson algebra)；**四元数**(quaternion))．它是唯一的无零因子 8 维实交错代数(见 **Frobenius 定理**(Frobenius theorem))．Cayley 代数有唯一的除法与单位元；它是交错的，非结合的与非交换的．

参考文献

[1] Курош, А. Г., Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973 (中译本：А. Г. 库洛什，一般代数学讲义，上海科学技术出版社，1964)．

Н. Н. Вильямс 撰 王志玺 译

Cayley 曲面 [Cayley surface；Кэли поверхность]

一个代数直纹面，它是具有一个 ∞^1 平移网的平移曲面．它在 Discartes 坐标下的方程是

$$x^3-6xy+6z = 0.$$

曲面以 A. Cayley 命名([1])，他把这种曲面作为他对二元二次型束理论的研究的几何例证．

参考文献

[1] Cayley, A., A fourth memoir on quantics, in Collected mathematical papers, Vol. 2, Cambridge Univ. Press, 1889, 513－526, Philos. Trans. Royal Soc. London, **148** (1858), 415－427.

[2] Шуликовский, В. И., Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении, М., 1963.

М. И. Войцеховский 撰 陈志杰 译

Cayley 表 [Cayley table；Кэли таблица]

任意有限**广群**(groupoid)的乘法方表．表的顶行是表示这个广群的全部元素的符号名册(用任何顺序)；这些符号(以同样的顺序)也列于第一列的前端．如该广群有单位元，它通常被放在第一个位置上．设端列的第 i 个位置上的符号是 a_i，而顶行的第 j 个位置上的符号是 a_j，则 i 行和 j 列相交处的符号表示乘积 a_ia_j．A. Cayley 在 1854 年首先对**群**(group)使用了 Cayley 表．

Cayley 表定义一个**拟群**(quasi - group)，当且仅当每个符号在每行(列)中恰好出现一次．群的 Cayley 表必须满足下列附加的条件：对应于乘积 $(a_i a_j) a_k$ 和 $a_i (a_j a_k)$ 的位置上的符号相同．关于主对角线对称的 Cayley 表代表了交换的二元运算；特别地，**Abel 群**(Abelian group)的 Cayley 表正是这种情况．

参考文献

[1] Crossman, I. and Mognus, W., Croups and their graphs, Random House, 1964.

[2] Clifford, A. H. and Preston, G. B., The algebraic of semigroups, 1, Amer. Math. Soc., 1961.

Н. Н. Вильямс 撰 石生明 译 许以超 校

Cayley 变换 [Cayley transform；Кэли преобразование]

在 Hilbert 空间 H 中具有稠密定义域 Dom A 的线性(耗散)算子 A 的 Cayley 变换是指算子 $C_A=(A-iI)(A+iI)^{-1}$．它定义于子空间 Dom $C_A=(A+iI)$ Dom A 上．这个变换的矩阵描述由 A. Cayley 所考虑．Cayley 变换建立了谱 $\sigma(A)$"接近"于实轴的算子 A 与具有几乎酉谱(接近于圆周 $\{\zeta\in C:|\zeta|=1\}$)的算子的性质之间的一种对应．下面的命题成立：1) 如果 A 是一个**线性耗散算子**(dissipative operator)，则 C_A 是一个压缩(即 $\|C_A x\|\leqslant\|x\|$, $x\in$ Dom A)，并且 Ker $(I-C_A)=\{0\}$；2) 如果 T 是一个压缩，Ker$(I-T)=\{0\}$及$(I-T)$ Dom T 在 H 中是稠密的，则对某个线性耗散算子 A，有 $T=C_A$；事实上，$A=i(I+T)(I-T)^{-1}$；3) A 是对称的(自伴的)当且仅当 C_A 是等距的(酉的)；4) $\sigma(A)=\omega(\sigma(C_A))$，这里 $\omega(\zeta)=i(1+\zeta)(1-\zeta)^{-1}$，特别地，$A$ 是有界的当且仅当 $1\notin\sigma(C_A)$；5) 如果 γ 是 H 中一个算子理想，那么由 $A-B\in\gamma$ 可知 $C_A-C_B\in\gamma$；又如果 A，B 是有界算子，那么逆命题也真：由 $C_A-C_B\in\gamma$ 可知 $A-B\in\gamma$．Cayley 变换也在算子 A 与 C_A 的其他一些特征之间建立了对应：谱的各部分的分类，谱的重数，不变子空间的结构，函数演算，谱分解，等等．因此，如果 A 是一个具有单位分解 $\{E_t\}$ $(t\in\mathbf{R})$ 的**自伴算子**(self - adjoint operator)，那么 $\{F_s\}$ 是 C_A 的单位分解，这里 $F_s=E_t$ 而 $s=-2\operatorname{arc}\tan t$，且

$$A = \int_0^{2\pi}\cot\!an\,\frac{s}{2}\,dF_s.$$

参考文献

[1] Ахиезер, Н. И., Глазман, И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 2 изд., М., 1966 (英译本：Akhiezer, N. I. and Glazman, I. M., Theory of linear operators in Hilbert space, 1－2, Pitman, 1980).

[2] Szökefalvi - Nagy, B. and Foias, C., Harmonic analysis of operators on Hilbert space, North - Holland, 1970.

Н. К. Никольский 撰 李炳仁 译

Čech 上同调 [**Čech cohomology**; **Чеха когомологии**], Александров-Čech 上同调(Aleksandrov-Čech cohomology), 谱上同调(spectral cohomology)

系数取自拓扑空间 X 所有开覆盖 α 的网的 Abel 群 G 的上同调群的正向极限

$$H^n(X;G)=\varinjlim H^n(\alpha;G).$$

利用 α 中所有与 A 有非空交的集合的子系流 $\alpha'\subset\alpha$, 可类似地定义闭子集 $A\subset X$ 的上同调群. 群 $H^n(\alpha,\alpha';G)$ 的极限定义了空间偶对 (X,A) 的上同调群 $H^n(X,A;G)$. 空间偶对 (X,A) 的上同调序列

$$\cdots\to H^n(X,A;G)\to H^n(X;G)\to H^n(A;G)\to$$
$$\to H^{n+1}(X,A;G)\to\cdots$$

是正合的, 它是网偶对 (α,α') 的上同调序列的正合极限.

Александров-Čech 上同调作为在一般拓扑空间范畴中对奇异上同调的一种替代, 当后者的适用性确定无疑时, 它们是相同的(即在同调局部连通空间, 特别是局部可缩空间情形). 它满足所有的 **Steenrod-Eilenberg 公理** (Steenrod-Eilenberg axioms), 且在仿紧空间范畴中, 它由这些公理及以下条件唯一确定: a) 对 $p<0$, $H^p=0$; b) 离散并 $\bigcup_\lambda X_\lambda$ 的上同调群自然同构于 X_λ 的上同调群的直积; c) 对任意点 $x\in X$ 的所有邻域系 U_x, $\varinjlim H^p(U_x;G)=H^p(x;G)$. Александров-Čech 上同调同构于 Aleksander-Spanier 上同调(Aleksander-Spanier cohomology). 后者能对取自层的系数来定义, 对于仿紧空间, 它同构于层论中定义的上同调.

空间可以用由闭覆盖的网组成的多面体来逼近, 这是 П. С. Александров 确立的(见[1]-[3]). 对于一种特殊情形, 他给出了拓扑空间逆向极限的定义, 并且在逼近的基础上, 给出了可度量紧统的 Betti 数的定义. 紧统的同调群是用 Vietoris 闭链定义的. Л. С. Понтрягин ([4]) 引进了群的正向谱和逆向谱, 并用来研究紧统的同调群. E. Čech 第一个考虑非紧空间有限开覆盖的网, 并在此基础上开创了任意拓扑空间的同调论. 后来发现, 仅仅考虑有限开覆盖是不合适的(因为这导致了相当复杂的 Stone-Čech 紧化同调). C. H. Dowker ([5]) 证明在非紧空间的同调论和上同调论中使用任意开覆盖更为有效.

参考文献

[1] Aleksandrov, P. S., *Math. Ann.*, **96** (1927), 489-511.
[2] Aleksandrov, P. S., *C. R. Acad. Sci Paris*, **184** (1927), 317-320.
[3] Aleksandroff, P. S., [P. S. Aleksandrov], Untersuchungen über Gestalt und Lage abgeschlossener Mengen beliebiger Dimension, *Ann. of Math.*, (2), **30** (1929), 101-187.
[4] Pontrgagin, L. S., *Math. Ann.*, **105** (1931), 2, 165-205.
[5] Dowker, C. H., Mapping theorems for non-compact spaces, *Amer. J. Math.*, **69** (1947), 200-242.
[6] Steenrod, N. E. and Eilenberg, S., Foundations of algebraic topology, Princeton, Univ. Press, 1966.
[7] Скляренко, Е. Г., 《Успехи матем. наук》, **34** (1979), 6, 90-118.
[8] Massey, W. S., Notes on homology and cohomology theory, Yale Univ. Press, 1964, Chapt. 1-3; 8; Appendix to Chapt. 6.
[9] Čech, E., Théorie générale de l'homologie dans un espace quelconque, *Fund. Math.*, **19** (1932), 149-183.

Е. Г. Скляренко 撰

【补注】 亦见 **Александров-Čech 同调与上同调** (Aleksandrov-Čech homology and cohomology).

高红铸 译 陈贵忠 校

胞腔 [**cell**; **ячейка**]

有时用来表示**双周期函数** (double-periodic function) f 的这样的周期平行四边形的术语, 它的边不包含极, 且它是由一基本周期平行四边形通过平移某个矢量 $z_0\in\mathbf{C}$ 而得到的.

参考文献

[1] Whittaker, E. T. and Watson, G. N., A course of modern analysis, Cambridge Univ. Press, 1927.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 另外, 胞腔这个词在几何学和拓扑学中有几个专门性的意义. 在仿射几何学中一个有限点集的凸包有时称作凸胞腔(convex cell). 使得有相对同胚(relative homeomorphism) $\alpha:(B^n,S^{n-1})\to(\bar{E},\partial E)$ 的一个拓扑 Hausdorff 空间的子集 E 是一个(拓扑) n 维胞腔 (n-dimensional cell). 这里 B^n 是单位球, 它的边界 $\partial B^n=S^{n-1}$ 是 $(n-1)$ 维球面, 且一相对同胚当然是一连续映射 $\alpha:B^n\to\bar{E}$, 使得 $\alpha(S^{n-1})\subset\partial E$ 且 α 诱导一个同胚 $B^n\setminus S^{n-1}\to\bar{E}\setminus\partial E$; 亦见**胞腔复形** (cell complex) 和**胞腔空间** (cellular space). 单位胞腔 (unit cell) 这个用语偶然出现作为对 n 维 Euclid 空间中中心在原点、半径为 1 的球(圆)的一个同义语, 且任一与它同胚的空间有时亦称作 n 维拓扑胞腔 (n-dimensional topological cell). 最后, 胞腔有时亦用来表示一矩阵或类似的结构物(例如, **幻方** (magic square) 或 **Young 图** (Young diagram)) 中进人的可能位置, 或作为对一个块矩阵中一块的同义语.

孙和生 译

胞腔复形 [**cell complex**; **клеточный комплекс**]

不相交胞腔的并所构成的可分空间. 这里, 一个 p 维胞腔 (p-dimensional cell) 是指同胚于 p 维单位立方

体内部的一个拓扑空间．X 称为一个胞腔复形(cell complex)，如果对 X 的每一个 p 维胞腔 t^p，都给定一个从 p 维立方体 I^p 到 X 的连续映射 f，使得：1) f 在 I^p 的内部 $\mathrm{Int}\, I^p$ 上的限制 f^* 是一一的，且象 $f(I^p)$ 是 t^p 在 X 中的闭包 $\bar{t}^p$ (这里 f^* 是 $\mathrm{Int}\, I^p$ 到 t^p 上的同胚)；2) 集合 $f(\partial I^p)$ 包含在 X 的胞腔 t^{p-1} 的并集 X^{p-1} 里，此处 ∂I^p 是 I^p 的边界；并集 X^{p-1} 称为胞腔复形 X 的 $p-1$ 维骨架 (skeleton)．单纯多面体是胞腔复形的一个例子．

胞腔复形 X 的一个子集 L 称为子复形 (subcomplex)，如果它是 X 的一些胞腔的并集，且包含了这些胞腔的闭包．因此 X 的 n 维骨架 X^n 是 X 的子复形．X 的子复形的任意并和任意交都是 X 的子复形．

任何拓扑空间都可以看作是胞腔复形 —— 作为其所有点的并集，这些点都是零维胞腔．这个例子表明胞腔复形的概念过于宽泛；因而在应用中，较窄些的胞腔复形类是重要的，例如胞腔分解类，或 **CW 复形** (CW-complex)类． Д. О. Баладзе 撰 张 平 译 沈信耀 校

胞腔映射 [**cellular mapping**；**клеточное отображение**]

一个相对 **CW 复形**(CW - complex)(X, A) 到另一个相对 CW 复形 (Y, B) 中的映射 $f:(X, A)\to(Y, B)$，使得 $f((X,A)^p)\subset(Y,B)^p$，其中 $(X,A)^p$ 与 $(Y,B)^p$ 分别为 X 相对于 A 及 Y 相对于 B 的 p 维骨架．当 $A, B=\phi$ 时，得到从 CW 复形 X 到 CW 复形 Y 中的胞腔映射 f.

同伦 $F:(X, A)\to I\times(Y, B)$ (其中 $I=[0,1]$) 称为胞腔的 (cellular)，如果对于所有的 p，$F((X,A)\times I)^p\subset(Y, B)^p$．下述胞腔式逼近定理与单纯逼近定理 (见**单纯映射** (simplical mapping)类似：设 $f:(X,A)\to(Y,B)$ 是从一个相对 CW 复形 (X,A) 到另一个相对 CW 复形 (Y, B) 中的映射，它在某个子复形 $(L,N)\subset(X,A)$ 上的限制是胞腔式的，则存在一个胞腔映射 $g:(X,A)\to(Y, B)$，相对于 L 与 f 同伦．

亦见 **CW 复形** (CW - complex)．

Д. О. Баладзе 撰

【补注】

参考文献

[A1] Spanier, E. H., Algebraic topology, McGraw - Hill, 1966.

[A2] Brown, R., Elements of modern topology, McGraw-Hill, 1968.

[A3] Maunder, C. R. F., Algebraic topology, van Nostrand, 1970, section 7. 5.

罗嵩龄、许依群、徐定宥 译

胞腔空间 [**cellular space**；**клеточное пространство**]

一个具有 **CW 复形** (CW - complex) 结构的 Hausdorff 空间．例如，每一个**单纯空间** (simplicial space)是胞腔空间．反之，对任意胞腔空间，都存在一个与之同伦等价的同维数的单纯空间．

参考文献

[1] Рохлин, В. А., Фукс, Д. Б., Начальный курс топологии. Геометрические главы, М., 1977 (英译本：Rokhlin, V. A. and Fuks, D. B., Beginner's course in topology, Geometric chapters, Springer, 1984).

С. Н. Малыгин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Jänich, K., Topology, Springer, 1984, Chapt. VII.

罗嵩龄、许依群、徐定宥 译

中心代数 [**central algebra**；**центральная алгебра**]

一个域上的有单位元的代数，且它的中心(见**环的中心**(centre of a ring))与基域一致．例如，四元数除环是实数域上的一个中心代数，但是复数域不是．一个域上的矩阵代数是中心代数，一个单代数与一个中心单代数的张量积是中心单代数．一个有限维中心单代数的每个自同构都是内自同构，并且它的维数是一个整数的平方．

参考文献

[1] Дрозд, Ю. А., Кириченко, В. В., Конечномерные алгебры, К., 1980 (中译本：Ю. А. 德洛兹德，B. B. 基里钦柯，有限维代数，北京师范大学出版社，1984).

[2] Скорняков, Л. А., Элеметы общей алгебры, М., 1983.

Л. А. Скорняков 撰

【补注】

参考文献

[A1] Peirce, R. S., Associative algebras, Springer, 1980.

[A2] Albert, A. A., Structure of algebras, Amer. Math. Soc., 1939 (中译本：A. A. 阿尔伯特，代数结构，科学出版社，1963).

[A3] Deuring, M., Algebren, Springer, 1935.

[A4] Herstein, I., Noncommutative rings, Math. Assoc. Amer., 1968.

[A5] Jacobson, N., Structure of rings, Amer. Math. Soc., 1956.

邓邦明 译

中心指数 [**central exponents**；**центральные показатели**]，线性常微分方程组的

由公式

$$\Omega(A)=\lim_{T\to+\infty}\overline{\lim_{k\to+\infty}}\frac{1}{kT}\sum_{i=0}^{k-1}\ln\|X((i+1)T, iT)\|$$

定义的量(上中心指数 (upper central exponent))和公式

$$\omega(A)=\lim_{T\to+\infty}\overline{\lim_{k\to+\infty}}\frac{-1}{kT}\sum_{i=0}^{k-1}\ln\|X(iT,(i+1)T)\|$$

定义的量(下中心指数 (lower central exponent))；有时下中心指数定义为

$$\lim_{T\to+\infty}\lim_{k\to+\infty}\frac{-1}{kT}\sum_{i=0}^{k-1}\ln\|X(iT,(i+1)T)\|.$$

这里 $X(\theta,\tau)$ 是系统

$$\dot{x}=A(t)x,\quad x\in\mathbf{R}^n \tag{1}$$

的 **Cauchy 算子** (Cauchy operator)，其中 $A(\cdot)$ 是在每个区间上可求和的映射

$$\mathbf{R}^+\to\mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n).$$

中心指数 $\Omega(A)$ 和 $\omega(A)$ 可以是 $\pm\infty$；不等式

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\int_0^t\|A(\tau)\|d\tau\geqslant\Omega(A)\geqslant\omega(A)\geqslant$$

$$\geqslant-\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\|A(\tau)\|d\tau$$

成立，这就是说如果系统 (1) 满足条件

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\int_0^t\|A(\tau\|d\tau<+\infty,$$

那么它的中心指数是有限数．不等式

$$\Omega^0(A)\geqslant\Omega(A)\geqslant\lambda_1(A)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(A)\geqslant\omega(A)\geqslant\omega^0(A)$$

表达了中心指数与 **Ляпунов 特征指数** (Lyapunov characteristic exponent)) $\lambda_1(A),\cdots,\lambda_n(A)$ 和**奇异指数** (singular exponents) $\Omega^0(A)$，$\omega^0(A)$ 之间的关系．在系统 (1) 的系数是常数的情况下 ($A(t)\equiv A$)，中心指数 $\Omega(A)$ 和 $\omega(A)$ 分别等于 A 的本征值实数部分的最大值与最小值．在系统 (1) 的系数为周期的情况下 ($A(t+\theta)=A(t)$ 对所有 $t\in\mathbf{R}$ 和某一 $\theta>0$，θ 为最小周期)，中心指数 $\Omega(A)$ 和 $\omega(A)$ 分别等于**乘子** (multipliers) 模的对数的最大值和最小值除以周期 θ．

如果 $A(\cdot)$ 是一个殆周期的映射 (见**殆周期系数的线性微分方程组** (linear system of differential equations with almost-periodic coefficients))，那么 (1) 的中心指数与奇异指数一致：

$$\Omega(A)=\Omega^0(A),\quad\omega(A)=\omega^0(A)$$

(Былов 定理 (Bylov theorem))．

对于每个固定的系统 (1)，条件 $\Omega(A)<0$ 对于存在这样一个 $\delta>0$ 是充分的，即对于满足 Cauchy 问题解的存在唯一性条件和不等式

$$|g(x,t)|<\delta|x|$$

的每个系统

$$\dot{x}=A(t)x+g(x,t),$$

其解 $x=0$ 是渐近稳定的 (Виноград 定理 (Vinograd theorem))．Виноград 定理中的条件 $\Omega(A)<0$ 不仅是充分的，而且是必要的．(当用 Ляпунов 稳定性代替渐近稳定性时，必要性仍然有效．)

在有界连续系数的系统 (1) 的空间 M_n 上 (因此 $A(\cdot)$ 是连续的，并且 $\sup_{t\in\mathbf{R}^+}\|A(t)\|<+\infty$)，具有度量

$$d(A,B)=\sup_{t\in\mathbf{R}^+}\|A(t)-B(t)\|$$

的函数 $\Omega(A)$ (相应地，$\omega(A)$) 是上 (相应地，下) 半连续的，但是其中任一个函数都不是处处连续的．对于每一个系统 (1)，可在 M_n 中找到另一个系统

$$\dot{x}=B_i(t)x,\quad i=1,2 \tag{2}$$

任意接近它 (在 M_n 中)，使得

$$\lambda_1(B_1)=\Omega(A),\quad\lambda_n(B_2)=\omega(A),$$

这里 $\lambda_1(B_i)$ 和 $\lambda_n(B_i)$ ($i=1,2$) 为系统 (2) 的最大 (最高) 和最小 (最低) Ляпунов 特征指数．

如果 $A(\cdot)$：$\mathbf{R}\to\mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n)$ 是一致连续映射，并且如果 $\sup_{t\in\mathbf{R}}\|A(t)\|<+\infty$，那么对于几乎每个映射 $\tilde{A}$ (集中在 A 点轨道闭包上的**移位动力系统** (shift dynamical system) $S=\mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n)$，在规范化不变尺度的意义上，映射 $\tilde{A}$ 和 A 被看作移位动力系统空间的点)，系统 $\dot{x}=\tilde{A}(t)x$ 的上 (下) 中心指数等于该系统的最大 (最小) Ляпунов 特征指数：

$$\Omega(\tilde{A})=\lambda_1(\tilde{A}),\quad\omega(\tilde{A})=\lambda_n(\tilde{A}).$$

假定在光滑封闭流形 V^n 上的动力系统是由一个光滑的向量场给定．那么对几乎每一点 $x\in V^n$ (在规范化不变尺度的意义上)，沿着 x 轨道的变分，方程系统的上 (下) 中心指数与它的最大 (最小) Ляпунов 特征指数相同．对中心指数的一般性质 (从 Baire 分类的观点) 的研究见 [3]．

参考文献

[1] Былов, В. Ф., Виноград, Р. Э., Гробман, Д. М., Немыцкий, В. В., Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости, М., 1966.

[2] Изобов, Н. А., Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 12, М., 1974, 71－146.

[3A] Миллионщиков, В. М.,《Дифференц. уравнения》, 19 (1983), 9, 1503－1510.

[3B] Миллионщиков, В. М.,《Дифференц. уравнения》, 20 (1984), 6.

[3C] Миллионщиков, В. М.,《Дифференц. уравнения》, 20 (1984), 8, 1366－1376.

В. М. Миллионщиков 撰

【补注】

参考文献

[A1] Nemytskii, V. V. and Stepanov, V. V., Qualitative theory of differential equations, Princeton Univ. Press, 1960 (译自俄文) (中译本：В. В. 涅梅茨基、

B.B.斯捷巴诺夫，微分方程定性理论，科学出版社，1956）．

周芝英 译

中心极限定理 [central limit theorem; центральная предельная теорема]

概率论中一类极限定理的统称，阐明在什么条件下，大量独立或弱相关的随机变量之和或其他函数具有一个接近**正态分布**（normal distribution）的概率分布．

中心极限定理的经典形式涉及具有有限（数学）期望 $EX_k=a_k$ 和有限方差 $DX_k=b_k$ 的独立随机变量序列

$$X_1,\ldots,X_n,\ldots \tag{1}$$

及其部分和

$$S_n = X_1+\cdots+X_n. \tag{2}$$

假设 $A_n=ES_n=a_1+\cdots+a_n$, $B_n=DS_n=b_1+\cdots+b_n$．将具有期望 0 和方差 1 的"正规化"部分和

$$F_n(x) = \mathrm{P}\{Z_n<x\}$$

的分布函数

$$Z_n = \frac{S_n-A_n}{\sqrt{B_n}}, \tag{3}$$

同对应于具有期望 0 和方差 1 的正态分布的标准正态分布函数

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-z^2/2}\,dz$$

比较．在这种情况下，中心极限定理断言，在适当条件下，当 $n\to\infty$ 时，对任何 $x\in\mathbf{R}$,

$$F_n(x)\to\Phi(x),$$

或者，同样的，对任何区间 (α,β):

$$\mathrm{P}\{\alpha<Z_n<\beta\} = \mathrm{P}\{A_n+\alpha\sqrt{B_n}<S_n<A_n+\beta\sqrt{B_n}\}$$
$$\to \Phi(\beta)-\Phi(\alpha)$$

（见 **Laplace 定理**（Laplace theorem）；**Ляпунов 定理**（Lyapunov theorem））．

正态分布是独立随机变量和的分布的极限，为了更清晰地理解产生正态分布的条件，只要从随机变量序列构造随机变量的**三角阵列**（triangular array）就可以（见[4]）．在这种情况下，对每一个 $n=1,2,\cdots$，通过令

$$X_{n,k} = \frac{X_k-a_k}{\sqrt{B_n}},\quad 1\leqslant k\leqslant n$$

考虑变量序列

$$X_{n,1},\ldots,X_{n,n},$$

这时每一个序列（行）内部的随机变量是独立的，而且

$$Z_n = X_{n,1}+\cdots+X_{n,n}.$$

中心极限定理可应用的通常条件（如 Ляпунов 条件或 **Lindeberg - Feller 定理**（Lindeberg - Feller theorem）的条件）蕴含着 $X_{n,k}$ 是渐近可忽略的．例如，从具有三阶矩的 Ляпунов 条件，即从当 $n\to\infty$ 时

$$L_n = \frac{1}{B_n^{3/2}}\sum_{n=1}^{n}\mathrm{E}|X_k-a_k|^3\to 0, \tag{4}$$

这一条件出发，可得出：对任何 $\varepsilon>0$，不等式

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}\mathrm{P}\{|X_{n,k}|>\varepsilon\}$$
$$= \max_{1\leqslant k\leqslant n}\mathrm{P}\{|X_k-a_k|>\varepsilon\sqrt{B_n}\}\leqslant$$
$$\leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{1}{\varepsilon^3B_n^{3/2}}\mathrm{E}|X_k-a_k|^3\leqslant\frac{1}{\varepsilon^3}L_n\to 0$$

当 $n\to\infty$ 时成立，而不等式链最左边的量趋于 0 这一事实，表明构成阵列的随机变量的渐近可忽略性．

现在假设

$$X_{n,1},\ldots,X_{n,k_n} \tag{5}$$

是在每一个序列内部独立的任一渐近可忽略随机变量三角阵列．如果和 $Z_n=X_{n,1}+\cdots+X_{n,k_n}$ 的极限分布存在且非退化，那么它是正态的当且仅当，对任给 $\varepsilon>0$,

$$\mathrm{P}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant k_n}|X_{n,k}|>\varepsilon\right\}\to 0, \tag{6}$$

也就是说，Z_n 中的最大项同整个和比较变成小得可忽略．（没有条件(6)，只能断言 Z_n 的极限律属于**无穷可分分布**（infinitely-divisible distribution）的类．）在**三角阵列**（triangular array）一条中，可以找到两个附加的条件，连同(6)在一起便构成了使和 Z_n 的分布收敛到一个极限的充分必要条件．

当上面所考虑的三角阵列中，随机变量的渐近可忽略条件不成立时，情况就变得复杂了．H. Cramér 的著名定理（即若干独立随机变量的和是正态分布的当且仅当每一个求和项是正态分布的）使得人们可以设想（如 P. Lévy 所做的那样，见[15]，第 5 章定理 38）：独立随机变量的和具有接近于正态的分布，如果"大"的求和项几乎是正态的，而"小"的求和项总起来满足渐近可忽略项的和的分布的"正态性"条件．这一类论证的精确形式首先就 $EX_{nk}=0$, $\sum_{n=1}^{k_n}DX_{n,k}=1$ 的三角阵列(5)的情形得到（见[7]）．这时，为要分布函数 $F_n(x)=\mathrm{P}\{Z_n<x\}$ 收敛到正态分布函数 $\Phi(x)$ 必须而且只需下面两个条件同时成立：

1） 当 $n\to\infty$ 时，

$$\alpha_n = \max_{1\leqslant k\leqslant k_n}L(F_{n,k},\Phi_{n,k})\to 0,$$

其中 $L(F_{n,k},\Phi_{n,k})$ 是随机变量 $X_{n,k}$ 的分布函数 $F_{n,k}(x)$ 和正态分布函数 $\Phi_{n,k}(x)$（它与 $F_{n,k}(x)$ 具有相同的期望和方差）之间的 **Lévy 距离**（Lévy metric）；

2） 对任给 $\varepsilon>0$，当 $n\to\infty$ 时

$$\Delta_n(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|>\varepsilon} x^2 \, dF_{n,k}(x) \to 0,$$

其中求和取遍那些使得 $DX_{n,k}<\sqrt{\alpha_n}$ 的 $k(1\leqslant k\leqslant k_n)$.

命题的这种形式非常接近于 Lévy 原来提出的形式. 还可能有另外的表述方式(例如,见[8]),在某种意义上它们与 Lindeberg - Feller 定理更相似.

现在,中心极限定理的这种形式可以作为没有渐近可忽略条件的三角阵列上更一般的求和定理的特例得到.

在实际应用方面,搞清和的分布向正态分布收敛的速度是重要的. 为了这个目的, 有不等式和渐近展开(还有**大偏差的概率** (probability of large deviations) 的理论; 亦见 **Cramér 定理** (Cramér theorem); **极限定理** (limit theorems)). 下面为了简化陈述, 考虑一个三角阵列, (1)中所出现的变量假定为同分布的. 设 $F(x)=\mathrm{P}\{X_k<x\}$. 关于规格化和(3)的分布函数 $F_n(x)$ 同 $\Phi(x)$ 的偏差的不等式的一个典型例子是 Berry - Esseen 不等式 (Berry - Esseen inequality): 对一切 x

$$|F_n(x)-\Phi(x)| \leqslant C\frac{\mathrm{E}|X_1-a_1|^3}{\sigma_1^3}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad (7)$$

其中 C 是一个绝对常数 (C 的最佳可能值在当时(1984)并不知道, 不过它不超过 0.7655). 如果各项 X_k 自身是"几乎"正态的, 那么象(7)这样的不等式显得没有多少信息. 例如, 倘若它们实际上就是正态的, 那么(7)的左边是零, 而右边是 $C\dfrac{4}{\sqrt{2\pi n}}$. 所以, 从 60 年代初开始, 人们建议在类似于(7)的不等式中, 右边不用随机变量 X_k 的矩而用类似于矩但被差 $F(x)-\Phi(x-a/\sigma_1)$ 所决定的其他特征代替, 它们随着这个差的变小而变小. 在(7)式及其推广的右边, 可以加一项当 $|x|\to\infty$ 时无限制地下降的 x 的函数(所谓非齐次估计量 (inhomogeneous estimators)). 也可以考虑(见[6])量测 $F_n(x)$ 同 $\Phi(x)$ 的"逼近程度"的其他方法, 例如在空间 L_p 的意义下(所谓中心极限定理的整体形式)或基于比较分布的局部特征的方法(见**局部极限定理** (local limit theorems)).

对 $\sigma=1$, 差 $F_n(x)-\Phi(x)$ 的渐近展开有下述形式(见[4], [3]):

$$F_n(x)-\Phi(x) =$$

$$= \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\left\{\frac{Q_1(x)}{n^{1/2}}+\frac{Q_2(x)}{n}+\frac{Q_3(x)}{n^{3/2}}+\cdots\right\}.$$

其中 Q_k 是 x 的 $3k-1$ 次多项式, 系数只依赖于项的前 $k-2$ 阶矩. 对二项分布, 渐近展开的第一项由 P. Laplace 于 1812 年获得, 展开式则由 П. Л. Чебышев 于 1887 年完整地描述, 但没有严格的论证. 余项的最早估计由 Cramér 于 1928 年给出, 他假设 s 阶矩 $\beta_s=\mathrm{E}|X_k|^s(s\geqslant3)$ 有限且

$$\overline{\lim_{|t|\to\infty}}\ |\mathrm{E}e^{itX_k}| < 1.$$

这个假设被称为 Cramér 条件. 在稍强的形式下, 这一结果断言

$$F_n(x)-\Phi(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\left\{\frac{Q_1(x)}{\sqrt{n}}+\cdots+\frac{Q_{s-2}(x)}{n^{(s-2)/2}}+\right.$$

$$\left.+o\left(\frac{1}{n^{(s-2)/2}}\right)\right\}$$

对 x 一致地成立. 这一渐近展开式成为构造一大类**随机变量变换** (random variables, transformations of) 的基础.

中心极限定理可以推广到如下的情形, 即序列(1)(或者比它更广的三角阵列)是由 m 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^m$ 的向量所构成. 例如假设随机向量(1)是独立、同分布且以概率 1 不位于某一超平面之中, 还有 $\mathrm{E}X_k=0$, $\mathrm{E}\|X_i\|^2<\infty$, 其中 $\|\cdot\|$ 为 $\mathbf{R}^m$ 中通常的 Euclid 范数. 在这些条件下, 当 $n\to\infty$ 时, 规格化和

$$Z_n' = \frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}}$$

的概率分布弱收敛(见**分布的收敛** (convergence of distributions))到 $\mathbf{R}^m$ 上期望等于零向量, 协方差矩阵 Λ 等于 X_k 的协方差矩阵的正态分布 Φ_Λ. 此外, 这种收敛性在 $\mathbf{R}^m$ 的广泛的子集类上是一致的(见[10]). 例如, 它在 $\mathbf{R}^m$ 的所有凸 Borel 子集的类 $\mathfrak{C}$ 上, 当 $n\to\infty$ 时,

$$\sup_{A\in\mathfrak{C}} |P_n(A)-\Phi_\Lambda(A)| \to 0. \qquad (8)$$

在附加的假设下, 收敛性(8)的速度可以得到估计.

中心极限定理还可以推广到在无穷维空间中取值的独立随机向量序列(和阵列). "通常"形式下的中心极限定理不一定成立(这时空间的"几何"的影响显示出来(见**随机元** (random element))). 特别有趣的情形是当(1)的项在一个可分 Hilbert 空间 H 中取值时, 上述规格化和 Z_n' 的分布在 $\mathbf{R}^m$ 中弱收敛到正态分布的论断在 H 中照样成立. 收敛一致性的结论则只在比较狭窄的类上才成立(例如, 在以原点为中心的所在球的类上, 或中心位于某一固定球的所有球的类上; 在所有球的类上收敛就不一定是一致的了). 设 S_r 是 H 中以原点为心、r 为半径的球. 这里类似于(7)的是下述类型的一个不等式. 设

$$\mathrm{E}X_k = 0, \ \mathrm{E}\|X_k\|^2 < \infty,$$

且 X_k 的分布并不集中在 H 的任一有限维子空间上; 那么在特殊的情形(类似于下面的例子所分析的情形)下,

$$\Delta_n = \sup_r |P\{Z_n' \in S_r\} - \Phi_A(S_r)| = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

在 $E\|X_k\|^{3+\alpha}<\infty$ 这一条件下，其中 α 是一个固定的且不太小的数，可以断言，对任给的 $\varepsilon>0$，

$$\Delta_n = O\left(\frac{1}{n^{1-\varepsilon}}\right)$$

（例如，当 $\alpha=1$ 时，它就成立）.

相当具体的，例如数理统计的问题，可以导致在无穷维空间，特别是在 H 中的中心极限定理.

例 设 $\theta_1, \theta_2, \cdots$ 是在 $[0,1]$ 上均匀分布的独立随机变量的序列. 设 $X_k(t)$ $(k=1, 2, \cdots)$ 是如下给出的空间 $L_2[0,1]$（关于 $[0,1]$ 上 Lebesgue 测度平方可积函数的空间）中的随机元：

$$X_k(t) = \begin{cases} -t & 对\ 0\leqslant t\leqslant\theta_k, \\ 1-t & 对\ \theta_k<t\leqslant 1. \end{cases}$$

这时 $EX_k(t)=0$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$，且

$$Z_n'(t) = \frac{X_1(t)+\cdots+X_n(t)}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}(G_n(t)-t),$$

其中 $G_n(t)$ 是由在 $[0,1]$ 上均匀分布的、大小为 n 的样本 $\theta_1,\cdots,\theta_n$ 构造的经验分布函数. 这里范数的平方

$$\|Z_n'\|^2 = \int_0^1 (Z_n'(t))^2\,dt = n\int_0^1 (H_n(t)-t)^2\,dt,$$

同 Cramér - von Mises - Смирнов 检验（见**Cramér - von Mises 检验**(Cramér - von Mises test)）的统计量 ω_n^2 一致. 根据中心极限定理，当 $n\to\infty$ 时，存在关于 ω_n^2 的一个极限分布. 它同 H 中一个适当正态分布向量的范数的平方的分布一致，称为**ω^2 分布**('omega - squared' distribution). 这样，中心极限定理说明对充分大的 n 用 ω^2 代替分布 ω_n^2 是合理的，这就是应用上面所提到的统计检验的根据.

中心极限定理推广到相依变量的和已经有多种形式（在时齐有限 Марков 链的情形，具有两个状态的最简单非时齐链的情形，以及某些其他的模型，这些由 Марков 本人于 1907－1911 年完成；随后的推广首先是同 C. H. Бернштейн 的名字联系在一起([12])). 所有这类中心极限定理的推广的基本特点在于这样一个事实：由 $X_1,\cdots,X_k$ 所决定的事件同由 $X_{k+p}, X_{k+p+1},\cdots$ 所决定的事件的相依性当 p 无限增大时变得可忽略.

至于中心极限定理证明的方法，在独立项情形下，一般来说最有效的是特征函数方法；它补充并有时代替了所谓"结构法"（见[11]）以及所谓"度量距离法"）. 在相依变量的情形下，整体上最有效的方法是半不变量方法（例如，见[14]），这一方法对于比求和或线性函数更一般的随机变量函数（例如对于二次的和其他形式的函数）也是合适的.

有关数论中的中心极限定理见**数论中的概率方法**(number theory, probabilistic methods in). 中心极限定理也可应用于函数论和动力系统理论中的某些问题.

参考文献

[1] Гнеденко, Б. В., Курс теории вероятностей, 5 изд., 1969（中译本：Б. В. 格涅坚科，概率论教程，人民教育出版社，1956）.

[2] Feller, W., An introduction to probability theory and its applications, 1－2, Wiley, 1957－1971（卷一的中译本：W. 费勒，概率论及其应用，科学出版社，上册，1964；下册，1979）.

[3] Cramér, H., Mathematical methods of statistics, Princeton, Univ. Press, 1946（中译本：H. 克拉美，统计学数学方法，上海科学技术出版社，1960）.

[4] Гнеденко, Б. В., Колмогоров, А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М. - Л. 1949（中译本：Б. В. 格涅坚科，А. Н. 柯尔莫哥洛夫，相互独立随机变量之和的极限分布，科学出版社，1955）.

[5] Ибрагимов, И. А., Линник, Ю. В., Независимые и стационарно связанные величины, М., 1965（英译本：Ibragimov, I. A. and Linnik, Yu. V., Independent and stationary sequences of random variables, Wolters - Noordhoff, 1971）.

[6] Петров, В. В., Суммы независимых случайных величин, М., 1972（英译本：Petrov, V. V., Sums of independent random variables, Springer, 1975）.

[7] Золотарев, В. М., 《Теория вероятн. и ее примен.》, **12** (1967), 4, 666－677.

[8] Ротарь, В. И., 《Матем. заметки》, **18** (1975), 1 129－135.

[9] Чебышев, П. Л., Избр. тр., М., 1955.

[10] Bhattacharya, R. H. and Rao, R. R., Normal approximation and asymptotic expansions, Wiley, 1976.

[11] Sazonov, V. V., Normal approximation, some recent advances, Springer, 1981.

[12] Бернштейн, С. Н., Собр. соч., М., 4 (1964)

[13] Марков, А. А., Избр. тр., М., 1951.

[14] Статулявичус, В. А., 《Теория вероятн. и ее примен.》, **5** (1960), 2.

[15] Lévy, P., Théorie de l' addition des variables aléatoires, Gauthier - Villars, 1954.

Ю. В. Прохоров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Loève, M., Probability theory, V. Nostrand, 1963.

陈培德 译

群的中心积 [**central product of a group; центральное произведение группы**]

群的一种结构. 群 G 称为它的两个子群 A 和 B 的中心积，如果它由它们生成，对任何两个元素 $a\in A$ 和 $b\in B$ 有 $ab=ba$, 而且交集 $A\cap B$ 在它的中心 $Z(G)$ 中. 特别地, 对于 $A\cap B=1\in G$, 中心积就是直积 $A\times B$. 如果 A, B 和 C 是任意的群使得 $C\leqslant Z(A)$, 且若 $\theta: C\to Z(B)$ 是单同态, 则不用预先假设 A, B 是某个群 G 的子群也可以定义 A 和 B 的中心积.

参考文献

[1] Gorenstein, D., Finite groups, Harper & Row, 1968.

Н. Н. Вильямс 撰　石生明 译　许以超 校

群的中心列 [**central series of a group; центральный ряд группы**]

一个**正规列** (normal series), 它的所有因子皆为中心的 (central), 即子群列

$$E=G_0\subseteq G_1\subseteq\cdots\subseteq G_n=G,$$

对所有 i, G_{i+1}/G_i 在 G/G_i 的中心中, 见**子群列** (subgroup series). 如对所有 i, 子群 G_{i+1}/G_i 是 G/G_i 的整个中心, 则此序列称为 G 的上中心列 (upper central series), 而若 G_{i+1} 与 G 作出的换位子群和 G_i 一致, 则称这序列为下中心列 (lower central series).

有中心列的群称为**幂零群** (nilpotent group). 幂零群的下中心列和上中心列有相同的长度, 它是群的中心列的最短长度, 这个长度称为群的幂零类数 (nilpotency class) (或幂零次数 (degree of nilpotency)).

О. А. Иванова 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hall, M., The theory of groups, MacMillan, 1959, Chapt. 10 (中译本: M. 赫尔, 群论, 科学出版社, 1981, 第 10 章).

石生明 译　许以超 校

中心单代数 [**central simple algebra; центральная простая алгебра**]

有单位元的单结合代数, 并且是**中心代数** (central algebra). 域 K 上的每一有限维中心单代数 A 皆同构于 K 上有限维中心可除代数 C 的矩阵代数 $M_n(C)$. 特别地, 当 K 是代数闭域时, K 上的有限维中心单代数 A 同构于 $M_n(K)$; 当 $K=\mathbf{R}$ 时, A 同构于实数或四元数上的矩阵代数. 中心单代数 A 与任意单代数 B 的张量积是单代数, 特别地, 当 B 是中心单代数时, 张量积也是中心单代数. K 上两个有限维中心单代数 A 和 B 称为等价的, 如果对某个 m 和 n, 有

$$A\otimes_K M_m(K)\cong B\otimes_K M_n(K).$$

这等于说, 如果 A 和 B 同构于同一中心可除代数上的两个矩阵代数, K 上中心单代数的等价类关于张量积运算构成 K 上的 **Brauer 群** (Brauer group).

参考文献

[1] Waerden, B. L. van der, Algebra, 1-2, Springer, 1981 (中译本: B. L. 范德瓦尔登, 代数学, 科学出版社, I 1964, II 1976).
[2] Дрозд, Ю. А., Кириченко, В. В., Конечномерные алгебры, К., 1980 (中译本: Ю. А. 德洛兹德, В. В. 基里钦柯, 有限维代数, 北京师范大学出版社, 1984).

А. Л. Онищик 撰

【补注】

参考文献

[A1] Peirce, R. S., Associative algebras, Springer, 1980.
[A2] Albert, A. A., Structure of algebras, Amer. Math. Soc., 1939 (中译本: A. A. 阿尔伯特, 代数结构, 科学出版社, 1963).
[A3] Deuring, M., Algebren, Springer, 1935.
[A4] Herstein, I., Noncommutative rings, Math. Assoc. Amer., 1968.
[A5] Jacobson, N., Structure of rings, Amer. Math. Soc., 1956.

林亚南 译

中心化子 [**centralizer; централизатор**]

环、群或半群 R 的子集, 由和某集合 $S\subseteq R$ 的所有元素都交换的元素组成; S 在 R 中的中心化子, 记为 $C_R(s)$. Abel 群的自同态的不可约子环 (irreducible subring) (即不稳定任何真子群的子环) 在该群的所有自同态的环中的中心化子是除环 (Schur 引理 (Schur lemma)).

参考文献

[1] Jacobson, N., Structure of rings, Amer. Math. Soc., 1956.

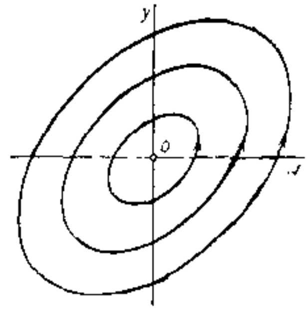
Л. А. Бокуть 撰　石生明 译　许以超 校

中心 [**centre; центр**]

二阶常微分方程自治系统 (*) 的轨道在奇点 x_0 的邻域内的一种图形, 这里

$$\dot{x}=f(x),\quad x=(x_1,x_2),\quad f: G\subset\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2,\qquad (*)$$

$f\in C(G)$, 而 G 是一个唯一性的区域. 这种图形的特征如下: 存在一个 x_0 的邻域 U, 使得所有在 $U\setminus\{x_0\}$ 内开始的系统的轨道是围绕 x_0 的闭曲线. 点 x_0 本身也称为中心. 图中点 O 就是中心. 随着 t 的增加沿轨道的运动可按顺时针或反时针方向进行 (如图中箭头所示). 中心是 Ляпунов 稳定的 (但不是渐近稳定的). 它的 Poincaré 指数为 1.



例如，当 $f(x)=A(x-x_0)$ 时，点 x_0 是系统(*)的中心，其中 A 是具有一对纯虚数本征值的常数矩阵. 与线性二阶系统情况下出现的其他类型的简单静止点(**鞍点**(saddle)，**结点**(node)或**焦点**(focus))相反，中心型的点 x_0，一般来说，在线性系统右边扰动情况下不保持为中心，不管相对于 $\|x-x_0\|$ 的扰动阶如何小和它们的平滑性如何. 它可转变为焦点(稳定的或不稳定的)或中心焦点(见**中心和焦点问题**(centre and focus problem)). 对于 C^1 类 ($f\in C^1(G)$)非线性系统(*)，一个静止点 x_0 在矩阵 $A=f'(x_0)$ 有两个零本征值情况下也可以是中心.

参考文献

[1] Амелькин, В. В., Лукашевич, Н. А., Садовский, А. П., Нелинейные колебания в системах второго порядка, Минск, 1982.

亦见微分方程的**奇点**(singular point)的参考文献.

А. Ф. Андреев 撰

【补注】 关于准确的拓扑的定义见 [A1], p. 71.

参考文献

[A1] Nemytskii, V. V. and Stepanov, V. V., Qualitative theory of differential equations, Princeton Univ. Press, 1960 (译自俄文)(中译本：B.B.涅梅茨基、B. B.斯捷巴诺夫，微分方程定性论，科学出版社，1956).

[A2] Andronov, A. A., Leontovich, E. A., Gordon, I. I. and Maier, A. G., Theory of bifurcations of dynamic systems on a plane, Israel Progr. Sci. Transl., 1971 (译自俄文).

[A3] Arnol'd, V. I., Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations, Springer, 1983 (译自俄文)(中译本：B.И.阿诺尔德，常微分方程续论——常微分方程的几何方法，科学出版社，1989).

周芝英 译

中心 [**centre**; **центр**]，拓扑动力系统 $\{S_t\}$ 的(具有相空间 X 的流(flow)(连续时间动力系统(continuous-time dynamical system))或瀑布(cascade)的)

最大的闭**不变集**(invariant set) $A\subset X$，它的所有点都是在原系统到 A 的限制下的**非游荡点**(non-wandering point). (亦见**拓扑动力系统**(topological dynamical system)). 如果空间 X 是紧的(更一般地，如果存在具有紧闭包的半轨道)，那么中心必定不空. G. D. Birkhoff 借助于某一个超限过程，用另一种，然而是等价的定义引进中心的概念(见[1]-[4]). 这一过程的步骤数称为这个中心的深度(depth of the centre)(事实上有几种不同的"深度"，因为这一过程允许一定的调整)，对于维数 ≤2 的紧流形上的流(见[5]，[6])，或者对于由圆周的同胚迭代或一个区间的(甚至是不可逆的)连续映射(见[7])的迭代而得到的级联，其中心的深度不大，但是对于 $\mathbf{R}^3$ 中以及某些开曲面上的流(见[8]-[10])，其中心的深度可能为任意大的可数超限数. 在完全度量空间中，中心与具有 **Poisson 稳定性** (Poisson stability) 的点集的闭包一致.

如果 X 紧，而 U 是中心的一个邻域，则每一点 $x\in X$ 的轨道"绝大部分位于 U 中"：在 $[0,T]$ 中使 $S_t x\in U$ 的那些 t 的比当 $T\to\infty$ 时趋于 1. 但是，具有这一性质的最小闭不变集(极小引力中心(minimal centre of attraction)，见 [3] 和 [4])，一般说来，只是中心的一部分；在可度量化的情况下，它和所有**遍历集**(ergodic set)之并的闭包一致.

参考文献

[1] Birkhoff, G. D., Ueber gewisse Zentralbewegungen dynamischer systeme, *Nachr. Gesells. Wiss. Göttingen Math. Phys. Kl.*, 1926, 1, 81-92. Collected Math. Papers, Vol. II, 283-294.

[2] Birkhoff, G. D., Dynamical systems, Amer. Math. Soc., 1927.

[3] Немыцкий, В. В., Степанов, В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.-Л., 1949 (英译本：Nemytskii, V. V. and Stepanov, V. V., Qualitative theory of differential equations, Princeton Univ. Press, 1960).

[4] Сибирский, К. С., Введение в топологическую динамику, Кишинев, 1970 (英译本：Sibirskii, K. S., Introduction to topological dynamics, Noordhoff 1975).

[5] Schwartz, A. F. and Thomas, E. S., The depth of the centre of 2-manifolds, in Global stability, Proc. Symp. Pure Math., Vol. 14, Amer. Math. Soc., 1970, 253-264.

[6] Neumann, D. A., Central sequences in flows on 2-manifolds of finite genus, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **61** (1976), 1, 39-43.

[7] Шарковський, О. М., 《Доповiдi АН УРСР》, 1964, 7, 865-868.

[8] Майер, А. Г., 《Матем. сб.》, **26** (1950), 2, 265-290.

[9] Shil'nikov, L. P., On the work of A. G. Maĭer on central motions, *Math. Notes*, **5**(1969), 3, 204-206 (*Mat. Zametki*, **5** (1969), 3, 335-339).

[10] Neumann, D. A., Central sequences in dynamical sys-

tems, *Amer. J. Math.*, **100** (1978), 1, 1 – 18 .

Д. В. Аносов 撰 徐定宥、罗嵩龄、许依群 译

中心和焦点问题 [centre and focus problem; центра и фокуса проблема]

确定这样的条件的问题，在这些条件下常微分方程自治系统(autonomous system)

$$\dot{x} = X(x, y), \quad \dot{y} = Y(x, y) \qquad (*)$$

所有轨道在**平衡位置**(equilibrium position) O 的某一邻域内，除 O 点本身，都是封闭曲线．假定函数 X 和 Y 在 O 的某一邻域内为解析的．问题是 H. Poincaré 在 [1] 中提出的．A. M. Ляпунов 在 [2] 中获得了基本结果．

作为一个法则，假定在 O 点线性化系统的特征方程，也就是系统

$$\dot{\xi} = X_x'(O)\xi + X_y'(O)\eta,$$
$$\dot{\eta} = Y_x'(O)\xi + Y_y'(O)\eta$$

具有纯虚根．那么对于系统(*)奇点 O 是一个**中心**(centre)(被封闭轨线所围绕)，或者是一个**焦点**(focus)(被螺线包围)．在此情况下，存在一个中心的必要和充分条件是系统(*)在 O 的邻域内有一个与 t 无关的实解析积分 $F(x, y)=C$(见[2])．基于此结果，已经研究出一些获得中心存在的条件的方法；这些条件包括多项式无限序列在(*)右边级数展开的系数中不出现．在右边为多项式的情况下，从关于多项式理想基的有限性的 Hilbert 定理得出，在此序列中，只有有限个是本质的，而其余的则是它们的推论．确定一个中心的基本条件数的问题是很复杂的，而且只有当 X 和 Y 是二次多项式(三个条件)时才完全解决．在较高次多项式情况下，已研究出对某些结构——等时、稳定或对称——建立中心存在的条件的方法(见[3]，[4])．

参考文献

[1A] Poincaré, H., Mémoire sur les courbes définiés par une équation differentielle, *J. de Math.*, 7 (1881), 375 – 422.

[1B] Poincaré, H., Mémoire sur les courbes definiés par une équation differentielle, *J. de Math.*, 8 (1882), 251 – 296.

[1C] Poincaré, H., Mémoire sur les courbes définiés par une équation differentielle, *J. de Math.*, 1 (1885), 167 – 244.

[1D] Poincaré, H., Mémoire sur les courbes définiés par une équation differentielle, *J. de Math.*, 2 (1886), 151 – 217.

[2] Ляпунов, А. М., Общая задача об устойчивости движения, М. - Л., 1950.

[3] Amel'kin, V. V., On the question of the isochronism of the centre of two-dimensional analytic differential systems, *Differential Eq.*, **13** (1977), 667 – 674.

[4] Сибирский, К. С., Алгебраические инварианты дифференциальных уравнении и матриц, Киш., 1976 .

К. С. Сибирский 撰

【补注】 经典结果可在[A1]的 119－125 页中查到．

参考文献

[A1] Nemytskii, V. V. and Stepanov, V. V., Qualitative theory of differential equations, Princeton Univ. Press, 1960 (译自俄文)(中译本：В. В. 涅梅茨基、В. В. 斯捷巴诺夫，微分方程定性论，科学出版社，1956)．

周芝英 译

群的中心 [centre of a group; центр группы]

群的全体中心元(central elements)(有时也称不变元(invariant elements))，即与群的全体元素都交换的元素的集合 Z．群 G 的中心是 G 的正规子群甚至特征子群．而且中心的每个子群在 G 中是正规的．只有 Abel 群与它的中心一致．中心仅由单位元组成的群称为无中心的群(groups without centre)或有平凡中心的群(groups with trivial centre)．群 G 模它的中心的商群 G/Z 不一定是无中心的群．

参考文献

[1] Курош, А., Теория групп, 3 изд., М., 1967(中译本：A. 库洛什，群论(上，下)，高等教育出版社，1982－1987)．

О. А. Иванова 撰 石生明 译 许以超 校

偏序集的中心 [centre of a partially ordered set; центр частично упорядоченного множества]

带有 0 与 1 的偏序集(特别是格) P 中的元素集，在 P 的某个直积分解下，该集合的每个元素有一个分量为 1，其他为 0．任何带有 0 与 1 的偏序集的中心都是一个 Boole 代数．格 L 中的元素 a 属于中心，当且仅当它是中性的(neutral)(即每个三元组 $\{a, x, \ \}$ 都生成 L 的一个分配子格)，而且有一个补元．在有补模格中，中心同于由所有具有唯一补元的元素所组成的集合．

Т. С. Фофанова 撰 戴执中 译

环的中心 [centre of ring; центр кольца]

环中与每个元素都可交换的元素的全体 Z，即

$$Z = \{z : az = za, 对一切 a\}.$$

环的中心是一个子环，中心里每个可逆元的逆也属于中心．若一个环是一个域上有单位元的代数，则其中心包含基域．见**中心代数**(central algebra)．

Л. А. Скорняков 撰 王志玺 译

有心集族 [centred family of sets; центрированное семейство множеств]

任意有限个元素集之交非空的族. 例如, 自然数系 $\mathbf{Z}_+$ 的子集 $A_i=\{n\in\mathbf{Z}_+: n>i\}$ 所构成的可数族 $\{A_i: i\in\mathbf{Z}\}$ 是有心的; 所有元素之交非空的任意族是有心的. 每个有限的有心集族具有最后提到的这种性质.

无限的有心集族在一般拓扑学中首先被用于刻画紧空间. 在拓扑空间中, 有心闭集族被用于它的紧化及它的绝对形的构造中.

有心集系的概念可作如下推广. 设 m 是一个无穷基数, 则一个 m 有心集族 (m - centred family of sets) 被定义为基数小于 m 的任何元素集之交都非空的族. 在抽象测度论中, 这种族被用来刻画 m 紧空间.

参考文献

[1] Kelley, J. L., General topology, Springer, 1975 (中译本: J. L. 凯莱, 一般拓扑学, 科学出版社, 1982).

[2] Gillman, L. and Jerison, M., Rings of continuous functions, V. Nostrand - Reinhold, 1960.

Б. А. Ефимов 撰

【补注】 有心集族也称为滤过集族 (filtered family of sets) 或简称为滤子 (filter).

许依群、徐定宥、罗嵩龄 译

中心仿射几何学 [centro - affine geometry; центроаффинная геометрия]

仿射几何学 (affine geometry) 的分支, 研究中心仿射变换 (centro - affine transformation): $\overline{x^i}=A^i_s x^s$ 的不变量. 中心仿射变换保持一点 (中心) 不动. 在中心仿射几何学里, 存在完全的对偶性: 关于点的每个命题对应着关于超平面的同样命题.

Л. А. Сидоров 撰 沈一兵 译

中心仿射空间 [centro - affine space; центроаффинное пространство]

以下述性质为基本不变量的**仿射空间** (affine space): 一个平面过或不过某一点. 这个点称为空间的中心.

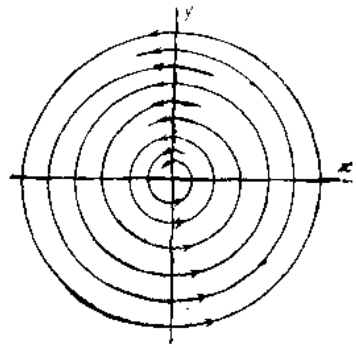
Л. А. Сидоров 撰 沈一兵 译

中心焦点 [centro - focus; центро-фокус]

二阶常微分方程自治系统 (*) 的轨道在孤立奇点 x_0 的邻域内的一种图形, 这里

$$\dot{x} = f(x),\ x\in\mathbf{R}^2,\ f: G\to\mathbf{R}^2, \qquad (*)$$

$f\in(G)$, 而 G 是一个唯一性的区域. 这种类型的特征如下: 在 x_0 的每一个邻域 U 内, 存在围绕 x_0 的系统的闭轨道, 也存在不封闭的完全轨道; 后者充满收缩到 x_0 且以这些闭轨道为界的环状区域; 任一圆环内的轨道为螺线形, 它的一端渐近地趋向外部边界, 另一端渐近地趋向圆环的内部边界. 点 x_0 本身也称为中心焦点.



图中, (0,0) 是一个中心焦点; 箭头表明了随着 t 增加沿系统轨道运动的方向 (箭头也可以是反方向的).

中心焦点是 Ляпунов (但不是渐近) 稳定的. 它的 Poincaré 指数为 1.

参考文献

[1] Немыцкий, В. В., Степанов, В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М. - Л., 1949 (中译本: B. B. 涅梅茨基, B. B. 斯捷巴诺夫, 微分方程定性理论, 科学出版社, 1956).

[2] Dulac, H., Sur les cycles limites, *Bull. Soc. Math. France*, **51** (1923), 45 - 188.

[3] Елизаров, П. М., Ильяшенко, Ю. С., 《Матем. сб.》, **121** (1983), 1, 111 - 126.

А. Ф. Андреев 撰 周芝英 译

必然事件 [certain event; достоверное событие]

预先知道必然要发生的事件. 更准确地, 如果 $\Omega=\{\omega\}$ 是基本结果的空间, 一个事件 A 称为必然的是指它与任何一个基本结果 ω 一起发生. 显然它必须与整个空间 Ω 一致. 因此对一个必然事件, 指定它具有概率 1 是自然的:

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{measure}\{\omega: \omega\in A\} = \mathrm{P}(\Omega) = 1.$$

不可能事件 (impossible event) 是与 A 互补的事件.

А. В. Прохоров 撰 陈培德 译

必然性, 可靠性 [certainty; достоверность]

预先确信某事件毫无疑问会实现. 必然性是某事件可实现性的特征, 且标上了最高水平的概率. 在概率论中, 必然性的概念是与**必然事件** (certain event) 和以概率 1 出现的事件相联系的. 在实践中, 只要某事件的概率充分接近于 1, 人们就称之为必然性事件.

А. В. Прохоров 撰 陈培德 译

Cesaro 曲线 [Cesaro curve; Чезаро кривая]

一条平面曲线, 它在任一点 M 的曲率半径 R 与 M 关于某一圆的极线在该点法线上所截割的线段成

比例．Cesàro 曲线的**自然方程**（natural equation）是

$$s = \int \frac{dR}{(R/b)^m - 1},$$

其中 b 是常数，m 为一实数．E. Cesàro 曾研究过（[1]）．

参考文献

[1] Cesaro, E., Vorlesungen über natürliche Geometrie, Teubner, 1901.

[2] Савелов, А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов 撰

【译注】 空间的 Cesàro 曲线（[B1]）是一条挠曲线 C，使得若一直线固定于 C 的 Frenet 活动标架内，则当此直线随活动标架沿 C 移动时，生成一可展曲面．

参考文献

[B1] 苏步青原著，姜国英改写，微分几何学，新版，高等教育出版社，1988.

沈一兵 译

Cesàro 求和法 [**Cesàro summation methods**; **Чезаро методы суммирования**]

数项级数和函数项级数求和法的总称；是 E. Cesàro 引入的（[1]）；用符号 (C, k) 来表示

设级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \qquad (*)$$

的部分和为 S_n；级数(*)按 k 次 Cesàro 求和法是可和的（summable by the Cesàro method of order k）或 (C, k) 可和的，其和为 S，如果

$$\sigma_n^k = \frac{S_n^k}{A_n^k} \to S, \quad n \to \infty,$$

其中 S_n^k 和 A_n^k 定义为下列展开式的系数：

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^k x^n = \frac{1}{(1-x)^{k+1}},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n^k x^n = \frac{1}{(1-x)^k} \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n = \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

σ_n^k 和 A_n^k 的展开式可以写成下列形式：

$$\sigma_n^k = \frac{1}{A_n^k} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{k-1} S_\nu = \frac{1}{A_n^k} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{k} a_\nu,$$

$$A_n^k = \binom{k+n}{n} = \frac{(k+1)\cdots(k+n)}{n!}, \quad k \neq -1, -2.$$

Cesàro 求和法 (C,k) 是相应于矩阵 $\|a_{n\nu}\|$ 的**矩阵求和法**（matrix summation method）：

$$a_{n\nu} = \begin{cases} \dfrac{A_{n-\nu}^{k-1}}{A_n^k}, & \nu \leqslant n, \\ 0, & \nu > n. \end{cases}$$

当 $k=0$ 时，Cesàro 求和法同通常的收敛性是一致的；当 $k=1$ 时，它是算术平均求和法．Cesàro 求和法 (C, k)，当 $k \geqslant 0$ 时都是正则的，当 $k<0$ 时不是正则的．当 k 增加时，Cesàro 求和法的效力增加；如果一个级数按 Cesàro 求和法 (C, k) 是可和的，则它按 Cesàro 求和法 $(C,k')(k'>k>-1)$ 也是可和的，其和相同．当 $k<-1$ 时，不存在这种性质．由级数(*)按 Cesàro 求和法的可和性，可得 $a_n = o(n^k)$．Cesàro 求和法 (C, k) 同 **Hölder 求和法**（Hölder summation methods）(H, k) 以及 **Riesz 求和法**（Riesz summation method）(R, n, k) $(k>0)$ 是等价的和相容的．对于任何 $k>-1$，Cesàro 求和法 (C, k) 弱于 **Abel 求和法**（Abel summation method）．

起初，E. Cesàro 只是对于参数 k 的正整数值定义了他的方法 (C, k)，并应用于级数的乘法．后来，Cesàro 求和法被推广到任意值（包括复数值）k，并且得到了广泛的应用，例如应用于级数的乘法、Fourier 级数理论以及其他方面．

参考文献

[1] Cesàro, E., *Bull. Sci. Math.*, 14 (1890), 1, 114–120.

[2] Hardy, G. H., Divergent series, Clarendon, 1949.

[3] Zygmund, A., Trigonometric series, 1, Cambridge Univ. Press, 1979.

[4] Барон, С. А., Введение в теорию суммируемости рядов, 2 изд., Таллин, 1979.

И. И. Волков 撰 张鸿林 译

Ceva 定理 [**Ceva theorem**; **Чевы теорема**]

关于同一个三角形相交的某些直线段长度之间的关系的一个定理．设 A_1, B_1, C_1 是分别处于三角形 ABC 的边 BC, CA 和 AB 上的三个点．为使直线 AA_1, BB_1 和 CC_1 相交于一点，或者都平行，其必要和充分条件是

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

通过一个三角形三个顶点且相交于一点的直线 AA_1, BB_1 和 CC_1 称为 Ceva 线（Ceva lines 或 Cevian lines）．Ceva 定理与 **Menelaus 定理**（Menelaus theorem）是度量对偶的．Ceva 定理因 G. Ceva 而得名（[1]）．

Ceva 定理可以推广到多边形的情况．设点 O 是在具有奇数个顶点 $A_1, A_2, \cdots, A_{2n-1}$ 的多边形所在的平面内给定的一点，并且设直线 $OA_1, OA_2, \cdots, OA_n, OA_{n+1}, \cdots, OA_{2n-1}$ 与多边形中 $A_1, A_2, \cdots, A_n, A_{n+1}, \cdots, A_{2n-1}$ 的对边分别相交于点 $a_n, a_{n+1}, \cdots, a_{2n-1}, a_1, \cdots, a_{n-1}$．这时，有

$$\frac{A_1a_1}{a_1A_2} \cdot \frac{A_2a_2}{a_2A_3} \cdots \frac{A_{2n-2}a_{2n-2}}{a_{2n-2}A_{2n-1}} \cdot \frac{A_{2n-1}a_{2n-1}}{a_{2n-1}A_1} = 1.$$

参考文献

[1] Ceva, G., De lineis rectis se invicem secantibus statica constructio, Milan, 1678. П. С. Моденов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Berger, M., Geometry, 1, Springer, 1987 (译自法文). 张鸿林 译

链 [chain; цепь]

1) 同于**全序集** (totally ordered set).

2) 由单形(三角剖分的,单形集的,特别是拓扑空间的奇异单形的)或者胞腔所组成的形式线性组合. 在最一般的意义下,它是任一链复形(自然是自由的)所成的链群中的元素. 系数取自群 G 的链是群 G 对链复形所作的张量积中的元素.

参考文献

[1] Steenrod, N. E. and Eilenberg, S., Foundations of algebraic topology, Princeton Univ. Press, 1966.

[2] Hilton, P. J. and Wylie, S., Homology theory, an introduction to algebraic topology, Cambridge Univ. Press, 1960. А. Ф. Харшиладзе 撰 戴执中 译

链条件 [chain condition; обрыва цепей условие]

偏序集中关于升链或降链的有限性的条件. 偏序集 P 的降链条件 (descending chain condition)是指: 对于任一元素链 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_k \geqslant \cdots$ 必有某个正整数 n, 使得 $a_n = a_{n+1} = \cdots$. 这个条件等价于 P 的下列性质中的每一个:

1)每个非空子集 $M \subseteq P$, 在 M 中至少有一个极小元(极小条件 (minimum condition));

2)若 P 的所有极小元都具有给定的性质 ε, 并且, 如果从所有的 $x < a, x \in P$ 都有性质 ε 可推出 $a \in P$ 也有性质 ε, 则 P 的所有元素都有这一性质(归纳条件 (inductivity condition)).

归纳条件使得人们可以对有降链条件的集合用归纳法进行证明和构造. 当 P 是全序的(从而是良序的)时,得到**超限归纳法** (transfinite induction), 又当 P 同构于自然数集时,得到通常的数学归纳法(见**归纳公理** (induction axiom)).

升链条件 (ascending condition) (以及与它等价的命题)由对偶的方式给出(见偏序集的**对偶原则** (duality principle)); 故可陈述如下: 若 $a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_k \leqslant \cdots$ 是偏序集 P 中一个升链, 则对于充分大的 n, 有 $a_n = a_{n+1} = \cdots$. 在有升链条件的格中,每个理想都是主理想. 每个有限集显然满足这两个链条件,但逆命题(同时满足二条件的集合为有限集)不成立. 满足降链及升链条件的格是完全格.

在代数中,链条件主要应用于由各种代数系统的子系统,以包含关系为序,所组成的那些集合(例如,见 **Artin 模** (Artinian module); **Artin 群** (Artinian group); **Artin 环** (Artinian ring); **合成序列** (composition sequence); **Noether 模** (Noetherian module); **Noether 群** (Noetherian group); **Noether 环** (Noetherian ring)).

参考文献

[1] Birkhoff, G., Lattice theory, Colloq. Publ. 25, Amer. Math. Soc., 1973.

[2] Курош, А. Г., Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973 (中译本: 一般代数学, 科学出版社, 1964).

[3] Скорняков, Л. А., Элементы теории структур, М., 1970 (英译本: Skornyakov, L. A., Elements of lattice theory, A Higher & Hindushtan Publ. Comp., Bristol & Delhi, 1977). Т. С. Фофанова 撰

【补注】 "链条件"这个词,在 Boole 代数中与集合论中有不同的意义(一个 **Boole 代数** (Boolean algebra), 作为**偏序集** (partially ordered set)而论,当且仅当它是有限的时,才满足降链条件,故此条件对于 Boole 代数无重要意义). 一个 Boole 代数 B, 如果它的每个链(即全序子集)的基数都小于 κ, κ 是个无限基数, 就称它满足 κ 链条件 (κ-chain condition). 特别是, $\aleph$ 链条件通常称作可数链条件 (countable chain condition)(简写作 ccc); 它在集合论的**力迫法** (forcing method)(例如,见 [A1], 第三节)中是个重要的条件. 对于完全 Boole 代数, κ 链条件等价于 κ 反链条件 (κ-antichain condition), 即每个离散序子集的基数都小于 κ. 在力迫理论中,集合论工作者并不经常用到满足力迫条件的完全 Boole 代数,而是用生成它们(作为正则开集的代数)的偏序集; 这种集合满足 κ 反链条件,当且仅当由它生成的 Boole 代数满足同一条件. 遗憾的是,集合论学者倾向于用"κ 链条件"这个术语实际是指"κ 反链条件".

参考文献

[A1] Burges, J. P., Forcing in Barwise, J. (ed.), *Handbook of mathematical logic*, North-Holland, 1977, 403–452. 戴执中 译

链模 [chain module; цепной модуль]

一个模,其所有子模的全体构成一个链, 即一个**全序集** (totally ordered set); 只要一个模所有的循环子模的全体构成一个链, 则此模就是链模.

Л. А. Скорняков 撰 邓邦明 译

链循环 [chain recurrence; цепная рекуррентность]

在**拓扑动力学** (topological dynamics) 中表示"运动的往复"的最一般的性质. 在具有度量 ρ 的紧度量空间 W 上的拓扑流 $\{S_t\}$ 这种基本情形, 点 $w \in W$ 具有链循环性质, 是指对每个 $\varepsilon, T > 0$, 存在一条从 w 出发, 经过时间 $T_\varepsilon > T$ 之后又回到 ω 的 ε 轨道. 一条 ε 轨道是一

条参数化(可能不连续)曲线 $w(t)$ $(0\leqslant t\leqslant T_\varepsilon)$, 使得对于 $0\leqslant\tau\leqslant 1, 0\leqslant t\leqslant T_\varepsilon-1$, $\rho(S_\tau w(t), w(t+\tau))<\varepsilon$ ("ε 轨道的一个有限段接近于实际轨道的一段"). 对于更一般的情形, 也有链循环的定义([1]). 若 w 是闭流形, 则链循环与"弱非游荡"性质(见[3])相同, 更直接地反映了这个系统(在拓扑意义下)小的摄动对轨道状态的影响. 在具有链循环性质的点集之外, 系统的状态与梯度动力系统类似(见**梯度动力系统** (gradient dynamical system))(见[1], [2]).

参考文献

[1] Conley, Ch., Isolated invariant sets and the Morse index, Amer. Mat. Soc., 1978.

[2] Shub, M., Global stability of dynamical systems, Springer, 1987 (译自法文).

[3] Шарковский, А. Н., Добрынский, В. А., в кн., Динамические системы и вопросы устойчивости решений дифференциальных уравнений, К, 1973, 165-174.

Д. В. Аносов 撰

【补注】 关于链循环集的稳定性也见 [A1]. ε 轨道 (ε-trajectory)的概念 (以及 ε 影子 (ε-shadowing) 的相关概念) 在动力系统**双曲集** (hyperbolic set) 的研究中很重要, 见 [A2] 第二章.

参考文献

[A1] Block, L. and Franke, J. E., The chain recurrent set, attractors, and explosions, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 5(1985), 321-327.

[A2] Bowen, R., On Axiom a diffeomorphisms, Amer. Math. Soc., 1978.

徐定宥、罗嵩龄、许依群 译

链环 [**chain ring**; **цепное кольцо**], 左

左理想全体形成一个链的环(通常假定它是带单位元的结合环). 换句话说, 如果环 R 看成自身的左模是左链模, 则称 R 是左链环. 每个左链环是局部环. 类似地可定义右链环. 交换链环常称为赋范环 (normed ring). 亦见**离散赋范环** (discretely-normed ring).

Л. А. Скорняков 撰 肖 杰 译

房 [**chamber**; **камера**], 在有限维实仿射空间 E 中对于 E 中超平面的局部有限集合 $\mathfrak{H}$ 的

集合 $E\backslash\bigcup_{H\in\mathfrak{H}}H$ 的一个连通分支. 房是 E 中的开凸集.

令 $\mathfrak{H}$ 是 E 中超平面的集合, 使得对于 $\mathfrak{H}$ 的超平面的正交反射生成的 E 的运动群 W 是 E 的**离散变换群** (discrete group of transformations), 而且族 $\mathfrak{H}$ 对于 W 不变. 因此称房是关于 W 的. 群 W 单传递地作用在所有房的集合上, 且它由对于 $\mathfrak{H}$ 中包含任何固定的房 C 的 $(\dim E-1)$ 维超平面的正交反射的集合 S 所生成; 而且二元对 (W, S) 是一个 Coxeter 系统, C 的闭包是 W 的基本区域, C 的构造(墙之间的二面角的描述)完全决定了 W 作为抽象群的构造. 这种构造的研究是对 E 中反射生成的离散群进行完全分类的重要步骤, 见 **Coxeter 群** (Coxeter group). 与这个分类一起, 可得到群 W 的房的构造的完全描述.

若 W 是半单 Lie 代数的根系的 Weyl 群, 则 W 的房称为 W 的 Weyl 房 (Weyl chamber).

对 Лобачевский 空间或球上的超平面及反射生成的离散群也能定义房的概念 ([2]).

参考文献

[1] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Lie groups and Lie algebras, Addison-Wesley, 1975 (译自法文).

[2] Винберг, Э. Б., «Изв. АН СССР Сер. матем.», 35 (1971), 5, 1072-1112.

В. Л. Попов 撰

【补注】 Coxeter 系统 (coxeter system) (W, S) 由群 W 及 W 的一个子集 S 组成, S 生成 W 且满足 $1\notin S$, 又对所有 $s\in S$ 有 $s^2=1$, 而且对所有 $s, s'\in S$ 满足条件

(c) 令 $m(s, s')$ 是群元素 ss' 的阶; I 是使 $m(s, s')$ 为有限值的对 (s, s') 的集合, 则生成集合 S 及关系 $s^2=1$ 以及 $(s, s')^{m(s,s')}=1$ (对所有 $(s, s')\in I$) 就形成 W 的一个表示.

例如, 令 σ_i 是 n 元置换群 S_n 中的置换 $(i, i+1)$, 则 $(S_n, \{\sigma_1, \cdots, \sigma_{n-1}\})$ 是一个 Coxeter 系统.

近来, J. Tits 在综合几何学中用更抽象的方法 ([A1]) 定义了房和房系 (chamber systems).

参考文献

[A1] Tits, J., A local approach to buildings, in The geometric vein. The Coxeter Festschrift, Springer, 1981, 519-547.

[A2] Bourbaki, N., Groupes et algèbres de Lie, Hermann, 1968, Chapt. 4. Groupes de Coxeter et systèmes de Tits.

石生明 译 许以超 校

有限记忆信道 [**channel with finite memory**; **канал с конечной памятью**]

一种**通信信道** (communication channel), 它在时刻 t 的输出信号的统计性质由时刻 t' $(t-m\leqslant t'\leqslant t)$ 的输入信号决定 (因此与时刻 $t-m$ 前的传递信号无关); 数 m 被称为有记忆信道的记忆尺度 (或长度).

更确切地说, 一个时间离散的通信信道, 它的输入与输出信号分别为在空间 (Y, S_Y) 与 $(\widetilde{Y}, S_{\widetilde{Y}})$ 中取值的随机序列 $\eta=(\cdots, \eta_{-1}, \eta_0, \eta_1, \cdots)$ 与 $\widetilde{\eta}=(\cdots, \widetilde{\eta}_{-1}, \widetilde{\eta}_0, \widetilde{\eta}_1, \cdots)$ 所给定, 称这个信道为有限记忆的, 如果

$$\mathrm{P}\{\widetilde{\eta}_i^n\in\widetilde{A}\mid\eta_{-\infty}^n\}$$

是一组用来确定信道的相容的条件概率分布集合, 且对任何 i, j, k, n 与 $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ 满足条件

$$\mathrm{P}\{\tilde{\eta}_k^n \in \tilde{A} \mid \eta_{-\infty}^n\} = \mathrm{P}\{\tilde{\eta}_k^n \in \tilde{A} \mid \eta_{k-m}^n\},$$

$$\mathrm{P}\{\tilde{\eta}_i^j \in \tilde{B}, \tilde{\eta}_k^n \in \tilde{A} \mid \eta_{-\infty}^n\} =$$

$$= \mathrm{P}\{\tilde{\eta}_i^j \in \tilde{B} \mid \eta_{-\infty}^n\} \cdot \mathrm{P}\{\tilde{\eta}_k^n \in \tilde{A} \mid \eta_{-\infty}^n\}.$$

这里 $\tilde{\eta}_k^n = (\tilde{\eta}_k, \cdots, \tilde{\eta}_n)$, $\eta_{-\infty}^n = (\cdots, \eta_{n-1}, \eta_n)$, 且 $\tilde{A}$(相应地, $\tilde{B}$)是 $n-k+1$(相应地, $j-i+1$)个相同的空间 $(\tilde{Y}, S_{\tilde{Y}})$的直积集合的一个子集. 时间连续的有限记忆信道可类似地定义.

参考文献

[1] Хинчин, А. Я., 《Успехи матем. наук》, 11 (1956), 1, 17-75.

[2] Feinstein, A., Foundations of information theory, McGraw-Hill, 1968.

[3] Wolfowitz, J., Coding theorems of information theory, Springer, 1964.

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов 撰　沈世镒 译

有限状态信道[**channel with a finite number of states** 或(finite-state channel); **канал с конечным числом состояний**]

一种**通信信道** (communication channel), 它在时刻 t 的输出信号的统计性质由同一时刻的输入信号与前一时刻的信道状态决定, 且这个信道的可能状态集合是有限的. 一个有限状态信道也可由一个有限的**概率自动机** (automaton, probabilistic) 定义. 以下给出一个时间离散且输入与输出信号分量的取值空间 Y 与 $\tilde{Y}$ 有限的齐次有限状态信道 (homogeneous channel with a finite number of states) 的严格定义. 假设给定函数 $q(y, s'; \tilde{y}, s'')$, $y \in Y$, $\tilde{y} \in \tilde{Y}$, s', $s'' \in S$, 其中 S 是一个有限集合, 称为信道的状态集, 它的概率分布为 $\{p_{s_0}: s_0 \in S\}$. 直观地, 函数 $q(y, s'; \tilde{y}, s'')$ 定义了信道在时刻 $(k-1)\tau$ 状态为 s' 的条件下, 在时刻 $k\tau$ 信道的传递信号为 y, 输出信号为 $\tilde{y}$ 且状态为 s'' 的条件概率. 分布 $\{p_{s_0}: s_0 \in S\}$ 为信道状态的初始分布 (信道在初始时刻的状态分布). 设函数 $Q_n(y^n, s_0; \tilde{y}^n, s_n)$ 由公式

$$Q_n(y^n, s_0; \tilde{y}^n, s_n) =$$

$$= \sum_{s_{n-1} \in S} q(y_n, s_{n-1}; \tilde{y}_n, s_n) Q_{n-1}(y^{n-1}, s_0; \tilde{y}^{n-1}, s_{n-1}),$$

$$Q_1(y, s_0; \tilde{y}, s_1) = q(y, s_0; \tilde{y}, s_1)$$

递推地确定, 其中 $y^n = (y_1, \cdots, y_n)$, $y_i \in Y$, $\tilde{y}_i \in \tilde{Y}$ $(i = 1, \cdots, n)$, $s_k \in S$ $(k = 1, \cdots, n)$. 设

$$Q_n(y^n, s_0; \tilde{y}^n) = \sum_{s_n \in S} Q_n(y^n, s_0; \tilde{y}^n, s_n),$$

那么对任何长度为 n 的有限状态信道段的转移函数

$$Q_n(y^n, \tilde{y}^n) = \mathrm{P}\{\tilde{\eta}^n = \tilde{y}^n \mid \eta^n = y^n\}$$

按定义, 等于

$$Q_n(y^n, \tilde{y}^n) = \sum_{s_0 \in S} p_{s_0} Q_n(y^n, s_0; \tilde{y}^n),$$

其中 $\eta^n = (\eta_1, \cdots, \eta_n)$, $\tilde{\eta}^n = (\tilde{\eta}_1, \cdots, \tilde{\eta}_n)$ 是信道的长度为 n 的输入与输出段.

参考文献见**通信信道** (communication channel) 条目中的[3], [4].

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов 撰　沈世镒 译

有反馈信道 [**channel with feedback**; **канал с обратной связью**]

一种**通信信道** (communication channel), 用于从**信息源** (information, source of) 传递信息到接收者, 使输入端在任何时刻都知道这一时刻前在输出端关于接收信号的信息; 且这些信息能够用于选择下一个通过信道的传递信号. 一种时间离散且有全反馈的信道的信息传递的可能模式所述如下. 设信道的输入端的信息为随机变量 ξ, 取值于可测空间 $(\mathfrak{X}, S_{\mathfrak{X}})$. 收信人(接收者)得到的信息是随机变量 $\tilde{\xi}$, 取值于可测空间 $(\tilde{\mathfrak{X}}, S_{\tilde{\mathfrak{X}}})$. 假定信息 ξ 的传递是利用某个长度为 n 的时间离散的信道段进行的. 信道段的输入和输出信号为随机向量 $(\eta_1, \cdots, \eta_n)$ 与 $(\tilde{\eta}_1, \cdots, \tilde{\eta}_n)$, 相应的分量取值于可测空间为 (Y, S_Y) 与 $(\tilde{Y}, S_{\tilde{Y}})$. 一个利用全反馈的信道的信息传递方法是由 n 个取值于 Y 中的编码函数集合

$$f_1(x), f_2(x, \tilde{y}_1), \ldots, f_n(x, \tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_{n-1}),$$

$$x \in \mathfrak{X}, \ \tilde{y}_i \in \tilde{Y}, \ i = 1, \ldots, n-1$$

给定, 且译码函数 $g(\tilde{y}_1, \cdots, \tilde{y}_n)$ $(\tilde{y}_i \in \tilde{Y}, i = 1, \cdots, n)$ 取值于 $\tilde{\mathfrak{X}}$, 则有关系式

$$\eta_k = f_k(\xi, \tilde{\eta}_1, \ldots, \tilde{\eta}_{k-1}), \ k = 1, \ldots, n,$$

$$\tilde{\xi} = g(\tilde{\eta}_1, \ldots, \tilde{\eta}_n).$$

这些关系式表明, 在反馈信道上传递下一个信号 η_k 的选择依赖于传递信息 ξ 与某时刻前的信道输出端的接收信号 $\tilde{\eta}_1, \cdots, \tilde{\eta}_{k-1}$. 实际上这意味着能及时无噪声地把信道的输出端的接收信号的信息传递给信道的输入端. 在这种情形通常说除了用于沿向前方向(即由信息源到接收者方向)传递信息的信道之外, 还有一个具有无穷大传递率(容量, 见**信道的传输速率** (transmission rate of a channel))的反馈信道 (feedback channel) (即在沿向后方向传递信息的信道). 更实际的情形是反馈信道有噪声, 即在信道的输入端收到的信道输出信号的信息可能有随机误差. 这种情形称为不全反馈信道 (channel with incomplete feedback).

与通常情形一样, 可提出有反馈信道的容量概念, 它是在使用上述编码与译码方法发送的信息具任意小的误差概率条件下的传递率的上确界. 在一般情形

下，有反馈信道的信道容量大于通常的信道容量，但对于无记忆信道，已经证明这两种信道容量是相同的．对于全反馈信道，已给出的编码与译码算法具有简单的描述与很高的效率．

参考文献

[1] Добрушин，Р．Л．，《Теория вероятн. и её применен》，3 (1958)，4，395－412．

[2] Feedback communication systems，New York，1961．

[3] Зигангиров，К．Ш．，《Пробл．передачи информ.》，6 (1970) 2，87－92．

[4] Turin，G．L．，Notes on digital communication，New York - Cincinatti - Toronto - London - Melbourne，1969．

Р．Л　Добрушин，В．В．Прелов 撰　沈世镒 译

多方向信道 [**channel with multiple directions；канал многосторонний**]，多终端信道 (multi - terminal channel)，多用户信道 (muliti - user channel)

一种可同时在几个方向上传递信息的**通信信道** (communication channel)．下文所描述的是离散时间无记忆且具有有限输入与输出字母表的多用户信道．设 $Y_1,\cdots,Y_s$ 是 s 个有限集合，其中 (字母表) Y_i 是第 i 个发送机可能发送的信号集合，设 $\tilde{Y}_1,\cdots,\tilde{Y}_r$ 是 r 个有限集合，其中 (字母表) $\tilde{Y}_j$ 是第 j 个接收机可能接收的信号集合．以下假设给定**随机矩阵** (stochastic matrix)

$$q(y_1,\ldots,y_s;\tilde{y}_1,\ldots,\tilde{y}_r),$$

$$y_i\in Y_i,\ \tilde{y}_j\in\tilde{Y}_j,\ i=1,\ldots,s;\ j=1,\ldots,r.$$

两个随机向量的集合 $(\eta^{(1)},\cdots,\eta^{(n)})$ 与 $(\tilde{\eta}^{(1)},\cdots,\tilde{\eta}^{(n)})$ 定义在某个**概率空间** (probability space) $(\Omega,\mathfrak{A},\mathsf{P})$ 上，其中 $\eta^{(k)}=(\eta_1^{(k)},\cdots,\eta_s^{(k)})$，$\tilde{\eta}^{(k)}=(\tilde{\eta}_1^{(k)},\cdots,\tilde{\eta}_r^{(k)})$，称这两个随机向量集合为由一个长度为 n 具有 s 个输入与 r 个输出的齐次多用户信道段所联结，如果 $\eta_i^{(k)}$ 与 $\tilde{\eta}_j^{(k)}$ $(i=1,\cdots,s;j=1,\cdots,r;\ k=1,\cdots,n)$ 分别在 Y_i 与 $\tilde{Y}_j$ 上取值，且对任何 $y^{(k)}=(y_1^{(k)},\cdots,y_s^{(k)})$ 与 $\tilde{y}^{(k)}=(\tilde{y}_1^{(k)},\cdots,\tilde{y}_r^{(k)})$ $(k=1,\cdots,n)$，$y_i^{(k)}\in Y_i$，$\tilde{y}_j^{(k)}\in\tilde{Y}_j$ $(i=1,\cdots,s;\ j=1,\cdots,r)$，有关系式

$$\mathsf{P}\{(\tilde{\eta}^{(1)},\ldots,\tilde{\eta}^{(n)})=(\tilde{y}^{(1)},\ldots,\tilde{y}^{(n)})\mid$$
$$\mid(\eta^{(1)},\ldots,\eta^{(n)})=(y^{(1)},\ldots,y^{(n)})\}=$$
$$=\prod_{k=1}^{n}q(y_1^{(k)},\ldots,y_s^{(k)},\tilde{y}_1^{(k)},\ldots,\tilde{y}_r^{(k)})$$

成立．

直观地说多用户信道的每个输入与每个输出位于不同的终端 (terminal)，因此信道总共有 $s+r$ 个终端．这表示在某个终端中的发送机或接收机不能利用其他终端的发送机或接收机所已知的信息．具有这种性质的多用户信道通常称为纯信道 (pure channels)，与此不同的是混合多用户信道 (mixed multi - user channels)，这时存在某些终端同时含有信道的若干个输入与输出．混合多用户信道分析的复杂性是由于某些终端的发送机能够在选择下一个发送信号时利用给定终端的所有接收机在这一瞬时所得到的信息；同样这个终端的接收机能够利用这个终端在给定瞬时所得到的所有的信息．

如上直观描述的纯无记忆多用户信道的一般信息传递问题可表述如下．假定有 $s(2^r-1)$ 个离散的平稳**信息源** (information, source of) $U(i,\Delta)$ $(i=1,\cdots,s,\Delta\in D)$，其中 D 是指标集 $\{1,\cdots,r\}$ 的所有非空子集的集合，产生的消息为 $\xi(i,\Delta)=\{\xi_k(i,\Delta):k=\cdots,-1,0,1,\cdots\}$，其中消息的每个分量 $\xi_k(i,\Delta)$ 取值于元素数为 $M(i,\Delta)$ 的集合 $X(i,\Delta)$ 之中；$\xi(i,\Delta)$ 为由信道的第 i 个输入端输入并从所有指标 $j\in\Delta$ 的输出端输出的消息．第 j $(j=1,\cdots,r)$ 个输出端输出的消息是一个随机过程的集合 $\{\tilde{\xi}(i,\Delta,j)$: $i=1,\cdots,s$，与使 $j\in\Delta$ 的 $(\Delta,j)\}$，其中

$$\tilde{\xi}(i,\Delta;j)=\{\tilde{\xi}_k(i,\Delta;j):k=\ldots,-1,0,1,\ldots\}$$

且分量 $\tilde{\xi}_k(i,\Delta,j)$ 取值于 $X(i,\Delta)$ 之中．设长度为 L 的消息段

$$\{\xi^L(i,\Delta)=(\xi_1(i,\Delta),\ldots,\xi_L(i,\Delta)):i=1,\ldots,s;\Delta\in D\}$$

被长度为 N 的无记忆多用户信道段所传递，且使用的分组编码与译码方法如下．编码由 s 个编码映射 f_i 所确定

$$f_i:\prod_{\Delta\in D}X(i,\Delta)\to Y_i^N,\ i=1,\ldots,s$$

(其中 Y_i^N 是相同的 N 个 Y_i 空间的直积)，且译码为一组译码映射所确定：

$$g_{j,i,\Delta}:\tilde{Y}_j^N\to X(i,\Delta),\ j=1,\ldots,r,\ i=1,\ldots,s,$$

其中 Δ 使 $j\in\Delta$ 成立．

编码函数集合 $\{f_i\}$ 规定了一个所有可能的信源的长度为 L 的消息段与长度为 N 的信道输入信号段之间的函数关系．译码函数集合 $\{g_{j,i,\Delta}\}$ 规定了一个长度为 N 的信道输出信号段与长度为 L 的由每个信道输出所产生的消息段之间的泛函关系．如果长度为 L 的消息段 $\xi^L(i,\Delta)$ 的联合分布，编码函数 $\{f_i\}$ 与译码函数 $\{g_{j,i,\Delta}\}$，及无记忆多用户信道的转移概率已知，那么误差概率 p_e 可由公式 $p_e=\mathsf{P}\{$对于某个 $i=1,\cdots,s$，$j=1,\cdots,r$ 与使 $j\in\Delta$ 成立的 Δ，有 $\xi^L(i,\Delta)\neq\tilde{\xi}^L(i,\Delta,j)\}$ 来确定．

一个在 $s(2^r-1)$ 维 Euclid 空间的率集合(向量) $R=\{R(i,\Delta):i=1,\cdots,s;\Delta\in D\}$ 的集合 $\mathfrak{R}$ 称为信道的容量区域 (capacity region)，如果对任何 $\varepsilon>0$，总存在一

整数 N，编码函数 $\{f_i\}$ 与译码函数 $\{g_{j,i,\Delta}\}$，使

$$\frac{L\log M(i,\Delta)}{N} \geqslant R(i,\Delta)-\varepsilon,\ p_e \leqslant \varepsilon$$

成立.

多用户信道理论研究的一个主要问题是区域 $\mathfrak{R}$ 的描述问题. 对于一般情形这个问题没有解决. 有终极解只在几种特殊情形得到完全解决，例如，多址信道 ($r=1$ 的多用户信道)，广播信道 ($s=1$ 的信道)的某些类型.

参考文献

[1] Шеннон, К., Работы по теории информации и кибернетике, пер. с. англ., М., 1963, 622—663.

[2] Meulen, E. C. van der, Advances in multi-user communication channel, in Proc. 1975 IEEE-USSR Joint Workshop Inform. Theory. Moscow December, 1975, Inst. Electr. Electron. Eng., 1976, 227—247.

[3] Cover, T. M., Broadcast channels, *IEEE Trans. Inform. Theory*, **18** (1972), 1, 2—14.

[4] Slepian, D. and Wolf, J. K., A coding theorem for multiple access channels with correlated sources, *Bell System Techn. J.*, **52** (1973), 7, 1037—1076.

[5] Csiszar, I. and Körner, J., Information theory. Coding theorems for discrete memoryless system, Akad. Kiado, 1981.

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов 撰

【译注】 有关理论在国际上通称为**多用户信息论**(multipleuser information theory)，是70年代与80年代初信息论研究的一个主要方向，涉及模型有数十种之多，典型问题有多重信源的无噪声编码问题，多重信源的率失真编码问题，多址信道，广播信道与多用户信道编码问题等.

参考文献

[B1] Meulen, E. C. van der, A survey of multi-way channel in information theory. 1961—1976. *IEEE Trans Inform. Theory*, **IT-23**, Jan. (1977), 2, 1—37.

[B2] Abbas El Gamal and Thomas M. Cover, Multiple-user information theory, *Proc. of IEEE*, **68** (1980), 12, 1466—1483.

沈世镒 译

浑沌 [**chaos**; **xaoc**]，确定性浑沌 [deterministic chaos]

【补注】 浑沌描述这样一种情况，即一个微分方程典型的解(或轨道)(或某种描述决定性演化(evolutions)的其他模型的典型演化)，不收敛于(时间的)某个平稳函数或周期函数，而展现一种看起来无法预测的性态. 有不同的方法将此概念数学形式化. 下面考虑其中之一，再讨论一些例子.

我们考虑的动力系统(或描述决定性演化的模型，见动力系统(dynamical system))是一微分方程 $\dot{x}=F(x)$，$x\in X$，X 是一微分流形(differentiable manifold)，而 $F:X\to T(X)$ 是 X 上的向量场(vector field)，可微映射 $\varphi:X\to X$ 则既可以是可逆的也可以是非可逆的. 给定初始状态 $x_0\in X$，相应的演化即此微分方程适合 $x(0)=x_0$ 的解 $x(t)$；在映射情况下，则是函数 $N\to X$，$n\mapsto\varphi^n(x_0)$，后一情况是离散时间情况，前一情况则是连续时间情况. 即令可以对负的时间定义演化，也只考虑它对正的时间的那部分. 还有，只考虑有界演化，即对 $x(t),t\geqslant 0$ 或 $x_n,n\geqslant 0$，只考虑其闭包是 X 的紧子集的情况. 这里假设在 X 上定义了一度量.

一动力系统称为是浑沌的(chaotic)，若有某一子集 $\widetilde{X}\subset X$，它对 Lebesgue 测度类中的任一测度均具有正测度，而且是不变的，即由 $\widetilde{X}$ 出发的任一演化恒停留于 $\widetilde{X}$ 中，而 $\widetilde{X}$ 中的演化均有以下性质：

1) $\widetilde{X}$ 中出发的演化均为非周期的或拟周期的(quasi-periodic)；演化 $x(t)$ 称为拟周期的是指它可写为 $x(t)=F(\omega_1 t,\cdots,\omega_m t)$，$\omega_1,\cdots,\omega_m$ 在有理数域上独立，F 则对其一切变元具有周期1. 演化 x_n 称为拟周期的，则指它可写为 $x_n=F(\omega_1 n,\cdots,\omega_m n)$，1，$\omega_1,\cdots,\omega_m$ 在有理数域上独立，F 则对其一切变元具有周期1.

2) 当时间趋于无穷时，任一演化均不趋于周期或拟周期演化.

3) (对初值的敏感的依赖性)有一正常数 A，使对任一 $x_0\in\widetilde{X}$ 与任一 $\varepsilon>0$，在 x_0 的 ε 邻域中均可找到 y_0 使得由 x_0 出发的演化在某一正时刻离 y_0 的距离超过 A.

这些条件彼此可能不独立，前两点可能是第三点的推论，但此事迄今(1988)未得证明. 第三点表示某种不可预测性. 即使初始条件可以以任何(有限)精确程度得知，在将来亦有一时刻，使得该时刻的状态不能由关于初始状态的信息预测到距离 A 之内.

这一领域的一般参考文献是 [A1] 和 [A4].

下面讨论浑沌动力系统(以及被认为是浑沌的动力系统)的主要例子.

1) 逻辑斯谛族(logistic family). 这是一族单参数一维映射：$L_a(x)=1-ax^2$. 已经证明，对于参数 a 的值的一个很大的集合(具正的 Lebesgue 测度)，这一映射定义一浑沌动力系统. 这些系统是用来描述某些条件下的群体动力学的. [A3] 是一般的参考文献.

2) Hénon 族(Hénon family) ([A5]). 这是一个二维可逆映射 $H_{a,b}(x,y)=(1+ax^2+y,\ bx)$ $(b\neq 0)$ 的二参数族. 在此例中，只有一些数值的检验表明，$H_{a,b}$ 对参数 a，b 的许多值定义一浑沌动力系统. 对此例的数学分析仍在进行之中(迄至1988).

3) Lorenz 族(Lorenz family) ([A6]). 这是 $\mathbf{R}^3$ 中的微分方程组

$$\dot{x}=\sigma(y-x),\ \dot{y}=rx-y-xz,\ \dot{z}=xy-bz$$

的三参数族．对此方程组已经有了一个很好的理论，但迄今未完全证明它对任一参数值确为浑沌的．数值的结果与几何论证有力地暗示了它确是浑沌的；所缺少的是耐心的数值检验．这一方程组与对流问题有关．

4）一般的（非平凡的）公理 A 吸引子（axiom A attractors）．这是一类浑沌的抽象动力系统．在一切浑沌动力系统中，它是最"正规"的，也是数学上充分了解了的，见 [A2]．

最后，在许多物理和化学实验中，特别是与弱湍流以及远离平衡的开放化学反应有关的实验中，实验数据指明，应该用浑沌动力系统去解释它们，见 [A1]．

文献中迄未给出浑沌映射标准的定义．例如在 [A7] 中，V 上的离散时间系统 $f: V \to V$ 称为浑沌的是指：(i) f 对初值有敏感的依赖性；(ii) f 是拓扑传递的，即对任意一对开集 $U_1, U_2 \subset V$ 恒有 $n>0$ 使得 $f^n(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset$；(iii) 周期点集在 V 中稠密．

亦见**奇异吸引子**(strange attractor)；**动力系统的泛性态** (universal behaviour in dynamical systems)；**通向浑沌的道路**(routes to chaos)；**分形集**(fractals)；**Julia 集** (Julia set)．

还有另一个概念，主要是在物理学和概率论中，也称为浑沌；见 **Wiener 浑沌**(Wiener chaos)．

参考文献

[A1] Bergé, P., Pomeau, Y. and Vidal, Ch., L'ordre dans le chaos, Hermann, 1984.

[A2] Bowen, R., Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms, Springer, 1975

[A3] Collet, P. and Eckmann, J.-P., Iterated maps on the interval as dynamical systems, Birkhäuser, 1980.

[A4] Guckenheimer, J. and Holmes, P., Non-linear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields, Springer, 1983.

[A5] Hénon, M., A two-dimensional mapping with a strange attractor, *Comm. Math. Phys.*, **50** (1976), 69–77.

[A6] Sparrow, C., The Lorentz equations: bifurcations, chaos, and strange attractors, Springer, 1982.

[A7] Devaney, R. L., An introduction to chaotic dynamical systems, Benjamin/Cummings, 1986

齐民友 译

Чаплыгин 法 [Chaplygin method；Чаплыгина метод]

一种近似求解一阶常微分方程初值 (Cauchy) 问题的方法．该方法要点在于同时构造两族近似解．例如，对于单个一阶方程的初值 (Cauchy) 问题：

$$y' = f(x,y),\ (x,y)\in R,\ y(x_0) = y_0,$$
$$R = \{(x,y): |x-x_0| \leqslant a,\ |y-y_0| \leqslant b\}, \qquad (1)$$

一族近似解从下面逼近准确解，另一族近似解从上面逼近准确解．

这一方法的基础是关于微分不等式的 **Чаплыгин 定理** (Chaplygin theorem)：设 $y(x)$ 是 (1) 的解，并假设曲线 $y=u(x)$ 与 $y=v(x)$ 全部位于矩形 R 内，且通过点 (x_0, y_0)，对 $x>x_0$ 满足不等式

$$u'(x)-f(x,u(x)) < 0,\quad v'(x)-f(x,v(x)) > 0,$$

则对 $x>x_0$ 以下不等式成立：

$$u(x) < y(x) < v(x). \qquad (2)$$

满足 Чаплыгин 定理假设的函数 $u(x)$ 与 $v(x)$ 给出了 (1) 的解的上界和下界．

给定一对满足 (2) 的初始近似 $u_0(x)$ 与 $v_0(x)$，根据 Чаплыгин 定理可以构造出一对更好的近似 $u_1(x)$ 与 $v_1(x)$，满足条件

$$u_0(x) < u_1(x) < y(x) < v_1(x) < v_0(x). \qquad (3)$$

当 $\partial^2 f/\partial y^2$ 在 R 中不变号时，$u_1(x)$ 和 $v_1(x)$ 可以通过求解一对初值为 $y(x_0)=y_0$ 的线性微分方程得到．例如，设在 R 中 $\partial^2 f/\partial y^2>0$，则任意平面 $x=$ 常数同曲面 $z=f(x,y)$ 的交线是下凸的，该曲线的任意弧位于弦的下方并位于通过弧上任意点的切线的上方．设对某一 $x=$ 常数，曲线 $z=f(x,y)$ 在点 $y=u_0(x)$ 处的切线方程为：

$$z = k(x)y + p(x),$$

其中

$$k(x) = f_y(x, u_0(x)),\quad p(x) = f(x,u_0(x)) - u_0(x)k(x),$$

并设同一曲线上连接点 $y=u_0(x)$ 与 $y=v_0(x)$ 的弦方程为

$$z = l(x)y + q(x),$$

其中

$$l(x) = \frac{f(x,v_0(x)) - f(x,u_0(x))}{v_0(x)-u_0(x)},$$
$$q(x) = f(x,u_0(x)) - u_0(x)l(x),$$

则对此 x 值成立不等式

$$k(x)y + p(x) < f(x,y) < l(x)y + q(x). \qquad (4)$$

条件 (4) 对 R 中的 x 都一致地成立．初值 (Cauchy) 问题 $y'=k(x)y+p(x)$，$y(x_0)=y_0$ 的解 $y=u_1(x)$ 与初值 (Cauchy) 问题 $y'=l(x)y+q(x)$，$y(x_0)=y_0$ 的解 $y=v_1(x)$ 满足条件 (2)．还可证明它们也满足条件 (3)．给定一对函数 $u_1(x)$，$v_1(x)$，还可以用同样方式构造出 $u_2(x)$，$v_2(x)$ 等．这一过程收敛很快：

$$v_n - u_n \leqslant \frac{c}{2^{2^n}}, \qquad (5)$$

其中常数 c 不依赖于 x 和 n．

根据已给定的近似 $u_{n-1}(x)$ 和 $v_{n-1}(x)$ 得到更好的近似 $u_n(x)$ 和 $v_n(x)$ 的第二种方法不要求 $\partial^2 f/\partial y^2$ 在 R 中

不变号．在这种方法中

$$u_n(x) = u_{n-1}(x)+\int_{x_0}^{x} e^{-k(x-t)}[f(t, u_{n-1}(t))-u'_{n-1}(t)]dt,$$

$$v_n(x) = v_{n-1}(x)+\int_{x_0}^{x^*} e^{k(x-t)}[v'_{n-1}(t)-f(t, v_{n-1}(t))]dt,$$

其中 k 是 R 中函数 $f(x, y)$ 的 **Lipschitz 常数**（Lipschitz constant）．这时函数对 $u_n(x)$, $v_n(x)$ 与 $u_{n-1}(x)$, $v_{n-1}(x)$ 对所有的 x 也满足条件(3)，但收敛速度低于(5)中所给出的．

使用 Чаплыгин 方法的主要困难在于构造出初始近似 $u_0(x)$, $v_0(x)$．

这一方法是 C. A. Чаплыгин 在 1919 年提出的．

参考文献

[1] Чаплыгин, С. А., Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений, М.-Л., 1950.
[2] Лузин, Н. Н., О методе приближенного интегрирования академика, С. А. Чаплыгина, 《Тр. ЦАГИ》, **141** (1932), 1－32.
[3] Михлин, С. Г., Смолицкий, Х. Л., Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений, М., 1965, 22－26.

С. С. Гайсарян 撰

【补注】

参考文献

[A1] Collatz, L., The numerical treatment of differential equations, Springer, 1966.

金保侠 译

Чаплыгин 定理 [Chaplygin theorem; Чаплыгина теорема]，关于微分不等式的

如果在**微分不等式**（differential inequality）

$$L[y] \equiv y^{(m)}+a_1(x)y^{(m-1)}+\cdots+a_m(x)y > f(x) \quad (*)$$

中所有 a_i 和 f 是在 $[x_0, x_1]$ 上可求和的，那么存在一个不依赖于 f 的 $x^* \in (x_0, x_1]$，使得 $y(x)>z(x)$, $x_0<x\leqslant x^*$，其中

$$L[z] = f(x),$$

$$z(x_0) = y(x_0), \ldots, z^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}(x_0).$$

这里

$$x^* = \max\{x\in[x_0, x_1]: \forall\xi\in[x_0, x],$$
$$\forall s\in[\xi, x]\Rightarrow G(s;\xi)\geqslant 0\},$$

其中 $G(x;\xi)$ 是相应的 Cauchy 函数（Cauchy function），即方程 $L[G]=0(\xi\leqslant x\leqslant x_1)$ 的解，它满足初始条件

$$G\Big|_{x=\xi} = \cdots = G_x^{(m-2)}\Big|_{x=\xi} = 0, \quad G_x^{(m-1)}\Big|_{x=\xi} = 1.$$

因此，对于 $m=1$ 及对于不等式 $y''-y>f(x)$，得到 $x^*=x_1$，而对于不等式 $y''+y>f(x)$，得到

$$x^* = \min\{x_1, x_0+\pi\}.$$

对于弱不等式，对于 $y^{(i)}(x)$ 与 $z^{(i)}(x)$ $(i=1,\cdots, m-1)$ 的比较，对于形如

$$y(x_0) \geqslant z(x_0), \ldots, y^{(n-1)}(x_0) \geqslant z^{(n-1)}(x_0)$$

的初始条件，以及对于 $x<x_0$ 的不等式(*)的解，类似的命题均成立．

这个定理是 C. A. Чаплыгин 于 1919 年获得的．

参考文献

[1] Мамедов, Я. Д., Аширов, С., Атдаев, С., Теоремы о неравенствах, Аш., 1980.

亦见**微分不等式**（differential inequality）中的参考文献．

А. Д. Мышкис 撰

【补注】 在文献[A1]的第 123 页上，Чаплыгин 定理是作为一个问题而建立的．

参考文献

[A1] Petrovskii, I. G., Ordinary differential equations, Prentice Hall, 1966 (译自俄文)(中译本：И.Г.彼得罗夫斯基，常微分方程讲义，人民教育出版社，1959).

周芝英 译

Chapman-Enskog 法 [Chapman-Enskog method; Чепмена-Энскога метод]

单粒子分布函数 $f(t, r, v)$ 的动力学 **Boltzmann 方程**（Boltzmann equation）的求解方法．它是一种独特的逐次近似法，其中取作零次近似的局部 **Maxwell 分布**（Maxwell distribution）$f_{loc}(r, v \mid n, u, \theta)$ 由标准公式确定，但粒子数密度 $n(t, r)$、流体动力学速度 $u(t, r)$ 和温度 $\theta(t, r)$ 取局部值，同时每一次近似解的存在条件是，n, v, θ 的流体动力学方程在前一次近似中成立．由于具有 1，v 和 v^2 等量的 Boltzmann 碰撞积分对速度 v 的各卷积为零，n, u, θ 的运动方程不显含碰撞积分．可以求出 Boltzmann 方程如下形式的解：

$$f(t, r, v) = f_{loc}(1+\varphi(t, r, v)), \ \varphi(t, r, v) \ll 1,$$

从而导出具有对于 φ 的线性化碰撞积分的非齐次积分方程．此方程的非齐次部分包含 $n(t, r)$, $u(t, r)$, $\theta(t, r)$ 等量，它们服从上面提到的有关方程．这样，要同时考虑 6 个方程．求出在速度空间按 Sonin 多项式（同半整数幂的 **Laguerre 多项式**（Laguerre polynomials））展开的 φ 方程的解．整个方法有这样一个特点：分布函数 $f(t, r, v)$ 同时间有关，但这仅仅是由于它同局部量 $n(t, r)$, $u(t, r)$, $\theta(t, r)$ 有关．零次近似 $f=f_{loc}$ 确定理想流体动力学方程（Euler 方程）．这些方程是 f 的一次近似的存在条件．同一次近似相对应的是 Navier-Stokes 方程，后者具有扩散系数、热传导和两个粘性系数的显式．以后是 Burnett

方程,等等.这个展开式的参数实际上是在与平均自由程(非均匀性参数)相等的区间上 $n(t, r)$, $u(t, r)$, $\theta(t, r)$ 各量的相对变化. 因此,这个方法不适用于包含这些量的跳跃的问题(如激波等).

根据 D. Hilbert (1912) 提出的解积分方程的方法, D. Enskog (1917) 和 S. Chapman (1916) 分别独立地研究出上述解法.

同一个解也可用 Grad 法 (Grad method) 求得. 这个方法不像 Chapman - Enskog 法那样繁琐. 在这个方法中函数 f 用 $f_{loc}(r, v \mid n, u, \theta)$ 对速度分量 v 的各阶导数的级数表示(实际上,它等价于在三维速度空间中用 Hermite 多项式表示此函数的展开式),式中依赖于 t 和 r 的各系数是未知分布函数的矩. 这些矩也是通过 Boltzmann 方程确定的. f 的一次近似(它对应 Navier - Stokes 方程)仅包含 f_{loc} 的二阶导数.

用上述方法所求得的单粒子分布函数的解,可在对应于很小的非均匀参数值的**流体力学近似** (hydrodynamic approximation) 条件下,直接从 **Боголюбов 方程系列** (Bogolyubov chain of equations) 导出(即不藉助于动力学方程). 然而,由于这个方程系列中导出的各次近似包含高阶相关量的计算,这些结果只符合到一次近似,因为 f 的下一次近似已计入三重粒子相关量,它们并不包含在 Boltzmann 方程中,而且这些项的贡献同满足标准 Boltzmann 方程的函数 f 的二次近似所对应的各项不匹配.

参考文献

[1] Chapman, S., Cowling, T. D., The mathematical theory of non - uniform gases, Cambridge Univ. Press, 1952.

[2] Uhlenbeck, G. E., Ford, G. V., Lectures in statistical mechanics, Amer. Math. Soc., 1963.

[3] Hirschfelder, J., Curtis, C. F., Bird, R. B., The molecular theory of gases and liquids, Wiley, 1954.

[4A] Grad, H., Asymptotic theory of the Boltzmann equation Ⅰ, *Physics of Fluids*, 6 (1963), 147.

[4B] Grad, H., Asymptotic theory of the Boltzmann equation Ⅱ, in Rarfied gas dynamics, Acad. Press, 1963.

[5] Grad, H., Principles of the kinetic theory of gases, in S. Flügge (ed.), Handbuch der Physik, Vol. 12, Springer, 1958, 205 – 294.

И. А. Квасников 撰

【补注】 关于碰撞算子(或碰撞积分)和线性碰撞算子(线性碰撞积分)概念,见 **Boltzmann 方程** (Boltzmann equation) 和**线性化 Boltzmann 方程** (Boltzmann equation, linearized).

晏名文 译　庄峰青 校

特征标公式 [**character formula**; **характеров формула**], Weyl 公式 (Weyl formula)

把一个特征为零的代数闭域上半单 Lie 代数的不可约有限维表示的特征标 $\mathrm{ch}\,V(\Lambda)$ (见**半单 Lie 代数的有限维表示的特征标** (character of a finite - dimensional representation of a semi - simple Lie algebra)) 通过它的最高权 Λ 表出的公式:

$$\mathrm{ch}\,V(\Lambda) = \frac{\sum_{w \in W} (\det w) e^{w(\Lambda+\rho)}}{\sum_{w \in W} (\det w) e^{w(\rho)}} = \frac{\sum_{w \in W} (\det w) e^{w(\Lambda+\rho)-\rho}}{\prod_{\alpha \in \mathbf{R}^+} (1-e^{-\alpha})}$$

(这里 W 是 **Weyl 群** (Weyl group) 而 $\rho = (\sum_{\alpha \in \mathbf{R}^+} \alpha)/2$ 是 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的正根和的一半), 特征标公式的推论有关于表示的维数的公式:

$$\dim V(\Lambda) = \prod_{\alpha \in \mathbf{R}^+} \frac{(\Lambda+\rho, \alpha)}{(\rho, \alpha)},$$

关于权的重数的公式, 还有关于不可约 $\mathfrak{g}$ 模 $V(\Lambda)$ 在 $V(\Lambda') \otimes V(\Lambda'')$ 内出现的次数 m_Λ 的 Steinberg 公式 (Steinberg formula)

$$m_\Lambda = \sum_{s,t \in W} \det(st) P(\Lambda + 2\rho - s(\Lambda'+\rho) - t(\Lambda''+\rho)),$$

这里 $P(\mu)$ 是一个元素 μ 被表成正根和的不同的表示的个数 (见[1]).

特征标公式可以推广到由一个不可分解的 **Cartan 矩阵** (Cartan matrix) 所定义的**分次 Lie 代数** (Lie algebra, graded) 的不可约表示的情形. 这个推广导出下列组合恒等式:

$$e(t) = \sum_{j \in \mathbf{Z}} (-1)^j t^{j(3j+1)/2}$$

(Euler 恒等式 (Enler identity));

$$\frac{e^2(t)}{e(t^2)} = \sum_{j \in \mathbf{Z}} (-1)^j t^{j^2}$$

(Gauss 恒等式 (Gauss identity));

$$e^3(t) = \sum_{j \geq 0} (-1)^j (2j+1) t^{j(j+1)/2}$$

(Jacobi 恒等式 (Jacobi identity)); 其中

$$e(t) = \prod_{n \geq 1} (1-t^n);$$

$$\prod_{j \geq 1} (1-t^{5j-4})^{-1} (1-t^{5j-1})^{-1} = \sum_{n \geq 0} \frac{t^{n^2}}{(1-t) \cdots (1-t^n)}$$

(Rogers - Ramanujan 恒等式 (Rogers - Ramanujan identity)); 以及其他恒等式 (见[3], [4]).

对于某些单 Lie 超代数的不可约表示来说, 也可以

得到这个特征标公式的类似公式(见**超代数** (superalgebra))([2]).

参考文献

[1] Bourbaki, N., Elements de mathématique, Groupes et algébre de Lie, Actualités Sci. Ind., Hermann, 1960, 1968(英译本: Bourbaki, N., Elements of mathematics, Lie groups and Lie algebras, Addison-Wesley, 1975).

[2] Лейтес, Д. А., «Функциональный анализ», 14(1980). 2, 35−38.

[3] Kac, V. G., Infinite-dimensional algebras, Dedekind η-function, classical Möbius function and the very strange formula, *Adv. in Math.*, 30(1978), 2, 85−136.

[4] Lepowsky, J., Lie algebras and related topics, Springer, 1982.

D. A. Лейтес 撰

【补注】 Weyl 特征标公式中的分母可以写成两种不同的方式:其一是写成和,另一种是写成积. 这个恒等式称为 Weyl 分母公式(Weyl denominator formula). I. G. Macdonald ([A1])证明了这个分母公式可以适当地推广到仿射根系的情形. 对于 $A_1^{(1)}$ 型仿射根系来说, Macdonald 公式变成 Jacobi 三重积恒等式(Jacobi triple product identity). 稍后, V. G. Kac([A2])实现了将 Weyl 特征标公式推广到具有可对称化的广义 **Cartan 矩阵** (Cartan matrix)的所谓 **Kac-Moody 代数** (Kac-Moody algebra)的情形,它具有以下形式:

$$\operatorname{ch} V(\Lambda)=\frac{\sum_{w\in W}\det(w)e^{w(\Lambda+\rho)-\rho}}{\prod_{\alpha\in R^{+}}(1-e^{-\alpha})}$$

(最近, O. Mathieu 和 S. Kumar 已把可对称化的假设去掉;详见[A5].) 特别是对于 $\Lambda=0$(即平凡表示)的情形提供了 Macdonald 恒等式(Macdonald identity)的一个极好的证明. 利用 θ 函数对于 Macdonald 恒等式的另一证明是由 E. Looyenga ([A3])给出的.

Rogers-Ramanujan 恒等式和它们高等的类比都具有更为精致的性质,它们与不可约最高权模 $V(\Lambda)$ 当限制到一个适当的 Heisenberg 子代数时的分解有关, 见 J. Lepowsky[A4].

对于 Lie 超代数的推广,亦见 [A6].

参考文献

[A1] Macdonald, I. G., Affine root systems and Dedekind's eta function, *Invent. Math.*, 15(1972), 91−143.

[A2] Infinite-dimensional Lie algebras and Dedekind eta function, *Funct. Anal. and Appl.*, 8, (1974), 68−70.

[A3] Looyenga, E., Invariant theory for generalized root systems, *Invent. Math.*, 61(1980), 1−32

[A4] Lepowsky, J., Affine Lie algebras and combinatorial identities, in Proc. 1981 Rutgers Lie algebras Conference, Lecture Notes in Math., Vol. 933, Springer, 1982.

[A5] Kac, V. G., Infinite-dimensional Lie algebras, Birkhäuser, 1983.

[A6] Kac, V. G., Representations of classical Lie superalgebras, Lecture Notes in Math, 676, Springer, 1978, 597−626.

郁钠新 译

特征标群 [**character group**; **характеров группа**]

群 G 在某 Abel 群 A 中取值的全部特征标(见**群的特征标**)(character of a group)的群 $X(G)=\mathrm{Hom}(G, A)$, 其运算

$$(\alpha\beta)(g)=\alpha(g)\beta(g),\ g\in G,\ \alpha,\beta\in X(G),$$

由 A 中运算诱导而来. 当 $A=T$ 时,

$$X(G)\cong\prod_p\mathrm{Hom}(G, \mathbf{Z}(p^\infty)),$$

其中取所有素数 p, $\mathbf{Z}(p^\infty)$是拟循环群. 这个群是代数紧的,见**纯子群** (pure subgroup). 若 G 是 Abel 群, 则 $X(G)$ 是**可除群** (divisible group) 当且仅当 G 是无挠的,而它是约化群当且仅当它是周期的 ([4]).

拓扑群 G 的特征标群 (character group of a topological group)是所有连续同态 $G\to T$ 的群 $X(G)$, 它具有紧开拓扑. 它是 Hausdorff Abel 拓扑群. 若 G 是局部紧的, 则 $X(G)$ 也是局部紧的;若 G 是紧群,则 $X(G)$是离散的;若 G 是离散的,则 $X(G)$ 是紧的.

特征标群的例子:

$$X(T)\cong\mathbf{Z},\ X(\mathbf{Z})\cong T,\ X(\mathbf{R})\cong\mathbf{R},\ X(G)\cong G,$$

对任何有限离散 Abel 群 G 成立.

对拓扑群的每个连续同态 $\varphi: G\to H$, 可对应于特征标群的一个同态 $\varphi^*: X(H)\to X(G)$. 这里的对应 $G\mapsto X(G)$, $\varphi\mapsto\varphi^*$ 是从拓扑群范畴到 Abel 拓扑群范畴的一个逆变函子. 若范畴限于局部紧 Abel 群,则函子决定该范畴和其对偶范畴间的一个等价, 见 **Понтрягин 对偶性** (Pontryagin duality).

域 K 上代数群 G 的特征标群 (character group of an algebraic group)是所有有理特征标 $G\to K^*=G_m$ 的群 $X(G)$. 若 G 是 Abel 仿射代数群, 则 $X(G)$ 生成空间 $K[G]$(即为该空间的基)当且仅当 G 是**可对角化的代数群** (diagonalizable algebraic group), 即同构于某环面 G_m^s 的一个闭子群. 这里, $X(G)$是有限生成的 Abel 群(当 char $K=p>0$ 时没有 p 挠), 而 $K[G]$ 是 K 上 $X(G)$ 的群代数,从而可以在可对角化的群的范畴和有限生成的 Abel 群(当 char$K=p>0$ 时无 p 挠)的范畴之间定义对偶性(见[1]). 当 G 是有限群 (看成零维代数群)及 char $K=0$ 时, 这个对偶性与有限 Abel 群间的经典的**对偶性** (duality) 相同.

对任何连通代数群 G, 特征标群是无挠的. 特别

地,一个可对角化群 G 是一个环面当且仅当 $X(G)\cong Z^r$.

参考文献

[1] Borel, A., Linear algebraic groups, Benjamin, 1969.

[2] Morris, S. A., Pontryagin duality and the structure of locally compact Abelian groups, London Math. Soc. Lecture Notes, **29**, Cambridge Univ. Press, 1977.

[3] Понтрягин, Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973 (中译本: Л. С. 邦德列雅金,连续群(上、下),科学出版社, 1978).

[4] Fuchs, L., Infinite abelian groups, I, Acad. Press, 1970.

[5] Humphreys, J. E., Linear algebraic groups, Springer, 1975.

А. Л. Онищик 撰

【补注】 上文中 T 表示圆群. 周期群也称挠群 (torsion group). Abel 群是约化的,若它不含非平凡可除群.

上面的词"特征标"当然是严格地在最狭义下被应用,即指(连续)同态 $G\to T$, 而不是某个表示的特征标. 在 [A1] 中可找到许多局部 Abel 群的特征标群.

参考文献

[A1] Hewitt, E. and Ross, K. A., Abstract harmonic analysis, I, Springer, 1963.

[A2] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Spectral theories, Addison-Wesley, 1977 (译自法文).

石生明 译 许以超 校

C^* 代数的特征标 [character of a C^*-algebra; характер C^*-алгебры]

C^* 代数 (C^*-algebra) A 上的非零下半连续的半有限迹 f (见 **C^* 代数上的迹** (trace on a C^*-algebra)),它满足下述条件: 如果 φ 是 A 上的下半连续的半有限迹,且对于所有 $x\in A^+$, $\varphi(x)\leqslant f(x)$ 成立, 那么 $\varphi(x)=\lambda f(x)$ 对于某个非负数 λ 和所有的 $x\in A^+$ 的如下元素成立. 这些元素属于由集合 $\{x: x\in A^+, f(x)<+\infty\}$ 所生成的理想 $\mathfrak{N}_f$ 的闭包. 在容许有迹的 C^* 代数 A 的非零**因子表示** (factor representation)的拟等价类集与 C^* 代数 A 的特征标集之间,存在一个典型的可确定到至多相差一个正乘数的一一对应; 这个对应是用公式 $f(x)=\chi(\pi(x))$ $(x\in A)$ 来建立的, 这里 π 是容许有迹 χ 的 A 的因子表示. 如果 C^* 代数 A 上的迹 f 是有限的, 那么 C^* 代数的特征标称为有限的 (finite); 有限特征标是连续的. 在 C^* 代数 A 的有限型非零因子表示的拟等价类集与 C^* 代数 A 的有范数为 1 的有限特征标集之间存在一个典型的一一对应. 如果 A 是交换的,那么交换代数 A 的任何特征标是 C^* 代数 A 的特征标. 如果 A 是紧群 G 的群 C^* 代数, 那么 C^* 代数 A 的特征标是有限的,且范数为 1 的这种特征标恰好对应紧群 G 的一个正规化特征标.

参考文献

[1] Dixmier, J., C^*-algebras, North-Holland, 1977 (译自法文).

А. И. Штерн 撰 史树中 译

半单 Lie 代数有限维表示的特征标 [character of a finite-dimensional representation of a semi-simple Lie algebra; характер конечномерного представления полупростой алгебры Ли]

一个函数,它把表示的每一个权对应到相应的权子空间的维数. 如果 $\mathfrak{h}$ 是特征为 0 的代数闭域 k 上半单 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的一个 Cartan 子代数, $\varphi:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V)$ 是一个线性表示而 V_λ 是对应于 $\lambda\in\mathfrak{h}^*$ 的权子空间, 那么表示 φ (或 $\mathfrak{g}$ 模 V) 的特征标可以写成以下形式:

$$\operatorname{ch} V=\sum_{\lambda\in\mathfrak{h}^*}(\dim V_\lambda)e^\lambda$$

并且可以看成群环 $\mathbf{Z}[\mathfrak{h}^*]$ 的一个元素. 如果 $k=\mathbf{C}$ 且 $\varphi=d\Phi$, 其中 $\Phi: G\to GL(V)$ 是以 $\mathfrak{g}$ 为其 Lie 代数的一个 Lie 群 G 的解析线性表示,那么记法 e^λ 可以看成 $\mathfrak{h}$ 上的函数而 $\operatorname{ch}\varphi$ 与函数 $x\mapsto\chi_\Phi(e^x)$ $(x\in\mathfrak{h})$ 一致, 这里 χ_Φ 是表示 Φ 的特征标. Lie 代数的表示的特征标具有以下性质:

$$\operatorname{ch}(V_1\oplus V_2)=\operatorname{ch}V_1+\operatorname{ch}V_2,$$

$$\operatorname{ch}(V_1\otimes V_2)=\operatorname{ch}V_1\cdot\operatorname{ch}V_2.$$

参考文献

[1] Serre, J.-P., Lie algebras and Lie groups, Benjamin, 1965.

[2] Dixmier, J., Algèbres enveloppantes, Gauthier-Villars, 1974.

А. Л. Онищик 撰 郝钢新 译

群的特征标 [character of a group; характер группы]

给定的群到某个标准的 Abel 群 A 的同态. 通常, A 取为域 k 的乘法群 k^* 或 $\mathbf{C}^*$ 的子群

$$T=\{z\in\mathbf{C}: |z|=1\}$$

群的特征标概念最初是对 $A=T$ 引入有限群 G 的 (此时,每个特征标 $G\to\mathbf{C}^*$ 取值于 T).

群特征标的研究可化为 Abel 群的情形,这是因为在群 $\operatorname{Hom}(G,A)$ 和 $\operatorname{Hom}(G/(G,G),A)$ 之间有自然同构. 其中 (G,G) 是 G 的换位子群. 特征标 $G\to k^*$ 构成 G 上全体 k 值函数空间中的线性无关组. 特征标 $G\to k^*$ 可唯一扩张成群代数 $k[G]$ 的特征标. 特征标 $G\to k^*$ 是 G 在 k 上的一维线性表示; **群表示的特征标** (character of a representation of a group) 的概念在一维的情况与群特征标的概念一致,有时群的特征标理解成它的任何有限维表示的特征标(甚至表示本身).

拓扑群 G 的特征标 (character of a topological group) 是连续同态 $G\to T$. 若 G 是局部紧 Abel 群,则它的特征标可分离点, 即对任何 $a,b\in G$, $a\neq b$, 存在特征标 $\alpha: G\to T$ 使得 $\alpha(a)\neq\alpha(b)$. 对于 Hausdorff-Abel

群 $\bar{G}$. 此断言一般不正确(见[3]). 代数封闭域 K 上代数群 F 的特征标(character of an algebraic group)是有理同态 $G \to K^*$.

在数论中,模 k 的剩余类 $\mathbf{Z}_k$ 的乘法群 $\mathbf{Z}_k^*$ 的特征标起着重要的作用,它与模 k 的 Dirichlet 特征标一一对应;对特征标 $\alpha: \mathbf{Z}_k^* \to T$, 有相应的 **Dirichlet 特征标**(Dirichlet character) $\chi: \mathbf{Z} \to \mathbf{C}$, 它由公式

$$\chi(n) = \begin{cases} \alpha(n+k\mathbf{Z}), & 若\ (n, k)=1; \\ 0, & 若\ (n, k)\neq 1 \end{cases}$$

给定. 也见**特征标群**(character group).

参考文献

[1] Borel, A., Linear algebraic groups, Benjamin, 1969.

[2] Morris, S. A., Pontryagin duality and the structure of locally compact Abelian groups, London Math. Soc., Lecture Notes, 29, Cambridge Univ. Press, 1977.

[3] Hewitt, E. and Ross, K. A., Abstract harmonic analysis, 1, Springer, 1963.

А. Л. Онищик 撰 石生明 译 许以超 校

群表示的特征标 [character of a representation of a group; характер представления группы]

在有限维表示 π 的情形是群 G 上的函数,由公式

$$\chi_\pi(g)=\mathrm{tr}\,\pi(g),\ g\in G$$

定义. 对 $\mathbf{C}$ 上拓扑群的任意连续表示,该定义推广为:

$$\chi_\pi(g)=\chi(\pi(g)),\ 对\ g\in G,$$

其中 χ 是定义在代数 A 的某个理想 I 上且在 A 的内自同构下不变的线性泛函, A 是由算子族 $\pi(g)$ $(g\in G)$ 生成的代数. 在某些情况下,表示 π 的特征标定义为 G 的**群代数**(group algebra)的由 π 决定的表示的特征标(见**结合代数表示的特征标** (character of a representation of an associative algebra)).

有限维表示的直和(张量积)的特征标等于这些表示的特征标的和(积). 有限维群表示的特征标是在共轭元素类上取常值的函数;群的有限维连续酉表示的特征标是群上的连续正定函数.

在很多情况下,群表示的特征标在等价意义下唯一地决定表示;例如特征为零的域上的有限维不可约表示的特征标在空间的等价意义下唯一地决定表示;紧群的有限维连续酉表示的特征标在酉等价意义下决定表示.

局部紧群 G 的表示的特征标,若能扩充到 G 的紧支撑上的连续函数的代数的表示,就能由 G 上的测度确定;特别地,么模群的正则表示的特征标由集中在 G 上的单位元的概率点测度给定. Lie 群 G 的表示 π 的特征标,若能扩充到 G 的紧支撑上的无穷次可微函数的代数 $C_0^\infty(G)$ 的表示,就能定义为 G 上的广义函数. 设 G 是幂零群或线性半单 Lie 群,则 G 的不可约酉表示 π 的特征标可由局部可积函数 ψ_π 按下述公式决定:

$$\chi_\pi(f)=\int_G f(g)\psi_\pi(g)dg,\ f\in C_0^\infty(G).$$

这些特征标在酉等价意义下唯一地决定表示 π.

设群 G 是紧群,则 G 上每个在共轭元素类上取常值的连续正定函数皆能关于 G 的不可约表示 π_α 的特征标展开成级数. 此级数在 G 上一致收敛,而特征标 χ_{π_α} 成为空间 $L_2(G)$ 上的正交系,它在 $L_2(G)$ 中的在 G 的共轭元素类上取常值的函数的子空间上是完全的. 设 $\chi_\rho=\sum_\alpha m_\alpha\chi_{\pi_\alpha}$ 是群 G 的有限维连续表示 ρ 的特征标对于特征标系 χ_{π_α} 的展开,则 m_α 是整数,即为 π_α 在 ρ 中出现的重数. 设 ρ 是 G 的在拟完全的、局部凸的桶拓扑空间 E 中的连续表示,则存在 E 的一个极大子空间 E_α 使得 ρ 在 E_α 上的限制是 π_α 的倍数,且由式

$$P_\alpha=\chi_{\pi_\alpha}(e)\int_G \overline{\chi_{\pi_\alpha}(g)}\,\rho(g)dg$$

定义了 E 到 E_α 的一个连续的投影映射 P_α. 其中的 dg 是 G 上的 Haar 测度,满足 $\int_G dg=1$.

参考文献

[1] Кириллов, А. А., Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978 (英译本: Kirillov, A. A., Elements of the theory of representations, Springer, 1976).

[2] Curtis, C. W. and Reiner, I., Representation theory of finite groups and associative algebras, Interscience, 1962.

[3] Dixmier, J., C^* algebras, North-Holland, 1977 (译自法文).

[4] Frobenius, G. F., J. P. Serre (ed.), Gesammelte Abhandlungen, Springer, 1968.

[5] Наймарк, М. А., Теория представления групп, М., 1976 (英译本: Naĭmark, M. A., Theory of group representations, Springer, 1982).

[6] Littlewood, D., The theory of group characters and matrix representations of groups, Clarendon Press, 1950.

А. И. Штерн 撰 石生明 译 许以超 校

结合代数表示的特征标 [character of a representation of an associative algebra; характер представления ассоциативной алгебры]

结合代数 A 上由公式 $\varphi(x)=\chi(\pi(x))$ $(x\in A)$ 定义的一个函数 φ, 这里 π 是 A 的一个表示, χ 是定义在 $\pi(A)$ 中某个理想 I 上的线性泛函, 满足条件: 对所有的 $a\in I$, $b\in\pi(A)$, 有 $\chi(ab)=\chi(ba)$. 如果表示 π 是有限维的、或者如果代数 $\pi(A)$ 包含一个非零的有限维算子, 那么通常取 χ 为这个算子的迹. 设 A 是一个 C^* 代数, π 是 C^* 代数 $\mathfrak{A}$ 的一个表示, 使得由 $\pi(A)$ 生成的 **von Neu-**

mann 代数(von Neumann algebra) $\mathfrak{A}$ 是一个半有限型因子(factor); 令 χ' 是 $\mathfrak{A}$ 上的一个忠实正规半有限迹. 设 χ 是 χ' 到一个理想 M_χ 的一个线性扩张. 如果集合 $\{x: x\in A, \chi'(\pi(x))<+\infty\}$ 是非零的, 那么公式 $\varphi(x)=\chi(\pi(x))(x\in A)$ 确定代数 A 的表示的一个特征标, 它在 A^+ 上的限制是 C^* 代数 A 的一个特征标, 见 **C^* 代数的特征标**(character of a C^*-algebra). 在很多情况下, 一个代数的表示的特征标在某种等价关系的意义下唯一确定了这个表示. 例如, 一个不可约的有限维表示的特征标在等价意义下唯一确定了这个表示; 一个 C^* 代数允许一个迹的因子表示的特征标在拟等价意义之下唯一确定这个表示.

参考文献

[1] Кириллов, А. А., Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978 (英译本: Kirillov, A. A., Elements of the theory of representations, Springer, 1976).

[2] Curtis, C. W. and Reiner, I., Representation theory of finite groups and associative algebras, Interscience, 1962.

[3] Dixmier, J., C^*-algebras, North-Holland, 1977 (译自法文).

А. И. Штерн 撰 彭联刚 译

半群的特征标 [**character of a semi-group**; **характер полугруппы**]

具有单位元的交换半群 S 到由所有模为 1 的复数及零组成的乘法半群的非零同态. 有时半群的特征标也理解为到模 $\leqslant 1$ 的复数的乘法半群的非零同态. 当 S 是 **Clifford 半群**(Clifford semi-group)时, 半群特征标的这两个概念是等价的. 半群 S 的所有特征标构成的集合 S^* 在点态乘法 $*$:

$$(\chi^*\psi)(a)=\chi(a)\psi(a),\quad a\in S,\quad \chi,\psi\in S^*$$

下成为一个具有单位元的交换半群(特征标半群(character semi-group)).

半群 S 的理想 P 称为全孤立的(totally isolated)(素的(prime)), 如果 $S\backslash P$ 是子半群. 具有单位元的交换半群的全部全孤立理想的集合在并运算下成为一个半格. 这个半格同构于 S^* 的幂等元的半格, 见**幂等元的半群**(idempotents, semi-group of). 交换半群 S 的特征标称为分离 S 的元素, 如果对任何 $a, b\in S, a\neq b$, 必有 $\chi\in S^*$ 使 $\chi(a)\neq\chi(b)$. 设 S 有单位元, 则半群 S 的特征标分离 S 的元素当且仅当 S 是**可分半群**(separable semi-group). 有单位元的任意交换半群的特征标半群的刻画问题, 化为那些是群的半格的半群的特征标的刻画; 当这个半格满足极小条件时, 相应的刻画(例如)可参见 [1]、文献 [2] 中有特征标半群的一个抽象刻画.

对每个 $a\in S$, $\chi\in S^*$, 映射 $\widetilde{a}:\chi\to\chi(a)(\chi\in S^*)$ 是半群 S^* 的特征标, 即 $\widetilde{a}\in S^{**}$. 映射 $\omega: a\mapsto\widetilde{a}$ 是 S 到 S^{**} 内的同态(所谓典范同态(canonical homomorphism)). 如果 ω 是 S 到 S^{**} 上的同构, 则称对偶定理(duality theorem)对于 S 成立. 对于有单位元的交换半群 S, 对偶定理成立, 当且仅当 S 是逆半群([3]). 关于特征标半群在拓扑情况下的对偶性问题可见**拓扑半群**(topological semi-group).

参考文献

[1] Clifford, A. H. and Preston, G. B., The algebraic theory of semigroups, 1, Amer. Math. Soc., 1961.

[2] Лесохин, М. М., 《Изв. вузов. Матем.》, 1970, 8, 67–74.

[3] Austin, C., Duality theorems for some commutative semigroups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **109** (1963), 2, 245–256.

Б. П. Танана, Л. Н. Шеврин 撰
石生明 译 许以超 校

结合代数的特征标 [**character of an associative algebra**; **характер ассоциативной алгебры**], 域 k 上的

一个由结合代数 A 到域 k 内的非零同态映射. 代数 A 的一个特征标有时也称作 A 上的一个乘性泛函(multiplicative functional). 每个特征标 $\chi: A\to k$ 是一个满射, 并且有性质 $\chi(1)=1$. 核 $\operatorname{Ker}\chi$ 是 A 的一个极大理想.

如果 A 是一个有限生成的交换代数, 并且 k 是代数闭域, 那么 A 的任意一个极大理想都是唯一的一个特征标的核, 因此特征标与极大理想间的这种对应是一个双射. 一个交换代数 A 的所有特征标构成的集合 $\operatorname{Specm} A$ 称作 A 的极大谱(maximal spectrum), 它具有一个**仿射簇**(affine variety)的自然结构. 每个元素 $a\in A$ 决定 $\operatorname{Specm} A$ 上的一个由公式 $\widetilde{a}(\chi)=\chi(a)$ 给出的函数 $\widetilde{a}$, 而且这些函数 $\widetilde{a}$ 构成 $\operatorname{Specm} A$ 上的正则函数的代数. 反之, 如果 X 是一个仿射簇, A 是 X 上的正则函数的代数, 那么 $\operatorname{Specm} A$ 可视为与 X 等同: 每个 $x\in A$ 对应到特征标 χ_x, χ_x 由公式 $\chi_x(a)=a(x)$ 给出.

$\mathbf{C}$ 上的一个交换 Banach 代数 A 的特征标具有类似的性质. 每个特征标 $\chi: A\to\mathbf{C}$ 是连续的, 且有范数 $\|\chi\|\leqslant 1$. A 的每个极大理想是 A 的唯一的一个特征标的核. A 的所有特征标的集合 $\Phi(A)$, 当把它看作是带有弱拓扑的 A^* 中的单位球的一个子集时是紧的, 称作代数 A 的谱(spectrum), 并且有一个从 A 到 $\Phi(A)$ 上连续函数的代数中的一个自然同态. 例如, 如果 A 是一个紧集 X 上的所有复值连续函数的代数, 并且赋予范数 $\|f\|=\max_X|f|$, 那么 $\Phi(A)$ 可以被视为与 X 等同: 每个元素 $x\in X$ 对应到特征标 χ_x, χ_x 由公式 $\chi_x(f)=f(x)$ $(f\in A)$ 给出. 对称交换 Banach 代数 A 的一个特征标 χ 称为 Hermite 的(Hermitian), 如果 $\chi(a^*)=\overline{\chi(a)}(a\in A)$; χ 是 Hermite 的, 当且仅当 $\operatorname{Ker}\chi$ 是对称的极大理想.

参考文献

[1] Наймарк, М. А., Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968 (英译本: Naïmark, M. A., Normed rings, Reidel, 1984).
А. И. Штерн 撰 邓邦明 译

特征 [characteristic ; характеристика]

偏微分方程理论的基本概念之一．特征的作用显示在这些方程的本质性质中，诸如解的局部性质，不同问题的可解性、它们的适定性等等．

设

$$L(x, D) = \sum_{|\nu| \leq m} a_\nu(x) D^\nu$$

是 m 阶线性偏微分算子，而

$$\sigma(x, \xi) = \sum_{|\nu| = m} a_\nu(x) \xi^\nu$$

是它的**象征**(**symbol**)．这里 $x, \xi \in \mathbf{R}^n$, $\nu \in \mathbf{Z}_+^n$ 是多重指标，$|\nu| = \nu_1 + \cdots + \nu_n$, $a_\nu : \Omega \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$,

$$D_j^{\nu_j} = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)^{\nu_j}, \quad 1 \leq j \leq n,$$

$$D^\nu = D_1^{\nu_1} \cdots D_n^{\nu_n}, \quad \xi^\nu = \xi_1^{\nu_1} \cdots \xi_n^{\nu_n}, \quad j, m, n \in \mathbf{N}.$$

设 S 是 $\mathbf{R}^n$ 中由方程 $\varphi(x) = 0$ 定义的超曲面，而且当 $x \in S$ 时，$\varphi_x(x) = \operatorname{grad} \varphi(x) \neq 0$,

$$\sigma(x, \varphi_x(x)) = 0. \qquad (1)$$

在此情形 S 称作算子 $L(x, D)$ 的**特征曲面**(characteristic surface) 或**特征**(characteristic)．特征的其他称法是**特征流形** (characteristic manifold)，**特征线** (characteristic line) (在 $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^2$ 的情形)．

下面考虑 Cauchy 问题的例子．设 S 是 $\mathbf{R}^n$ 中由方程

$$\varphi(x) = 0, \ \varphi_x(x) \neq 0$$

定义的任意(不一定是特征的)超曲面．设 $u_0, \cdots, u_{m-1}$ 是定义在 S 上一点 $x_0 \in S$ 的邻域 U 中的函数，关于未知函数 u 提 Cauchy 问题：

$$L(x, D)u = f, \quad x \in U,$$

$$u = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = u_1, \ldots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial \mathbf{n}^{m-1}} = u_{m-1}, \quad x \in S,$$

这里 f 是给定的函数，$L(x, D)$ 是已给 m 阶线性微分算子，$\mathbf{n}$ 是正交于 S 的向量．为了确定起见，假设 $(\partial / \partial x_n) \cdot \varphi(x) \neq 0$, $x \in U$．作变量变换

$$x \to x', \quad 其中 \ x_j' = x_j, \ j = 1, \ldots, n-1; \ x_n' = \varphi(x),$$

于是就化为方程

$$\sigma(x, \varphi_x(x)) \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^m u + \sum \cdots = f \qquad (2)$$

在符号 $\sum$ 下没有写出的表达式不包含函数 u 关于 x_n 的 m 阶偏导数．有两种情形：

1) $\sigma(x, \varphi_x(x)) \neq 0$, $x \in U$;

2) $\sigma(x, \varphi_x(x)) = 0$, $x = x_0$.

在第一种情形，方程(2)除以 σ 后导出关于变量 x_n 的最高阶偏导数可解的方程，即可以写成正规形式．初始条件可以给成

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_n'} \right)^j u(x_1', \ldots, x_{n-1}', 0) = u_j(x_1', \ldots, x_{n-1}'),$$

$$j = 0, \ldots, m-1.$$

这种提法的 Cauchy 问题已很好地研究过．例如，当方程和初始条件中已给函数是解析的时，在点 x_0 的充分小的邻域中这个问题在解析函数类中存在唯一的解 **Cauchy - Ковалевская 定理** (Cauchy - Kovalevskaya theorem)．在第二种情形，点 x_0 是特征的，如果等式(1)对所有 $x \in S$ 都成立，那么曲面 S 是特征的．在此情形初始数据不能是任意的，且 Cauchy 问题的研究也变得复杂了．

例如，对于方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \qquad (3)$$

可以在它的特征线之一 $x_1 = 0$ 上给初始条件：

$$u(0, x_2) = u_0(x_2), \quad \frac{\partial u}{\partial x_1}(0, x_2) = u_1(x_2). \qquad (4)$$

如果函数 u_1 不是常数，那么 Cauchy 问题(3)、(4)在空间 $\mathbf{C}^2$ 中无解．如果函数 u_1 是常数，例如，等于 $a \in \mathbf{R}$，那么解在 $\mathbf{C}^2$ 中不唯一，因为解可以是任意函数形式：

$$u(x_1, x_2) = a x_1 + b(x_1) + u_0(x_2),$$

其中

$$b, u_0 \in C^2, \quad b(0) = b'(0) = 0.$$

因而，对于 Cauchy 问题而言，初始数据是否给出在特征曲面上是有本质差别的．

当施行自变量变换时特征具有不变性质：如果 $\varphi(x)$ 是方程(1)的解，且在变换 $x \to x'$ 下 $\varphi(x) \to \psi(x')$, $a_\nu(x) \to b_\nu(x')$，那么 $\psi(x')$ 满足方程

$$\sigma_1(x', \psi_{x'}(x')) = 0,$$

其中

$$\sigma_1(x', \xi) = \sum_{|\nu| = m} b_\nu(x') \xi^\nu.$$

特征的另一个性质是：算子 $L(x, D)$ 关于特征 S 是**内微分算子**(interior differential operator)．

线性椭圆型微分算子定义为这样的算子，它不存在(实的)特征．双曲型和抛物型算子的定义也与特征概念紧密联系．这样，两个自变量的(即 $n = 2$)二阶

线性微分算子属于双曲型的,如果它有两族特征;属于抛物型的,如果它有一族特征.知道了微分方程的特征,就有可能将此方程化为简单形式.例如,设已给双曲型方程

$$a_{20}(x_1,x_2)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+a_{11}(x_1,x_2)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}+ \qquad (5)$$

$$+a_{02}(x_1,x_2)\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}=0.$$

这个方程的特征线方程(1)有形式

$$a_{20}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right]^2+a_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+a_{02}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right]^2=0.$$

此方程定出两族不同的特征:

$$\varphi_1(x)=\psi_1(x)-c_1=0,\ c_1\in\mathbf{R},$$

$$\varphi_2(x)=\psi_2(x)-c_2=0,\ c_2\in\mathbf{R}.$$

在这两族中存在两条特征线,使得相应于它们的函数 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 按照公式

$$x_1'=\varphi_1(x),\ x_2'=\varphi_2(x)$$

决定变量变换 $x\to x'$,此变换将方程(5)化为标准型

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1'\partial x_2'}+\text{一阶项}=0.$$

对非线性微分方程

$$F(x,u,D^\nu u,D^\mu u)=0, \qquad (6)$$

其中 $\mu,\nu\in\mathbf{Z}_+^n$ 是多重指标,$|\nu|\leqslant m-1$,$|\mu|=m$.特征 S 定义为 $\mathbf{R}^n$ 中具有方程 $\varphi(x)=0$ 的超曲面,当 $x\in S$ 时 $\varphi_x(x)\neq 0$ 及 $\sigma(x,\varphi_x(x))=0$.在此情形时,由函数 $F(x,u,v,w)$ 给出的算子(6)的象征定义为

$$\sigma(x,\xi)=\sum_{|\mu|=m}F_w(x,u,D^\nu u,D^\mu u)\xi^\mu,$$

附带通常的假定 $F_w\neq 0$.显见,除了变量 x 和 ξ 外,σ 可以依赖于 u,$D^\nu u$ 及 $D^\mu u$.例如,设已给一阶($m=1$)方程.此外,为了简单起见设 $n=2$.方程(6)取形式

$$F\left(x_1,x_2,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)=0$$

其中函数为 $F(x,y,z,p,q)$.特征的方程为

$$F_p\left(x_1,x_2,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+$$

$$+F_q\left(x_1,x_2,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}=0.$$

因为这个方程的解 $\varphi(x_1,x_2)$ 事实上可以依赖于 u,$\partial u/\partial x_1$ 及 $\partial u/\partial x_2$.因此,它可以给成参数形式:

$$x_1=x(t),\ x_2=y(t),\ u=z(t),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}=p(t),\ \frac{\partial u}{\partial x_2}=q(t),$$

这些函数满足常微分方程组:

$$x'(t)=F_p,\ y'(t)=F_q,\ z'(t)=pF_p+qF_q,$$

$$p'(t)=-F_x-pF_z,\ q'(t)=-F_y-qF_z$$

这在几何上决定着所谓的**特征带**(characteristic strip)(对 $\alpha<t<\beta$).这个带在空间 (x,y,z) 上的投影 $(x(t),y(t),z(t))$ 决定着 $\mathbf{R}^3$ 中这样的曲线:在每个点上,它都与具有方向系数 $p(t),q(t)$ 的平面相切.此曲线也称为方程(6)的特征.

参考文献

[1] Misohata, S., The theory of partial differential equations, Cambridge Univ. Press, 1973.

[2] Kamke, E., Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen, 2. Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung für die gesuchte Funktion, Akad. Verlagsgesell., 1944(中译本:E.卡姆克,一阶偏微分方程手册,科学出版社,1983).

[3] Hartman, P., Ordinary differential equations, Birkhäuser, 1982.

[4] Петровский, И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными, 3 изд., М., 1961(中译本:И.Г.彼得罗夫斯基,偏微分方程讲义,人民教育出版社,第2版,1965).

[5] Кошляков, Н. С., Глинер, Э. Б., Смирнов, М. М., Уравнения в частных производных математической физики, М., 1970.

[6] Владимиров, В. С., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1981.

[7] Михлин, С. Г., Курс математической физики, М., 1968.

[8] Тихонов, А. Н., Самарский, А. А., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1977.

Ю. В. Комленко 撰

【补注】 需要强调的是,关于 Du 是非线性的一阶偏微分方程有一整族特征通过一个已知点(**劈锥曲面**(conoid)).与此有关的一个经典概念是 **Monge 锥**(Monge cone)的概念.再参考 $n=2$ 的情形,通过一已知点 (x_0,y_0,z_0) 的可能的积分曲面 $z=u(x,y)$ 的法向量,由方程 $F(x_0,y_0,z_0,p,q)=0$ 来定义.相伴的单参数切平面族 $p(x-x_0)+q(y-y_0)=z-z_0$ 的包络(envelope),即特征方向

$$(x-x_0)/F_p=(y-y_0)/F_q=(z-z_0)/(pF_p+qF_q)$$

的集合称作在点 (x_0,y_0,z_0) 处的 Monge 锥.

参考文献

[A1] Courant, R. and Hilbert, D., Methods of mathematical physics, 1–2, Interscience, 1953–1962(译自德文)(中译本:R.柯朗,D.希尔伯特,数学物

理方法 I－II，科学出版社，1977）.
[A2] Garabedian, P., Partial differential equations, Wiley, 1964.
[A3] Hörmander, L., The analysis of linear partial differential operators, 1－4, Springer, 1983－1985.
[A4] John, F., Partial differential equations, Springer, 1974（中译本：F. 约翰，偏微分方程，科学出版社，1986).
[A5] Jeffrey, A., Quasilinear hyperbolic systems and waves, Pitman, 1976.
[A6] Cartan, E., Les systèmes différentiels extrerieurs et leurs applications géometriques, Hermann, 1945.
[A7] Petrovskii, I. G., Lectures on partial differential equations, Interscience, 1954（译自俄文）（中译本：И. Г. 彼得罗夫斯基，偏微分方程讲义，人民教育出版社，1956).

孙和生 译　陆柱家 校

示性类［characteristic class：характеристический класс］

某类型的每个丛 $\xi=(E, P, B)$（通常是向量丛）与底空间 B 的上同调类（称为给定丛的示性类）的一种自然结合．这里的自然性是指由映射 $f: B' \to B$ 诱导的丛的示性类等于丛 ξ 在 B 上的示性类在 $f^*: H^*(B) \to H^*(B')$ 下的象．流形的示性类（characteristic class of a manifold）是指其切丛的示性类所决定的该流形的一个上同调类．流形的示性类与诸如可定向性，**Euler 示性数**（Euller characteristic)，**符号差**（signature）等流形的重要拓扑特征有关．

例．丛的可定向性（orientability of a bundle）．存在群的正合序列

$$1 \to SO_n(\mathbf{R}) \to O_n(\mathbf{R}) \xrightarrow{\det} Z_2 \to 1.$$

映射

$$w_1 = (\det)_*: H^1(B; O_n(\mathbf{R})) \to H^1(B; \mathbf{Z}_2)$$

为每一实向量丛 ξ 指定了一个类 $w_1(\xi)$，称为 ξ 的第一 Stiefel - Whitney 类（first Stiefel - Whitney class)；这里 $H^1(B; O_n(\mathbf{R}))$ 是上同调群，其系数在取值于 $O_n(\mathbf{R})$ 的连续函数芽的层中（见 **G 纤维化**（G - fibration））．正合上同调序列表明丛 ξ 的群可约化为 $SO_n(\mathbf{R})$，即丛可定向（见**定向**（orientation）），当且仅当 $w_1(\xi)=0$.

第一陈（省身）类（first Chern class)．考虑短正合序列

$$0 \to \mathbf{Z} \to \mathbf{C} \xrightarrow{\exp} \mathbf{C}^0 \to 0,$$

其中 $\mathbf{C}^0=\mathbf{C}\setminus\{0\}$．相应的上同调序列的连接同态 δ: $H^1(B; \mathbf{C}^0) \to H^2(B; \mathbf{Z})$ 将 B 上的每个一维复丛 ξ 映为底 B 的二维上同调类，称为 ξ 的第一陈类，记为 $c_1(\xi)$．换言之，若 $g_{\alpha\beta}: u_\alpha \cap u_\beta \to \mathbf{C}^0$ 为 ξ 的转换函数，则取对数的任意值 $\ln g_{\alpha\beta}$，可得二维整上闭链 $\{k_{\alpha\beta\gamma}\}$:

$$k_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2\pi i}(\ln g_{\alpha\beta} + \ln g_{\beta\gamma} + \ln g_{\gamma\alpha})$$

而由定义，$c_1(\xi)$ 为该上闭链的上同调类．

旋量结构（spinor structure)．存在群的一个正合序列

$$1 \to \mathbf{Z}_2 \to \mathrm{Spin}_n(\mathbf{R}) \to SO_n(\mathbf{R}) \to 1,$$

其中 $\mathrm{Spin}_n(\mathbf{R})$ 为在 **Clifford 代数**（Clifford algebra）理论中定义的群．相应的上同调序列中的连接映射 w_2: $H^1(B; SO_n(\mathbf{R})) \to H^2(B; \mathbf{Z}_2)$ 称为第二 Stiefel - Whitney 类（second Stiefel - Whitney class)．当且仅当 $w_2(\xi)=0$ 时，可定向向量丛 ξ 的结构群可约化为 $\mathrm{Spin}_n(\mathbf{R})$.

Euler 类（Euler class)．设实向量丛 $\xi=(E, p, B)$ 的底空间 B 是带有边界 ∂B（可能是空集）的光滑紧 N 维流形，且零截面 $i: B \to E$ 处于"自己的一般位置"中．设 $i': B \to E$ 为靠近并同痕于 i 的嵌入，它与 $i(B) \subset E$ 横截正则．则 $X=i^{-1}(i'(B) \cap i(B))$ 为 B 的子流形，且 $\partial X \subset \partial B$，$\mathrm{codim}\, X=n=\dim \xi$．于是 $[X] \in H_{N-n}(B, \partial B)$．与 $[X]$ 对偶的上同调类称为 ξ 的 Euler 类，并记为 $e(\xi) \in H^n(B)$．丛 ξ 有处处非零的截面，当且仅当 $e(\xi)=0$．若 B 连通，$\partial B=\varnothing$，且 ξ 为切丛，则 $\dim X=0$；于是 X 由有限个点组成．这时类 $[X] \subset H_0(B)$ 由一个整数决定，记为 $\chi(B)$，它与 B 的 Euler 示性数相等．

用阻碍论的语言可以如下构造 Stiefel - Whitney 类和陈类（见 [6]－[8] 及**阻碍**（obstruction））．设 $\eta: E \xrightarrow{p} B$ 为 **Serre 纤维化**（Serre fibration）且 B 为连通复形，则纤维 $F=p^{-1}(x)$ 的同伦型不依赖于 $x \in B$．若 $\pi_q(F)$ 为 F 的第一个非平凡同伦群，B 为单连通，则截面 $s: B \to E$ 构造的第一阻碍在群 $H^{q+1}(B; \pi_q(F))$ 中．这个阻碍 $\kappa(\eta)$ 关于 η 是不变的．有时不变量 $\kappa(\eta)$ 称为纤维化 η 的示性类（characteristic class of the fibration)．设 ξ 为 B 上的复向量丛，$\dim \xi=n$．对每一个 $1 \leqslant q \leqslant n$，均有与 ξ 相关联的具有纤维 U_n / U_{q-1} 的另一个丛 η^q（复 Stiefel 流形（complex Stiefel manifold））．由丛的正合序列可得，对 $i<2q-1$ 有 $\pi_i(U_n/U_{q-1})=0$；$\pi_{2q-1}(U_n/U_{2q-1})=\mathbf{Z}$，于是 $\kappa(\eta^q) \in H^{2q}(B)$．$c_q(\xi)=\kappa(\eta^q)$ 称为 ξ 的第 q 个陈（省身）类（q - th Chern class).

若 ξ 为可定向丛，$F=\mathbf{R}^n$，则 η^q 的纤维为 O_n / O_{q-1}．因为

$$\pi_{q-1}(O_n / O_{q-1}) = \begin{cases} \mathbf{Z}_2, & 若 q 是偶数且 q<n, \\ \mathbf{Z}, & 若 q 是奇数或 q=n; \end{cases}$$

$$\pi_i(O_n / O_{q-1}) = 0, 对 i<q-1,$$

类

$$\kappa(\eta^q) \in \begin{cases} H^q(B), & 若 q 是奇数或 q=n, \\ H^q(B; \mathbf{Z}_2), & 若 q 是偶数且 q<n. \end{cases}$$

丛 ξ 的 Stiefel - Whitney 类（Stiefel - Whitney class）定义为

$$w_q(\xi) = \kappa(\eta^q) \bmod 2 \in H^q(B; \mathbf{Z}_2).$$

若ξ是不可定向的，则类$\kappa(\eta^q)$仅当系数取自$\mathbf{Z}_2$时是良定的.

对$q=n$, Stiefel流形在实的情形是球面S^{n-1}，而在复的情形则为S^{2n-1}. 构造丛η^n的截面与构造丛ξ的非零截面相同. 此时，第一阻碍称为Euler类(Euler class)$e(\xi)$. 在复的情形

$$e(\xi) = c_n(\xi) \in H^{2n}(B);$$

在实的可定向情形

$$e(\xi) = w_n(\xi) \in H^n(B; \mathbf{Z}_2);$$

而在实的不可定向情形

$$e(\xi) = \kappa(\eta^n) \in H^n(B).$$

设E_D和E_S为关联于ξ的纤维空间，其纤维为圆盘D^n和球面S^{n-1}. 若$i: B \to E_D$为零截面，则$e(\xi)=i^*(u)$，其中$u \in H^*(E_D, E_S)$为**Thom类**(Thom class). 设F为实数域$\mathbf{R}$，或复数域$\mathbf{C}$，或四元数域$\mathbf{H}$. 设h^*为具有下面性质的可乘上同调论：对F上的任一有限维向量空间V，可以用自然的，即函子式的方式(相应于嵌入)选取一个元素$\alpha_V \in h^d(P(V))$，使得$h^*(P(V))=h^*(\mathrm{pt})[\alpha_V]/(\alpha_V^n)$，其中$P(V)$为$V$的所有一维子空间的流形，$P(V)=FP^{\dim V-1}$，$d=\dim_{\mathbf{R}} F$，$n=\dim V$. 对$\dim V=2$，假定$\alpha_V$与(定向)流形$P(V)$的基本类相同.

设$\xi=(E, p, B)$为B上具有纤维V(在F的意义下)的向量丛，$\dim \xi=n$，设$P(\xi)$为该丛的投影化(projectivization)，即B上的以$P(V)$为纤维的局部平凡丛，其空间$P(E)$由ξ的纤维中所有一维子空间构成. 在空间$P(E)$上有一维丛，其空间由全体(l, x)构成，其中l为ξ的纤维的一维子空间，$l \in P(E)$，而x为l中的点. 这个丛对应一个分类映射(见**分类空间**(classifying space))$j: P(E) \to P(V)$. 设$a=j^*(\alpha_V)$，$a \in h^d(P(E))$. 若群$h^*(P(E))$上给出由同态π^*诱导的$h^*(B)$模结构，其中$\pi: P(E) \to B$为丛$P(\xi)$的投影，则该模是自由的，且有基$1, a, \cdots, a^{n-1}$. 我们有唯一确定的上同调类$\sigma_1(\xi), \cdots, \sigma_n(\xi)$，$\sigma_i(\xi) \in h^{di}(B)$，使得

$$a^n - \pi^*(\sigma_1(\xi))a^{n-1} + \cdots + (-1)^n \pi^*(\sigma_n(\xi)) = 0.$$

当$F=\mathbf{R}$时，比如取h^*为理论$H^*(\cdot\ ; \mathbf{Z}_2)$，则对理论$h^*$所要求的条件成立. 此时上面定义的示性类记为$w_1, \cdots, w_n$，并称为Stiefel-Whitney类. 当$F=\mathbf{C}$时，我们可取$h^*$为普通上同调论$H^*$. 对$H^*$，上面定义的类记为$c_1, \cdots, c_n$，并称为陈(省身)类(Chern class). 不仅如此，在$F=\mathbf{C}$的情形，任何可定向上同调(cohomology)论；广义上同调论(generalized cohomology theory))均满足所需条件. 当$F=\mathbf{H}$时，我们也可以考虑通常的理论H^*. 此时上面定义的类记为$p_1^s, \cdots, p_n^s$，并称为辛 Понтрягин 類(symplectic Pontryagin class).

如上所述，令F为域$\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$或$\mathbf{H}$中的一个，且令h^*为满足上述要求的上同调论，分裂原理(splitting principle)：对B上(F意义下)任一向量丛ξ，存在空间B'及映射$f: B' \to B$，使得B'上的丛$f^*\xi$分裂成一维丛的直和，而同态$f^*: h^*(B) \to h^*(B')$为单同态.

特别地，若ξ为BU_n上的万有复丛(见**分类空间**(classifying space))，则B'可取为空间$BT_n = \mathbf{C}P^\infty \times \cdots \times \mathbf{C}P^\infty$($n$个因子)，其中$T_n$为$U_n$中的极大环面，而$f: BT_n \to BU_n$可取为由包含$T_n \subset U_n$所诱导的映射. 映射

$$f^*: H^{**}(BU_n) \to H^{**}(BT_n) = \mathbf{Z}[[x_1, \ldots, x_n]]$$

为单同态，且f^*的象是以$x_1, \cdots, x_n$($\dim x_i=2$)为变量的所有对称形式幂级数构成的环.

对任一拓扑群G，对主G纤维化有定义，取值于上同调论h^*的所有示性类的集合与$h^*(BG)$成一一对应，其中BG是G的**分类空间**(classifying space). 特别地，对向量丛和理论H^*，描述所有示性类的问题归结为计算上同调环$H^*(BO_n)$, $H^*(BSO_n)$, $H^*(BU_n)$等等.

设G为紧Lie群，T为G的极大环面. 包含$T \subset G$诱导出分类空间的映射：$BT \to BG$. 空间BT同伦等价于乘积$\mathbf{C}P^\infty \times \cdots \times \mathbf{C}P^\infty$，其中因子的个数等于$T$的维数. 于是$H^{**}(BT)=\mathbf{Z}[[x_1, \cdots, x_n]]$，其中$n=\dim T$, $\dim x_i=2$. Weyl群$\Phi(G)=N(T)/T$可作用的环面T上，其中$N(T)$为T的正规化子，于是Weyl群亦可作用在BT上. 若G为连通群，空间G和G/T的同调是无挠的，则同态$\rho^*: H^{**}(BG) \to H^{**}(BT)$为单同态，$\rho^*$的象是$H^{**}(BT)=\mathbf{Z}[[x_1, \cdots, x_n]]$中，在Weyl群作用下不变的所有元素的子环(Borel定理(Borel theorem)).

群U_n满足定理的条件. 对角酉矩阵构成了U_n中的极大环面T_n. 如果对角矩阵的元素记为$t_1, \cdots, t_n$，则Weyl群由变量$t_1, \cdots, t_n$的所有置换构成. 于是$H^{**}(BU_n)=\mathbf{Z}[[c_1, \cdots, c_n]]$，其中$c_1, \cdots, c_n$是变量$x_1, \cdots, x_n \in H^2(BT_n)$的初等对称函数，且等于陈类. 群$\mathrm{SP}_n$也满足Borel定理的条件. Weyl群由$x_1, \cdots, x_n$的所有置换以及符号的任意变化所生成. 于是$H^{**}(B\mathrm{SP}_n)=\mathbf{Z}[[\sigma_1, \cdots, \sigma_n]]$，其中$\sigma_1, \cdots, \sigma_n$是变量$x_1^2, \cdots, x_n^2$的初等对称函数. 群$SO_n$不满足Borel定理的条件；尽管如此，如果以含有元素$1/2$的任意环Λ，例如$\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$(p为奇数)或$\mathbf{Q}$，作为系数环，则经此改变后定理仍成立. 群SO_n的极大环面由如下矩阵组成

$$\left\|\begin{matrix}\cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1\end{matrix}\right\| \oplus \left\|\begin{matrix}\cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 \\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2\end{matrix}\right\| \oplus \cdots$$

且具有维数 $[n/2]$. Weyl 群由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{[n/2]}$ 的所有置换及如下符号变化生成：当 n 为偶数时可变偶数多个符号；当 n 为奇数时可变任意多个符号. 于是, $H^{**}(SO_{2k};\Lambda)=\Lambda[[p_1, \cdots, p_{k-1}, e]]$, 其中 $p_1, \cdots, p_{k-1}$ 为变量 $x_1^2, \cdots, x_k^2$ 除去最后一个的初等对称函数, 而 $e=x_1\cdots x_k$. 类 $p_1, \cdots, p_{k-1}, p_k=e^2$ 等于 Понтрягин 类 (见下文); e 为 Euler 类; $H^{**}(SO_{2k+1};\Lambda)=\Lambda[[p_1, \cdots, p_k]]$.

类 $x_i\in H^2(BT_n)$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ 称为吴(文俊)生成元 (Wu generators). 它们不是示性类(因为它们不属于 $H^{**}(BU_n)$), 但任一示性类均可以表成它们的对称形式幂级数, 而且 $\{x_i\}$ 的任何对称形式幂级数均规定了一个示性类. 例如, Euler 类 c_n 对应乘积 $\prod_{i=1}^n x_i$.

元素(形式幂级数) $e^{x_1}+\cdots+e^{x_n}\in \mathbf{Z}(x_1, \cdots, x_n)=H^{**}(BT_n)$ 是对称的, 而且作为示性类给出环 $H^{**}(BU_n)$ 中的非齐次元, 记为 ch 并称为陈(省身)特征标 (Chern character). 陈特征标是"加性 - 加性的"、"乘性 - 乘性的", 即

$$\mathrm{ch}(\xi\oplus\eta)=\mathrm{ch}(\xi)+\mathrm{ch}(\eta),$$

$$\mathrm{ch}(\xi\otimes\eta)=\mathrm{ch}(\xi)\bigcup\mathrm{ch}(\eta).$$

陈(省身)类曲率 (curvature). 设 n 维向量丛 $\xi=(E, p, B)$ 的底空间 B 是光滑流形, 又给定 ξ 的任意一个**仿射联络** (affine connection). 若固定 ξ 在底空间中某点邻域上的一个局部平凡化, 则给定的联络的曲率在该邻域上是取值于复 $(n\times n)$ 矩阵的向量空间 $\mathfrak{gl}(\mathbf{C}, n)$ 的 2 形式 Ω. 在丛的局部平凡化的变换下, 形式 Ω 的值按法则 $m\to gmg^{-1}$ 变化, 这里 $g\in GL(\mathbf{C}, n)$ 是从一个平凡化到另一个的转换矩阵. 若 $\varphi: \mathfrak{gl}(\mathbf{C}, n)\to\mathbf{C}$ 为 j 次齐次多项式, 则 $\varphi\circ\Omega$ 为 $2j$ 次 $\mathbf{C}$ 值外形式. 此外, 如果多项式 φ 在作用

$$\mathrm{GL}(\mathbf{C}, n)\times\mathfrak{gl}(\mathbf{C}, n)\to\mathfrak{gl}(\mathbf{C}, n),\ (g, m)\to gmg^{-1},$$

下不变, 则形式 $\varphi\circ\Omega$ 不依赖于局部平凡化, 而成为整个流形 B 上的 $\mathbf{C}$ 值外形式. 可以证明 $d(\varphi\circ\Omega)=0$ 而联络的变化仅使 $\varphi\circ\Omega$ 差一个正合形式. 因为矩阵 m 的特征多项式的迹 $\mathrm{tr}(m^i)$ 的系数是不变的, 令 $\varphi_i(m)=\mathrm{tr}(m^i)$, 则得到上同调类 $[\varphi_i\circ\Omega]\in H^{2i}(B;\mathbf{C})$. 这里 $[\varphi_i\circ\Omega]=(c_i(\xi))^{\mathbf{C}}$, 其中 $(c_i(\xi))^{\mathbf{C}}$ 为复系数的陈类.

实向量丛 ξ 的 Понтрягин类 (Pontryagin class) 定义为类 $p_i(\xi)=(-1)^i c_{2i}(\xi\otimes\mathbf{C})\in H^{4i}(B)$, 其中 $\xi\otimes\mathbf{C}$ 是丛 ξ 的复化丛(另一种定义见[5]). 设 n 维丛 $\xi=(E, p, B)$ 的底空间 B 是带边 N 维流形, σ 为 $h=0, \cdots, n-1$ 的整值非降函数. 如果对所有 $h=0, \cdots, n-1$, $\dim\{u_1, \cdots, u_{h+\sigma(h)}\}\leqslant h$, 则称向量系 $u_1, \cdots, u_m\in\mathbf{R}^n$ 为 σ 的一个提升 (lifting). 假设取定处于一般位置的丛截面 $v_1(x), \cdots, v_m(x)$. 底空间中的子集 $\{x\in B: v_1(x), \cdots, v_m(x)$ 为 σ 的一个提升$\}$ 是一个余维数为 $\sigma(0)+\cdots+\sigma(n-1)$ 的伪流形, 它实现了 $H_{N-\sum_0^{n-1}\sigma(i)}(B, \partial B)$ 中的一个相对同调类, 与它对偶的 $H^{\sum_0^{n-1}\sigma(i)}(B)$ 中的同调类是丛 ξ 的一个示性类. 如果取 σ 为函数

$$\sigma(0)=\cdots=\sigma(n-2r-1)=0,$$

$$\sigma(n-2r)=\cdots=\sigma(n-1)=2,$$

则得到类 $p_r(\xi)$.

同陈类一样, Понтрягин 类可用实丛上联络的曲率表示.

对任一分次 $\mathbf{Q}$ 代数 A, 令 $\Gamma_1 A$ 为形如 $1+a_1+a_2+\cdots$, $\deg a_i=i$, 的级数 (在乘法下) 构成的群. 一个乘法序列 (multiplicative sequence) 是多项式的一个序列 $\{K_i(x_1, \cdots, x_i)\}$, $K_i\in\mathbf{Q}[x_1, \cdots, x_i]$, 使得对任一分次 $\mathbf{Q}$ 代数 A, 对应

$$a=(1+a_1+\cdots)\to$$

$$(1+K_1(a_1)+K_2(a_1, a_2)+\cdots)=K(a)$$

是一个群同态 $\Gamma_1 A\to\Gamma_1 A$, 特别地, 若 $\deg x_j=j$, 则 $K_i(x_1, \cdots, x_i)$ 为 i 次齐次式. 若 $A=\mathbf{Q}[t]$, 则 $\Gamma_1 A$ 为从 1 开始的形式幂级数构成的群. 对任意的 $f(t)\in\Gamma_1(\mathbf{Q}[t])$, 存在唯一满足 $k(1+t)=f(t)$ 的乘法序列 $K=\{K_i\}$. 不仅如此

$$K_n(x_1, \ldots, x_n)=\sum_{\omega\in\Pi(n)}\lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_r}S_{i_1\ldots i_r}(x_1, \ldots, x_n).$$

这里 $f(t)=\sum_0^\infty\lambda_i t^i$, $\lambda_0=1$, 上面的求和是对 n 的所有划分, 即 $\omega=\{i_1, \cdots, i_r\}$, $i_1, \cdots, i_r\geqslant 0$, $i_1+\cdots+i_r=n$.

由级数

$$\frac{\sqrt{t}}{\tanh\sqrt{t}}=1+\frac{1}{3}t-\cdots$$

$$+(-1)^{k-1}\frac{2^{2k}}{(2k)!}B_k t^k+\cdots$$

所定义的乘法序列通常记为 $L=\{L_i\}$, 其中 B_k 为 Bernoulli 数. 设 M^n 为流形, $A=H^{4*}(M;\mathbf{Q})$, $p(M)=1+p_1(M)+\cdots+p_{[n/2]}(M)\in\Gamma_1 A$ 为全 Понтрягин 类. 有理数 $\langle L(p(M)), [M]\rangle$ 称为 M^n 的 L 亏格 (L - genus). 下配边流形(见**下配边** (bordism)) 具有相同的 L 亏格. 若 n 不能被 4 整除, 则 $\langle L(p(M)), [M]\rangle=0$. 若 M^n 是维数为 $n=4k$ 的闭流形, 则 $\langle L(p(M)), [M]\rangle=I(M)$, 其中 $I(M)$ 为 $H_{2k}(M;\mathbf{Q})$ 上相交二次型的符号差 (Hirzebruch 符号差定理 (Hirzebruch signature theorem)).

许多特殊的乘法序列有重要的应用, 例如, $f(t)=t/(1-e^{-t})$ 的级数给出一个乘法序列 T. 对复丛 ξ, 由 $\tau(\xi)=T(c(\xi))\in H^{*}(B(\xi))$ 定义的类称为 ξ 的 Todd

类(Todd class). Todd 类按下面方式与陈特征 ch 相关联:

$$1=(-1)^{n}\tau(\xi)\cdot\varphi_{\xi}^{-1}\mathrm{ch}\,\psi_{\xi}(1)\in H^{*}(B,\mathbf{Q}),\quad n=\dim\xi,$$

其中 $\psi_{\xi}(1)$ 为 $K_{\mathbf{C}}$ 理论中的 Thom 类,而 φ_{ξ} 为 H^{*} 中的 **Thom 同构** (Thom isomorphism). 对实丛 ξ, 由 $J(\xi)=T(\xi_{\mathbf{C}})\in H^{*}(B(\xi);\mathbf{Q})$ 定义的类称为指标类(index class). 下面的指标定理(index theorem)成立(Atiyah-Singer 指标定理(Atiyah-Singer index theorem)):在 n 维紧流形 M 上的椭圆算子 D 的指标等于

$$(-1)^{n}\{\mathrm{ch}\,u\cdot J(M)\}[M^{\tau}],$$

其中 M^{τ} 为切丛的 **Thom 空间** (Thom space), $u\in K(M^{\tau})$ 是算子 D 的符号类.

球面丛的示性类与分类空间 BG_n 的上同调空间一一对应.

对奇素数 p, 在低于 $2p(p-1)-1$ 的维数内,

$$H^{*}(BG;\mathbf{Z}_p)=\mathbf{Z}_p[q_1,q_2,\ldots]\otimes\Lambda[\beta q_1,\beta q_2,\ldots],$$

其中类 $q_i\in H^{2i(p-1)}(BG_n;\mathbf{Z}_p)$ 对所有的 n 均可由公式 $q_i=\varphi^{-1}P^{i}\varphi(1)$ 表出; 这里 P^{i} 为 Steenrod 闭链约化幂(见 **Steenrod 约化幂** (Steenrod reduced power)), φ 为 Thom 同构, $\Lambda[\beta q_1,\beta q_2,\cdots]$ 为一个 $\mathbf{Z}_p$ 外代数(Milnor 定理 (Milnor theorem)).

类 q_i 与 Stiefel-Whitney 类极其相似,而且和后者一样,可视为球面丛的示性类或空间 BG 的上同调类. 最后, $H^{*}(BSG_{2k};\mathbf{Q})=\mathbf{Q}[e]$, 其中 e 为 Euler 类, 且 $H^{*}(BG_{2k};\mathbf{Q})=\mathbf{Q}[e^{2}]$.

可以证明,上面阐述的关于 $H^{*}(BG;\mathbf{Z}_p)$ 的公式,即使对维数 $2p(p-1)-1$ 也不成立: $H^{2p(p-1)-1}(BG;\mathbf{Z}_p)\cong\mathbf{Z}_p$,而该群的生成元不能由 q_i 和 βq_i 表出, 即它是第一个怪示性类 (exotic characteristic class).

参考文献

[1] Borel, A., Collected papers, 1, Springer, 1973.

[2] Atiyah, M. F. and Singer, I. M., The index of elliptic operators, Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ, Ⅴ, *Ann. of Math.*, (2), **87** (1968), 484-530; 531-545; 546-604; **93** (1971), 119-138; 139-149.

[3] Bott, R., Lectures on characteristic classes, in Lectures on algebraic and differential topology, Lecture Notes in Math., Vol. 279, Springer, 1972, 1-94.

[4] Milnor, J., Lectures on characteristic classes, Princeton Univ. Press, 1957. Notes by J. Stasheff.

[5] Понтрягин, Л. С., 《Докл. АН СССР》, **35** (1942), 35-39.

[6] Stiefel, E., *Comment. Math. Helv.*, **8** (1935), 4, 305-353.

[7] Whitney, H., *Bull. Amer. Math. Soc.*, **43** (1937), 785-805.

[8] Chern, S.-S., Characteristic classes of Hermitian manifolds, *Ann. of Math.*, (2), **47** (1946), 1, 85-121.

[9] Новиков, С. П., 《Докл. АН СССР》, **163** (1965), 298-300.

[10] Milnor, J., On characteristic classes for spherical fibre spaces, *Comm. Math. Helv.*, **43** (1968), 1, 51-77.

[11] Stasheff, J., More characteristic classes for spherical fibre spaces, *Comm. Math. Helv.*, **43** (1968), 1, 78-86.

[12] Borel, A. and Hirzebruch, F., Characteristic classes and homogeneous spaces, Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ, *Amer. J. Math.*, **80** (1958), 458-538; **81** (1959), 315-382; **82** (1960), 491-504.

[13] Stong, R. E., Notes on cobordism theory, Princeton Univ. Press, 1968.

[14] Milnor, J. and Stasheff, J., Characteristic classes, Princeton Univ. Press, 1974.

А. Ф. Харшиладзе 撰

【补注】 还有另一种方式定义(刻画)Euler 类 (Euler class). 设 ξ 为 B 上的定向 n 维实向量丛. 给定向量空间 V 的一个定向,等价于指定 $H^{n}(V,V_0;\mathbf{Z})\cong\mathbf{Z}$ 的一个生成元,其中 $V_0=V\setminus\{0\}$ (见定向(orientation)). 因此 ξ 的定向对 ξ 的每个纤维都指定了一个生成元 $u_F\in H^{n}(F,F_0;\mathbf{Z})$. 现在已有定理(见[14], p. 97):对于以 E 为全空间的定向 n 维向量丛 ξ, 当 $i<n$ 时, $H^{i}(E,E_0;\mathbf{Z})=0$, 且 $H^{n}(E,E_0;\mathbf{Z})$ 含有唯一的上同调类 u, 它(经包含 $(F,F_0)\subset(E,E_0)$) 在每个纤维 F 上的限制等于 u_F. 这个 u 称为 ξ 的基本类(fundamental class)或 Thom 类. 而且,用 u 做杯积可诱导出同构 $H^{k}(E;\mathbf{Z})\to H^{k+n}(E,E_0;\mathbf{Z})$, 亦见 **Thom 同构**(Thom isomorphism). 包含 $(E,\varphi)\subset(E,E_0)$ 定义了同态 $H^{n}(E,E_0;\mathbf{Z})\to H^{n}(E;\mathbf{Z})$, ($B\subset E$ 诱导了) $H^{n}(E;\mathbf{Z})\to H^{n}(B;\mathbf{Z})$. u 在这两个同态的复合下的象是 ξ 的 **Euler 类 (Euler class)** $e(\xi)$. Euler 类的一些初等性质是:若纤维维数为奇数,则 $2e(\xi)=0$, $e(\xi\oplus\xi')=e(\xi)\cup e(\xi')$, $e(\xi\times\xi')=e(\xi)\times e(\xi')$, 其中 $\xi\times\xi'$ 是以 $E\times E'$ 为全空间, $B\times B'$ 为底空间的向量丛, $\xi\oplus\xi'$ 在 $x\in B$ 上的纤维是 $E_x\oplus E'_x$.

基本类这个术语在下面的意义下使用. 设 $(M,\partial M)$ 为 n 维带边流形,则对(广义)上同调论 h_* 来说, $z\in h_n(M,\partial M)$ 是基本类(fundamental class), 当且仅当对任意 $x\in M\setminus\partial M$, $j_*(z)\in h_n(M,M\setminus\{x\})$ $(\cong h_n(\mathbf{R}^{n},\mathbf{R}^{n}\setminus\{0\}))$ 均是 $h_*(M,M\setminus\{x\})$ 作为 $h_*(pt)$ 上模的生成元. 因此, 若 h_* 由连通的环谱 E 定义, 则紧可剖分流形 M 可定向, 当且仅当它有一个基本类.

参考文献

[A1] Husemoller, D., Fibre bundles, McGraw-Hill, 1966.

[A2] Switzer, R. M., Algebraic topology-homotopy and homology, Springer, 1975.

李贵松 译 潘建中 校

特征方程 [characteristic equation; характеристическое уравнение]

见特征多项式 (characteristic polynomials).

特征指数 [**characteristic exponent** ; **характеристический показатель**]

1) 同 Ляпунов 特征指数 (Lyapunov characteristic exponent).

2) 具有周期系数的线性常微分方程系统的特征指数是系统乘子(multipliers)的自然对数除以系统系数周期的商. 在此情况下, 系统的 Ляпунов 特征指数等于该系统特征指数的实部. 等价的定义为: 数 α 称为一个具有周期系数的线性常微分方程系统的特征指数, 如果这个系统有 $[\exp(\alpha t)]y(t)$形式的复数解, 其中向量函数 $y(y(t)\not\equiv 0)$对 t 是周期的, 且有同样的周期, $t\in\mathbf{R}$, $\alpha\in\mathbf{C}$.

3) 当问题中的系统为非线性时, 也会出现"常微分方程系统解的特征指数" (characteristic exponent of a solution) 这一说法. 这是指给定系统沿着一个给定解的变分方程系统的特征指数, 这里再度出现的"特征指数"一词可以理解为 1) 或 2) 的含义.

B. M. Миллионщиков 撰

【补注】

参考文献

[A1] Nemytskii, V. V. and Stepanov, V. V., Qualitative theory of differential equations, Princeton Univ. Press, 1960 (译自俄文) (中译本: B. B. 涅梅茨基、B. B. 斯捷巴诺夫, 微分方程定性论, 科学出版社, 1956).

周芝英 译

特征函数 [**characteristic function** ; **характеристическая функция**], Fourier - Stieltjes 变换 (Fourier - Stieltjes transform), 概率测度 μ 的

在整个实轴 $\mathbf{R}^1$ 上由公式

$$\hat{\mu}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,d\mu(x),\quad t\in\mathbf{R}^1$$

所给出的复值函数.

一个随机变量 X 的特征函数, 按定义是它的概率分布

$$\mu_X(B) = \mathsf{P}\{X\in B\},\quad B\subset\mathbf{R}^1$$

的特征函数.

利用特征函数的方法为 A. M. Ляпунов 所首创, 而且后来成了概率论中的基本分析方法之一. 在证明概率论的极限定理中利用特征函数是最有效的. 例如, 具有二阶矩的独立同分布随机变量中心极限定理的证明归结为初等的关系式

$$\left[1-\frac{t^2}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n \to \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right).$$

特征函数的基本性质

1) $\hat{\mu}(0)=1$ 且 $\hat{\mu}$ 是正定的, 即对复数的任何有限子集 α_k 和自变量 $t_k\in\mathbf{R}^1$ 有

$$\sum\alpha_k\bar{\alpha}_l\hat{\mu}(t_k-t_l)\geqslant 0$$

2) $\hat{\mu}$ 在整个实轴 $\mathbf{R}^1$ 上是一致连续的.

3) $|\hat{\mu}(t)|\leqslant 1$, $|\hat{\mu}(t_1)-\hat{\mu}(t_2)|^2\leqslant 2(1-\mathrm{Re}\,\hat{\mu}(t_1-t_2))$, $t, t_1, t_2\in\mathbf{R}^1$.

4) $\overline{\hat{\mu}(t)}=\hat{\mu}(-t)$; 特别地, $\hat{\mu}$ 只取实值(且是一个偶函数), 当且仅当对应的概率分布是对称的, 即 $\mu(B)=\mu(-B)$, 其中 $-B=\{x: -x\in B\}$.

5) 特征函数唯一地决定了测度; 反演公式

$$\mu(a,b) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it}\hat{\mu}(t)\,dt$$

对任何端点 $a<b$ 是 μ 的连续点的区间 (a,b) 成立. 如果 $\hat{\mu}$ 在 $\mathbf{R}^1$ 上是可积的(绝对地, 如果积分理解为在 Riemann 意义下), 那么对应的分布函数有密度 p 且

$$p(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\hat{\mu}(t)\,dt,\quad x\in\mathbf{R}^1.$$

6) 两个概率测度的卷积(两个独立随机变量之和)的特征函数是他们的特征函数的乘积.

下面三个性质表明了随机变量矩的存在性和它的特征函数光滑性的阶之间的联系.

7) 如果 $\mathsf{E}|X|^n<\infty$ 对某一自然数 n 成立, 那么对所有自然数 $r\leqslant n$, 随机变量 X 的特征函数 $\hat{\mu}_X$ 的 r 阶导数存在且满足等式

$$\hat{\mu}_X^{(r)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty}(ix)^r e^{itx}\,d\mu_X(x),\quad t\in\mathbf{R}^1.$$

因此 $\mathsf{E}x^r=i^{-r}\hat{\mu}_X^{(r)}(0)$, $r\leqslant n$.

8) 如果 $\hat{\mu}_X^{(2n)}(0)$ 存在, 那么 $\mathsf{E}x^{2n}<\infty$.

9) 如果 $\mathsf{E}|x|^n<\infty$ 对一切 n 成立, 而且

$$\overline{\lim}\,\frac{(\mathsf{E}|X|^n)^{1/n}}{n} = \frac{1}{R},$$

那么对一切 $|t|\leqslant R$,

$$\hat{\mu}_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(it)^k}{k!}\mathsf{E}|X|^k.$$

特征函数方法的应用主要基于上述的特征函数性质和下面两个定理.

Bochner 定理 (Bochner theorem) (特征函数类的刻画). 假设给了 $\mathbf{R}^1$ 上的一个函数 f, 且 $f(0)=1$. 则 f 是某一概率测度的特征函数, 必须而且只需它是连续而且正定的.

Lévy 定理 (Lévy theorem) (对应的连续性) 设$\{\mu_n\}$是一列概率测度, 并设$\{\hat{\mu}_n\}$是它们的特征函数序

列．那么$\{\mu_n\}$弱收敛到某一概率测度μ(即$\int\varphi d\mu_n\to\int\varphi d\mu$对任何有界连续函数$\varphi$成立)，当且仅当$\{\hat{\mu}_n(t)\}$在每一个点$t\in\mathbf{R}^1$处收敛到某一连续函数$f$;在收敛的情形下，$f=\hat{\mu}$．这蕴含着概率测度族的相对紧性(在弱收敛的意义下)等价于对应的特征函数族在0点处的等度连续性．

Bochner 定理使我们能够把 Fourier - Stieltjes 变换看成是$\mathbf{R}^1$上概率测度的半群(在卷积运算下)和$\mathbf{R}^1$上在0处取1的正定连续函数的半群(按逐点相乘)之间的一种同构．Lévy 定理则断言，这种代数同构也是拓扑同胚，只要在概率测度半群中以弱收敛性确定拓扑，而在正定函数半群中以有界集上的一致收敛性确定拓扑．

基本概率测度的特征函数，其表达式是周知的(见[1]，[2])．例如，具有均值m和方差σ^2的 Gauss 测度，其特征函数是$\exp(imt-\sigma^2t^2/2)$.

对非负整值随机变量X，除了特征函数以外，也利用与之相似的**生成函数**(generating function)

$$\Phi_X(z)=\sum_{k=0}^{\infty}z^k\mathrm{P}\{X=k\},$$

它通过关系式$\hat{\mu}_X(t)=\Phi_X(e^{it})$与特殊函数相联系．

有限维空间$\mathbf{R}^n$上概率测度μ的特征函数类似地定义为

$$\hat{\mu}(t)=\int_{\mathbf{R}^n}e^{i\langle t,x\rangle}d\mu(x),\quad t\in\mathbf{R}^n,$$

其中$\langle t,x\rangle$表示内积．上面所陈述的事实对$\mathbf{R}^n$上概率测度的特征函数也成立．

参考文献

[1] Lukacs, E., Characteristic functions, Griffin, 1970.

[2] Feller, W., An introduction to probability theory and its application, 2, Wiley, 1971.

[3] Прохоров, Ю. В., Розанов, Ю. А., Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы, 2 изд., М., 1973 (英译本: Prohorov, Yu. V. and Rozanov, Yu. A., Probability theory; basic concepts, limit theorems, random processes, Springer, 1969).

[4] Золотарев, В. М., Одномерные устойчивые распределения, М., 1983 (英译本: Zolotarev, V. M., One dimensional stable distributions, Amer. Math. Soc., 1986).

Н. Н. Вахания 撰

【补注】

参考文献

[A1] Loève, M., Probability theory, 1-2, Springer, 1977-1978.

陈培德 译

特征函数(集合的)[characteristic function (of a set); характеристическая функция]，空间X中集合E的函数$\chi=\chi_E$．当$x\in E$时，它的值为1，当$x\in CE$(CE是E在X中的补集)时，它的值为0．X上的在$\{0,1\}$中取值的每个函数都是某一集合的特征函数，即集合$E=\{x:\chi(x)=1\}$，特征函数的性质有

(1) $\chi_{CE}=1-\chi_E$，$\chi_{E\setminus F}=\chi_E(1-\chi_F)$;

(2) 如果$F\subseteq E$，则$\chi_{E\setminus F}=\chi_E-\chi_F$;

(3) 如果$E=\bigcup_\alpha E_\alpha$，则$\chi_E=\sup_\alpha\{\chi_{E_\alpha}\}$;

(4) 如果$E=\bigcap_\alpha E_\alpha$，则$\chi_E=\inf_\alpha\{\chi_{E_\alpha}\}$;

(5) 如果$E_1,E_2,\cdots$是两两互不相交的，则$\chi_{\bigcup E_k}=\sum_1^\infty\chi_{E_k}$;

(6) 如果$E=\bigcap_K E_K$，则$\chi_E=\prod_1^\infty\chi_{E_K}$.

参考文献

[1] Halmos, P. R., Measure theory, v. Nostrand, 1950 (中译本: R. 哈尔摩斯，测度论，科学出版社，1959).

А. А. Конюшков 撰

【补注】一集合的特征函数也称为该集合的**指示函数**(indicator function)．符号1_E或ξ_E常用来代替χ_E.

张锦文，赵希顺 译

特征泛函[characteristic functional; характеристический функционал]

特征函数(characteristic function)概念的类似概念；它是在无限维情形中使用的．设$\mathfrak{X}$是非空集，Γ是定义在$\mathfrak{X}$上的实值函数的向量空间，$\hat{C}(\mathfrak{X},\Gamma)$是使所有$\Gamma$中的函数都可测的$\mathfrak{X}$的子集的最小$\sigma$代数．在$\hat{C}(\mathfrak{X},\Gamma)$上给出的概率测度$\mu$的特征泛函定义为$\Gamma$上的复值泛函$\hat{\mu}$，它由下式给出：

$$\hat{\mu}(\vartheta)=\int_{\mathfrak{X}}\exp[i\vartheta(x)]d\mu(x),\quad\vartheta\in\Gamma.$$

下面将只讨论最重要、最简单的情形：$\mathfrak{X}$是实可分 Banach 空间，而Γ是它的拓扑对偶$\mathfrak{X}^*$．在这一情形中，$\hat{C}(\mathfrak{X},\mathfrak{X}^*)$重合于空间$\mathfrak{X}$的 Borel 集的$\sigma$代数．对于无限维 Banach 空间的特征泛函的概念是 А. Н. Колмогоров 在[1]中引入的．

随机变量X的在$\mathfrak{X}$中取值的特征泛函，根据定义，就是概率分布$\mu_X(B)=\mathrm{P}\{X\in B\}$，$(B\subset\mathfrak{X})$的特征泛函．

特征泛函的主要性质：

1) $\hat{\mu}(0)=1$，且$\hat{\mu}$是正定的，即对于任何复数α_i和元素$x_i^*\in\mathfrak{X}^*$的有限集合，$\sum_{k,l}\alpha_k\bar{\alpha}_l\hat{\mu}(x_k^*-x_l^*)\geq0$成立；

2) $\hat{\mu}$按强拓扑连续，且按$\mathfrak{X}^*$的弱*拓扑序列连续；

3) $|\hat{\mu}(x^*)|\leq1$,

$$|\hat{\mu}(x_1^*)-\hat{\mu}(x_2^*)|^2\leq2[1-\mathrm{Re}\,\hat{\mu}(x_1^*-x_2^*)],$$

其中$x^*,x_1^*,x_2^*\in\mathfrak{X}^*$;

4) $\overline{\hat{\mu}(x^*)}=\hat{\mu}(-x^*)$; 特别是, $\hat{\mu}$ 只取实值(且是偶泛函)当且仅当测度 μ 是对称的, 即 $\mu(B)=\mu(-B)$, 其中 $-B=\{x: -x\in B\}$;

5)特征泛函唯一确定测度;

6)两个概率测度的卷积(两个独立随机变量的和)的特征泛函是它们的特征泛函的乘积.

在有限维情形中,特征泛函的方法的根据是有关测度和它们的特征泛函之间的对应的连续性定理和有关描述特征泛函类的定理. 在无限维情形中这些定理的直接类似定理不成立. 如果一个概率测度序列(μ_n)弱收敛于 μ, 那么$(\hat{\mu}_n)$点态收敛于 $\hat{\mu}$, 且这一收敛在 $\mathfrak{X}^*$ 的有界集上是一致的; 如果 K 是 $\mathfrak{X}$ 上的概率测度的弱相对紧族, 那么族$\{\hat{\mu}: \mu\in K\}$按$\mathfrak{X}^*$的强拓扑是等度连续的. 逆命题仅在有限维情形中为真. 然而, 收敛性和概率测度族的相对紧性条件可以用特征泛函来表达(见[2]). 此外, 与有限维情形时相反, 并非每个正定正规化的(在原点等于1的)连续泛函都是特征泛函: 按度量拓扑的连续性是不够的. $\mathfrak{X}^*$ 中的一种拓扑称为充分的(sufficient)或必要的(necessary), 如果正定正规化泛函按这种拓扑的连续性是使它为 $\mathfrak{X}$ 上的某个概率测度的特征泛函的充分条件或必要条件. 必要且充分的拓扑称为 S 拓扑(S-topology). 空间 $\mathfrak{X}$ 称为 S 空间(S-space), 如果 $\mathfrak{X}^*$上有 S 拓扑. Hilbert 空间是 S 空间(见[3]).

最重要的特征泛函类是 Gauss 测度的特征泛函. $\mathfrak{X}$ 中的测度 μ 称为中心化的 Gauss 测度, 如果对于所有 $x^*\in\mathfrak{X}^*$, 有

$$\hat{\mu}(x^*) = \exp\left[-\frac{1}{2}x^*(Rx^*)\right], \qquad (*)$$

其中 R 是从 $\mathfrak{X}^*$ 到 $\mathfrak{X}$ 的有界线性正算子, 它是测度 μ 的协方差算子, 由关系式

$$x^*(Rx^*) = \int x^{*2}(x)d\mu(x)$$

来定义(见[4]). 与有限维情形不同, 不是每个形式为(*)的泛函都是特征泛函, 而需要在 R 上附加依赖于空间 $\mathfrak{X}$ 的限制. 例如, 如果 $\mathfrak{X}=l_p(1\leqslant p<\infty)$, 那么附加的(必要且充分的)条件是 $\sum r^{p/2}_{kk}<+\infty$, 其中 $\|r_{ij}\|$ 是算子 R 的按自然基表示的矩阵(见[5]). 特别是在 Hilbert 空间中的附加条件是算子 R 为核算子.

参考文献

[1] Kolmogorov, A. N., *C. R. Acad. Sci. Paris*, **200** (1935), 1717–1718.

[2] Прохоров, Ю. В., 《Теория вероятн. и ее примен.》, **1** (1956), 2, 177–238.

[3] Сазонов, В. В., 《Теория вероятн. и ее примен.》, **3** (1958), 2, 201–205.

[4] Вахания, Н. Н., Тариеладзе, В. И., Чобанян, С. А., Вероятностные распределения в банаховых пространствах, М., 1985(英译本: Vakhania, N. N., Tarieladze, V. I. and Chobanyan, S. A., Probability distributions on Banach spaces, Reidel, 1987).

[5] Vakhania, N. N. [Вахания, Н. Н.], Sur les répartitions de probabilités dans les espaces de suites numériques, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **260** (1965), 1560–1562.

Н. Н. Вахания 撰

【补注】

参考文献

[A1] Vakhania, N. N., [Вахания, Н. Н.], Probability distributions on linear spaces, North-Holland, 1981 (译自俄文).

史树中 译

特征流形[**characteristic manifold; характеристическое многообразие**], 偏微分方程论中的

见**特征** (characteristic).

特征映射 [**characteristic mapping; характеристическое отображение**], 拓扑中的

从闭 n 维球 E^n 到 Hausdorff 拓扑空间 X 的连续映射 χ, 在这个球的内部 int (E^n)上是同胚. 集合 $e^n=\chi[\text{int}(E^n)]$ 称为 X 的胞腔(cell), χ 称为胞腔 e^n 的特征映射. 如果 X 是一个**胞腔空间**(cellular space), 则 X 的胞腔定义为组成 X 的胞腔分解的 $|X|$ 的那些胞腔.

А. Ф. Харшиладзе 撰 许依群, 徐定宥, 罗嵩龄 译

特征数,示性数[**characteristic number; характеристическое число**]

1) 特征数: 矩阵的特征值或本征值(见**特征多项式**(characteristic polynomials))的同义词.

2) 示性数: 一个(闭)流形的切丛(或另外有关的丛)的**示性类**(characteristic class)在该流形的基本闭链上的值.

А. Ф. Харшиладзе 撰

【补注】

参考文献

[A1] Milnor, J. W. and Stasheff, J. D., Characteristic classes, Princeton Univ. Press, 1974.

陈公宁 译 沈信耀 校

域的特征 [**characteristic of a field; характеристика поля**]

给定一个域, 按下述方法所唯一决定的一个正素数或0. 设 e 为域 K 的单位元, 若有正整数 n 使

$$0 = ne = e + \cdots + e \quad (n\text{ 个相加}),$$

那么最小的这样的 n 是一个素数, 称为 K 的特征(cha-

racteristic). 如果不存在这样的数,则称 K 的特征为零,或称 K 为特征零的域(field of characteristic zero). 有时这样的域也称为无特征的域(field without characteristic)或特征无限的域(field of characteristic infinity (∞)). 每个特征零的域包含一个与有理数域同构的子域,每个特征 p 的有限域包含一个与模 p 剩余类域同构的子域.

О. А. Иванова 撰 裴定一 译

特征多项式 [characteristic polynomial; характеристический многочлен]

设 $A=\|a_{ij}\|_1^n$ 是域 k 上的矩阵,则 A 的特征多项式指的是域 k 上的多项式

$$p(\lambda) = \det(A-\lambda E) =$$

$$\begin{Vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{Vmatrix} =$$

$$= (-\lambda)^n + b_1(-\lambda)^{n-1} + \cdots + b_n.$$

这个特征多项式的次数等于方阵 A 的阶数,系数 b_1 是 A 的迹($b_1=\mathrm{Tr}A=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$)(见**方阵的迹**(trace of a square matrix)),系数 b_m 是一切 m 阶主子式之和,特别是,$b_n=\det A$(见**子式**(minor)). 方程 $p(\lambda)=0$ 称为矩阵 A 的特征方程(characteristic equation 或 secular equation).

特征多项式在 k 中的根称为矩阵 A 的特征值(characteristic values)或本征值(eigen values). 当 k 是数域时,也使用"特征数"(characteristic numbers)一词. 有时在域 k 的代数闭包中来考虑特征多项式的根. 它们通常称为矩阵 A 的特征根(characteristic roots). 在代数闭域(例如复数域)上考虑的 n 阶矩阵 A 具有 n 个**特征值**(eigen value),如果每个根按其重数来计算.

相似矩阵具有相同的特征多项式. 域 k 上的每个首项系数为 $(-1)^n$ 的多项式,是 k 上的某个 n 阶矩阵即所谓 Frobenius 矩阵(Frobenius matrix)的特征多项式.

参考文献见**矩阵**(matrix).

Т. С. Пиголкина 撰

【补注】 特征根往往也称为特征值,因此对于特征多项式在域 k 中的根和在它的代数闭包中的根并不加区别. 给定多项式 $b(\lambda)=(-\lambda)^n+b_1(-\lambda)^{n-1}+\cdots+b_n$. 友型矩阵(matrix in companion form)

$$A=\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ b_n' & \cdots & \cdots & \cdots & b_1' \end{Vmatrix},$$

其中 $b_k'=(-1)^{k+1}b_k$,以 $b(\lambda)$ 作为它的特征多项式.

张鸿林 译

特征带 [characteristic strip; характеристическая полоса],一阶偏微分方程的

单参数族

$$x = x(t),\ u = y(t),\ u_x = p(t),$$

它们在区间 $\alpha<t<\beta$ 中是连续可微函数,并满足方程

$$x'(t) = F_p,\ y'(t) = pF_p,\ p'(t) = -F_x - pF_u,$$

其中向量的乘法理解为标量的;而

$$F(x, u, u_x) = 0 \qquad (*)$$

是关于未知函数 $u:\Omega\subseteq\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 的一阶非线性偏微分方程. 这里 $u_x=\mathrm{grad}\,u$, $F(x,y,p):\Omega\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$, $x,p\in\mathbf{R}^n$, $y\in\mathbf{R}$, $n\in\mathbf{N}$.

特征带的重要性在于它被用于方程(*)的研究和求解.

也见**特征**(characteristic).

参考文献

[1] Kamke, E., Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen, 2. Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung für die gesuchte Funktion, Akad. Verlagsgesell., 1944 (中译本: E. 卡姆克, 一阶偏微分方程手册, 科学出版社, 1983).

[2] Hartman, P., Ordinary differential equations, Birkhäuser, 1982.

Ю. В. Комленко 撰

【补注】 特征带有时称作次特征(bicharacteristic).

在近代理论中偏微分方程的特征带负载着偏微分方程的解的**波前集**(wave front sets).

参考文献

[A1] Courant, R. and Hilbert, D., Methods of mathematical physics, Partial differential equations. 2, Interscience, 1962(译自德文)(中译本: R. 柯朗, D. 希尔伯特, 数学物理方法, II, 科学出版社, 1977).

[A2] Hörmander, L., The analysis of linear partial differential operators, 1, Springer, 1983.

孙和生 译

特征子群 [characteristic subgroup; характеристическая подгруппа]

群 G 的子群,它在 G 的全体自同构下不变.

О. А. Иванова 撰

【补注】 特征子群的例子有群的中心 (centre of a group), 记为$Z(G)$; **Fitting 子群** (Fitting subgroup), 记为$F(G)$; **换位子群** (commutator subgroup), 记为$D(G)$, $[G,G]$或G'; **Frattini 子群** (Frattini subgroup), 记为$\Phi(G)$; **基座** (socle) 记为 Soc(G); 层 (layer), 记为$E(G)$以及广义 Fitting 子群 (generalized Fitting subgroup). 后两个子群的定义可见 **Fitting 子群**.

石生明 译 许以超 校

特征曲面 [**characteristic surface; характеристическая поверхность**], 偏微分方程论中的

同**特征** (characteristic).

表征定理 [**characterization theorems; характеризационные теоремы**], 概率论和数理统计中的

在随机变量或随机向量的分布与其函数的某些一般性质之间建立一种联系的定理.

例 1. 设X为三维随机向量, 满足条件:

1) 它向任何三个相互正交的坐标轴上的投影X_1, X_2, X_3是独立的; 以及

2) X的概率分布密度$p(x)$, $x=(x_1,x_2,x_3)$, 只依赖于$x_1^2+x_2^2+x_3^2$, 则X的分布为正态, 且

$$p(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sigma^2}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_1^2+x_2^2+x_3^2)\right\},$$

其中$\sigma>0$为常数 (平稳态气体分子速度的 Maxwell 分布律 (Maxwell distribution law)).

例 2. 设$X\in\mathbf{R}^n$为一随机向量, 其各分量独立同分布, $X=(X_1,\cdots,X_n)$. 若分布为正态的, 则"样本均值"

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j$$

和"样本方差"

$$\overline{s^2}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j-\overline{X})^2$$

是独立随机变量. 反之, 若它们独立, 则X的分布为正态的.

例 3. 设$X\in\mathbf{R}^n$为随机向量, 其分量独立而且同分布, 则当且仅当X有正态分布时, 存在着非零常数a_1, $\cdots$, a_n和$b_1,\cdots,b_n$, 使随机变量

$$Y_1=a_1X_1+\cdots+a_nX_n$$

和

$$Y_2=b_1X_1+\cdots+b_nX_n$$

独立. 当把Y_1, Y_2独立代之以Y_1, Y_2同分布时, 这结论仍成立, 但须对系数a_j和b_j附加某些限制.

有一些表征定理, 给出了与上述类似的随机向量$X\in\mathbf{R}^n$的分布的刻画. 它们是通过X的两个多项式$Q_1(X)$和$Q_2(X)$同分布或者独立的性质给出的. 这些定理在数理统计学中有重要作用.

参考文献

[1] Каган, А. М., Линник, Ю. В., Рао, С. Р., Характеризационные задачи математической статистики, М., 1972.

Ю. В. Прохоров 撰 陈希孺 译

负荷 [**charge; заряд**], 广义测度 (generalized measure)

定义在某区域$G\subset\mathbf{R}^n$的 Borel 子集的σ代数上, 且在紧集$K\subset G$上取有限值的扩充的实值σ加性集函数. 如果两测度之一在G上取有限值, 那么它们的差是负荷; 反之, 所有的负荷都可用这样的方法得到: 对任意一个负荷ν, 总存在G的一个分解G^+与G^-, 这里, G^+与G^-是互不相交的 Borel 集, 并且对一切$e\subset G^+$有$\nu(e)\geq0$, 而对一切$e\subset G^-$有$\nu(e)\leq0$. 测度$\nu^+=\nu(e\cap G^+)$以及$\nu^-=-\nu(e\cap G^-)$与G^+, G^-的选取无关, 它们分别称为负荷ν的正变差 (positive variations) 与负变差 (negative variations); 测度$|\nu|=\nu^++\nu^-$称为ν的全变差 (total variation). 利用这种记号, 所谓的 Hahn - Jordan 分解 (Hahn - Jordan decomposition) $\nu=\nu^+-\nu^-$成立, 因此, 负荷的许多性质可以通过测度来表达.

参考文献

[1] Ландкоф, Н. С., Основы современной теории потенциала, М., 1966 (英译本: Landkof, N. S., Foundations of modern potential theory, Springer, 1972).

[2] Halmos, P. R., Measure theory, v. Nostrand, 1950.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 负荷又称为带号测度 (signed measure, [A1]), 或称实测度 (real measure), 带号容度 (signed content). 更一般地, 它可以定义在空间Ω的一个子集环上, 或者定义在Ω上函数的 **Riesz 空间** (Riesz space) 上, 见 [A2].

上述的任意对 (G^+, G^-) 称为G关于ν的 Hahn 分解 (Hahn decomposition). 上面定义的对 (ν^+, ν^-) 也称为ν的 Jordan 分解 (Jordan decomposition).

参考文献

[A1] Hewitt, E. and Strömberg, K. R., Real and abstract analysis, Springer, 1965.

[A2] Jacobs, K., Measure and integral, Acad. Press, 1978.

王斯雷 译

Charlier 分布 [**Charlier distribution; Шарлье распределение**]

一种分布的非常用名称, 其密度由 **Gram - Charlier 级数** (Gram - Charlier series) 给出.

潘一民 译

Charlier 多项式 [**Charlier polynomials; Шарлье многочлены**]

非负整数系上关于积分权 $d\sigma(x)$ 正交的多项式，其中 $\sigma(x)$ 是阶梯函数，它的跳跃由下面公式定义：

$$j(x)=e^{-a}\frac{a^x}{x!},\quad x=0,1,\ldots,\quad a>0.$$

标准正交的 Charlier 多项式系具有如下表达式：

$$P_n(x;a)=\sqrt{\frac{a^n}{n!}}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k!a^{-k}\binom{x}{k}=$$

$$=a^{n/2}(n!)^{-1/2}[j(x)]^{-1}\Delta^n j(x-n).$$

Charlier 多项式与 Laguerre 多项式（Laguerre polynomials）有如下的关系：

$$P_n(x;a)=\sqrt{\frac{n!}{a^n}}L_n^{(x-n)}(a)$$

$$=\sqrt{\frac{n!}{a^n}}L_n(a;\ x-n).$$

它由 C. Charlier 引入（[1]）。由于 $j(x)$ 定义了 Poisson 分布，所以多项式 $\{P_n(x;a)\}$ 也称为 Charlier - Poisson 多项式（Charlier - Poisson polynomials）。

参考文献

[1] Charlier, C., Application de la théorie des probabilités à l'astronomie, Paris, 1931.

[2] Bateman, H. and Erdélyi, A., Higher transcendental functions, Bessel functions, 2, McGraw - Hill, 1953.

[3] Szegö, G., Orthogonal polynomials, Amer. Math. Soc. 1975.

П. К. Суетин 撰

【补注】 上面公式中，Δ 表示一阶差，即 $\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)$。另外一个常用的记号与用超几何函数表达的公式为：

$$C_n(x;a)=\frac{P_n(x;a)}{P_n(0;a)}={}_2F_0(-n,-x;-a^{-1}).$$

王斯雷 译

坐标卡 [chart; карта]，曲线坐标系（curvilinear coordinate system），参数化（parametrization），集合 M 的

集合 M 到实向量空间 $\mathbf{R}^n$ 中开子集 D 上的一一映射

$$x: M\to D,\quad p\to x(p)=(x^1(p),\ldots,x^n(p)),$$

整数 n 称为坐标卡的维数（dimension of the chart），向量 $x(p)\in\mathbf{R}^n$ 的分量 $x^i(p)$ 称为 $p\in M$ 关于坐标卡 x 的坐标（coordinates）。

坐标卡的一个例子是由 P. Fermet 和 R. Descartes 引入并采用作为解析几何基础的平面和空间 Descartes 坐标系。L. Euler 第一个在几何研究中使用曲面上的坐标卡（曲线坐标）。B. Riemann 采用坐标卡的概念作为新的无穷小的基础去探索几何基础（见[1]）。按照 Riemann 的观点，几何学研究的基本对象是流形，即有一坐标卡的集合 M。流形的现代概念是 Riemann 定义的自然推广。

M 的某子集 U 的一个坐标卡 $x: U\to D$ 称为 M 的定义域 U 的一个局部坐标卡（local chart）。如果 M 被赋予拓扑空间结构，则进一步要求 U 是 M 的一个开子集且映射 x 是一个同胚。坐标卡可类似地用在 F^n 中的值定义，其中 F 为任一赋范域，更一般地，坐标卡可在拓扑向量空间中取值。M 中以 U, V 为定义域的两个局部坐标卡 (x,U), (y,V) 称为类 C^l 相容的（compatible of class C^l），如果 1）它们的公共定义域 $W=U\cap V$ 被两个坐标卡映成开集（即，集合 $x(W)$ 和 $y(W)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的开集）；2）W 中的点关于这些坐标卡中的一个的坐标是同一点关于另一坐标卡的坐标的 l 次连续可微函数，即向量函数

$$y\circ x^{-1}: x(W)\to y(W)$$

是 l 次连续可微的。M 的两两相容的局部坐标卡 (x_α, U_α) 的族 $A=\{(x_\alpha, U_\alpha)\}$ 覆盖 M（即 $\bigcup_\alpha U_\alpha=M$），则称为 M 的一个图册（atlas）。M 上一个特定的图册定义了 M 上的一个**微分流形**（differentiable manifold）的结构，且与这个图册的所有坐标卡相容的局部坐标卡称为相容的（或 C^l 光滑的）。

坐标卡概念的无穷小类似物是 k 阶无穷小坐标卡（infinitesimal chart of order k（或（坐标卡的）k 射流（k - jet）或 k 阶余标架（co - frame of order k））的概念。集合 M 的两个相容的局部坐标卡 (x,U)，(y,V) 称为在点 $p\in U\cap V$ 处直至 k 阶相切的（tangent），如果 $x(p)=y(p)$，且向量函数 $y\circ x^{-1}: x\to y(x)$ 在 $x(p)$ 处的直至 k（包括 k）阶偏导数为 0。微分流形 M 的一个相容的局部坐标卡 (x,U) 在点 $p\in U$ 处（直至 k 阶）相切的局部坐标卡的类 $j_p^k(x)$ 称为 M 在 p 处的 k 阶无穷小坐标卡或在 p 处的 k 射流。

流形 M 上局部坐标卡的选取使我们可以将 M 上各种场量作为数值函数考虑，并对其使用分析方法。一般地，场量在一点的值依赖于坐标卡的选取。（不依赖于坐标卡选取的量称为纯量，并用 M 上函数来描述。）尽管如此，对于广泛的及很重要的一类量（见**几何对象的理论**（geometric objects, theory of）），其在一点的值仅依赖于坐标卡在这点处的 k 阶无穷小邻域的结构，这种量（例如张量场）用 M 上所有 k 阶余框架集合上的函数来描述，利用这些观点，可以研究不依赖于坐标卡选取的那些量的性质。利用这种联系，不变自由坐标研究微分几何问题被证明是极为有效的。

参考文献

[1] Riemann, B., Über die Hypothesen, welche der Geometrie Zugrunde liegen, in Das Kontinuum und andere Monographien, Chelsea, reprint, 1973.
[2] Рашевский, П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд, М. 1967.
[3] Sulanke, R. and Wintgen, P., Differentialgeometrie und Faserbündel, Birkhäuser, 1972.
[4] Lichnerowicz, A., Global theory of connections and holonomy groups, Noordhoff, 1976 (译自法文).
[5] Kobayashi, S. and Nomizu, K., Foundations of differential geometry, I, Interscience, 1963.

Д. В. Алексеевский 撰

【补注】 关于 Riemann 观点,特别见 [1].

参考文献

[A1] Veblen, O. and Whitehead, J. H. C., The foundations of differential geometry, Cambridge Univ. Press, 1967.
[A2] Bishop, R. L and Critenden, R. J., Geometry of manifolds, Acad. Press, 1964. 徐森林 译

Chasles 定理 [Chasles theorem; Шаля теорема]

1) 如果 A, B, C 是一直线上的任意三个点,那么 $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$,这里 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ 是有向线段的长. Chasles 定理可以推广到有向三角形的面积和有向四面体的体积情形(见 [1]).

2) 不同于旋转和平移的第一类(保持定向的)运动是一平移和一旋转的乘积,旋转轴平行于平移的方向(所谓的螺旋运动).定理由 M. Chasles 于 1830 年所证明.

参考文献

[1] Моденов, П. С., Аналитическая геометрия, М., 1969.

А. Б. Иванов 撰

【补注】 任何关于线性代数和解析几何的书都可以作为参考书,因为两个定理都是容易的练习.另一结果也称作 Chasles 定理 (Chasles theorem) 的可以在 [A1] 中找到:如果一三角形的顶点的极线(见**极线** (polar))不和它各自相应的对边重合,那么它们和这些边在三个共线的点上相遇.

参考文献

[A1] Coxeter, H. S. M., Projective geometry, Blaisdell, 1964. 孙和生 译

Чебышев 交错 [Chebyshev alternation; Чебышевский альтернанс]

实数闭集 Q 上的一个连续函数 $f(x)$ 和在 $n+2$ 个点的一个有序序列

$$\{x_i\}_0^{n+1} \subset Q, \ x_0 < \cdots < x_{n+1}$$

上的多项式 $P_n(x)$ (在一 **Чебышев 系** (Chebyshev system) $\{\varphi_k(x)\}_0^n$ 中)之差的一个性质,即

$$f(x_i)-P_n(x_i) = (-1)^i\varepsilon\|f(x)-P_n(x)\|_{C(Q)},$$

其中 $\varepsilon=1$ 或 -1. 点 $\{x_i\}_0^{n+1}$ 称作 Чебышев 交错点 (Chebyshev alternation points) 或(亦见**交错点** (alternation, points of)).

Ю. Н. Субботин 撰

【补注】 Чебышев 交错中的点还称作 Чебышев 交错点 (Chebyshev points of alternation),它们的集合还称作交错点集 (alternating set). 亦见**交错点** (alternation, points of) 中的参考文献.

参考文献

[A1] Lorentz, G. G., Approximation of functions, Holt, Rinehart and Winston, 1966, Chapt 2, Sect. 6.

孙和生 译

Чебышев 逼近 [Chebyshev approximation; Чебышевское приближение], 一致逼近 (uniform approximation)

定义在集 M 上的连续函数 f 被给定函数族中的函数 S 在一致度量

$$\rho(f, S) = \sup_{x\in M} |f(x)-S(x)|$$

下的逼近. П. Л. Чубышев 1853 年于[1]中提出并研究了对连续函数用不高于 n 次的代数多项式进行最佳一致逼近的问题. 对此以及更一般的关于对某个函数用有理函数进行最佳一致逼近的问题, 他得到了一系列基本的结果, 同时为**最佳逼近** (best approximation) 理论奠定了基础.

参考文献

[1] Чебышев, П. Л., Полн. собр. соч., М.-Л., 2 (1947), 23-51.
[2] Гутер, Р. С., Кудрявцев, Л. Д., Левитан, Б. М., Элементы теории функций, М., 1963.

Ю. Н. Субботин 撰

【补注】 亦可参见[A1], 特别是第三章以及[A2] 的 §7.6. 众所周知, Чебышев 逼近也叫做最佳一致逼近 (best uniform approximation).

参考文献

[A1] Cheney, E. W., Introduction to approximation theory, McGraw-Hill, 1966.
[A2] Davis, P. J., Interpolation and approximation, Dover, reprint, 1975. 王仁宏、檀结庆 译 杨应辰 校

Чебышев 中心 [Chebyshev centre; Чебышевский центр], 度量空间 (X, ρ) 中一个有界集 M 的元素 $x_0\in X$, 它满足条件

$$\sup_{y\in M}\rho(x_0, y) = \inf_{x\in X}\sup_{y\in M}\rho(x, y). \qquad (*)$$

量(*)是集合 M 的 **Чебышев 半径** (Chebyshev radius). 如果一个赋范线性空间对偶于某个赋范线性空间, 则任意一个有界集合 M 至少有一个 Чебышев 中心. 存

在 Banach 空间及其内由三点组成的集合，它没有 Чебышев 中心. Banach 空间 X 中每个有界集合至多有一个 Чебышев 中心的充要条件是：X 在每一个方向上是一致凸的，这就是说，对于任意的 $z\in X$ 和任意的 $\varepsilon>0$，存在数 $\delta=\delta(z,\varepsilon)>0$，使得当 $\|x_1\|=\|x_2\|=1$，$x_1-x_2=\lambda z$ 和 $\|x_1+x_2\|\geqslant 1-\delta$ 时，就有 $|\lambda|\leqslant\varepsilon$. 在维数大于 2 的赋范线性空间 X 中，每一个有界集合 M 的 Чебышев 中心都包含在该集合的凸包内的充要条件是：X 是 Hilbert 空间. Чебышев 中心是最优 N 格的更一般概念的特例.

参考文献

[1] Итоги науки. Математический анализ, 1967 (1969), 75－132.

Ю. Н. Субботин 撰 虞言林 译

Чебышев 常数 [Chebyshev constant; Чебышева постоянная]

复平面中的一个紧集 E 的不变数 $\tau=\tau(E)$，它用于最佳逼近理论.

设 K_n 是 n 次多项式

$$p_n(z)=z^n+c_1z^{n-1}+\cdots+c_n$$

的全体所成的类，又设

$$M(p_n)=\max\{|p_n(z)|: z\in E\},$$

$$m_n=\inf\{M(p_n): p_n\in K_n\},\quad \tau_n=m_n^{1/n}.$$

那么存在一个满足 $M(t_n)=m_n$ 的多项式 $t_n(z)\in K_n$，称为 E 的 Чебышев 多项式 (Chebyshev polynomial). 而且极限

$$\lim_{n\to\infty}\tau_n=\tau$$

存在，称为 E 的 Чебышев 常数 (Chebyshev constant).

考虑 K_n 的一个子类 $\widetilde{K}_n$，它是所有零点都在 E 内的多项式

$$\tilde{p}_n(z)=z^n+\cdots+\tilde{c}_n$$

的全体，可得到相应的值 $\widetilde{m}_n,\widetilde{\tau}_n,\widetilde{\tau}$，以及多项式 $\widetilde{t}_n(z)$，满足 $M(\widetilde{t}_n)=\widetilde{m}_n$ (它也称为 Чебышев 多项式 (Chebyshev polynomial)).

熟知，$\tau=\widetilde{\tau}=C(E)=d$，这里 $C(E)$ 是紧集 E 的**容量** (capacity)，d 是它的**超限直径** (transfinite diameter) (例如，见 [1]).

Чебышев 常数的概念向高维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^m$ 中的紧集的推广，起源于**位势论** (potential theory). 对于点 $x\in\mathbf{R}^m$，假设

$$H(|x|)=\begin{cases}\ln\dfrac{1}{|x|}, & 对\ m=2,\\ \dfrac{1}{|x|^{m-2}}, & 对\ m\geqslant 3\end{cases}$$

是 Laplace 方程的基本解；若对集合 $(x_j)_{j=1}^n\subset E$，令

$$\sigma_n(E)=$$

$$=\sup\left\{\min\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}H(|x-x_j|): x\in E\right\}: (x_j)_{j=1}^n\subset E\right\}.$$

则当 $m=2$ 时，得到关系式

$$\tau=\tilde{\tau}=C(E)=\exp\left[-\lim_{n\to\infty}\sigma_n(E)\right],$$

当 $m\geqslant 3$ 时，得到 (见 [2])：

$$\tau=C(E)=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n(E)}.$$

参考文献

[1] Голузин, Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966 (中译本：Г. М. 戈鲁金，复变函数的几何理论，科学出版社，1956).

[2] Carleson, L., Selected problems on exceptional sets, v. Nostrand, 1967.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Tsuji, M., Potential theory in modern function theory, Chelsea, reprint, 1975.

[A2] Walsh, J. L., Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain, Amer. Math. Soc., 1956.

高琪仁、吴炯圻 译 卫念祖 校

Чебышев 方程 [Chebyshev equation; Чебышева уравнение]

二阶齐次线性常微分方程

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+ay=0$$

或者其自共轭形式

$$\sqrt{1-x^2}\,\frac{d}{dx}\left[\sqrt{1-x^2}\,\frac{dy}{dx}\right]+ay=0,$$

其中 a 是常数. Чебышев 方程是**超几何方程** (hypergeometric equation) 的一个特殊情况.

点 $x=-1$ 和 $x=1$ 是 Чебышев 方程的**正则奇点** (regular singular point). 经过自变量变换

$$t=\arccos x,\ 对\ |x|<1,$$

$$t=\operatorname{Arcosh}|x|,\ 对\ |x|>1$$

可将这个方程化为相应的常系数线性方程：

$$\frac{d^2y}{dt^2}+ay=0\ 或\ \frac{d^2y}{dt^2}-ay=0,$$

因此，Чебышев 方程可以积分为封闭形式. 当 $a=n^2$(n

为自然数)时，Чебешев 方程在区间 $-1<x<1$ 上的基本解组由 n 次(第一类) **Чебышев 多项式** (Chebyshev polynomials)

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

和函数 $U_n(x)=\sin(n \arccos x)$ 组成，$U_n(x)$ 与第二类 Чебышев 多项式有关．多项式 $T_n(x)$ 是 Чебышев 方程 $(a=n^2)$ 在整个实轴上的实解．也可在复域上来研究 Чебышев 方程．

Н. Х. Розов 撰　张鸿林 译

Чебышев 函数 [Chebyshev function; Чебышева функции]

正自变量 x 的函数，定义如下：

$$\theta(x) = \sum_{p\leqslant x}\ln p,\quad \psi(x) = \sum_{p^m\leqslant x}\ln p.$$

第一个和式取遍所有的素数 $p\leqslant x$，第二个和式取遍所有素数 p 的正整数 m 次方幂 $p^m\leqslant x$．函数 $\psi(x)$ 可以用 **Mangoldt 函数** (Mangoldt function) 表示为

$$\psi(x) = \sum_{n\leqslant x}\Lambda(n).$$

由 $\theta(x)$ 和 $\psi(x)$ 的定义可知，$e^{\theta(x)}$ 等于所有素数 $p\leqslant x$ 的乘积，而 $e^{\psi(x)}$ 等于所有正整数 $n\leqslant x$ 的最小公倍数．函数 $\theta(x)$ 和 $\psi(x)$ 由等式

$$\psi(x) = \theta(x)+\theta(x^{1/2})+\theta(x^{1/3})+\cdots$$

相联系，而且也和函数

$$\pi(x) = \sum_{p\leqslant x}1$$

密切相关，后者表示素数 $p\leqslant x$ 的个数．

参考文献

[1] Чебышев, П. Л., Избр. труды, М., 1955, 33－54

С. А. Степанов 撰

【补注】 有关 Чебышев 函数 $\theta(x)$ 和 $\psi(x)$ 的性质见 [A1]，第 12 章．

参考文献

[A1] Ivic, A., The Riemann zeta-function, Wiley, 1985.

戚鸣皋 译　张明尧 校

Чебышев 不等式 [Chebyshev inequality; Чебышева неравенство]

有限单调序列

$$a_1\leqslant\cdots\leqslant a_n,\quad b_1\leqslant\cdots\leqslant b_n$$

的 Чебышев 不等式是不等式

$$\sum_{k=1}^{n}a_k\sum_{k=1}^{n}b_k \leqslant n\sum_{k=1}^{n}a_kb_k$$

单调函数 $f(x)\geqslant 0$，$g(x)\geqslant 0$ 的 Чебышев 不等式是不等式

$$\int_a^b f(x)\,dx\int_a^b g(x)\,dx \leqslant (b-a)\int_a^b f(x)g(x)\,dx,$$

其中 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上或者均为递增的，或者均为递减的．

这两个不等式是 П. Л. Чебышев 证明的 (1882)．

В. И. Битюцков 撰

【补注】 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是非负的这一点并不重要．只要把非负函数 $\tau(x,y)=[f(x)-f(y)]\cdot[g(x)-g(y)]$ 在正方形区域 $[a,b]\times[a,b]$ 上进行积分，便可得到证明．

张鸿林 译

Чебышев 不等式 [Chebyshev inequality; Чебышев неравенство]，Bienaymé-Чебышев 不等式 (Bienaymé-Chebyshev inequality)

概率论中的一个不等式，它通过随机变量的方差，给出该随机变量对其数学期望的偏差的概率上界．令 $X(\omega)$ 为具有有穷数学期望 $\mathrm{E}X(\omega)$ 与方差 $\mathrm{D}X(\omega)$ 的随机变量．Чебышев 不等式断言，对任何 $\varepsilon>0$，事件

$$\{\omega:|X(\omega)-\mathrm{E}X|\geqslant\varepsilon\}$$

的概率不超过 $\mathrm{D}X/\varepsilon^2$，或

$$\mathrm{P}\{|X-\mathrm{E}X|\geqslant t\sqrt{\mathrm{D}X}\}\leqslant\frac{1}{t^2}. \tag{1}$$

这个不等式是由 I. Bienaymé (1853) 和 П. Л. Чебышев (1866) 独立发现的．在近代文献中，这个不等式通常称为 Чебышев 不等式，可能是因为 Чебышев 的名字与应用此不等式来证明**大数律** (law of large numbers) (Чебышев 的一个定理) 有关．

Чебышев 不等式是这种类型的一整类不等式的一个代表，其中最简单的不等式断言，对于具有有穷数学期望 $\mathrm{E}X$ 的非负随机变量 X，

$$\mathrm{P}\{X\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{\mathrm{E}X}{\varepsilon} \tag{2}$$

(它有时称为 Марков 不等式 (Markov inequality))．由此可以得出，对于任意随机变量成立的且与该随机变量的矩有关的不等式：

$$\mathrm{P}\{|X|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{\mathrm{E}|X|^r}{\varepsilon^r},$$

$$\mathrm{P}\{|X-\mathrm{E}X|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{\mathrm{E}|X-\mathrm{E}X|^r}{\varepsilon^r},\quad r\geqslant 1$$

(当 $r=2$ 时，这就是 Чебышев 不等式)．还可得出更一般的不等式

$$\mathrm{P}\{|X|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{\mathrm{E}f(X)}{f(\varepsilon)}, \tag{3}$$

其中 $f(x)$ 是对正的 x 非降的非负偶函数．不等式 (3) 指

出了一个获得相同类型的新不等式的方法,例如可得到指数不等式(exponential inequality):

$$\mathsf{P}\{X\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{\mathsf{E}e^{cX}}{e^{c\varepsilon}},\quad c>0.$$

传统上把所有这些不等式都认为是 Чебышев 型的,甚至就通称为 Чебышев 不等式. 基于 Чебышев 多项式组的利用,有个一般的原则来获得条件加在矩上的各种 Чебышев 不等式(见[4]). 这些 Чебышев 不等式给出了对任意随机变量的精确与最佳的估计,但在某些具体场合,这些估计还可以改进. 例如,如果 X 有单峰分布且其众数 μ 与数学期望相等,则 Gauss 不等式(Gauss inequality)

$$\mathsf{P}\{|X-\mu|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{4}{9}\ \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2},\ \varepsilon\geqslant\frac{2\sigma}{3}$$

成立, 其中 $\sigma^2=\mathsf{D}X$.

Чебышев 不等式在概率论中的重要性多半不在于它的精确性,而在于它的简单性与普遍性. Чебышев 不等式及其变形,应用于随机变量之和,在各种形式的大数律及重对数律的证明中起着重要作用. 对于独立随机变量之和, Чебышев 不等式已在两个不同方向上得到推广和改进. 第一个方向联系着从 Чебышев 不等式

$$\mathsf{P}\{|X_1+\cdots+X_n-(\mathsf{E}X_1+\cdots+\mathsf{E}X_n)|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\leqslant\frac{\mathsf{D}(X_1+\cdots+X_n)}{\varepsilon^2}$$

转移到显然更强的不等式

$$\mathsf{P}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|X_1+\cdots+X_k-(\mathsf{E}X_1+\cdots+\mathsf{E}X_k)|\geqslant\varepsilon\right\}\leqslant\frac{\mathsf{D}(X_1+\cdots+X_n)}{\varepsilon^2}.$$

此式由 A. H. Колмогоров 所证明且被他应用于证明强大数律(strong law of large numbers)(见 **Колмогоров 不等式**(Kolmogorov inequality)).

第二个方向则是把 Чебышев 不等式中的幂界换成带某种指数衰减的界,从而导出 Бернштейн - Колмогоров 不等式(Bernshtein - Kolmogorov inequality):

$$\mathsf{P}\{|X_1+\cdots+X_n|\geqslant\varepsilon\}\leqslant 2\exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2(1+a/3)}\right\},$$

其中 $|X_i|\leqslant c$, $\mathsf{E}X_i=0$, $\sigma^2=\mathsf{D}(X_1+\cdots+X_n)$, $a=c\varepsilon^2/\sigma^2$ (见 **Бернштейн 不等式**(Bernshtein inequality)). Чебышев 不等式的这种改进,是在对被加项 X_i 添加某些限制之下得到的.

上述的某些不等式已推广到多维的情形(见[5]).

参考文献

[1] Чебышев, П. Л., 《Матем. сб.》, **2** (1867), 1–9.
[2] Марков, А. А., Исчисление вероятностей, 4 изд., М., 1924.
[3] Колмогоров, А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974 (中译本:概率论基本概念,商务印书馆, 1952).
[4] Karlin, S. and Studden, V., Tchebycheff systems: with applications in analysis and statistics, Interscience, 1966.
[5] Прохоров, Ю. В., Итоги науки и техники. Теория вероятностей, матем. статистика, теоретич. кибернетика, **10** (1972), 5–24.

A. B. Прохоров 撰 潘一民 译

Чебышев 迭代法 [Chebyshev iteration method; Чебышевский итерационный метод]

求解线性方程

$$Au=f \tag{1}$$

的一种迭代算法,它考虑了算子 A 的谱 $\mathrm{Tr}(A)$ 在某集合 Ω 中包含关系的信息,并利用了那些在 Ω 上偏离零最小和在零处等于 1 的多项式的性质和参数.

在(1)中,如果 A 是线性自伴算子, $\mathrm{Tr}(A)\in[m,M]$,这里 $0<m<M$ 是谱的边界点,则得到最完善的 Чебышев 迭代法; Чебышев 迭代法利用了第一类 Чебышев 多项式 $T_n(x)$ 的性质. 对这种情形,考虑两类 Чебышев 迭代法:

$$u^{k+1}=u^k-\alpha_{k+1}(Au^k-f), \tag{2}$$

$$u^{k+1}=u^k-\alpha_{k+1}(Au^k-f)-\beta_{k+1}(u^k-u^{k-1}), \tag{3}$$

$$\beta_1=0,\ k=0,$$

对给定的 u^0,按照(2)或(3)可得序列 $u^k\to u$ $(k\to\infty)$. 在(2)和(3)中, α_i 和 β_i 是方法的数值参数. 如果 $\varepsilon^k=u-u^k$,则初始误差 ε^0 和在第 N 次迭代的误差 ε^N 有下面的关系:

$$\varepsilon^N=P_N(A)\varepsilon^0,$$

这里

$$P_N(t)=\prod_{i=1}^{N}(1-\gamma_i t),\quad P_N(0)=1. \tag{4}$$

利用方法(2)和(3)中的参数计算多项式 $P_N(t)$: 对方法(2)

$$\alpha_k=\gamma_{j_k},\quad k=1,\ldots,N, \tag{5}$$

这里 $1\leqslant j_k\leqslant N$ 是排列 $\kappa_N=(j_1,\cdots,j_N)$ 的元素,而对方法(3), 它们由递推关系

$$P_{k+1}(t)=(1-\beta_{k+1}-\alpha_{k+1}t)P_k(t)+\beta_{k+1}P_{k-1}(t),$$

$$P_0=1,\ \beta_1=0,\ k=0,\ldots,N-1 \tag{6}$$

来计算．同时

$$\| \varepsilon^N \| \leqslant \sup_{t\in[m,M]} | P_N(t) | \cdot \| \varepsilon^0 \|.$$

对 $\mathrm{Tr}(A)\in[m, M]$ 的这类问题，通过选择参数使得(4)中的 $P_N(t)$ 是 $[m, M]$ 上偏离零最小的多项式，则方法(2)和方法(3)可最佳化．1881年П. Л. Чебышев证明了这个多项式是

$$P_N(t) = \frac{T_N((M+m-2t)/(M-m))}{T_N(\theta)}, \tag{7}$$

这里 $\theta=(M+m)/(M-m)$．这时

$$\| \varepsilon^N \| \leqslant \frac{2\tau^N}{(1+\tau^{2N})} \| \varepsilon^0 \|, \tag{8}$$

这里

$$\tau = \frac{1-\sqrt{m/M}}{1+\sqrt{m/M}}.$$

当 $N=k-1, k, k+1$ 时，将(7)代入(6)，方法(3)中的参数 α_{k+1}, β_{k+1} 由下式确定：

$$\alpha_{k+1} = \frac{4\delta_{k+1}}{M-m}, \quad \beta_{k+1} = -\delta_k\delta_{k+1}. \tag{9}$$

这里

$$\delta_0 = 0, \ \delta_1 = \theta^{-1}, \ \delta_{k+1} = (2\theta-\delta_k)^{-1}, \quad k = 1, \ldots, N-1. \tag{10}$$

于是，通过公式(9)和(10)计算 α_{k+1} 和 β_{k+1} 得到了Чебышев迭代法(3)，它的 $\|\varepsilon^N\|$ 对每个 $N\geqslant 1$ 都是极小的．

对给定的 N，为了使(2)最佳，可这样选择对应于公式(5)中排列 κ_N 的参数 α_{k+1}，使(7)成立，即

$$\gamma_j = 2(M+m-(M-m)\cos\pi\psi_j)^{-1}, \quad \psi_j = \frac{2j-1}{2N}, \ j=1, \ldots, N. \tag{11}$$

这样，N 次迭代后，不等式(8)对 $\|\varepsilon^N\|$ 成立．

对小的 m/M，方法(2)，(5)，(11)的稳定性问题是一个重要问题．κ_N 的轻率选择能导致对某 $1\leqslant k\leqslant N$，$\|u^k\|$ 的灾难性增长，有效数学的损失，或在中间迭代上允许的舍入误差的增长．存在调配(11)中的参数并保证计算稳定性的算法：对 $N=2^p$ 可参见**迭代算法**(iteration algorithm)；对 $N=3^p$，构造 κ_N 的算法之一如下：设 $\kappa_1=(1)$，并假设 $\kappa_{3^{r-1}}=(j_1, \cdots, j_{3^{r-1}})$ 已经被构造出，则

$$\kappa_{3^r} = (j_1, 2\cdot3^{r-1}+j_1, 2\cdot3^{r-1}+1-j_1, \ldots, 2\cdot3^{r-1}+1-j_{3^{r-1}}), \quad r=1, \ldots, p. \tag{12}$$

存在一类方法(2)，即稳定无限重复的最佳Чебышев迭代法，允许在 N 次迭代后重复方法(2)，(5)，(11)以使它是稳定的，并且对某些序列 $N_i\to\infty$，它将再次变成最佳的．对 $N_i=3^iN$ 的情形，从公式

$$T_{3N}(x) = T_N(x)(2T_N(x)+\sqrt{3})(2T_N(x)-\sqrt{3}) \tag{13}$$

容易看出，$P_{3N}(t)$ 与(11)是一致的．如果 N 次迭代后，进一步重复迭代(2)，(5)，(11)，对(11)中的 ψ_j 取 $2N$ 个值

$$\tilde{\psi}_j = \frac{2j-1}{6N}, \ 2j\neq 1 \ (\mathrm{mod}\ 3), \tag{14}$$

则 $3N$ 次迭代后再一次得到一个Чебышев迭代法．为了保证稳定性，将集合(14)分成两个集合：在第 i 个集合($i=1, 2$)中，设置 $\tilde{\psi}_j$ 使得 $\pi\cos\tilde{\psi}_j$ 是(13)中第 i 个括号内的根；在每个子集内，$\tilde{\psi}_j$ 根据排列 κ_N 来交换．当 $N<k<2N$ 时，将第一个子集中的元素代入(5)，(11)中；当 $2N<k\leqslant 3N$，利用第二个子集；排列 κ_{3N} 以同样的方式定义．以类似的方式继续形成参数的过程，可得到无穷序列 $\{\omega_j\}_1^\infty$，均匀地分布在[0,1]上，称为 T 序列，对于它当 $N_i=3^iN$ 和

$$\alpha_{k+1} = 2(M+m-(M-m)\cos\pi\omega_{k+1})^{-1}, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{15}$$

时，方法(2)变成最佳的．

Чебышев迭代法(2)和(3)的理论可推广到部分特征值问题．对某类非自伴算子，当 $\mathrm{Tr}(A)$ 落入特定的区间或特定的特殊形状的区域(特别是椭圆)时；当关于初始误差的分布信息已知时；或者当Чебышев迭代法与共轭梯度法组合时，推广也是存在的．

使迭代法(2)，(3)收敛加速的有效方法之一是将方程(1)预先变换成等价方程

$$BAu = Bf,$$

并将Чебышев迭代法应用到这个方程上．算子 B 由两个因素确定：1)计算形如 Bv 量的算法不应太复杂；2)使 $\mathrm{Tr}(BA)$ 落在一个集合中以保证Чебышев迭代法的快速收敛性．

参考文献

[1] Марчук, Г. И., Лебедев, В. И., Численные методы в теории переноса нейтронов, 2 изд, М., 1981.

[2] Бахвалов, Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975 (英译本：Bakhvalov, N. S., Numerical methods: analysis, algebra, ordinary differential equations, Mir, 1977).

[3] Марчук, Г. И., Методы вычислительной математики, 2 изд., М., 1980.

[4] Самарский, А. А., Теория разностных схем, М., 1977.

[5] Лебедев, В. И., Финогенов, С. А.,《Ж. вычисл. матем. и матем. физ.》, **11** (1971), 2, 425－438; **13** (1973), 1, 18－33; **16** (1976), , 895－907.

[6] Лебедев, В. И., 《Ж. вычисл. матем. и матем. физ.》, 9 (1969), 6, 1247 – 1252.

[7] Лебедев, В. И., в кн.: Матем. анализ и смежные вопросы математики, Новосиб., 1978, 89 – 108.

В. И. Лебедев 撰

【补注】 在西方文献中,方法(2), (5), (11)称为一次Richardson法(Richardson method of first degree)([A2]), 或更广泛采用的一次Чебышев半迭代法(Chebyshev semi-iterative method of first degree). 这方法可追溯到L. F. Richardson早期的论文[A6],在那里已经提出方法(2), (5). 但是, Richardson不像在(11)那样把$P_N(t)$的零点$1/\alpha_k$就取作(移位)Чебышев多项式的零点,而认为它们都均匀地落在区间$[m, M]$上. Чебышев多项式的使用似乎是在[A1]和[A3]中第一次提出.

上面所述的"稳定无限重复最佳Чебышёв迭代法"是基于恒等式$T_{pq}(x) \equiv T_p(T_q(x))$,它立即导出因式分解

$$T_{pq}(x)=\prod_{j=1}^{p} \frac{T_q(x)-\cos((2j-1)\pi/2p)}{1-\cos((2j-1)\pi/2p)} .$$

这个公式在[A1]中用于基本模型的数值确定.

方法(3), (9)称为二次Richardson法(Richardson method of second degree)或二次Чебышев半迭代法(Chebyshev semi-iterative methed of second degree), 它是在[A9]中提出的,并被证明是完全稳定的. 于是,以一个额外存储数组为代价,就可以避免与一次过程相结合的不稳定问题.

至于变换算子B(称为预处理(preconditioning))的选择,常用的"预处理器(preconditioner)"是[A8]中提出的所谓SSOR矩阵(SSOR matrix)(对称逐次超松弛矩阵).

Чебышев半迭代法理论的介绍由[A2]和[A3]给出. 在[A10]的第5章和[A4]中可找到广泛的分析. 在这个工作中,假定算子A的谱是实的. 谱是非实情形的分析可在[A5]中找到.

代替使用极小极大多项式,可考虑在$[m, M]$上"极小化"$P_N(t)$的积分测度. 这就导出了在[A9]中引进并在[A11]的第5章被推广的核多项式理论.

与直接法(direct method)相反,迭代法只有当矩阵是稀疏(见**稀疏矩阵**(sparse matrix))时才有意义. 此外,它们多方面的适应性依赖于允许多大的误差(ε_N); 有时其他误差是更主要的,如在偏微分方程的离散方程组中的截断误差.

如果不能利用关于A的特征结构的信息,或者在非自伴的情形中,使用**共轭梯度法**(conjugate gradients, method of)往往是较适宜的. 基于后一种方法并与不完全因式分解组合的数值算法已证明是至今(1987)求解线性问题最有效的方法之一.

参考文献

[A1] Flanders, D. A. and Shortley, G., Numerical determination of fundamental modes, *J. Appl. Physics*, **21** (1950), 1326 – 1332.

[A2] Forsythe, G. E. and Wasow, W. R., Finite difference methods for partial differential equations, Wiley, 1960.

[A3] Golub, G. H. and Loan, C. F. van, Matrix computations, North Oxford Acad., 1983.

[A4] Golub, G. H. and Varga, R. S., Chebyshev semi-iterative methods, successive over-relaxation methods and second-order Richardson iterative methods Ⅰ, Ⅱ, *Num. Math.*, **3** (1961), 147 – 156; 157 – 168.

[A5] Manteuffel, T. A., The Tchebychev iteration for nonsymmetric linear systems, *Num. Math.*, **28** (1977), 307 – 327.

[A6A] Richardson, L. F., The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations, with an application to the stresses in a masonry dam, *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, **210** (1910), 307 – 357.

[A6B] Richardson, L. F., The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations, with an application to the stresses in a masonry dam, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **83** (1910), 335 – 336.

[A7] Shortley, G., Use of Tchebycheff-polynomial operators in the numerical solution of boundary-value problems, *J. Appl. Physics*, **24** (1953), 392 – 396.

[A8] Sheldon, J. W., On the numerical solution of elliptic difference equations, *Math. Tables Aids Comp.*, **9** (1955), 101 – 112.

[A9] Stiefel, E. L., Kernel polynomials in linear algebra and their numerical applications, Appl. Math. Series, 49, Nat. Bur. Stand., 1958.

[A10] Varga, R. S., Matrix iterative analysis, Prentice Hall, 1962.

[A11] Wachspress, E. L., Iterative solution of elliptic systems, and applications to the neutron diffusion equations of nuclear physics, Prentice Hall, 1966.

郭祥东 译

Чебышев法 [Chebyshev method; Чебышева метод]

为得到求下列方程的实单根的一类**迭代算法**(iteration algorithem)所用的方法:

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

其中$f(x)$是足够光滑的函数.

这种方法的根据是$f(x)$的反函数$x = F(y)$通过Taylor公式的形式表示式. 如果α是方程(1)的一个根的足够精确的近似值, $c_0=\beta=f(\alpha)$, $f'(\alpha)\neq 0$, 则

$$x = F(y) = \alpha + \sum_{n\geq 1} d_n(y-\beta)^n, \tag{2}$$

其中系数 d_n 由恒等式 $x\equiv F(f(x))$，利用函数 $f(x)=\sum_{n\geq 0}c_n(x-a)^n$ 的 Taylor 系数 c_n 递推地来定义．在(2)中，设 $y=0$，则得到关系式

$$x=\alpha-\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}-\left[\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}\right]^2\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}+ \tag{3}$$

$$-\left[\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}\right]^3\left[\frac{1}{2}\left[\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\right]^2-\frac{f'''(\alpha)}{6f'(\alpha)}\right]+$$

$$-\left[\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}\right]^4\left[\frac{5}{8}\left[\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\right]^3-\frac{5f''(\alpha)f'''(\alpha)}{12(f'(\alpha))^2}+\frac{f^{IV}(\alpha)}{24f'(\alpha)}\right]$$

$$-\cdots.$$

在(3)的右端取一定的项数，便得到一个迭代算法公式；例如，当取两项时，得到 **Newton 法**(Newton method)；当取三项时，得到下列形式的迭代法：

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}-\left[\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right]^2\frac{f''(x_n)}{2f'(x_n)}, \tag{4}$$

$$n=0,1,\ldots.$$

x_n 向 x 收敛的速度随在(3)中所取项数的增加而增加(见[2])．这种方法也可推广而用于函数方程(见[3])．

参考文献

[1] Чебышев, П. Л., Полн. собр. соч., т. 5, М.-Л., 1951, 7-25, 173-176.

[2] Березин, И. С., Жидков, Н. П., Методы вычислений, 2 изд., т. 2, М., 1962 (英译本: Berezin, I. S. and Zhidkov, N. P., Computing methods, Pergamon, 1973).

[3] Нечепуренко, М. И., 《Успехи матем. наук》, 1954, т. 9, в. 2, 163-170.

В. И. Лебедев 撰

【补注】 这种方法也称为 Чебышев 求根法(Chebyshev root-finding method)．一个相近的途径是根据逆插值法(inverse interpolation)，见[A1]．

参考文献

[A1] Ralston, A., A first course in numerical analysis, McGraw-Hill, 1965.

[A2] Davis, P. J., Interpolation and approximation, Dover, reprint, 1975.

[A3] Hildebrand, F. B., Introduction to numerical analysis, McGraw Hill, 1974.

张鸿林 译

Чебышев 网 [Chebyshev net; Чебышевская сеть]

一类网，其中每一族线的切向量可以沿着另一族线平行移动．第一类 Чебышев 网(Chebyshev net of the first kind)是一种网 Σ_n，它对每个 $i=1,\cdots,n$，使分布 $\Delta_1^i(x)$ 的方向沿着由这个网定义的任何其他分布 Δ_1^j 的任何积分曲线关于联络 ∇ 是平行的．第二类 Чебышев 网(Chebyshev net of the second kind)是一种网 $\Sigma_n(n>2)$，它对每个 $i=1,\cdots,n$，使子空间 $\Delta_{n-1}^i(x)\subset\Delta_{n-1}^i$ 沿着分布 Δ_1^i 的积分曲线关于联络 ∇ 是平行的．

由 П. Л. Чебышев (1878)引入．

参考文献

[1] Чебышев, П. Л., Полн. собр. соч., т. 5, М., 1951, 165-170.

В. Т. Базылев 撰 潘养廉 译

Чебышев 点 [Chebyshev point; Чебышевская точка]

线性不等式系统

$$\eta_i(x)=a_{i1}\xi_1+\cdots+a_{in}\xi_n+a_i\leqslant 0,\quad i=1,\ldots,m,$$

的 Чебышев 点是指达到如下极小化极大的点 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$：

$$\min_x\max_{1\leqslant i\leqslant m}\eta_i(x)$$

寻求 Чебышев 点的问题可简化到线性规划的一般问题([1])．

一个更一般的概念是 Banach 空间 X 中超平面系(system of hyperplanes) $\{H_i\}_{i=1}^m$ 的 Чебышев 点(Chebyshev point) x^*，即满足

$$\sup_{1\leqslant i\leqslant m}\inf_{z\in H_i}\|z-x^*\|=\inf_{x\in X}\sup_{1\leqslant i\leqslant m}\inf_{z\in H_i}\|z-x\|$$

的点 x^*．Чебышев 点常被选作不相容的线性方程组与线性不等式系统的"解"．

参考文献

[1] Зуховицкий, С. И., Авдеева, Л. И., Линейное и выпуклое программирование, М., 1964.

[2] Белобров, П. К., 《Матем. заметки》, 8 (1970), 4, 29-40.

[3] Еремин, И. И., 《Докл. АН СССР》, 138 (1961), 6, 1280-1283.

Ю. Н. Субботин 撰

【补注】 术语"Чебышев 点"或"Чебышев 结点"(Chebyshev node)在(数值)插值与积分等理论中也用来表示 **Чебышев 多项式**(Chebyshev polynomials)的零点([A1])．

英文中 Chebyshev 有时也不同地拼写为 Tschebyshev 或者 Tschebycheff．

参考文献

[A1] Fox, L. and Parker, I., Chebyshev polynomials in numerical analysis, Oxford Univ. Press, 1968.

陈公宁 译

Чебышев 多项式 [Chebyshev polynomials; Чебышева многочлены]

第一类 Чебышев 多项式(Chebyshev polynomials of the first kind)是在区间[-1,1]上的加权正交多项

式,其权函数为

$$h_1(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x\in(-1,1).$$

对于标准化 Чебышев 多项式,有公式

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad x\in[-1,1].$$

和递推关系式

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x)-T_{n-1}(x),$$

由此可以得到序列

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_2(x) = 2x^2-1,$$
$$T_3(x) = 4x^3-3x, \quad T_4(x) = 8x^4-8x^2+1,$$
$$T_5(x) = 16x^5-20x^3+5x, \ldots.$$

规范正交的 Чебышев 多项式为:

$$\hat{T}_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}T_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}},$$

$$\hat{T}_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}T_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(n\arccos x), \quad n\geqslant 1.$$

当 $n\geqslant 1$ 时,$T_n(x)$ 的首项系数是 2^{n-1}. 因此,首项系数为 1 的 Чебышев 多项式由下列公式来定义:

$$\tilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}\cos(n\arccos x), \quad n\geqslant 1.$$

多项式 $T_n(x)$ 的零点由等式

$$x_k^{(n)} = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi, \quad k=1,\ldots,n$$

给出,它们经常作为求积公式中的插值结点而出现. 多项式 $T_n(x)$ 是微分方程

$$(1-x^2)y''-xy'+n^2y = 0$$

的一个解. 多项式 $\tilde{T}_n(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上与零的偏离为最小,也就是说,对于任何其他的首项系数为 1 的 n 次多项式 $\tilde{F}_n(x)$,下列条件成立:

$$\max_{x\in[-1,1]}|\tilde{F}_n(x)| > \max_{x\in[-1,1]}|\tilde{T}_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

另一方面,对于任何次数不高于 n 的多项式 $Q_n(x)$,如果满足条件

$$\max_{x\in[-1,1]}|Q_n(x)| = 1,$$

则对于任何 $x_0\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$,不等式

$$|Q(x_0)| \leqslant |T_n(x_0)|$$

成立. 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上是连续的,且其连续模 $\omega(\delta,f)$ 满足 Dini 条件

$$\lim_{\delta\to 0}\omega(\delta,f)\ln\frac{1}{\delta} = 0,$$

则这个函数可以展开为 Fourier - Чебышев 级数 (Fourier - Chebyshev series)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}a_n\hat{T}_n(x), \quad x\in[-1,1],$$

且这个级数在区间 $[-1,1]$ 上一致收敛. 它的系数由公式

$$a_n = \int_{-1}^{1}f(t)\hat{T}_n(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

来确定. 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上 p 次连续可微,且其 p 阶导数 $f^{(p)}(x)$ 满足 α 阶 Lipschitz 条件,即 $f^{(p)}(x)\in \mathrm{Lip}\,\alpha$,则不等式

$$\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}a_k\hat{T}_k(x)\right| \leqslant \frac{c_1\ln n}{n^{p+\alpha}}, \quad x\in[-1,1]$$

成立,其中常数 c_1 与 n 和 x 无关.

第二类 Чебышев 多项式 (Chebyshev polynomials of the second kind) 定义为

$$U_n(x) = \frac{1}{n+1}T'_{n+1}(x) = \sin[(n+1)\arccos x]\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

这些多项式是在区间 $[-1,1]$ 上加权正交的,其权函数为

$$h_2(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad x\in[-1,1].$$

对于任何首项系数为 1 的多项式 $\tilde{Q}_n$,不等式

$$\frac{1}{2^{n-1}} = \int_{-1}^{1}|\tilde{U}_n(x)|\,dx \leqslant \int_{-1}^{1}|\tilde{Q}_n(x)|\,dx$$

成立.

Чебышев 多项式是由 П. Л. Чебышев 于 1854 年引入的(见[1]). 两类 Чебышев 多项式系都是**超球多项式** (ultraspherical polynomials) 和 **Jacobi 多项式** (Jacobi polynomials) 的特殊情况.

参考文献

[1] Чебышев, П. Л., Полн. собр. соч., т. 2, М.-Л., 1947, 23-51.

[2] Szegö, G., Orthogonal polynomials, Amer. Math. Soc., 1975.

П. К. Суетин 撰 张鸿林 译

Чебышев 求积公式 [Chebyshev quadrature formula; Чебышева квадратурная формула]

具有等系数的插值求积公式

$$\int_{-1}^{1}f(x)\,dx \cong C\sum_{k=1}^{N}f(x_k). \qquad (*)$$

权函数等于1，积分区间是有限的且取成同 $[-1,1]$ 一致．规定求积公式(*)的参数的个数为 $N+1$(N 个节点及系数 C 之值)．这些参数按如下要求确定：(*)对于所有次数小于或等于 N 的多项式，或等价地说，对于单项式 $1, x, \cdots, x^N$ 都是精确的．从求积公式对于 $f(x)=1$ 是精确的这个条件得到参数 C，其值等于 $2/N$．诸节点 $x_1, \cdots, x_N$ 仅对于 $N=1, \cdots, 7$ 和 $N=9$ 才是实的．П. Л. Чебышев 计算了 $N=1, \cdots, 7$ 时的节点值．对于 $N \geqslant 10$，Чебышев 求积公式的节点中总有一些是复的(见[1])．Чебышев 求积公式的代数精度当 N 是奇数时为 N，当 N 是偶数时则为 $N+1$．公式(*)是 Чебышев 于 1873 年提出的．

参考文献

[1] Крылов, В. И., Приближенное вычисление интегралов, 2 изд., М., 1967 (英译本：Krylov, N. M., Approximate calculation of integrals, Macmillan, 1962).

И. П. Мысовских 撰

【补注】 此公式要同 Gauss - **Чебышев** 求积公式区别开，后者定义所用的**权函数** (weight function) $\neq 1$，见 **Gauss 求积公式** (Gauss quadrature formula).

Чебышев 求积公式的原始文献是[A3]．S. N. Bernshtein ([A2])已经证明：仅当 $N \leqslant 7$ 或 $N=9$ 时，节点是实的．在[A4]中可看到对这个公式的详细讨论．[A1]中给出了求积节点表．

参考文献

[A1] Stegun, A. and Abramowitz, M., Handbook of mathematical functions, Appl. Math. Ser., 55, Nat. Bur. Stand., 1970.

[A2] Bernshtein, S. N., Sur les formules quadratures de Cotes et Chebyshev, *C. R. Acad. Sci. USSR*, **14**, 323–326.

[A3] Chebyshev, P. L., Sur les quadratures, *J. Math. Pures Appl.*, **19** (1874), 2, 19–34. Oeuvres, Vol. 2, pp. 165–180.

[A4] Hildebrand, F. B., Introduction to numerical analysis, McGraw - Hill, 1974.

[A5] Davis, P. J. and Rabinowitz, P., Methods of numerical integration, Acad. Press, 1984.

李家楷 译

Чебышев 半径 [**Chebyshev radius；Чебышевский радиус**]，度量空间 (X, ρ) 中有界集(bounded set) M 的包含 M 的所有球的半径的下确界(见 Чебышевский 中心 (Chebyshev centre)).

Ю. Н. Субботин 撰　方嘉琳 译

Чебышев 集 [**Chebyshev set；Чебышевское множество**]

度量空间 (X, ρ) 中的一个集合 M，对于每个 $x \in X$，在 M 中恰好存在一个**最佳逼近元** (element of best approximation)，即满足 $\rho(x, y)=\rho(x, M)$ 的元素 $y \in M$．最佳逼近元的存在唯一性，无论从理论还是从计算的观点来看，都是最简单、最自然的条件．这就确立了 Чебышев 集在逼近论和 Banach 空间理论中的作用．在逻辑上，Чебышев 集的概念是 **Чебышев 系** (Chebyshev system)概念的发展．

基为 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 的有限维向量子空间 $L \subset C(Q)$ 是 Чебышев 集(Chebyshev 子空间(Chebyshev subspace))，当且仅当函数 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 形成 Чебышев 系(即，满足 **Haar 条件** (Haar condition))．在 Euclid 空间中，直线、平面、凸图形和凸体都是 Чебышев 集．Чебышев 集的非平凡例子是由 П. Л. Чебышев ([1])首先引入的．它们是空间 $C[a,b]$ 中的次数 $\leqslant n$ 的代数多项式子空间和分子、分母有固定次数的有理函数集合．在 Euclid 空间中，一个集合是 Чебышев 集，当且仅当它是闭凸集．

在 Лобачевский 几何中，Чебышев 集不一定是凸的([7])．在二维非光滑赋范空间中，容易构造非凸的 Чебышев 集．存在非光滑的三维空间，其中每个 Чебышев 集都是凸的．Hilbert 空间中的任意 Чебышев 集的凸性问题(problem of convexity)尚未解决(1987)．同时，在对集合与空间的补充条件下，已经证明 Чебышев 集的凸性；也已经有了对于 Чебышев 集的等价于凸性的条件(见**近似紧性** (approximate compactness)).

因为 Чебышев 集可以是非凸的，就需研究它们的别的特征．一个 Чебышев 集称为太阳(sun)([2])，如果对于任何 $x \notin M$ 和 $z \in \overrightarrow{x'x}$(这里 x' 是 M 中最接近 x 的点，$\overrightarrow{x'x}$ 是从 x' 出发的通过 x 的射线)，点 x' 是 M 中最接近 z 的点．对于光滑空间中的 Чебышев 集 M，条件"M 是凸集"与条件"M 是太阳"等价．

Чебышев 集的性质与近似紧性和**度量射影** (metric projction)的连续性紧密相关．设 M 是 Banach 空间 X 中给定的 Чебышев 集．如果 a) M 是**有界紧集** (boundedly-compact set)或 b) X 是一致凸的，而 M 是局部紧的，那么 M 是太阳(在补充假设"X 光滑"的条件下，M 是凸集)．在光滑自反空间中的有连续距离射影的 Чебышев 集是凸的，而在 $C[0,1]$ 中这种集合是太阳．在一致凸 Banach 空间中的每个 Чебышев 集是连通的(甚至它与球的交是连通的)．然而，$C[0,1]$ 中的函数族 $\{x_\alpha\}$(这里 $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$，$x_0(t)=0$，而对于 $\alpha>0$，$x_\alpha=\alpha(\alpha+1)(\alpha+t)^{-1}$)，是有孤立点的 Чебышев 集，即它既不连通，也不是太阳([8])．在任意的 Banach 空间中，每个是太阳的 Чебышев 集是否连通的问题还没有解决(1987).

在"好"空间中，有充分多的 Чебышев 集．在 Banach 空间 X 中，每个凸闭集是 Чебышев 集，当且仅当 X 是严格凸(严格赋范)的和自反的、在任意自反空

间中，总存在 Чебышев 集，即超平面．在 n 维 Banach 空间中，存在所有维数 $\leqslant n$ 的 Чебышев 子空间（见[9]）．存在这样的空间，其中没有非平凡的 Чебышев 子空间．在一致凸的 Banach 空间 X 中，每个闭子集 M 是殆 Чебышев 集（almost Chebyshev set），其意义为在 M 中存在唯一的最接近点的点 $x \in X$ 的集是 X 中的疏集的余集．在可分空间中，存在所有有限维的是"殆 Чебышев 集"的子空间．存在同构于 Hilbert 空间的空间，其中到某个 Чебышев 子空间的度量射影是不连续的．

Чебышев 集的概念可以推广，例如，最佳逼近元的唯一性条件可换为要求对于每个 $x \in X$ 的最佳逼近元集的某种"正则性"，例如紧性、连通性或凸性．对于这种推广得到的结果大都类似于对于 Чебышев 集的对应结果．

参考文献

[1] Чебышев, П. Л., Полн. собр. соч., 2, М.-Л., 1947, 151-235.

[2] Ефимов, Н. В., Стечкин, С. Б., 《Докл. АН СССР》, **118** (1958), 1, 17-19.

[3] Итоги науки. Математический анализ, 1967, М., 1969, 75-132.

[4] Власов, Л. П., 《Успехи матем. наук.》, **28** (1973), 6, 3-66.

[5] Singer, I., Best approximation in normed linear spaces by elements of linear subspaces, Springer, 1970.

[6] Singer, I., The theory of best approximation and functional analysis, CBMS Regional Conf. Series, 13, SIAM, 1974.

[7] Болтянский, В. Г., Яглом, И. М., Выпуклые фигуры и тела, в кн.: Энциклопедия элементарной математики, т. 5, М., 1966, 181-269.

[8] Dunham, C. B., Chebyshev sets in $C[0,1]$ which are not suns, *Canad. Math. Bull.*, **18** (1975), 1, 35-37.

[9] Залгаллер, В. А., 《Зап. научн. семинаров Ленингр. отделения матем. ин-та АН СССР》, **27** (1972), 67-72.

Л. П. Власов 撰

【补注】 关于光滑实线性向量空间的概念，见**光滑空间**(smooth space)．

参考文献

[A1] Deutsch, F., Existence of best approximations, *J. Approx. Theory*, **28** (1980), 132-154.

史树中 译

Чебышев 系 [Chebyshev system; Чебышева система]

空间 C(Q) 中的线性无关函数所组成的函数系统 $S=\{\varphi_i\}_{i=1}^n$，它具有这样的性质，即：此系统中不存在任何具有多于 $n-1$ 个不同零点的非平凡多项式．例如，$S_n^0=\{q^i\}_{i=0}^{n}$ $(0\leqslant q\leqslant 1)$ 就是 $C[0,1]$ 中的一个 Чебышев 系；П. Л. Чебышев 在[1]中首次研究了它在一致度量下的某些逼近性质．"Чебышев 系"这个术语是由 С. Н. Бернштейн 在[2]中引入的．任何 Чебышев 系都保持了 S_n^0 的所有逼近性质．

对 Чебышев 系来说，**Чебышев 定理**(Chebyshev theorem)和 **de la Vallée-Poussin 定理**(de la Vallée-Poussin theorem)（关于交错的）均成立；用来近似构造最佳一致逼近代数多项式的各种方法均适用，并且最佳一致逼近多项式的唯一性定理对于 Чебышев 系也成立．(亦见 **Haar 条件**(Haar condition)；**Чебышев 集**(Chebyshev set))．紧集 Q 中存在次数 $n>1$ 的 Чебышев 系当且仅当 Q 与圆周或它的某个子集同胚（当 n 为偶数时，Q 与圆周是不同胚的）．特别地，在任意 m $(m\geqslant 2)$ 维区域上，例如，在一个正方形区域上，不存在任何 Чебышев 系，见[3]．

由具有 n 个固定节点 $0<x_1<\cdots<x_n<1$ 的 m 次样条(spline)组成的系便不是 Чебышев 系，这时，属于此系的函数 $[\max(0, x-x_n)]^m$ 有无穷多个零点．用数值方法构造最佳逼近的困难在于无法保证其唯一性．

Марков 函数系(Markov function system)是 Чебышев 系的一个重要特例．

参考文献

[1] Чебышев, П. Л., Полн. собр. соч., **2** (1947), 151-238.

[2] Бернштейн, С. Н., Экстремальные свойства полиномов, Л.-М., 1937.

[3] Mairhuber, J. C., On Haar's theorem concerning Chebyshev approximation problems having unique solutions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **7** (1956), 609-615.

[4] Дзядык, В. К., Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами, М., 1977.

[5] Karlin, S. and Studden, V., Tchebycheff systems with applications in analysis and statistics, Interscience, 1966.

Ю. Н. Субботин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Lorentz, G. G., Approximation of functions, Holt, Rinehart and Winston, 1966, Chapt. 2., Sect. 4.

[A2] Zielke, R., Discontinuous Čebyšev systems, Springer, 1979.

王仁宏、檀结庆 译

Чебышев 定理 [Chebyshev theorem; Чебышева теорема]

如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是连续的，并且

$$A = \max_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x)-P_n(x)|,$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,$$

则 $P_n(x)$ 是 $f(x)$ 的最佳一致逼近多项式，即

$$\max_{a\leq x\leq b}|f(x)-P_n(x)| = \min_{\{c_k\}}\max_{a\leq x\leq b}\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}c_kx^k\right|,$$

当且仅当存在构成 **Чебышев 交错**(Chebyshev alternation)的 $n+2$ 个点 $a\leq x_0<\cdots<x_{n+1}\leq b$,这就是说,条件

$$f(x_i)-P_n(x_i)=\varepsilon A(-1)^i,\ i=0,\cdots,n+1$$

成立,其中 $\varepsilon=1$ 或 -1. П.Л. Чебышев 于 1854 年在更一般的形式下,即对于用分子和分母次数固定的有理分式来进行连续函数的最佳一致逼近的情况,证明了这个定理(见[1]). 如果不是用代数多项式,而是考虑多项式

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n}c_k\varphi^k(x),$$

其中$\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^n$ 是 **Чебышев 系**(Chebyshev system),那么 Чебышев 定理仍然成立. 应用 Чебышев 定理中表述的准则,可以得到最佳一致(Чебышев)逼近多项式的近似构造方法. 只须在叙述上稍作改动,便可将 **Чебышев 定理**推广到复变函数(见[2])和抽象函数(见[3])的情况.

参考文献

[1] Чебышев, П. Л., Полн. собр. соч., т. 2, М.-Л., 1947, 151-238.

[2] Колмогоров, А. Н., 《Успехи матем. наук》, **3** (1948), 1, 216-221.

[3] Зуховицкий, С. И., Стечкин, С. Б., 《Докл. АН СССР》, **106** (1956), 5, 773-776.

[4] Дзядык, В. К., Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами, М., 1977

Ю. Н. Субботин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Lorentz, G. G., Approximation of functions, Holt, Rinehart and Winston, 1966, Chapt. 2.

张鸿林 译

Чебышев定理[Chebyshev therem; Чебышева теорема], 关于二项式微分的积分的

下述定理:考虑二项式微分

$$x^m(a+bx^n)^p,$$

其中 a 和 b 是实数,m, n 和 p 是有理数,对于任何 m, n 和 p,除了 p, $(m+1)/n$ 和 $p+(m+1)/n$ 之中(至少)有一个为整数的情况以外,二项式微分 $x^m(a+bx^n)^p$ 的不定积分不能通过初等函数来表示,这个定理是 П.Л. Чебышев 得到的(1853).

В.И Битюцков 撰

【补注】 亦见**二项式微分**(differential binomial).

张鸿林 译

Чебышев 定理[Chebyshev theorems; Чебышева теоремы], 关于素数的

由 П. Л. Чебышев ([1])于 1848-1850 年间证明的关于素数分布的定理 1)-8).

设 $\pi(x)$ 是不超过 x 的素数的个数,m 是 ≥ 0 的整数,p 是素数,$\ln u$ 是 u 的自然对数,又设

$$\mathrm{li}\,x = \int_2^x\frac{dt}{\ln x} = \qquad (*)$$
$$= \frac{x}{\ln x}+\cdots+\frac{(n-1)!x}{\ln^n x}+O\left(\frac{x}{\ln^{n+1}x}\right).$$

1) 对任意m, 级数

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\pi(n)-\pi(n-1)-\frac{1}{\ln n}\right)\frac{\ln^m n}{n^s}$$

的和当 $s\to 1+$ 时有有限的极限.

2) 对任意小的 $a>0$ 和任意大的m, 函数 $\pi(x)$ 无穷多次满足两个不等式:

$$\pi(x) > \mathrm{li}\,x - ax\ln^{-m}x,\ \pi(x) < \mathrm{li}\,x + ax\ln^{-m}x.$$

3) 分式$(\pi(x)\ln x)/x$ 当 $x\to\infty$ 时没有异于 1 的极限.

4) 如果 $\pi(x)$ 可以用x, $\ln x$ 和e^x代数地表示出来(直到阶 $x\ln^{-n}x$), 那么这个表示式必定是(*). 此后, Чебышев 引进了两个新的关于素数的分布函数——**Чебышев 函数**(Chebyshev function)

$$\theta(x) = \sum_{p\leq x}\ln p,\ \psi(x) = \sum_{p^n\leq x}\ln p,$$

而且实际上确定了这些函数增长的阶. 因此他第一个得到了 $\pi(x)$ 和第 n 个素数P_n 增长的阶. 更精确地说,他证明了:

5) 如果$A=\ln(2^{1/2}3^{1/3}5^{1/5}30^{1/30})$, 则当$x>1$时不等式

$$\psi(x) > Ax-\frac{5}{2}\ln x-1,$$

$$\psi(x) < \frac{6}{5}Ax+\frac{5}{4\ln 6}\ln^2 x+\frac{5}{4}\ln x+1$$

成立.

6) 当x大于某个x_0时, 不等式

$$0.9212\cdots < \frac{\pi(x)\ln x}{x} < 1.1055\cdots$$

成立.

7) 存在常数$a>0$ 及 $A>0$, 使得对于所有的 $n=1,2,\cdots$, 第 n 个素数 P_n 满足不等式

$$an\ln n < P_n < An\ln n.$$

8) 当$a>3$ 时, 在区间$(a, 2a-2)$内至少有一个素数(Bertrand 假设(Bertrand postulate)).

1) − 4)的证明方法的主要思想在于研究量

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{1+s}}-\frac{1}{s},\ \ln s-\sum\ln\left(1-\frac{1}{p^{1+s}}\right),$$

$$\sum_p\ln\left(1-\frac{1}{p^{1+s}}\right)+\sum_p\frac{1}{p^{1+s}}$$

的性态及其当 $s\to 0+$ 时的导数．推导 5) − 8)的方法的基础是 Чебышев 恒等式 (Chebyshev identity)：

$$\ln[x]! = \sum_{n\leq x}\psi\left(\frac{x}{n}\right).$$

参考文献

[1] Чебышев, П. Л., Полн. собр. соч., т. 1、Теория чисел, М. - Л., 1944.

А. Ф. Лаврик 撰

【补注】 目前(1987), Чебышев 定理已经被更好的结果所取代，例如

$$\pi(x)=\mathrm{li}(x)+O(x\exp(-c\sqrt{\log x}))$$

(更好的结果见[A1])；此外 $\pi(x)-\mathrm{li}(x)$ 改变符号无限多次．更多的结果及参考文献还可以在[A1]第 12 章的注释中找到．

参考文献

[A1] Ivic, A., The Riemann zeta - function, Wiley, 1985.

戚鸣皋 译 张明尧 校

陈(省身)特征标 [Chern character; Чжэни характер]

定义环同态 $\mathrm{ch}:K(X)\to H^{**}(X;\mathbf{Q})$ 的示性类．对于一维丛 ξ，有等式 $\mathrm{ch}\,\xi=e^{c_1(\xi)}$，其中 $c_1(\xi)$ 是有理陈(省身)类(Chern class)．这个等式，连同类 ch 定义的一个同态 $K^0(X)\to H^{ev}(X;\mathbf{Q})$，唯一决定了类 ch．有交换图：

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{ch}:\tilde{K}^0(X) & \to & \tilde{H}^{**}(X;\mathbf{Q})\\ \downarrow & & \downarrow\\ \mathrm{ch}:\tilde{K}^0(S^2\wedge X) & \to & \tilde{H}^{**}(S^2\wedge X;\mathbf{Q}),\end{array}$$

其中竖直箭头表示周期性算子及其对偶纬垂(suspension)．令映射

$$\mathrm{ch}:K^1(X)=\tilde{K}^0(SX^+)\to H^{\mathrm{odd}}(X;\mathbf{Q})$$

为以下映射的复合：

$$\mathrm{ch}:\tilde{K}^0(SX^+)\to\tilde{H}^{ev}(SX^+;\mathbf{Q})\xrightarrow{S^{-1}}\tilde{H}^{\mathrm{odd}}(X^+;\mathbf{Q})$$
$$=H^{\mathrm{odd}}(X;\mathbf{Q})$$

(此处“+”表示从拓扑空间范畴到有点空间 $X^+=(X\cup x_0,x_0)$ 范畴的函子)．我们得到一个函子变换 ch: $K^*(X)\to H^{**}(X;\mathbf{Q})$，且诱导出一个变换 $K^*(X)\otimes\mathbf{Q}\to H^{**}(X;\mathbf{Q})$，它是 $\mathbf{Z}_2$ 分次环的自然同构．

若 h^* 是一个广义上同调论，其中陈类 σ_i 已定义，则对一维丛 ξ，广义陈(省身)特征标 (generalized Chern character)

$$\sigma h(\xi)\in h^{**}(X)\otimes\mathbf{Q}$$

由公式

$$\sigma h(\xi)=e^{g(\sigma_1(\xi))}$$

来定义，其中 $g(t)$ 是相应于理论 h^* 的形式群 (formal group)的对数．由分裂引理可定义一个自然的环同态

$$\sigma h: K^*\to h^{**}(X)\otimes\mathbf{Q}.$$

对于广义上同调论 h^*，存在分次群间唯一的自然同构 $\mathrm{ch}_h: h^*(X)\to\mathscr{H}^{**}(X;h^*(\mathrm{pt})\otimes\mathbf{Q})$．当 $X=\mathrm{pt}$ 时，为以下映射

$$h^*(\mathrm{pt})\to h^*(\mathrm{pt})\otimes\mathbf{Q},\ \ x\to x\otimes 1.$$

此处，

$$[\mathscr{H}^{**}(X;h^*(\mathrm{pt})\otimes\mathbf{Q})]_n=\sum_i\mathscr{H}^i(X;h^{n-i}(\mathrm{pt})\otimes\mathbf{Q}).$$

映射 ch_k 与陈特征标 ch 一致，其中 K^* 是 $\mathbf{Z}_2$ 分级 k 理论．自然变换函子 ch_{h^*} 称为陈(省身) - Dold 特征标 (Chern - Dold character)．

设 h^* 是酉配边理论 U^*，X 是空间 CP^∞．环 $U^{**}(CP^\infty)$ 同构于形式幂级数环 $\Omega_u^*[[u]]$，其中 $\Omega_u^*=U(\mathrm{pt})$ 且 $u\in U^2(CP^\infty)$ 是丛 κ_1 的定向，类似地，环 $\mathscr{H}^*(CP^\infty;\Omega_u^*)$ 同构于 $\Omega_u^*[[x]]$，其中 $x\in H^2(CP^\infty)$ 是 κ_1 的定向，形式幂级数 $\mathrm{ch}_u(u)$ 是 Мищенко 级数

$$g(u)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[CP^n]}{n+1}u^{n+1}$$

的泛函逆．参考陈(省身)类 (Chern class)．

А. Ф. Харшиладзе 撰

【补注】 见陈(省身)类 (Chern class) 和陈(省身)数 (Chern number)的附注．

徐森林 译

陈(省身)类 [Chern class; Чжэня класс]

对复向量丛定义的一种示性类 (characteristic class)．底空间 B 上复向量丛 ξ 的一个陈类记为 $c_i(\xi)\in H^{2i}(B)$，且对所有自然数指标 i 都有定义．完全陈(省身)类(complete Chern class)是指非齐次示性类 $1+c_1+c_2+\cdots$，而陈(省身)多项式(Chern polynomial)为 $c_t=1+c_1t+c_2t^2+\cdots$，其中 t 是形式不定元．陈类是在[1]中引进的．

对所有 n 维复向量丛都有定义，取值于整系数上同调的示性类，自然地等同于环 $H^{**}(BU_n)$ 中的元素．在这个意义上，陈类 c_i 可以看成群 $H^{2i}(BU_n)$ 中的元素，完全陈类可看成环 $H^{**}(BU_n)$ 中的元素，而陈多项式可看成形式幂级数环 $H^{**}(BU_n)[[t]]$ 中的元素．

陈类满足下列性质，并且由这些性质所唯一确定．

1) 对同一底空间 B 上的两个向量丛 ξ，η，$c(\xi\oplus\eta)=$

$c(\xi)c(\eta)$，也就是说 $c_k(\xi\oplus\eta)=\sum_i c_i(\xi)c_{k-i}(\eta)$，这里 $c_0=1$．2) 对 CP^∞ 上的一维万有丛 κ_1，等式 $c(\kappa_1)=1+u$ 成立，这里 $u\in H^2(CP^\infty)$ 为 κ_1 的定向（CP^∞ 是 κ_1 的 **Thom 空间** (Thom space)，并且是复的，有唯一的定向 u）．

性质 1)−2) 的推论有：对 $i>\dim\xi$，$c_i(\xi)=0$；且 $c(\xi)=c(\xi\oplus\theta)$，这里 θ 是平凡丛．后一事实使我们可以将陈类定义为环 $H^{**}(BU)$ 中的元素．

如果 $\omega=\{i_1,\cdots,i_k\}$ 是一个非负整数的集合，则用 c_ω 代表示性类 $c_{i_1}\cdots c_{i_k}\in H^{2n}(BU)$，这里 $n=i_1+\cdots+i_k$．

在映射 $BT_n=CP^\infty\times\cdots\times CP^\infty\to BU_n$ 诱导的自然单同态 $H^{**}(BU_n)\to H^{**}(BT_n)=Z[[x_1,\cdots,x_n]]$ 下，陈类映为初等对称函数，全陈类映为多项式 $\prod_{i=1}^n(1+x_i)$．环 $H^{**}(BU_n)$ 在 $H^{**}(BT_n)=Z[[x_1,\cdots,x_n]]$ 中的象是所有对称形式幂级数组成的子环．吴生成元 $x_1,\cdots,x_n$ 的每一个对称形式幂级数决定一个可用陈类表述的示性类．例如，级数 $\prod_{i=1}^n x_i/(1-e^{x_i})$ 决定一个有理系数的示性类，称为 Todd 类 (Todd class)，记为 $T\in H^{**}(BU_n;\mathbf{Q})$．

设 $\omega=\{i_1,\cdots,i_k\}$ 为非负整数的集合，令 $S_\omega(c_1,\cdots,c_n)$ 代表以 $x_1,\cdots,x_n$ 为变量的包含单项式 $x_1^{i_1}\cdots x_k^{i_k}$ 的最小对称多项式所定义的示性类，这里 $n\geqslant i_1+\cdots+i_k$．

设 h^* 为定向可乘上同调论．那么像普通意义下的陈类一样，取值在 h^* 中的陈类 σ_i 满足性质：$\sigma(\xi\oplus\eta)=\sigma(\xi)\sigma(\eta)$，$\sigma=1+\sigma_1+\sigma_2+\cdots$，$\sigma(\kappa_1)=1+u\in h^*(CP^\infty)$，这里 $u\in h^2(CP^\infty)$ 为丛 κ_1 的定向，且这些性质完全决定了陈类．作为普通陈类，人们可以使用记号 $\sigma_\omega=\sigma_{i_1}\cdots\sigma_{i_k}$ 和 $S_\omega(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)$．如果 ξ,η 为两个复向量丛，则

$$S_\omega(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)(\xi\oplus\eta)=$$
$$=\sum_{\omega'\cup\omega''=\omega}S_{\omega'}(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)(\xi)S_{\omega''}(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)(\eta),$$

这里求和取遍所有使 $\omega\omega'\omega''=\omega$ 的 ω',ω''．

对于 h^* 理论，我们可以取**酉配边** (cobordism) 论 U^* 或 **K 理论** (K-theory)．对 U^* 理论，元素 $u\in U^2(CP^\infty)$ 由恒等映射 $CP^\infty\to CP^\infty=MU_1$ 定义，对 K 理论，$u=\beta(1-[\bar\kappa_1])\in\tilde K^2(CP^\infty)$，这里 $\tilde\beta:K^0\to K^2$ 为 Bott 周期算子．对取值于某个 U^* 理论的陈类，仍使用符号 σ_i；而对取值于 K 理论的陈类记作 γ_i．

根据一般理论，$\gamma_i(\xi)\in K^{2i}(B)$，这里 ξ 为底空间 B 上的一个向量丛．然而 K 理论常常可以方便地看成一个 Z_2 分次理论，因为周期算子 β 将群 $K^n(B)$ 等同于 $K^{n+2}(B)$．那么，$K^*(B)=K^0(B)\oplus K^1(B)$ 且对所有 i，$\gamma_i(\xi)\in K^0(B)$．根据这一观点，不去考虑全陈类，而考虑**陈（省身）多项式**

$$\gamma_t(\xi)=1+\sum_{i>0}\gamma_i(\xi)t^i\in K^0(B)[t].$$

设 $\lambda_i[\xi]=[\xi\wedge\cdots\wedge\xi]$ 为 K 理论中的一个上同调运算（i 项）．多项式

$$\lambda_t(\xi)=\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i(\xi)t^i\in K^0(B)[t]$$

像 γ_t 一样，满足乘法性质

$$\lambda_t(\xi\oplus\eta)=\lambda_t(\xi)\lambda_t(\eta).$$

这些多项式之间有下列关系：

$$\lambda_{\frac{t}{1-t}}(\bar\xi-\dim\xi)=1+\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i\gamma_i(\xi)t^i=\gamma_{-t}(\xi).$$

这里等式两边都属于 $K^0(B)[t]$，且 $\dim\xi$ 是维数为 $\dim\xi$ 的平凡丛．这样构造的类 γ_t 与 M. F. Atiyah 构造的 $\gamma_t(\xi)=\lambda_{\frac{t}{1-t}}(\xi)$ 不同．R. Stong ([2]) 定义了类 γ_t，使其满足条件

$$\gamma_t(\xi)=\lambda_{\frac{t}{1-t}}(\bar\xi-\dim\xi).$$

它们的差别在于，对 Stong，

$$u=\beta([\kappa_1]-1)\in\tilde K^2(CP^\infty).$$

类 σ_i 与一个Landweber-Новиков 代数的概念相关，后者在同伦论中大有用处．对非负整数的任意集合 $\omega=\{i_1,\cdots,i_k\}$，考虑示性类 $S_\omega(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)\in U^{2d}(BU)$，这里 $d=i_1+i_2+\cdots+i_k$．存在一个 **Thom 同构** (Thom isomorphism) $U^{2d}(BU)\to\tilde U^{2d}(MU)\subset U^{2d}(MU)$，这里 MU 为与 U^* 理论对应的谱．类 $S_\omega(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)$ 在 $U^{2d}(MU)$ 中的象决定 U^* 理论中的一个**上同调运算** (cohomology operation)．U^* 理论中由这种形式的运算生成的 **Steenrod 代数** (Steenrod algebra) 的子代数称为 Landweber-Новиков 代数 (Landweber-Novikov algebra)．由集合 $\omega=\{i_1,\cdots,i_k\}$ 构造的运算记作 S_ω．

对一维丛 ξ,η，有等式

$$c_1(\xi\otimes\eta)=c_1(\xi)+c_1(\eta).$$

这个用以定义**陈（省身）特征标** (Chern character) 的重要性质在广义上同调论中不成立．然而，存在一个系数在 $h^*(\mathrm{pt})\otimes\mathbf{Q}$ 中的形式幂级数 $g(t)$，使得 $g(\sigma_1(\xi\otimes\eta))=g(\sigma_1(\xi))+g(\sigma_1(\eta))$，这里 σ_1 为系数在 h^* 中的第一陈类．对酉配边理论

$$g(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[CP^n]}{n+1}t^{n+1},$$

这里 $[CP^n]\in\Omega_U^*=U^*(\mathrm{pt})$ 为射影空间 CP^n 的配边类．这个级数称为 Мищенко **级数** (Mishchenko series)．

参考文献

[1] Chern, S. S., Characteristic classes of Hermitian manifolds, *Ann. of Math.*, 47(1946), 1, 85–121.

[2] Stong, R. E., Notes on cobordism theory, Princeton Univ. Press, 1968.

[3] Palais, R., Seminar on the Atiyah-Singer index theorem, Princeton Univ. Press, 1965.

[4] Conner, P. E. and Floyd, E. E., Differentiable periodic maps, Springer, 1964.

[5A] Atiyah, M. F. and Singer, I. M., The index of elliptic operators Ⅰ, *Ann. of Math.*, (2), 87 (1968), 484-530.

[5B] Atiyah, M. F. and Segal, G. B., The index of elliptic operators Ⅱ, *Ann. of Math.*, (2), 87 (1968), 531-545.

[5C] Atiyah, M. F. and Singer, I. M., The index of elliptic operators Ⅲ, *Ann. of Math.*, (2), 87 (1968), 546-604.

[5D] Atiyah, M. F. and Singer, I. M., The index of elliptic operators Ⅳ, *Ann. of Math.*, (2), 93 (1971), 119-138.

[5E] Atiyah, M. F. and Singer, I. M., The index of elliptic operators Ⅴ, *Ann. of Math.*, (2), 93 (1971), 139-149.

[6] Hirzebruch, F., Topological methods in algebraic geometry, Springer, 1978(译自德文).

[7] Husemoller, D., Fibre bundles, McGraw-Hill, 1966.

[8] Бухштабер, В. М., 《Матем. сб.》, 83 (1970), 575-595.

[9] Новиков, С. П., 《Изв. АН СССР Сер. матем.》, 31 (1967), 4, 855-951.

[10] Atiyah, M. F., *K*-theory: lectures, Benjamin, 1967.

А. Ф. Харшиладзе 撰

【补注】 $H^{**}(X)$ 表示 $H^*(X)=\oplus_{i\geq 0}H^i(X)$ 的完全化 $\prod_{i\geq 0}H^i(X)$.

满足 $g(\sigma_1(\xi\otimes\eta))=g(\sigma_1(\xi))+g(\sigma_1(\eta))$ 的关于复定向上同调论 h^* 的幂级数 $g(t)\in h^*(\mathrm{pt})\otimes\mathbf{Q}$ 是由 h^* 定义的形式群 $F_k(X,Y)$ 的对数;详见**配边**(cobordism)和**形式群**(formal group). 唐梓洲、张 平 译 陈贵忠 校

陈(省身)数 [Chern number; Чженя число]

拟复流形的一种**示性数**(characteristic number). 设 $x\in H^{**}(BU_n)$ 为任一示性类. 对闭拟复流形 M^{2n}, 整数 $x[M^{2n}]=\langle x(\tau M),[M^{2n}]\rangle$ 称为流形 M^{2n} 关于类 x 的陈(省身)数(Chern number). 这里 $[M^{2n}]\in H_{2n}(M^{2n})$ 为流形的**基本类**(fundamental class), 或者说定向, 它由拟复结构唯一确定, τM 为 M 的切丛. 如果 x 取为带有理系数的一个示性类, 则对应的陈数将为有理数. 陈数 $x[M^{2n}]$ 只依赖于 x 的度为 $2n$ 的齐次分量. 陈数是拟复协边不变量, 因此示性类 x 诱导一个同态: $\Omega^U_{2n}\to\mathbf{Z}$.

整数 n 的一个分拆(partition)是非负整数的一个集合 $\omega=\{i_1,\cdots,i_k\}$, 满足 $i_1+i_2+\cdots+i_k=n$. 如果 M, N 是两个 $2n$ 维的拟复流形, 使得 $c_\omega[M]=c_\omega[N]$ (见陈(省身)类(Chern class))对 n 的所有分拆 ω 成立, 则流形 M 和 N(在拟复意义下)是协边的.

设 A 为一个自由 Abel 群, 其基 $\{e_\omega\}=\{e_{i_1\cdots i_k}\}$ 与 n 的所有分拆的集合一一对应. 引述的定理断言, 同态

$$\varphi:\Omega^U_{2n}\to A,\ \varphi([M^{2n}])=\sum_\omega c_\omega[M^{2n}]e_\omega$$

是一个单同态. 下面给出同态 φ 的象的一个描述(Milnor-Hirzebruch 问题(Milnor-Hirzebruch problem)). 也就是说, 由数 n 所有分拆所定义的整数 $a_\omega=a_{i_1\cdots i_k}$ 的集合, 哪些可以实现为拟复流形的陈数? 陈数可以对任意可乘、可定向的上同调论 h^* 定义, 只是在这种情形下拟复流形的陈数是环 $h^*(\mathrm{pt})$ 中的一个元素. 对偶于上同调论 h^* 的是同调论 h_*, 并且由于 h^* 是定向的、可乘的, 因而对每一个拟复流形 M 都有唯一的基本类 $[M,\partial M]^h\in h_{2n}[M,\partial M]$, 其中 $2n=\dim M$. 而且, 像普通同调论一样, 存在一个配对

$$h^n(M,\partial M)\otimes h_m(M,\partial M)\to h^{n-m}(\mathrm{pt}).$$

如果 $x\in h^*(M,\partial M)$, 那么在此配对下 x 和 $[M,\partial M]^h$ 的象记作 $\{x,[M,\partial M]^h\}\in h^*(\mathrm{pt})$. 对取值于 h^* 的一个示性类 y 和闭拟复流形 M, 元素 $\{y(tM),[M]^h\}$ 称为上同调论 h^* 的陈(省身)数. 以上考虑也适用于 K 理论(K-theory). 设 M 为一拟复流形(可能带边), 设 $\dim_{\mathbf{R}}M=2n$, 且 x 为 $K^0(M,\partial M)$ 中任一元素. 那么, 整数

$$\{x,[M,\partial M]^k\}\subset K^{-2n}(\mathrm{pt})\overset{\beta}{\cong}K^0(\mathrm{pt})=\mathbf{Z}$$

可以依下面公式计算:

$$\{x,[M,\partial M]^k\}=<\mathrm{ch}\,xT(\tau M),[M,\partial M]>,$$

这里 T 为 **Todd 类**(Todd class), 由级数 $\prod_{i=1}^n x_i/(1-e^{-x_i})$ 给出. 如果流形 M 是闭的, 则令 $x=1\in K^0(M)$ 时得到 $\{1,[M]^k\}=T[M]$. 示性数 $T[M]$ 称为流形 M 的 Todd 亏格(Todd genus), 它对任何拟复流形 M 都是整数. $T[M]$ 常记作 $\mathrm{Td}(M)$.

拟复流形的最重要的例子之一是切流形. 设 N 为 n 维闭实流形, N 的所有切向量组成的流形 TN 有一个自然的拟复结构: $\tau TN=\tau N\oplus\tau N$, $i(x,y)=(y,-x)$. 在 N 上固定一个 Riemann 度量, 且令 $BN\subset TN$ 代表所有长度不超过 1 的切向量组成的带边流形. 如果 $\sigma\in K^0(BN,\partial BN)$, 则整数 $i_t(\sigma)=\{\sigma,[BN,\partial BN]^k\}$ 称为元素 σ 的拓扑指标(topological index). 如果 σ 为定义在 N 上的椭圆算子 D 的符号类, 则指标 $D=i_t(\sigma)$(Atiyah-Singer 定理(Atiyah-Singer theorem)), 用上述公式计算整数 $\{x,[M,\partial M]^k\}$ 可得到指标定理的上同调形式.

对非负整数的集合 $\omega=\{i_1,\cdots,i_n\}$ 和 $2n$ 维闭拟复流形 M, 设 $S^k_\omega[M]$ 为 K 理论中的陈数:

$$S^k_\omega[M]=S_\omega(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)[M]=$$
$$=\{S_\omega(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)(\tau M),[M]^k\},$$

且设 $S_\omega[M]$ 为普通陈数 $S_\omega(c_1,\cdots,c_n)[M]$. 只有当 ω 是 n 的一个分拆时, 数 $S_\omega[M]$ 才不为零. 对集合 $\omega=\{i_1,\cdots,i_k\}$, $i_1+\cdots+i_k\leqslant n$, 数 $S^k_\omega[M]$ 可以不为零. 任何同态 $\Omega^u_{2n}\to \mathbf{Z}$ 都可以表示为同态 $S^k_\omega: \Omega^u_{2n}\to\mathbf{Z}$ 的一个整系数线性组合, 其中 $|\omega|\leqslant n$, 这里 $|\omega|=i_1+\cdots+i_k$ (Stong - 服部定理 (Stong - Hattori theorem)). 使 $|\omega|\leqslant n$ 的示性数 $S^k_\omega[M]$ 可以表示成形式

$$S^k_\omega[M]=\sum_{|\omega|=n} r_\omega c_{\omega'}[M],$$

其中 $r_{\omega'}$ 是有理系数且 M 为任意 $2n$ 维闭拟复流形. 设 a 为群 A 的任一元素, $a=\sum_{|\omega'|=n}a_{\omega'}e_{\omega'}$, 且设 $S^k_\omega(a)=\sum_{|\omega'|=n}r_{\omega'}a_{\omega'}$, 那么, 元素 $a\in A$ 在同态 $\varphi:\Omega^u_{2n}\to A$ 的象中, 当且仅当对所有满足 $|\omega|\leqslant n$ 的集合 ω, S^k_ω 是一个整数.

参考文献 见陈(省身)类 (Chern class).

А. Ф. Харшиладзе 撰

【补注】 关于"拟复流形"和"复定向上同调论", 见配边 (cobordism). 亦见陈 (省身) 类 (Chern class) 的评论.

唐梓洲 译 陈贵忠 校

Четаев 方程 [Chetaev equations ; Четаева уравнения]

一个完整系统 (holonomic system) 的力学的一般典范方程, 它是以无穷小变换的一种 Lie 代数表示的, 并与 **Poincaré 方程** (Poincaré equations) 等价.

如果引进量

$$y_j=\frac{\partial L}{\partial \eta_j},\ j=1,\ldots,k$$

代替定义实位移的自变量 η_j, 其中 $L(t;x_1,\cdots,x_n;\eta_1,\cdots,\eta_k)$ 是 Lagrange 算子, 那么 Poincaré 方程取 Четаев 方程较简单的形式

$$\frac{dy_j}{dt}=\sum_{\alpha,\beta=1}^{k}c_{\alpha j\beta}\frac{\partial H}{\partial y_\alpha}y_\beta-X_jH,\ \ \eta_j=\frac{\partial H}{\partial y_j},\qquad(1)$$
$$j=1,\ldots,k,$$

其中

$$H(t;x_1,\ldots,x_n;y_1,\ldots,y_k)=\sum_{j=1}^{k}\eta_jy_j-L$$

是 Hamilton 函数. 方程 (1) 的第二组可以用方程

$$\frac{dx_i}{dt}=\left\{X_0+\sum_{\alpha=1}^{k}\frac{\partial H}{\partial y_\alpha}X_\alpha\right\}x_i,\ \ i=1,\ldots,n\qquad(2)$$

代替. (见算子 X_0, X_α 的 **Poincaré 方程** (Poincaré equations).)

用公式

$$V(t;x_1,\ldots,x_n;x_1^0,\ldots,x_n^0)=\int_{t_0}^{t}\left\{\sum_{\alpha=1}^{k}y_\alpha\eta_\alpha-H\right\}dt$$

引进作用函数, 其中积分沿着系统的实轨道进行, 可以得到关系式

$$y_\alpha=X_\alpha V,\ \ y_\alpha^0=-X_\alpha^0V,\ \ \alpha=1,\ldots,k.\qquad(3)$$

这里 X_α^0 表示用在 t_0 时刻的初始动量和系统的初始位置 x_i^0 的算子 X_α, y_α^0 为 y_α 的初值. 如果作用函数已知, 那么方程 (3) 解决力学问题, 其中方程 (3) 的第二组以隐含的方式定义系统运动的规律.

作用函数满足一阶偏微分方程

$$X_0V+H(t,x_1,\ldots,x_n,X_1V,\ldots,X_kV)=0.\qquad(4)$$

如果 (4) 的全积分 $V(t;x_1,\cdots,x_n;a_1,\cdots,a_n)$ 已知, 那么 Четаев 方程的解由关系式

$$\frac{\partial V}{\partial a_i}=b_i,\ \ y_j=X_jV,\ \ i=1,\ldots,n,\ \ j=1,\ldots,k$$

决定, 其中 a_i 和 b_i 是受 $n-k$ 个可积约束方程限制的任意常数.

可以考虑用新变量 α_i 代替 x_i 定义系统的位置. 设 $A_0=\partial/\partial t$, A_s, $s=1,\cdots,k$, 在具有结构常数 γ_{srj} 的变量 α_i 中表示连续变换的 $(k+1)$ 参数 Lie 群的 Lie 代数, 其中 $\gamma_{0rj}=0$; 并设 π_s 和 θ_s 为确定可能的实际位移的变量. 因此对某些函数

$$f(t,\alpha_1,\ldots,\alpha_n),$$

有

$$\delta f=\sum_{s=1}^{k}\pi_sA_sf,\ \ df=\left\{\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{s=1}^{k}\theta_sA_sf\right\}dt.$$

变量的变换由特征函数

$$V(t,x_1,\ldots,x_n,\alpha_1,\ldots,\alpha_n),\ \ \left\|\frac{\partial^2V}{\partial x_i\partial\alpha_j}\right\|\neq 0.$$

和公式

$$y_s=X_sV,\ \ \beta_s=-A_sV,\ \ s=1,\ldots,k,$$

以及可积约束方程一起确定. 这样的变换称为典范变换 (canonical transformations), 它们保持着运动方程的典范形式, 其中新变量的 Hamilton 函数的形式为

$$H^*(t,\alpha,\beta)=\frac{\partial V}{\partial t}+H.$$

(亦见 **Hamilton 系统** (Hamiltonian system).) 如果变换的特征函数是方程 (4) 的全积分 (对于 $X_0=\partial/\partial t$), 那么 $H^*=0$, 新变量的 Четаев 方程 (1) 和 (2) 取

$$\frac{d\beta_s}{dt}=\sum_{r,j=1}^{k}\gamma_{rsj}\theta_r\beta_j,\ \ \theta_s=0,\ \ s=1,\ldots,k,$$

$$\frac{d\alpha_i}{dt}=\sum_s\theta_sA_s\alpha_i$$

的形式, 即 $\alpha_i=$ 常数, $\beta_s=$ 常数, $i=1,\cdots,n$, $s=$

$1, \cdots, k$.

线性型 $\Omega=\sum_{s=1}^{k} y_s \omega_s$ 定义动力学的基本相对积分不变式.

对于 $f(t, x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_k)$ 为常数的条件是 Четаев 方程的第一积分具有形式

$$X_0 f+(H, f)=0,$$

其中

$$(f, g)=\sum_{\alpha=1}^{k}\left(\frac{\partial f}{\partial y_\alpha} X_\alpha g-\frac{\partial g}{\partial y_\alpha} X_\alpha f\right)+$$
$$+\sum_{\alpha, \beta, s=1}^{k} c_{\alpha\beta s} y_s \frac{\partial f}{\partial y_\alpha} \frac{\partial g}{\partial y_\beta}$$

确定了 Poisson 括号.

如果 $f=a$ 及 $g=b$ 为第一积分, 那么 $(f, g)=c$ 也是一个积分 (**Poisson 定理** (Poisson theorem) 的推广).

Четаев 方程是 Н. Г. Четаев 导出的 ([1]–[3]), 他同时也发展了这些方程的理论.

参考文献

[1] Chetaev, N. G., Sur les équations de Poincaré, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **185** (1927), 1577–1578.

[2] Четаев, Н. Г., 《Докл. АН СССР. А》, 1928, 7, 103–104.

[3] Четаев, Н. Г., 《Прикл. матем. и механ.》, **5** (1941), 2, 253–262.

В. В. Румянцев 撰 周芝英 译

Четаев 函数 [**Chetaev function**; **Четаева функция**]

常微分方程组

$$\dot{x}=F(x), \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad F(0)=0 \qquad (*)$$

在固定点 $x=0$ 邻域内定义的具有如下两个特性的函数 $v(x)$. 1) 存在一个以 $x=0$ 点为边界的区域 G, 其中 $v>0$, 且在 $x=0$ 附近 G 域的边界上 $v=0$; 2) G 域中方程组 (*) 沿流的导数满足 $\dot{v}>0$ (见**动力系统的沿流的微分法** (differentiation along the flow of a dynamical system)).

Четаев **定理** (Chetaev theorem) ([1]) 成立: 假如对方程组 (*) 有 Четаев 函数, 则固定点 $x=0$ 是 Ляпунов 不稳定的.

Четаев 函数是 Ляпунов **函数** (Lyapunov function) 的推广, 且给出了不稳定性证明的方便方法 (见[2]). 例如, 对方程组

$$\dot{x}=ax+o(|x|+|y|),$$
$$\dot{y}=-by+o(|x|+|y|),$$

其中 $a, b>0$, 对任意的 $c \neq 0$, Четаев 函数将是 $v=x^2-c^2y^2$. 建议了 Четаев 函数的推广, 其中包括非自主系统情况 (见[3]).

参考文献

[1] Четаев, Н. Г., 《Докл. АН СССР》, **1** (1934), 9, 529–531.

[2] Четаев, Н. Г., Устойчивость движения, 3 изд., М., 1965.

[3] Красовский, Н. Н., Некоторые задачи теории устойчивости движения, М., 1959 (英文版: Krasovskiĭ, N. N., Stability of motion. Applications of Lyapunov's second method to differential systems and equations with delay, Stanford Univ. Press, 1963).

[4] Rouche, N., Habets, P. and Laloy, M., Stability theory by Liapunov's direct method, Springer, 1977.

А. Д. Брюно 撰 朱怡强 译

Четаев 原理 [**Chetaev principle**; **Четаева принцип**]

Н. Г. Четаев ([1]) 所建立的力学中的变分微分原理, **Gauss 原理** (Gauss principle) 的一种变型.

根据 Четаев 原理, 在由给定力场中的直接运动和逆 (反向) 运动所构成的简单循环中 (其中逆运动所处力场中的力在机械系统是完全自由的条件下足够建立起实际的运动), 相对于所有的可能的 Gauss 运动, 实际运动所作的功具有相对的 (或总体的) 最大值. Четаев 原理可以推广到物理系统和连续介质 (见[2]).

详见**经典力学的变分原理** (variational principles of classical mechanics).

参考文献

[1] Четаев, Н. Г., 《Прикл. матем. и механ.》, **5** (1941), 11–12.

[2] Румянцев, В. В., 《Докл. АН СССР》, **210** (1973), 4, 787–790.

В. В. Румянцев 撰 沈青, 朱怡强 译

Четаев 定理 [**Chetaev theorems**; **Четаева теоремы**]

1) **关于稳定性的** Четаев **定理**是关于运动不稳定性的一般定理, 由 Н. Г. Четаев 对扰动运动方程

$$\frac{dx_s}{dt}=X_s(t, x_1, \ldots, x_n), \quad s=1, \ldots, n \qquad (1)$$

建立的, 其中右边的 X_s 是实变量 x_s 的全纯函数, 其系数是实变量 —— 时间 t —— 的连续有界函数, 在区域

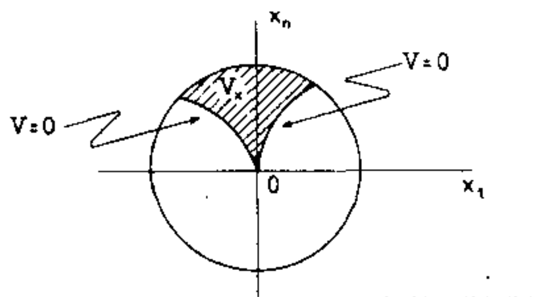
$$t \geqslant t_0, \quad \sum_{s=1}^{n} x_s^2<A \qquad (2)$$

上有定义, 这里 $X_s(t, 0, \cdots, 0)=0$.

2) **关于运动不稳定性的** Четаев **定理**. 假定在以下理论中出现的函数 V 为变量 x_s 和 t 的实值函数, 在区域 (2) 内单值并连续, 而且在下面出现的区域 G 内对充分小的 h, 有单值和连续的全时间导数

$$\dot{V}=\frac{\partial V}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} X_s.$$

并假定 $V(0,t)=0$. 假定将系统(1)简化到区域 $Z=\{t_0 \leqslant t<\infty,\ \|x\| \leqslant h<H\}$ 的情况下存在一个函数 $V(t,x)$, 使得它的正值区域 $G=\{(t,x)\in Z: V(t,x)>0\}$, 对所有 $t\in[t_0,\infty]$ 具有一个与坐标原点 0 相连接的非空开截面 D_t, 而在处于圆柱 Z 内的区域 G 的部分边界上, 包括 $0t$ 轴, 等式 $V(t,x)=0$ 成立. 于是如果 1) 函数 $V(x,t)$ 在区域 G 上是有界的; 2) 全导数 $\dot{V}(t,x)$ 在此区域上是正的; 3) 对每个子域 $\{(x,t): V(x,t)\geqslant\alpha>0\}$, 不等式 $\dot{V}(t,x)\geqslant\beta>0$ 成立, 其中 $\beta=\beta(\alpha)$ 是某个依赖于 α 的正数, 那么(1)的平凡解 $x=0$ 从 Ляпунов 的意义上说对 $t\to\infty$ 是不稳定的.



(在时间 t 的切片)

图 1

这一定理还有其他几种说法. 例如, 有一种说法包括两个函数 V, W, 见 [1]. 在文献[3]的第 103 页中还可找到另外的一种说法. 这些定理含有所谓 Ляпунов **第一不稳定性定理** (first instability theorem of Lyapunov), 这一定理指出, 如果存在一个函数 $V(x)$, 它具有负定全导数, 并且它本身是负定的或者是不定的, 那么平衡点是不稳定的.

3) **关于 Hamilton 系统稳定运动扰动的 Четаев 定理**. 这个 Четаев 定理是关于在非扰动运动 $q_i=q_i(t)$, $p_i=p_i(t)$ 情况下, Poincaré 变分方程

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\xi_j}{dt} &= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial^2 H}{\partial p_j\partial q_i}\xi_i+\frac{\partial^2 H}{\partial p_j\partial p_i}\eta_i\right],\\ \frac{d\eta_j}{dt} &= -\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial^2 H}{\partial q_j\partial q_i}\xi_i+\frac{\partial^2 H}{\partial q_j\partial p_i}\eta_i\right],\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

$$j=1,\dots,n$$

性质的一个定理, 假定了方程(3)的系数均为 t 的连续有界实函数, $H(t,q_i,p_i)$ 是 Hamilton 函数, ξ_i 和 η_i 是坐标 q_i 和动量 p_i 的偏差. 方程(3)对研究守恒完全系统运动的稳定性具有重要意义.

定理. 如果一个全位势系统非扰动的运动是稳定的, 那么变分方程(3)的所有解的特征数等于零, 方程(3)在 Ляпунов 意义上是正则的, 它简化为一个常系数的方程系统, 并具有一确定符号的二次积分.

Четаев 定理将 Lagrange 定理在平衡点方面, 将 Poincaré - Ляпунов 定理在周期运动方面作了推广. 根据这个定理, 对于一个位势系统的稳定的非扰动运动, 一个无限接近的扰动运动具有振动的、波式的特性. Четаев 由此得出结论, 如果动力学和光的 Cauchy 数学理论之间有相似性, 那么应在接近位势系统稳定运动的扰动运动中寻找它. Четаев 找到了这样的相似性(见[1]), 它表明全守恒系统稳定性的必要条件归结为波动方程. Четаев 藉助 Lie 群的理论, 用一种现象(光散射的振荡过程)与另一种现象(与其稳定运动接近的守恒系统的扰动运动)的一组变换的等同性思想代替原来的两种现象之间存在着相似性的思想, 全面研究了光学-力学相似性. Четаев 证明(见[1]), 后一组变换是线性变换的幺模组, 并在作为 Cauchy 和 Maxwell 光理论基础的 Lorentz 变换的整个组内出现.

参考文献

[1] Четаев, Н. Г., Устойчивость движения. Работы по аналитической механике, М., 1962.

[2] Красовский, Н. Н., Некоторые задачи теории устойчивости движения, М., 1959 (英译本: Krasovskii, N. N., Stability of motion. Applications of Lyapunov's second method to differential systems and equations with delay, Stanford Univ. Press, 1963).

[3] Hahn, W., Stability of motion, Springer, 1967.

В. В. Румянцев 撰 周芝英 译

Chevalley 群 [**Chevalley group; Шевалле группа**]

某域上对于复半单 Lie 代数的线性代数群. 令 $\mathfrak{g}$ 是 **C** 上半单代数 (semi-simple algebra), $\mathfrak{h}$ 是它的 Cartan 子代数, Σ 是 $\mathfrak{g}$ 对于 $\mathfrak{h}$ 的根系, 令 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_k\}\subset\Sigma$ 是单根系, $\{H_{\alpha_i}(1\leqslant i\leqslant k);\ X_\alpha(\alpha\in\Sigma)\}$ 是代数 $\mathfrak{g}$ 的 Chevalley 基, $\mathfrak{g}_{\mathbf{Z}}$ 是它在 **Z** 上的线性包络代数. 令 φ 是 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 在某个有限维向量空间 V 上的忠实表示, 可证明存在 V 中的格 (即自由 Abel 子群, 它的一组基是向量空间 V 的一组基), 对于全体算子 $\varphi(X_\alpha)^m/m!(\alpha\in\Sigma$, m 是自然数) 不变. 如果 k 是任意域且 $V^k=V\otimes k$, 则可定义同态 $\chi_\alpha: k\to \mathrm{GL}(V^k)(\alpha\in\Sigma)$, 它由公式

$$x_\alpha(t)=\sum_{m=0}^{\infty}t^m\frac{\varphi(X_\alpha)^m}{m!}$$

给出, 子群 $\mathfrak{X}_\alpha=\mathrm{Im}\chi_\alpha(\alpha\in\Sigma)$ 在 $\mathrm{GL}(V^k)$ 中生成某个子群 G_k, 它称为对于 Lie 代数 $\mathfrak{g}$, 表示 φ 和域 k 的 Chevalley 群 (Chevalley group). 如果 $\varphi=\mathrm{ad}$ (伴随表示), 则这个 Chevalley 群是 C. Chevalley 在 1955 年定义的(见[1]).

如果 K 是包含域 k 的代数封闭域, 那么 Chevalley 群 G_K 是 K 上连通半单线性代数群, 它可在素子域 $k_0\subseteq k$ 上定义且分裂, 它的 Lie 代数同构于 $\mathfrak{g}_{\mathbf{Z}}\otimes K$. 群 G_k 是 G_K 的 k 上有理点的群 $G_K(k)$ 的换位子群. K 上任意连通半

单线性代数群同构于一个 Chevalley 群. 代数群 G_K(以及 G_k 作为抽象群)仅依赖于由表示 φ 的权生成的格 $\Gamma_\varphi \subset \mathfrak{h}^*$. 若 Γ_φ 和根的格 Γ_0 重合,则 G_K 称为**伴随群**(adjoint group),若设 $\Gamma_\varphi = \Gamma_1$(全体权的格,见**半单 Lie 群**(Lie group, semi-simple)),则 G_K 称为**泛群**(universal group)或**单连通群**(simply-connected group). 若 G_K 是泛的,则 $G_k = G_K(k)$.

Chevalley 群 G_K 永远和它的换位子群重合. G_k 的中心是有限群. 例如泛群 G_k 的中心 Z 同构于 $\mathrm{Hom}(\Gamma_1/\Gamma_0, k^*)$, 对应的伴随群同构于 G_k/Z, 且有平凡中心.

如果 $\mathfrak{g}$ 是单代数,则伴随 Chevalley 群 G_k 是单群,除去以下情形: $|k|=2$ 且 $\mathfrak{g}$ 是型为 A_1, B_2 或 G_2 的 Lie 代数; $|k|=3$ 而 $\mathfrak{g}$ 是 A_1 型的 Lie 代数. 其他系列的单群可以由 Chevalley 群的某些有限阶自同构的不动点的子群来得到(所谓**扭群**(twisted group)).

设 k 是有限域,则泛群 G_k 的阶由公式

$$|G_k| = q^N \prod_{i=1}^{r}(q^{d_i}-1)$$

算出,其中 $q=|k|$, $d_i (i=1,2,\cdots,r)$ 是 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的指数, 即 $\mathfrak{h}$ 的在 **Weyl 群**(Weyl group)下不变的多项式的代数中自由生成元的次数,而 $N=\sum_{i=1}^{r}(d_i-1)$ 是正根的个数.

无限域 k 上 Chevalley 群 G_k 的有理线性表示已建立了很好的理论. 它归结为代数封闭域的情况, 从而与半单代数群的**有理表示**(rational representation)论一致. 设 $\mathfrak{g}$ 是单代数, G_k 是无限域 k 上的泛 Chevalley 群, 而 σ 是 G_k(作为抽象群)在代数封闭域 K 上的非平凡有限维不可约表示, 则存在一组有限个嵌入 $\varphi_i: k \to K$ 及群 $G_{\varphi_i}(k)$ 的一组有理表示 ρ_i 使得 $\sigma = \otimes_i \rho_i \circ \varphi_i$. 关于 Chevalley 群的表示也可见[2], [3], [5].

参考文献

[1] Chevalley, C., Sur certains groupes simples, *Tôkohu Math. J.*, **7** (1955), 1-2, 14-66.

[2] Steinberg, R., Lectures on Chevalley groups, Yale Univ., 1968.

[3] Seminar on algebraic groups and related finite groups, Lecture Notes in Math., **131**, Springer, 1970.

[4] Humphreys, J. E., Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer, 1972.

[5] Humphreys, J. E., Ordinary and modular representations of Chevalley groups, Springer, 1976.

А. Л. Онищик 撰

【补注】 前文中 $|k|$ 表示域 k 中元素的数目.

扭群也称扭 Chevalley 群(twisted Chevalley group)或 Steinberg 群(Steinberg group). 它们是由 R. Steinberg 在 [A1] 中引进的.

有关 Chevalley 群的重要文献是 R. W. Carter 新近的一本教科书([A2]).

参考文献

[A1] Steinberg, R., Variations on a theme of Chevalley, *Pacific J. Math.*, 9 (1959), 875-891.

[A2] Carter, R. W., Finite groups of Lie type: conjugacy classes and complex characters, Wiley (Interscience), 1986.

石生明 译 许以超 校

χ^2 分布 [**'chi-squared' distribution**; "**хи-квадрат" распределение**]

集中于正半轴 (0, ∞)上的连续概率分布, 有密度

$$p(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} e^{-x/2} x^{n/2-1},$$

其中 $\Gamma(\alpha)$ 为 Γ 函数, 正整数 n 称为自由度. χ^2 分布是 **Γ 分布**(gamma-distribution)的特例, 因此具有后者的所有性质. χ^2 分布的分布函数是一个非完全 Γ 函数, 其特征函数由下述公式表出:

$$\varphi(t) = (1-2it)^{-n/2}.$$

期望与方差分别为 n 与 $2n$. χ^2 分布族在卷积运算下是封闭的.

自由度为 n 的 χ^2 分布可以作为 n 个独立的、具有相同正态分布(期望为 0, 方差为 1) 的随机变量 $X_1, \cdots, X_n$ 的平方和 $\chi_n^2 = X_1^2 + \cdots + X_n^2$ 的分布导出. 与正态分布的这一联系, 确立了 χ^2 分布在概率论及数理统计学中的重要地位.

许多分布可以通过 χ^2 分布来定义. 例如, 随机变量 $\sqrt{\chi_n^2}$ 的分布就是如此. $\sqrt{\chi_n^2}$ 是具有独立的、服从正态分布的分量的随机向量 $(X_1, \cdots, X_n)$ 的长度(这种分布有时称为 χ 分布('chi'-distribution), 其特例亦见 **Maxwell 分布**(Maxwell distribution)与 **Rayleigh 分布**(Rayleigh distribution), **Student 分布**(Student distribution), 及 **Fisher F 分布**(Fisher F-distribution)). 在数理统计学中, 这些分布与 χ^2 分布一起描述观测结果具有正态分布的各种统计量的样本分布, 且用来构造统计区间估计与统计检验. 建立在所谓 Pearson χ^2 统计量基础上的 **χ^2 检验**('chi-squared' test)就同 χ^2 分布有关, 它享有特殊的名声.

为了统计计算的方便, 已有了详尽的 χ^2 分布表. 对于大的 n, 可以由正态分布来逼近; 例如, 根据中心极限定理, 标准化变量 $(\chi_n^2 - n)/\sqrt{2n}$ 的分布收敛到标准正态分布. 更精确的逼近式是

$$\mathrm{P}\{\chi_n^2 < x\} \to \Phi(\sqrt{2x} - \sqrt{2n-1}), \text{当 } n \to \infty \text{ 时},$$

其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数.

亦见**非中心 χ^2 分布**(non-central 'chi-squared' distribution).

参考文献

[1] Cramér, H., Mathematical methods of statistics, Princeton Univ. Press, 1946 (中译本: H.克拉默, 统计学数学方法, 上海科学技术出版社, 1960).

[2] Kendall, M. G. and Stuart, A., The advanced theory of statistics. Distribution theory, 1, Griffin, 1969.

[3] Lancaster, H. O., The chi - squared distribution, Wiley, 1969.

[4] Большев, Л. Н., Смирнов, Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983.

А. В. Прохоров 撰

【补注】 英文名也用 'chi - square' distribution.

潘一民 译

χ^2 检验 ['chi - squared' test; 'хи - квадрат' критерий]

某频数随机向量 $\nu=(\nu_1,\cdots,\nu_k)$ 有给定的多项分布这一假设 H_0 的一种检验,该分布由一正概率向量 $p=(p_1,\cdots,p_k)$ 所刻画, $p_1+\cdots+p_k=1$. χ^2 检验基于 Pearson 统计量(Pearson statistic)

$$X^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(\nu_i-np_i)^2}{np_i}=\frac{1}{n}\sum\frac{\nu_i^2}{p_i}-n,$$
$$n=\nu_1+\cdots+\nu_k,$$

当 $n\to\infty$ 时, 它有自由度 $k-1$ 的 **χ^2 分布** ('chi-squared' distribution) 作为极限,即

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}\{X^2\leqslant x\,|\,H_0\}=\mathrm{P}\{\chi_{k-1}^2\leqslant x\}.$$

根据显著性水平 $\approx\alpha$ 的 χ^2 检验, 在 $X^2\geqslant\chi_{k-1}^2(\alpha)$ 时必须拒绝假设 H_0, 此处 $\chi_{k-1}^2(\alpha)$ 是自由度 $k-1$ 的 χ^2 分布的上 α 分位点,即

$$\mathrm{P}\{\chi_{k-1}^2\geqslant\chi_{k-1}^2(\alpha)\}=\alpha.$$

统计量 X^2 也用于检验下述假设 H_0: 独立同分布随机变量 $X_1,\cdots,X_n$ 的分布函数属于一个连续分布族 $F(x,\theta)$, $x\in\mathbf{R}^1$, $\theta=(\theta_1,\cdots,\theta_m)\in\Theta\subset\mathbf{R}^m$, Θ 为一开集, 将实直线用点 $x_0<\cdots<x_k$, $x_0=-\infty$, $x_k=\infty$, 分割为 $k\,(k>m)$ 个区间 $(x_0,x_1],\cdots,(x_{k-1},x_k)$, 使

$$p_i(\theta)=\mathrm{P}\{X_i\in(x_{i-1},x_i]\}>0,$$

其中, $i=1,\cdots,k$; $p_1(\theta)+\cdots+p_k(\theta)=1$. 然后通过把随机变量 $X_1,\cdots,X_n$ 之值按这些区间分组,而得出频数向量 $\nu=(\nu_1,\cdots,\nu_k)$, 令

$$X^2(\theta)=\sum_{i=1}^{k}\frac{[\nu_i-np_i(\theta)]^2}{np_i(\theta)}$$

它是一个依赖于未知参数 θ 的随机变量,为检验假设 H_0, 使用统计量 $X^2(\widetilde{\theta}_n)$, 这里 $\widetilde{\theta}_n$ 是用最小 χ^2 法得出的 θ 的估计量,即

$$X^2(\tilde{\theta}_n)=\min_{\theta\in\Theta}X^2(\theta).$$

如果组区间这样选择, 使一切 $p_i(\theta)>0$, 函数 $\partial^2p_i(\theta)/\partial\theta_j\partial\theta_r$ 对一切 $\theta\in\Theta$ 连续 $(i=1,\cdots,k;\,j,r=1,\cdots,m)$, 且矩阵 $\|\partial p_i(\theta)/\partial\theta_j\|$ 有秩 m, 则当假设 H_0 真确而 $n\to\infty$ 时, 统计量 $X^2(\tilde{\theta}_n)$ 有自由度 $k-m-1$ 的 χ^2 分布为其极限分布, 借助于 χ^2 检验. 这个事实可用于检验 H_0. 如果把从不分组的数据 $X_1,\cdots,X_n$ 算出的最大似然估计 $\hat{\theta}_n$ 代入 $X^2(\theta)$, 则当 H_0 真确而 $n\to\infty$ 时, $X^2(\hat{\theta}_n)$ 的极限分布与

$$\xi_1^2+\cdots+\xi_{k-m-1}^2+\mu_1\xi_{k-m}^2+\cdots+\mu_m\xi_{k-1}^2$$

的分布相同,这里 $\xi_1,\cdots,\xi_{k-1}$ 为独立的标准正态分布的随机变量,而数 $\mu_1,\cdots,\mu_m$ 介于 0 与 1 之间, 且一般说来与未知的参数 θ 有关. 由此可知, 在对假设 H_0 作 χ^2 检验时若用最大似然估计,则将遇到要计算一个非标准极限分布的困难.

在[3]-[8]中推荐了几种有关在这种情况下使用 χ^2 检验的做法. 特别地, 对正态情况([3]), 一般连续分布情况([4],[8]), 离散分布情况([6],[8]), 以及多样本问题([7]).

参考文献

[1] Kendall, M.G. and Stuart, A., The advanced theory of statistics, 2. Inference and relationship, Griffin, 1983.

[2] Чибисов, Д. М., 《Теория вероятн. и ее применения》, **16** (1971), 1, 3-20.

[3] Nikulin, M. S., Chi - square test for continuous distributions with shift and scale parameters, *Theory Probab. Appl.*, **18** (1973), 559-568.

М. С. Никулин 撰 陈希孺 译

孙子剩余定理 [Chinese remainder theorem; китайская теорема об остатках]

设 A 为具有单位元的交换环, $\mathfrak{a}_1,\cdots,\mathfrak{a}_n$ 为 A 的一组理想, 且对任意 $i\neq j$ 有 $\mathfrak{a}_i+\mathfrak{a}_j=A$, 则对于任意给定元素 $x_1,\cdots,x_n\in A$, A 中一定存在一个元素 x, 使 $x\equiv x_i(\mathrm{mod}\,\mathfrak{a}_i)$, $i=1,\cdots,n$. 作为特殊情况, 当 A 为整数环 (Z) 时, 孙子剩余定理说, 对任意一组两两互素的整数 $a_1,\cdots,a_n$, 总存在整数 x, 使 x 分别被 $a_1,\cdots,a_n$ 除之后具有给定的余数. 古代中国就知道了这样的孙子剩余定理.

孙子剩余定理最经常地被用在以下情形: A 为 Dedekind 环 (Dedekind ring), $\mathfrak{a}_1=\mathfrak{p}_1^{s_1},\cdots,\mathfrak{a}_n=\mathfrak{p}_n^{s_n}$, 其中 $\mathfrak{p}_1,\cdots,\mathfrak{p}_n$ 为 A 的不同素理想. (若 $\mathfrak{a}_1,\cdots,\mathfrak{a}_n$ 适合定理的条件, $s_1,\cdots,s_n$ 为任意自然数, 则 $\mathfrak{a}_1^{s_1},\cdots,\mathfrak{a}_n^{s_n}$ 也适合条件.) 这时由中国剩余定理可推出, 任给整数 $s_1,\cdots,s_n$, 存在 $x\in A$, 使主理想 (x) 具有以下形式的素理想分解:

$$(x)=\mathfrak{p}_1^{s_1}\cdots\mathfrak{p}_n^{s_n}\mathfrak{q}_1^{t_1}\cdots\mathfrak{q}_m^{t_m}\quad(m\geqslant0),$$

的多项式 $P_n(x)$，公式的形式为

$$\sum_{k=0}^{n} P_k(x)P_k(t) =$$

$$= \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}} \frac{P_{n+1}(x)P_n(t)-P_n(x)P_{n+1}(t)}{x-t},$$

其中 μ_n 是 $P_n(x)$ 的首项系数. Christoffel - Darboux 公式是用来研究正交多项式的 Fourier 级数在一单点的收敛性条件. 在 $\sigma(x)$ 是阶梯函数的情形, Christoffel - Darboux 公式由 П. Л. Чебышев 于 1855 年首次发表(见[1]). 然后 E. B. Christoffel ([2]) 对 **Legendre 多项式** (Legendre polynomials) 建立了这个公式. 而 G. Darboux([3]) 则将公式推广到了任意的权函数.

参考文献

[1] Чебышев, П. Л., Полн. собр. соч., т. 2, М., 1947, 103 - 106.

[2] Christoffel, E. B., Ueber die Gausssche Quadratur und eine Verallgemeinerung derselben, *J. Reine Angew. Math.*, **55** (1858), 61 - 82.

[3A] Darboux, G., Mémoire sur l'approximation des fonctions de très - grands nombres, et sur une classe étendue de développements en série, *J. Math. Pures Appl.* (3), **4** (1878), 5 - 56.

[3B] Darboux, G., Sur l'approximation des fonctions de très - grands nombres, et sur une classe étendue de développements en série, *J. Math. Pures Appl.* (3), **4** (1878), 377 - 416.

亦见**正交多项式** (orthogonal polynomials) 的参考文献.

П. К. Суетин 撰 孙和生 译

Christoffel 数 [Christoffel numbers; кристоффеля числа], Christoffel 系数 (Christoffel coefficients)

对于次数 ≤ $2n-1$ 的代数多项式精确成立的求积公式

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) \approx \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$$

的系数 λ_k. 这样的公式的插值节点 x_k 是 n 次多项式 $p_n(x)$ 的零点, 而 $p_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上关于分布 $d\alpha(x)$ 与所有 $n-1$ 次多项式正交. 如果 $x_1 < \cdots < x_n$, 那么 Christoffel 数是唯一确定的. 已知有 $\lambda_k > 0$, $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = \alpha(b) - \alpha(a)$ 以及

$$\lambda_k = \int_a^b \left[\frac{p_n(x)}{p_n'(x)(x-x_k)}\right]^2 d\alpha(x), \quad k = 1, \ldots, n.$$

如果诸多项式 $p_n(x)$ 是规范正交的, 那么 Christoffel 数可表示为

$$\lambda_k^{-1} = p_0(x_k) + \cdots + p_n(x_k), \quad k = 1, \ldots, n,$$

$$\lambda_k = -\frac{K_{n+1}}{K_n} \frac{1}{p_{n+1}(x_k)p_n'(x_k)} =$$

$$= \frac{K_n}{K_{n-1}} \frac{1}{p_{n-1}(x_k)p_n'(x_k)}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

其中 K_n 为 $p_n(x)$ 的首项系数. 在 $a=-1$, $b=1$ 和 $d\alpha(x)=dx$ 的情形下, $p_n(x)$ 是 **Legendre 多项式** (Legendre polynomials), 并且

$$\lambda_k = \frac{2}{(1-x_k^2)[p_n'(x_k)]^2}.$$

这些表达式应归功于 E. B. Christoffel ([1]). 对于 $n=1, \cdots, 7$, C. F. Gauss 计算了这些系数. 亦见 **Gauss 求积公式** (Gauss quadrature formula).

参考文献

[1] Christoffel, E. B., Ueber die Gaussche Quadratur und eine Verallgemeinerung derselben, *J. Reine Angew. Math.*, **55** (1858), 61 - 82.

[2] Szegö, G., Orthogonal polynomials, Amer. Math. Soc., 1975.

[3] Натансон, И. П., Конструктивная теория функций, М. - Л., 1949 (中译本: И. П. 纳唐松, 函数构造论, 科学出版社, 1965).

Н. П. Корнейчук, В. П. Моторный 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hildebrand, F. B., Introduction to numerical analysis, McGraw - Hill, 1974.

李家楷 译

Christoffel - Schwarz 公式 [Christoffel - Schwarz formula; Кристоффеля-Шварца формула]

公式

$$f(z) = c_1 + c\int_{z_0}^{z} \prod_{k=1}^{n} (t-a_k)^{\alpha_k - 1}\,dt, \qquad (*)$$

此乃上半平面 $\operatorname{Im} z > 0$ 到具有顶点 A_k 和顶角 $\pi\alpha_k$ $(0 < \alpha_k \leq 2, k = 1, \cdots, n)$ 的有界多边形内部的共形映射 $f(z)$ 的积分表示式, z_0, c, c_1 是某些常数, $A_k = f(a_k)$. 常数 z_0 可以是上半平面内任意固定的一点. 序列 $a_1, \cdots, a_n$ 中的三个点, 比如说 a_1, a_2, a_3, 可任意指定; 其余 $n-3$ 个点 a_k 以及常数 c 和 c_1 随多边形的顶点 $A_1, \cdots, A_n$ 的确定而唯一确定 (见 [3]). 公式 (*) 是由 E. B. Christoffel (1867, 见[1]) 和 H. A. Schwarz (1869, 见[2]) 彼此独立给出的. (*) 式右端的积分通称为 Christoffel - Schwarz 积分.

应用公式 (*) 的主要难点是求未知参数. 对于 $n > 4$, 尚未发现有一般的方法.

已有了几种求 Christoffel - Schwarz 公式中参数的近似值的方法 (见 [4], [5]).

Zariski 拓扑下)得到的层．这样就得到 Bloch 公式(Bloch formula)(见[A1])

$$A^p(x)\simeq H^p(X;K_p),$$

它提供了 X 的周群与 X 的取值在 X 的 K 层里的上同调之间的联系．利用域的代数 K 理论的结果(见[A2])，由此可得关于 A^p 特别是 A^2 的结果(见[A3])．周群的另一个常用的记号是用 $CH^p(X)$ 代替 $A^p(X)$.

关于层化、预层、层及取值于层的上同调的概念见**层论**(sheaf theory)．

参考文献

[A1] Bloch, S., Lectures on algebraic cycles, Dept. Math. Duke Univ., 1980.

[A2] Merkur'ev, A. S., Suslin, A. A., K-cohomology of Severi-Brauer varieties and norm residue homomorphism, *Math. USSR-Izv.*, 21 (1983), 307-340 (*Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 46(1982), 5, 1011-1046).

[A3] Colliot-Thélène, J.-L., Hilbert's theorem 90 for $K2$ with application to the Chow groups of rational surfaces, *Inv. Math.*, 71 (1983), 1-20.

[A4] Fulton, W., Intersection theory, Springer, 1984.

陈志杰 译

周(炜良)定理 [Chow theorem; Чжоу теорема]

复射影空间的所有解析子集(见**解析集**(analytic set))都是代数簇．这个定理是周炜良证明的(见[1])．

参考文献

[1] Chow, W. L., On compact complex analytic varieties, *Amer. J. Math.*, 71 (1949), 893-914.

[2] Griffiths, P. A., Harris, J. E., Principles of algebraic geometry, 1, Wiley, 1978.

[3] Chern, S. S., Complex manifolds without potential theory, Springer, 1979.

А. Л. Онищик 撰 陈志杰 译

周(炜良)簇 [Chow variety; Чжоу многообразие]，周(炜良)概形(Chow scheme)

一个代数簇，它的点是射影空间 P^n 的所有 d 次 r 维的代数子簇 X 的参数化．

设 $\widetilde{P}^n$ 是射影空间 P^n 的对偶，它是超平面 $u\subset P^n$ 的参数化，在积 $X\times(\widetilde{P}^n)^{r+1}$ 中考虑子簇

$$\Gamma=\{(x,u^{(0)},\dots,u^{(r)}): x\in u^{(i)}, 对\ i=0,\dots,r\}.$$

它在到第二个因子上的投影下的象 $p_2(\Gamma)\subset(\widetilde{P}^n)^{r+1}$ 是 $(\widetilde{P}^n)^{r+1}$ 里的一个超曲面，它由含 $r+1$ 组 $n+1$ 个变量的型 F_X 所给出．F_X 在每一组变量里都是 d 次齐次的．型 F_X 称为簇 X 的**相伴型**(associated form)(或 Cayley 型(Cayley form))．它完全确定了子簇 X．这个型是由 B. L. van der Waerden 和周炜良引入的([1])．F_X 的系数被确定到差一个常数因子，称为 X 的**周(炜良)坐标**(Chow coordinates)．

簇 X 的周坐标确定一点 $c(X)\in P^v$，这里的 v 是 n，r 和 d 的函数．与 d 次 r 维不可约子簇 $X\subset P^n$ 对应的点 $c(X)\in P^v$ 构成一个拟射影子簇 $C_{n,r,d}$，称为**周(炜良)簇** Chow variety)．如果不仅考虑不可约子簇，也考虑 P^n 内 d 次 r 维的正代数闭链(即具有正整系数簇的形式线性组合)，则可得到一个闭子簇 $\overline{C_{n,r,d}}\subset P^v$，它也称为周簇．周簇是一个泛代数族 $\pi:\mathfrak{X}\to\overline{C_{n,r,d}}$ 的基底，其中 $\mathfrak{X}\subset\overline{C_{n,r,d}}\times P^n$，$\pi$ 是诱导射影，点 $c(X)\in\overline{C_{n,r,d}}$ 上的纤维 $\pi^{-1}(c)$ 等同于闭链 X．周簇的最简单的例子是 P^3 中 d 次曲线的簇 $C_{3,1,d}$．于是 $C_{3,1,1}=\overline{C_{3,1,1}}$ 是4维不可约簇，它同构于 P^5 中的 Plücker 二次超曲面；$\overline{C_{3,1,2}}=C^{(1)}\cup C^{(2)}$ 由两个8维分支构成，其中 $C^{(1)}$ 对应于二次光滑曲线，$C^{(2)}$ 对应于两条直线；$\overline{C_{3,1,3}}$ 由4个12维分支构成，它们分别对应于由三条直线组成的三次曲线、由一条直线及一条平面二次曲线组成的曲线、平面三次曲线以及非平面的三次曲线．在所有这些情形中，簇 $C_{3,1,d}$ 都是有理的．不过由亏格充分大的曲线的参模概形的非有理性，可以知道对足够大的 d，簇 $C_{3,1,d}$ 不是有理的(见([2])．

若 $V\subset P^n$ 是一个代数子簇，则 V 中 d 次 r 维闭链 $Z\subset P^n$ 构成一个代数子簇 $\overline{C_{r,d}}(V)\subset\overline{C_{n,r,d}}$．这个结果使得在簇 V 上的所有 r 维正闭链集合 $Z_r^+(V)=\bigcup_{d>0}\overline{C_{r,d}}(V)$ 上有可能引进某种代数结构(见[1])．

关于簇的分类问题的其他途径，见 **Hilbert 概形**(Hilbert scheme)；**参模问题**(moduli problem)．

参考文献

[1] Waerden, B. L. van der, Chow, W. L., Zur algebraische Geometrie IX, *Math. Ann.*, 113 (1937), 692-704.

[2] Harris, J., Mumford, D., On the Kodaira dimension of the moduli space of curves, *Invent. Math.*, 67 (1982), 23-88.

[3] Hodge, W. L. V. D., Pedoe, D., Methods of algebraic geometry, 2, Cambridge Univ. Press.

[4] Шафаревич, И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972 (英译本：Shafarevich, I. R., Basic algebraic geometry, Springer, 1977).

Вал. С. Куликов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Angéniol, B., Familles de cycles algébriques. Schéma de Chow, Lecture Notes in Math., 896, Springer, 1981.

陈志杰 译

Christoffel-Darboux 公式 [Christoffel-Darboux formula; Кристоффеля-Дарбу формула]

对和一积分权重 $d\sigma(x)$ 在某个区间 (a,b) 上正交

Church λ 抽取 [Church λ - abstraction ; Чёрча λ - абстракция]

在数理逻辑，特别是**组合逻辑**(combinatory logic)的语言中引进函数的记号．更精确地说，若在一确切的语言中，已定义了一项 A 以表达理论中的一对象，且项 A 依赖于参数 $x_1, \cdots, x_n$(也可能还依赖其他参数)，那么在这一语言中

$$\lambda x_1, \ldots, x_n A \quad (*)$$

作为把变元 $x_1, \cdots, x_n$ 的值转换到 A 表达的对象的函数的记号．表达式(*)也称为Church λ抽取．这个Church λ抽取也作为函数的显定义，它多用于当在理论的语言中作为研究对象的函数和作为变目的一定值的函数值有混淆的危险之时．由Church引进([1])．

参考文献

[1] Church, A., The calculi of λ-conversion, Princetion Univ. Press, 1941.

[2] Curry, H. B., Foundations of mathematical logic, Mc-Graw-Hill, 1963.

А. Г. Драгалин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Barendregt, H. P., The lambda calculus, its syntax and semantics, North-Holland, 1978.

杨东屏 译

Church 论题 [Church thesis ; Чёрча тезис]

把由通常直观意义下的**算法**(algorithm)可计算的函数类与部分递归函数类等同起来的一个原理．Church论题是自然界的这样一个事实，它可以被整个历史过程中数学里积累的经验所证实，数学里一切已知的算法例子满足它．这个论题首先是由A. Church(1936)陈述的．每种算法直观概念的不同的精确定义有它自己的Church论题的陈述方式．Turing论题(Turing thesis)断言，每个直观意义下可计算的函数可以被某个**Turing 机**(Turing machine)计算出来．Марков的正规化原理表明，每个直观意义下可计算函数可以被某个**正规算法**(normal algorithm)计算出来．由算法概念的各个已知定义的等价性，可以得知不同形式的Church论题是等价的．这事实也由另一方面验证了Church论题．Church的这个论题不能被严格证明，因为它的陈述涉及直观意义下算法的不确切概念．曾有人多次去否证Church论题，但都未能成功(1984)．Church论题的确认在算法理论和它的应用中是有用的．首先，在证明这类或那类算法——Turing机，递归函数，正规算法和其他形式算法——的存在性时，人们只要给出直观上明显的构造，然后借助于Church论题就可以知道存在性，而不必写出对应的形式模式来．

另外，Church论题也是导出给定算法问题不可解性的基础(见**算法问题**(algorithmic problem))，按照这论题人们只要证明按照某个精确的算法概念该问题是不可解的即可．

参考文献

[1] Kleene, S. C., Introduction to metamathematics, North-Holland, 1951 (中译本：S. C. 克林，元数学导论，科学出版社，上册 1984，下册 1985).

[2] Rogers, jr., H., Theory of recursive functions and effective computability, McGraw-Hill, 1967.

С. И. Адян 撰

【补注】 在"算法直观概念的不同精确定义"中以Church和S. C. Kleene为主开创了通过λ可定义性的函数的计算(见**Church λ 抽取**(Church λ-abstraction)；**λ演算**(λ-calculus))．这个途径的重要性在于它为高一层次的**程序设计语言**(programming language)的某些基本性质提供了预先储备．

参考文献

[A1] Barendregt, H. P., The lambda-calculus, its syntax and semantics, North-Holland, 1978.

杨东屏 译

数字 [ciphers ; цифры]

用来表示**数**(number)的简便记号．最古老、最原始的记数方法是文字表示法，在一些孤立的场合，这种方法流传了相当长的时间．(例如，中东和远东地区的一些数学家直到10世纪甚至以后，仍然习惯用文字来记数．)随着人类社会和经济生活的发展，逐渐需要创造一种比文字表示法更现代化的记数方法，和建立记数法则——记数制(见**数的表示法**(number, representations of))．

我们所知道的最古老的数字是巴比伦数字和埃及数字．巴比伦数字(公元前2000年一公元之初)是几个表示数1, 10, 100(或者只是1, 10)的楔形记号，其他一切自然数都用这几个记号的组合来表示．在埃及象形文字记数制(年代大约为公元前3000－2500年)中，存在几个表示10的幂(直到10^7)的单独记号．

在芬兰、叙利亚和希腊阿蒂卡等地都曾采用埃及象形文字类型的记数制．雅典记数制产生于公元前6世纪；在阿蒂卡，这种记数制一直使用到公元1世纪，尽管其他希腊国家早已改用爱奥尼亚人的更方便的字母记数制，其中几个、几十、几百都用希腊字母来表示，而直到999的一切其他自然数，则用这些字母的组合来表示(最早的采用字母记数制的数字表示法的年代可以追溯到公元前5世纪)．其他民族，例如阿拉伯半岛、叙利亚、巴勒斯坦、格鲁吉亚、亚美尼亚等地，也都曾采用字母数字表示法．旧的俄罗斯记数制(大约产生于10世纪，沿用到16世纪)也是字母记数制(见**斯拉夫数字**(Slavic numerals))．古代记数制中寿命最长的应当说是罗马记数制，它是公元前500年伊特鲁里亚人首先使用的；然而，直到现在有时还会用到(见**罗马数字**

对于有一个或几个顶点在无穷远点的多边形，Christoffel - Schwarz 公式仍然成立．在这种情形，于无穷远点的边的夹角定义为所述边(或它们的延长线)在有穷点的交角(带负号)．若顶点之一的原象 a_i 是无穷远点，则取消公式(*)中相应的因子 $(t-a_i)^{\alpha_i-1}$．

对于单位圆盘 $|z|<1$ 到上述多边形的映射函数 $f(z)$，Christoffel - Schwarz 公式亦成立．在这种情形，$|a_k|=1$，$k=1,\cdots,n$，$|z_0|\leqslant 1$．此公式作些修改就可适用于上半平面——或单位圆盘的内部和外部——到多边形外部的映射函数(见[3])．

Christoffel - Schwarz 公式可以推广到这样的情形：$f(z)$ 确定圆环 $0<q<|z|<1$ 或一般地从一个圆盘的内部除去 n 个圆盘而得到的多连通区域到由若干多边形围成的(具有同一连通数的)区域的共形映射(见[6]，[7])．

参考文献

[1A] Christoffel, E. B., *Ann. di Math., Pura Appl.* (2), 1 (1868), 89 – 103.

[1B] Christoffel, E. B., *Ann. di Math. Pura Appl.* (2), 4 (1871), 1 – 9.

[2] Schwarz, H. A., Gesammelte mathematische Abhandlungen, 1 – 2, Springer, 1890.

[3] Лаврентьев, М. А., Шабат, Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, 4 изд., М., 1973 (中译本：M. A. 拉甫伦捷夫、Б. A. 沙巴特，复变函数论方法，高等教育出版社，上册，1956，下册，1957)．

[4] Канторович, Л. В., Крылов, В. И., Приближенные методы высщего анализа, 5 изд., М. - Л., 1962 (中译本：康托洛维奇，Л. В.、克雷洛夫，В. И.，高等分析近似方法，上册，科学出版社，1966)．

[5] Koppenfels, W. and Staiman, F., Praxis der konformen Abbildung, Springer, 1959.

[6] Ахиезер, Н. И., Элементы теории эллиптических функций, 2 изд., М., 1970 (中译本：Н. И. 阿希泽尔，椭圆函数论纲要，商务印书馆，1959)．

[7] Максимов, Ю. Д., 《Докл. АН СССР》, 136 (1961), 2, 284 – 286.

Ю. Д. Максимов 撰

【补注】 上述公式亦称 Schwarz - Christoffel 公式 (Schwarz - Christoffel formula)，见[A1]．

参考文献

[A1] Ahlfors, L., Complex analysis, McGraw - Hill, 1979 (中译本：L. V. 阿尔福斯，复分析，上海科学技术出版社，1984)．

[A2] Hille, E., Analytic function theory, 2, Chelsea, reprint, 1977.

[A3] Nehari, Z., Conformal mapping, Dover, reprint, 1975.

杨维奇 译

Christoffel 符号 [**Christoffel symbol**; **Кристоффеля символ**]，二次微分形式 $\sum_{r,s=1}^{n} g_{rs}dx^r dx^s$ 的表达式

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right\}\equiv\Gamma_{k,ij}$$

的缩写符号．符号 $\Gamma_{k,ij}$ 称为第一类 Christoffel 符号，以区别于由下式定义的第二类 Christoffel 符号 Γ_{ij}^k：

$$\Gamma_{ij}^k=\sum_{l=1}^{n} g^{kl}\Gamma_{l,ij},$$

其中 g^{kl} 如下定义：

$$\sum_{k=1}^{n} g^{kt}g_{ks}=\begin{cases}1, 若 t=s,\\0, 若 t\neq s.\end{cases}$$

这些符号由 E. B. Christoffel 在 1869 年引入．

【补注】 设 $\nabla: V(M)\times V(M)\to V(M), (X,Y)\mapsto\nabla_X Y$ 是流形 M 上的线性联络，这里 $V(M)$ 表示 M 上的向量场空间．设 (U,φ) 是 M 的一个坐标卡．那么在 U 上，∇ 由 $\nabla_{\partial/\partial x^i}(\partial/\partial x^j)$ 完全决定，这里 $x^1,\cdots,x^n$ 是 U 上的坐标．此时，联络 ∇ 的 Christoffel 符号 (Christoffel symbols) 由

$$\nabla_{\partial/\partial x^i}\left[\frac{\partial}{\partial x^j}\right]=\sum_k\Gamma_{ij}^k\frac{\partial}{\partial x^k}$$

给出．重要的是要注意 Γ_{ij}^k 不是一个张量场的分量．事实上，如果 $\bar{\Gamma}_{ij}^k$ 表示联络 ∇ 关于 U 上第二套坐标 $\bar{x}^1,\cdots,\bar{x}^n$ 的 Christoffel 符号，那么

$$\bar{\Gamma}_{ij}^k=\sum_{a,b,c}\Gamma_{ab}^c\frac{\partial x^a}{\partial\bar{x}^i}\frac{\partial x^b}{\partial\bar{x}^j}\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^c}+\sum_c\frac{\partial^2x^c}{\partial\bar{x}^i\partial\bar{x}^j}\cdot\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^c}.$$

现在设 ∇ 是由(局部)Riemann 度量 $\sum_{r,s} g_{rs}dx^r dx^s$ 定义的 Riemann 联络 (Riemannian connection) (见 **Riemann 几何学** (Riemannian geometry))．那么这个二次微分形式的 Christoffel 符号就是联络 ∇ 的 Christoffel 符号，即

$$\left\langle\nabla_{\partial/\partial x^k}\left[\frac{\partial}{\partial x^j}\right],\frac{\partial}{\partial x^i}\right\rangle=\Gamma_{i,kj}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right],$$

结果确实有

$$\nabla_{\partial/\partial x^k}\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\right]=\sum_i\Gamma_{kj}^i\frac{\partial}{\partial x^i},$$

这里 Γ_{kj}^i 是如上定义的这个二次微分形式的第二类 Christoffel 符号．

参考文献

[A1] Kobayashi, S. and Nomizu, K., Foundations of differential geometry, 1, Interscience, 1963, Chapt. 4.

[A2] Millman, R. S. and Parker, G. D., Elements of differential geometry, Prentice Hall, 1977, Chapt. 7.

潘养廉 译

那么,由

$$g(s)=g_1(s)\cdots g_k(s)=\sum_{N=1}^{\infty}J_k(N)s^N$$

所定义的函数 $g(s)$ 是 $J_k(N)$ 的生成函数. 由 Cauchy 公式,

$$J_k(N)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|s|=R<1}g(s)s^{-(N+1)}ds.$$

当 $R\to 1-0$ 时,研究这个等式中的积分. 把积分圆 $|s|=R$ 分成以有理数为中心的"优"弧和"劣"弧. 存在很广泛的一类加性问题,对其"优"弧上的积分可以进行相当充分的研究,产生 $J_k(N)$ 的"主要"部分,而对"劣"弧上的积分可以给出估计,得到 $J_k(N)$ 的渐近公式中的"余"项.

И. М. Виноградов 在圆法中引入三角和,不仅极大地简化了这一方法的应用,而且对广泛的十分不同的加性问题的解决给出了统一的途径. 圆法的基础以三角和的形式表示就是公式

$$\int_0^1 e^{2\pi i\alpha m}d\alpha=\begin{cases}1, & m=0,\\ 0, & m\neq 0,\ m\ \text{是整数}.\end{cases}$$

由此公式可知

$$J_k(N)=\int_0^1 s_1(\alpha)\cdots s_k(\alpha)e^{-2\pi i\alpha N}d\alpha,$$

其中

$$s_m(\alpha)=\sum_{\substack{n\in X_m,\\ n\leqslant N}}e^{2\pi i\alpha n},\quad m=1,\ldots,k.$$

有限和 $S_m(\alpha)$ 称为三角和. 为了研究 $J_k(N)$,把积分区间 $[0,1]$ 划分成"优"弧和"劣"弧,也就是分成以具有"小"分母和"大"分母的有理点为中心的区间. 对于许多加性问题,能成功地求出(具有适当精度)"优"弧上的积分(在"优"弧上对 α 的三角和接近于小分母的有理三角和,它已经被求出而且是"大的"); 至于"劣"弧,它们含有 $[0,1]$ 中的大部分的点,在其上的三角和是"小的",可以用非平凡的方法估计出来 (见**三角和法** (method of trigonometric sums); **Виноградов 法** (Vinogradov method)), 因此可以得到 $J_k(N)$ 的渐近公式.

三角和形式的圆法与 Виноградов 的估计三角和的方法一起,得到了加性数论中的一些最强的结果 (见 **Waring 问题** (Waring problem); **Goldbach 问题** (Goldbach problem); **Goldbach - Waring 问题** (Goldbach - Waring problem); **Hilbert - Kamke 问题** (Hilbert - Kamke problem)).

参考文献

[1] Виноградов, И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М., 1971 (英译本: Vinogradov, I. M., The method of trigonometric sums in the theory of numbers, Interscience, 1954).

[2] Hua, L.-K., Abschätzungen von Exponentialsummen und ihre Anwendung in der Zahlentheorie, *Enzyklopaedie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, 1 (1959), Helft 13, Teil 1 (中译本: 华罗庚,指数和的估计及其在数论中的应用,科学出版社,1963).

[3] Карацуба, А. А., Основы аналитической теор М., 1975 (中译本: A. A.卡拉楚巴, 解析数论基础, 科学出版社, 1984).

A. A. Карацуба 撰

【补注】 上面叙述的圆法通常称为 Hardy - Littlewood 法或 Hardy - Littlewood 圆法. 这一方法适用于一些十分不相同的情况. 下面是一些例子. Davenport - Heilbron 定理 (Davenport - Heilbron theorem) 说, 设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ ($s\geqslant 2^k+1$) 是实数, 且当 k 是偶数时符号不全相同, 而且至少有一个比值 λ_i/λ_j 是无理数, 那么对于任何 $\eta\geqslant 0$, 存在不全为零的整数 $x_1,\cdots,x_s$, 使得 $|x_1\lambda_1+\cdots+x_s\lambda_s|<\eta$. 设 $\mathscr{A}$ 是自然数的子集, $d(\mathscr{A})>0$, 其中 $d(\mathscr{A})$ 是上渐近密度 (asymptotic density). 那么 Furstenberg - Sàrközy 定理 (Furstenberg - Sàrközy theorem) 说: 如果 $R(n)$ 是 $a-a'=x^2$ 的解的个数, $a,a'\in\mathscr{A}$, $a<n$, $x\in\mathbf{N}$, 那么 $\lim_{n\to\infty}n^{-1/2}R(n)=0$. 另一个例子是 Birch 定理 (Birch theorem), 它说: 使 k 个奇次齐次型同时为零的零点空间的维数随着这些齐次型的变量个数的增加而任意增大.

参考文献

[A1] Vaughan, R. C., The Hardy - Littlewood method, Cambridge Univ. Press, 1981.

【译注】

参考文献

[B1] 华罗庚, 数论导引, 科学出版社, 1975.

[B2] 闵嗣鹤, 数论的方法, 科学出版社, 1981.

[B3] 潘承洞、潘承彪, 解析数论基础, 1990.

戚鸣皋 译 张明尧 校

曲率圆 [circle of curvature; круг кривизны]

在给定点上与一曲线至少为二阶密切 (osculation) 的圆. 该曲率圆的中心和半径分别称为这一曲线在给定点上的曲率中心 (centre of curvature) 和曲率半径 (ratius of curvature). 曲率圆处于曲线的密切平面上, 亦称密切圆 (osculating circle).

БСЭ-3 张鸿林 译

圆问题 [circle problem; круга проблéма]

寻求在圆盘 $u^2+v^2\leqslant x$ 内格点 (u,v) 的数目 $A(x)$ 的最佳渐近估计的问题. 设 θ 是等式

$$A(x)=\pi x+O(x^\alpha)\qquad(*)$$

(Roman numerals)).

现代数字(包括 0)的原型出现于印度,或许不迟于公元前 5 世纪.在十进位制中,使用这些数字来记数是很方便的.因此从印度传播到其他国家.在欧洲,印度数字是在 10-13 世纪时由阿拉伯人传入的(因此直到现在还使用另一个名称:"阿拉伯"数字),并在 15 世纪后半期得到普遍接受.印度数字的形状后来经过了一些重大变化;它们的早期历史还不很清楚.

参考文献,见**数的表示法**(number, representations of).

В. И. Битюцков 撰

【补注】 进一步的细节,对各种数字(例如在象形文字记数制中使用的数字)的讨论和描述,以及**零的符号**(zero symbol)的起源(对此仍有许多疑问),亦见[A1],特别是 p.11 及以后,p.64 及以后,p.234 及以后.

"cipher"(数字)一词也用来表示密码系统和这种系统中的电码,见**保密学**(cryptology).

参考文献

[A1] Boyer, C. B., A history of mathematics, Wiley, 1968

张鸿林 译

圆 [circle; окружность]

平面上的闭曲线,它的一切点与该平面上给定的一点(圆心(centre of the circle))的距离都相等.具有公共圆心的圆称为同心圆(concentric circles).连接圆心和圆上任何一点的线段(以及这个线段的长度 R)称为半径(radius).在 Descartes 坐标系中,圆的方程是

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2,$$

其中 a 和 b 是圆心的坐标.

通过圆上的两点的直线称为割线(secant);处于圆内的割线的线段称为弦(chord).与圆心距离相等的弦长度相等.通过圆心的弦称为直径(diameter).垂直于一个弦的直径把这个弦平分.圆上的两点把圆分成的两部分称为弧(arcs).

连接圆心和一个弧的端点的两个半径形成的角称为圆心角(central angle),而相应的弧是这个圆心角所对的弧.具有一个公共端点的两弦形成的角称为圆周角(inscribed angle).一个圆周角等于由它限定的弧所对圆心角的一半.圆的长度等于 $C=2\pi R$,而弧的长度等于 $l=(\pi Ra^\circ)/180^\circ=R\alpha$,其中 a° 是相应圆心角的大小(单位为度),α 是这个角的弧度值.

如果通过平面上任何一点向圆引几条割线,那么,从这一点到每一条割线与圆的两个交点的距离之积是一个常数(对给定的点来说);特别是,它等于从这一点所引的与圆相切的线段长度的平方(这一点的幂(power)).在平面上,使得关于一个给定点具有相同的幂的一切圆的总合称为圆把(bundle of circles).处于一个平面上的两个圆把中的一切公共圆的总合称为圆束(pencil of circles).

由一个圆围成的、包含圆心的平面部分称为圆盘(disc).由一段圆弧和引向它的两端的半径围成的圆盘部分称为扇形(sector).在一段圆弧和它所对的弦之间的圆盘部分称为弓形(segment).

圆盘的面积是 $S=\pi R^2$;扇形的面积是 $S_1=\pi R^2\cdot(a^\circ/360^\circ)$,这里 a° 是相应圆心角的度数;弓形的面积是 $S_2=\pi R^2(a^\circ/360^\circ)\pm S_\Delta$,这里 S_Δ 是一个三角形的面积,其顶点分别处于圆心和围成扇形的两半径的端点,当 $a^\circ<180^\circ$ 时取"$-$"号,当 $a^\circ>180^\circ$ 时取"$+$"号.

凸曲面(convex surface)上的圆几乎局部等距于该凸面的一个锥的边界(Zalgaller 定理(Zalgaller theorem)).有界曲率的流形上的圆可能具有十分复杂的结构(也就是说,可能存在角点和多重点,可能具有几个分支,等等).而且,有界曲率的流形上的圆的各点可以自然地排序,使得这条曲线成为一个循环有序集(见[1]).

关于更一般的空间(如 Banach 空间、Finsler 空间和其他空间)中的圆,见**球面**(sphere).

参考文献

[1] Энциклопедия элементарной математики, кн. 4, М., 1963.

[2] *Тр. Матем. ин-та АН СССР*, 76 (1965), 88-114 (英译本: Burago, Yu. D. and Stratilatova, M. B., Circumferences on a suface, *Proc. Steklov. Inst. Math.*, 76 (1967), 109-141.

А. Б. Иванов 撰

【补注】 关于更一般空间中的圆,亦见[A1],第一章.

参考文献

[A1] Berger, M., Geometry. 1, Springer, 1987 (译自法文)(中译本: M. 贝尔热,几何(第一卷),科学出版社,1987).

[A2] Burago, Yu. D. and Zalgaller, V. A., Geometric inequalities, Springer, 1988.

[A3] Coolidge, J., A treatise on the circle and the sphere, Oxford Univ., Press, 1916.

张鸿林 译

圆法 [circle method; круговой метод]

加性数论中最普遍的方法之一.设 $X_1,\cdots,X_k$ 是任意一些自然数的集合,N 是自然数,又设 $J_k(N)$ 是方程

$$n_1+\cdots+n_k=N$$

的解的个数,其中 $n_1\in X_1,\cdots,n_k\in X_k$.加性数论所研究的正是数 $J_k(N)$;例如,如果能够证明对所有的 N,$J_k(N)$ 大于零,这就意味着:任何自然数都是分别取自集合 $X_1,\cdots,X_k$ 的 k 个数之和.现在,设 s 是复数,$|s|<1$,并且

$$g_1(s)=\sum_{n_1\in X_1}s^{n_1},\ldots,g_k(s)=\sum_{n_k\in X_k}s^{n_k}.$$

其中理想$\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_n, \mathfrak{q}_1, \cdots, \mathfrak{q}_m$两两不同(指数独立性定理(theorem on the independence of exponents)).

参考文献

[1] Кострикин, А. И., Введение в алгебру, М., 1977.

[2] Lang, S., Algebra, Addison - Wesley, 1974.

[3] Lang, S., Algebraic numbers, Addison - Wesley, 1964.

Л. В. Кузьмин 撰 裴定一 译

Choquet 单形 [Choquet simplex; Шоке симплекс]

局部凸空间(local convex space)E中的具有下列性质的非空紧凸集：当把E看作超平面$E\times 1$嵌入到空间$E\times\mathbf{R}$时，X的射影锥

$$\tilde{X} = \{\alpha x\in E\times\mathbf{R}: x\in X\subset E\times 1, \alpha\geqslant 0\}$$

使空间$E\times\mathbf{R}$变为半序空间，且对于这个半序空间来说，差空间$\tilde{X}-\tilde{X}$是**格**(lattice). 当E有限维时，Choquet 单形就是顶点个数不多于 dim $E+1$的通常的单形. 存在许多 Choquet 单形的等价定义(见[1]). 其中之一归结为要求$\tilde{X}$与$\tilde{X}$的任何位移的交还是$\tilde{X}$的某个位移.

如果再补充假设E是可分的,且X是可度量化的,那么为使X是 Choquet 单形,其充要条件为任何点$x\in X$都是集中在集合X的端点上的唯一的测度的重心. Choquet 单形的概念在研究函数的积分表示的唯一性时是必不可少的. 这个概念是由 G. Choquet 引进的.

参考文献

[1] Phelps, R., Lectures on Choquet's theorem, v. Nostrand, 1966.

[2] Alfsen, E., Compact convex sets and boundary integrals, Springer, 1971.

В. А. Залгаллер 撰

【补注】 Choquet 唯一表示定理(Choquet unique representation theorem)是说，局部凸空间的一个紧凸可距子集是 Choquet 单形，当且仅当对于每个$x\in X$存在唯一的集中于X的端点上的测度μ来表示x(即以x为"重心").

【译注】 关于$\tilde{X}$的表达式，参见[B1]. Choquet 单形的定义最早出现在[B2]中.

参考文献

[B1] Choquet, G., Lectures on analysis, II, Benjamin, 1969.

[B2] Choquet, G. et Meyer, P. A., Existence et unicité des représentations intégrales dans les convexes compacts quelconques, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **13** (1963), 139 – 154.

史树中 译

弦 [chord; хорда]

连接圆锥曲线上任意两点的直线段.

БСЭ-3

【补注】 这个词也用来称呼连接 Euclid 空间中的闭曲线、曲面或子流形上任意两点的直线段.

张鸿林 译

弦法 [chord method; хорд метод]

同割线法 (secant method).

周(炜良)环 [Chow ring; Чжоу кольцо]

在一个非奇异拟射影代数簇上**代数闭链** (algebraic cycle)的有理等价类的环. 这个环里的乘法用闭链的相交来定义(见**相交理论**(intersection theory)).

簇X的周环$A(X)=\oplus_{i\geqslant 0}A^i(X)$是一个分次交换环,其中$A^i(X)$表示余维数$i$的闭链类的群. 对一个态射$f: X\to Y$，其逆象同态$f^*: A(Y)\to A(X)$是环同态,其正象同态$f_*: A(X)\to A(Y)$(对正常$f$)是$A(Y)$模的同态. 这意味着有一个射影公式(projection formula):

$$f_*(f^*y\cdot x) = y\cdot f_*(x),\ x\in A(X);\ y\in A(Y).$$

周环是向量丛的陈类理论的值域(见[1]). 更精确地说,如果E是簇X上秩r的局部平凡层，$P(E)$是它的射影化，$\pi: P(E)\to X$是典范射影，$\zeta\in A^1(P(E))$是对应于可逆层$\mathcal{O}_{P(E)}(1)$的除子的类,则π^*是一个嵌入,并且周环$A(P(E))$可以等同于多项式环$A(X)[\zeta]$关于多项式

$$\zeta^r - c_1(E)\zeta^{r-1} + \cdots + (-1)^r c_r(E)$$

所生成的理想的商环. 系数$c_k(E)\in A^k(E)$称为层E的第k陈(省身)类(k-th Chern class).

在复数域上的簇的情形,存在一个到奇异上同调环里的同态$A(X)\to H(X, \mathbf{Z})$，它保持次数并且与逆象同态和正象同态可交换.

如果X是奇异拟射影簇,则它的周环$A(X)$定义为在所有态射$f: X\to Y$上的环的直极限$A(X)=\lim_{\to} A(Y)$,这里Y是非奇异的. 这就得到一个到分次环范畴里的反变函子,满足射影公式(见[3]).

参考文献

[1] Hartshorne, R., Algebraic geometry, Springer, 1977.

[2] Anneaux de Chow et applications, in Sem. Chevalley, 1958.

[3] Fulton, W., Rational equivalence on singular varieties, *Publ. Math. IHES*, **45** (1975), 147 – 167.

Вал. С. Куликов 撰

【补注】 对于 Noether 概形(或环)X，设$K_n(X)$表示X上有限生成射影模的(范畴的)K群(见**代数 K 理论**(algebraic K-theory)). 设$\mathcal{K}_n(X)$表示对预层$U\mapsto K_n(U)$(其中U取遍X的开(仿射)子概形)作层化(在

中数 α 的下确界．C. F. Gauss 证明 $\theta\leqslant 1/2$ (见[1])．B. Серпиньский 运用 Г. Ф. Вороной 的方法 ([3]) 得到 $\theta\leqslant 1/3$ (见[2])．在 [4] 中证明了 $\theta\leqslant 13/40$．最近 (1987) 的估计是 $\theta\leqslant 12/37$．对公式 (*) 的余项有一猜测为

$$O(x^{1/4}\log^2 x).$$

圆问题有一均值定理

$$\int_0^N (A(x)-\pi x)^2\,dx = CN^{3/2}+O(N^{1+\epsilon}),$$

此处 C 是某绝对常数而 $\varepsilon>0$ 是任意正数．

依照其内容和研究方法，圆问题和 Dirichlet 的**除数问题** (divisor problems) 极其相似．圆问题的一个推广就是**球问题** (sphere problem)——估计球 $u^2+v^2+w^2\leqslant x$ 内格点 (u,v,w) 的个数 $B(x)$ 的问题．这种估计的基础是公式

$$B(x) = 24G(x)+O(\sqrt{x}),$$

此处

$$G(x)= \\ = \sum_{0<u\leqslant\sqrt{x/3}}\ \sum_{u<v\leqslant\sqrt{(x-u^2)/2}}([\sqrt{x-u^2-v^2}\,]-v+ \\ +\frac{1}{2}\sum_{0<v\leqslant\sqrt{x/2}}([\sqrt{x-v^2}\,]-v)+ \\ +\frac{1}{2}\sum_{0<u\leqslant\sqrt{x/3}}([\sqrt{x-2u^2}\,]-u)+O(\sqrt{x}\,),$$

这个公式的建立是用六个平面

$$u=v,\ u=w,\ v=w,\ v=0,\ u=0,\ w=0,$$

把球分拆成 24 个部分，对截平面上的点子计数时乘以系数 1/2，从而使每一部分都包含了相同的格点数．$B(x)$ 增长的主要项等于球的体积

$$V(x) = \frac{4\pi}{3}x^{3/2};$$

因此问题归结为估计 $P(x)=B(x)-V(x)$，它是 $G(x)$ 的公式中方括弧内的函数的分数部分的和．用 И. М. Виноградов 的三角和方法 ([5], [6]) 得到了 $P(x)$ 的最深刻的估计：

$$P(x) = O(x^{2/3}\log^6 x).$$

有一个猜测为

$$P(x) = O(x^{1/2}\log^2 x).$$

圆问题和球问题的一个推广就是估计 n 维椭球

$$F(u_1,\ldots,u_n) = \sum_{r,\nu=1}^{n} a_{r\nu}u_r u_\nu \leqslant x,\quad a_{r\nu}=a_{\nu r},$$

内格点数 $A_F(x)$ 的问题，此处 F 是正定二次型 ([7])．

参考文献

[1] Gauss, C. F., Werke, Vol. 2, Göttingen, 1863, 269 – 291.

[2] Sierpiński, W., *Prace Mat. Fiz.*, 17 (1906), 77 – 118.

[3] Вороной, Г. Ф., Собр. соч., т. 1, К., 1952, 5.

[4] Hua, L. K., Abschätzungen von Exponentialsummen und ihre Anwendung in der Zahlentheorie, *Enzyklopaedie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, 1 (1959), Helft 13, Teil 1 (中译本：华罗庚，指数和的估计及其在数论中的应用，科学出版社，1963).

[5] Виноградов, И. М., 《Изв. АН СССР Сер. матем.》, **27** (1963), 5, 957 – 968.

[6] Виноградов, И. М., Особые варианты метода тригонометрических сумм, М., 1976.

[7] Novák, B., Lattice points in more - dimensional ellipsoids, 《Тр. матем. ин - та АН СССР》, **132** (1973), 145 – 150.

А. Ф. Лаврик 撰

【补注】 上面提到的最近估计 $\theta\leqslant 12/37$ 是由陈景润于 1963 年得到的 ([A1])．圆问题也通称为 **Gauss 圆问题** (Gauss circle problem)．

参考文献

[A1] Chen, J., The lattice - points in a circle, *Sci. Sinica*, **12** (1963), 633 – 649.

[A2] Walfisz, A., Gitterpunkte in mehrdimensionalen Kugeln, PWN 1957.

【译注】 圆问题目前最好的结果是 $\theta\leqslant 7/22$，这是 H. Iwaniec 和 C. J. Mozzochi 于 1988 年得到的 (见 [B1])．

参考文献

[B1] Iwaniec, H. and Mozzochi, C. J., On the divisor and circle problems, *J. Number Theory*, **29** (1988), 1, 60 – 93.

戚鸣皋 译　张明尧 校

圆变换 [**circle transformation** ; **круговое преобразование**], Möbius **变换** (Möbius transformation)

把圆映射成圆的变换．如果把它看作为点变换，那么 Möbius 变换就是扩充 Euclid 平面 (即在无穷远处添加一点的 Euclid 平面) 的映射，在这个映射下，圆或直线映射成圆或直线．这时，称之为**自反点几何学** (anallagmatic point geometry)．

如果把它当作是非点变换，那么 Möbius 变换就是切触变换 (或切圆变换，或 Lie 圆变换) 的一个特例；它的基本元素不是点而是圆．这时称之为**圆的自反几何学** (circular anallagmatic geometry)．

参考文献

[1] Энциклопедия элементарной математики, кн. 4, М., 1963.

А. Б. Иванов 撰

杨　路、张景中、侯晓荣 译

圆点 [**circular points** ; **круговые точки**]，**虚圆点** (cyclic points)，在增添了虚无穷远点的扩充平面上的

无穷远处的两个虚点，它们的齐次坐标$(1, i, 0)$和$(1, -i, 0)$满足任何圆的方程．通过圆点的直线称为迷向直线(isotropic lines)． *BSE*-2

杨 路、张景中、侯晓荣 译

圆对称化 [circular symmetrization；круговая симметризация]

一种几何变换，它把平面上一个开(闭)集 G 关于点 P 为起点的某条射线 λ 变换成同一平面的集合 G^*，G^* 的定义如下：1) G^*与圆心在 P 的圆的交是空的或者是整个圆，分别取决于 G 与同一圆的交是空的或者是整个圆；2) 若 G 与圆心在 P 的圆的交有 Lebesgue 角测度 Φ，则 G^*与同一圆的交是一段开(闭)弧，这段弧与 λ 横截、关于 λ 对称且关于 P 点的张角为 Φ．

上面的定义以自然的方式转移到三维的情形(与某个半平面相联系的对称化)．亦见**对称化**(symmetrization)．

参考文献

[1] Pólya, G. and Szegö, G., Isoperimetric inequalities in mathematical physics, Princeton Univ. Press, 1951.

[2] Hayman, V. K., Multivalent functions, Cambridge Univ. Press, 1958.

[3] Jenkins, J. J., Univalent functions and conformal mappings, Springer, 1958.

И. П. Митюк 撰

杨 路、张景中、侯晓荣 译

环流 [circulation；циркуляция]，向量场 $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ 沿闭曲线 L 的

线积分

$$\oint_L \mathbf{a}d\mathbf{r}.$$

在坐标形式下，环流等于

$$\int_L (a_x\,dx + a_y\,dy + a_z\,dz).$$

当试验物体(具有单位质量或单位电荷等)沿 L 移动一周时，向量场 $\mathbf{a}(\mathbf{r})$所做的功等于这个向量场沿 L 的环流．见 **Stokes 定理** (Stokes theorem)．

БСЭ-3 高红铸 译 潘建中 校

蔓叶线 [cissoid；циссоида]

三次平面代数曲线，在 Descartes 坐标中，其方程是

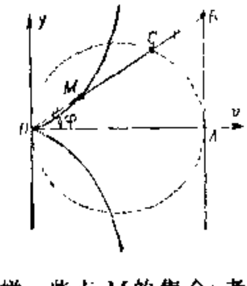
$$y^2 = \frac{x^3}{2a-x}.$$

参数方程是

$$x = \frac{a}{t^2+1},\ y = \frac{a}{t(t^2+1)}.$$

蔓叶线关于 x 轴是对称的(见图)．坐标原点是尖点，渐近线是 $x=2a$．蔓叶线与其渐近线之间的面积是 $S=3\pi a^2$．

古希腊数学家 Diocles(公元前 3 世纪)在研究**倍立方**(duplication of the cube)问题时考察过蔓叶线，因而往往把这一曲线称为 Diocles 蔓叶线(cissoid of Diocles)．



蔓叶线是这样一些点 M 的集合：考虑过点 O 的一个圆，A 是圆上点 O 的对径点，设直线 OM 与这个圆和这个圆的过点 A 的切线分别相交于点 B 和点 C，这时点 M 满足条件 $OM=BC$．如果在上述作图中，用曲线 $\rho_1=f_1(\varphi)$ 和 $\rho_2=f_2(\varphi)$ 来代替圆和直线，则所得到的曲线 $\rho=\rho_2-\rho_1$ 称为蔓叶类曲线(cissoidal curve)或(给定的)曲线的蔓叶线(cissoid of the curves)．

参考文献

[1] Савелов, А. А., Плоские кривые, М., 1960.

[2] Смогоржевский, А. С., Столова, Е. С., Справочник по теории плоских третьего прядка, М., 1961.

Д. Д. Соколов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Lawrence, J. D., A catalog of special plane curves, Dover, reprint, 1972.

[A2] Brieskorn, E. and Knörrer, H., Ebene algebraische Kurven, Birkhäuser, 1981.

张鸿林 译

Clairaut 方程 [Clairaut equation；Клеро уравнение]

不能解出所含导数的一阶常微分方程

$$y = xy' + f(y'), \tag{1}$$

其中 $f(t)$ 是非线性函数．方程 (1) 因 A. Clairaut 而得名．他首先指出这种形式的方程的通解和特解之间的差别．Clairaut 方程是 **Lagrange 方程** (Lagrange equation) 的特殊情况．

如果当 $t\in(a,b)$ 时 $f(t)\in c'(a,b)$，$f'(t)\neq 0$，则方程 (1) 的**积分曲线**(integral curve)的集合包括：以参数方式给出的曲线

$$x = -f'(t),\ y = -tf'(t)+f(t),\ a<t<b; \tag{2}$$

与曲线(2)相切的单参直线族

$$y = Cx+f(C),\ C\in(a,b); \tag{3}$$

由曲线(2)的任意一段和在其端点与曲线(2)相切的直

线族(3)中的两条直线组成的曲线．直线族(3)构成**通解**(general solution)，而作为直线族(3)的**包络**(envelope)的曲线(2)是**奇解**(singular solution)(见[2])．一条非直线的光滑曲线的切线族满足一个 Clairaut 方程．因此，下述几何问题将导致一个 Clairaut 方程：要求确定一条曲线，使其切线具有预先给定的(为曲线各点所共有的)性质．

下列一阶偏微分方程也称为 Clairaut 方程：

$$z = x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}+f\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right);$$

它具有积分

$$x = \alpha x+\beta y+f(\alpha,\beta),$$

其中(α,β)是函数$f(p,q)$的定义域中的任意点(见[3])．

参考文献

[1] Clairaut, A., Histoire de l'Academie Royal des sciences, Année 1934; Paris 1936, 196–215.

[2] Степанов, В. В., Курс дифференциальных уравнений, 8 изд., М. 1959 (中译本：В. В. 史捷班诺夫，微分方程教程，人民教育出版社，1960)．

[3] Kamke, E., Differentialgleichungen. Lösungs-methoden und Lösungen, 2. Partielle Differentialgleichungen 1ter Ordnung für eine gesuchte Funktion, Akad. Verlagsgesell, Leipzig, 1944 (中译本：E. 卡姆克，一阶偏微方程手册，科学出版社，1983)．

Н. Х. Розов 撰

【补注】

参考文献

[1] Ince, E. L., Ordinary differential equations, Dover, reprint, 1956.

张鸿林 译

类 [class; класс]

1) 数学中主要用作"集合"的同义语，指具有某种确定性质的对象总体(例如，代数学中，关于给定等价关系的等价类)．有时人们用类表示集合族(例如，在递归论中：可数类)．在有些情况下，由于公理集合论的影响(见2))，用术语"类"来强调给定的总体是一个真类而不是狭义下的集合(例如，在代数学中，泛代数的原始类，也称为簇)．类上的集合论运算与集合运算的定义相同．

2) 公理集合论中的类(class in axiomatic set theory)，更确切地说，在 Gödel - Bernays 公理系统中的类，是这些系统中所考虑的一种原始对象，这里集合和类的区别在于只有集合可以作为类的元素，而(真)类不能作为类的元素．把上述意义下的类引入集合论的思想归功于 J. von Neumann，这是基于他考察了 Cantor 集合论中的著名矛盾，他认为这些矛盾产生的原因并不在于容许构成很大集合，而在于把这些集合看作其他集合的元素．除了这一限制外，在上面所提到的类的系统中，通常集合论运算都是允许的，运算的结果是类而不是集合．而且，对于每一个在集合上定义的容许(某种意义下)谓词，都存在一个类，它恰由满足这一谓词的那些集合所组成．已经证明，Gödel-Bernays 系统的相容性与 Zermelo - Fraekel 系统的相容性可以相互推导(这就证实了 von Neumann 的观点)，亦见**公理集合论**(axiomatic set theory)．

参考文献

[1] Cohen, P. J., Set theory and continuum hypothesis, Benjamin, 1966.

[2] Fraenkel, A. A. and Bar - Hillel, Y., Foundations of set theory, North - Holland, 1958.

В. А. Душский 撰 张锦文 译

3) Riemann 空间V^l的类(class of a Riemannian space)是一个数p，使V^l能局部等距嵌入$(l+p)$维 Euclid 空间E^{l+p}但不能嵌入较低维的 Euclid 空间．要求嵌入是充分正则的(因 Riemann 空间V^l容许局部等距嵌入E^{l+1}中，作为C^1光滑超曲面(Nash 定理(Nash theorem)))；解析 Riemann 空间V^l的类不超过$l(l-1)/2$ (Janet - Cartan 定理(Janet - Cartan theorem))．可微类$C^\alpha(\alpha>2)$的 Riemann 空间的类也不超过$l(l-1)/2$，见[10]．

Riemann 空间的类是零，当且仅当流形V^l的曲率张量恒等于0．常曲率的度量具有类1且能表现为 Euclid 空间中的超球面．常负曲率的l维空间的类是$l-1$ (Cartan 定理(Cartan theorem))．严格负二维截面曲率的 Riemann 流形V^l的类最小是$l-1$(见[3])．若 Riemann 流形V^l有负k维截面曲率，其中k是偶数，则它的类$p\geqslant(l-1)/(k-1)$．得到代数准则([4])从而能够确定已知流形的类是否等于1；这是因为在确定的附加条件下对类为1的度量，Peterson - Codazzi 方程是 Gauss 方程的推论．

若 Riemann 流形V^l是 Riemann 流形V^{l_i}的度量积：

$$V^l = V^{l_1}\times\cdots\times V^{l_k},\ l_1+\cdots+l_k=l,$$

其中V^{l_i}是类为1的空间，则V是类$p=k$的空间([5])．如果V^{l_i}具有常负截面曲率，则它们的度量积的类是$l-k$ ([5])．

具有固定符号的曲率的二维 Riemann 流形的类等于1．关于交错曲率的度量这个问题还未解决(1978)．已构造了可微类$C^{2,1}$的二维 Riemann 流形不具有可微类C^2到E^3中局部等距浸入的例子([6])．然而，平面上完全度量的任意紧部分可以等距浸入E^4(其中曲面是可微类$C^{2,\alpha}$的，如果度量有正则性$C^{3,\alpha}$)，即此类不超过2 ([7])．

关于伪 Riemann 空间可同样导入类的概念. 设 $V^n(p,q)$ 是伪 Riemann 流形,它的度量张量有 p 个正的和 q 个负的特征值, $p+q=n$. 且设 $E^n(p,q)$ 是伪 Euclid 空间,具有度量

$$ds^2 = dx_1^2 + \cdots + dx_p^2 - dx_{p+1}^2 - \cdots - dx_n^2.$$

设 k_0 是使 $V^n(p,q)$ 有到 $E^{n+k_0}(p,q+k_0)$ 中的浸入的最小非负整数,则对 $0 \leqslant k \leqslant k_0$ 中的任意 k, $V^n(p,q)$ 的浸入的第 k 类确定为最小的数 N_k, 使 $V^n(p,q)$ 有到 $E^{n+N_k}(p+a_k, q+k)$ 中的浸入, 其中 $a_k = N_k - k_0$. $V^n(p,q)$ 的浸入类确定为 $\min_{0 \leqslant k \leqslant k_0} N_k$.

每个具有解析度量的伪 Riemann 流形 $V^n(p,q)$ 有到 $E^m(r,s)$ 中的解析等距浸入,其中 $m=n(n+1)/2$, 且 r, s 为使 $r \geqslant p$, $s \geqslant q$ 的任何已知整数, 也就是说, 对所有 k, $N_k \leqslant n(n+1)/2$ ([8]). 如果 Ricci 张量关于 $V^n(p,q)$ 等于零, 则 $N_k \neq 1$.

如果 $V^n(p,q)$ 具有常曲率,则它的类是 1, 也就是说, 存在空间 $E^{n+1}(r,s)(r \geqslant p, s \geqslant q)$ 使 $V^n(p,q)$ 局部等距于 $E^{n+1}(r,s)$ 中超球面的部分. 对于常负曲率空间 $N_0 = n-1$, 只要 $N=1$ (见[9]).

参考文献

[1] Eisenhart, L. P., Riemannian geometry, Princeton Univ. Press, 1949.

[2] Moore, J. D., Isometric immersions of space forms in space forms, *Pacific J. Math*, **40** (1972), 157–166.

[3] Борисенко, А. А., 《Укр геометр сб.》, **13** (1973), 15–18.

[4A] Розенсон, Н. А., 《Изв. АН СССР Сер. Матем.》, **4** (1940), 181–192.

[4B] Розенсон, Н. А., 《Изв. АН СССР Сер. Матем.》, **5** (1941), 325–352.

[4C] Розенсон, Н. А., 《Изв. АН СССР Сер. Матем.》, **7** (1943), 253–284.

[5] Moore, J. D., Isometric immersions of Riemannian products, *J. Differential Goem*, **5** (1971), 1–2, 159–168.

[6] Погорелов, А. В., 《Докл. АН СССР》, **198** (1971), 1, 42–43.

[7] Позняк, Э. Г., 《Успехи матем наук》, **28** (1973), 4, 47–76.

[8] Friedman, A., Isometric embedding of Riemannian manifolds into Euclidean space, *Rev Modern Physics*, **37** (1965), 201–203.

[9] Борисенко, А. А., 《Укр теометр сб.》, **19** (1976), 11–18.

[10] Jacobowitz, H., Extending isometric embeddings, *J. Differential Geom.*, **9** (1974), 2, 291–307

А. А. Борисенко 撰

【补注】 一些很好的综述是 [A1] 及小林昭七和野水克己的名著 [A2], 上面提到的结果大部分在后者中可以看到.

在西文文献中 **Peterson - Codazzi 方程** (Peterson-Codazzi equations) 通常称为 Mainardi - Codazzi 方程 (Mainardi - Codazzi equations).

参考文献

[A1] Spivak, M., A comprehensive introduction to differential geometry, 5, Publish or Perish, 1976.

[A2] Kobayashi, S. and Nomizu K., Foundations of differential geometry, 1–2, Interscience, 1963–1969.

方嘉琳 译

类域论 [**class field theory**; **полей классов теория**]

描述下列几种类型的域 K 的 Abel 扩张 (Abelian extensions) (Galois 群是交换群的有限 Galois 扩张) 的理论: 1) K 是代数数域, 即域 $\mathbf{Q}$ 的有限扩张; 2) K 是有理 p 进数域 $\mathbf{Q}_p$ 的有限扩张; 3) K 是有限域上一个变量的代数函数域; 4) K 是有限域上的形式幂级数域.

L. Kronecker, H. Weber, D. Hilbert 及其他一些人总结出了类域论的基本定理, 并在特殊情况下作出了证明 (亦见**代数数论** (algebraic number theory)).

2) 和 4) 类型的域称为局部的 (local), 1) 和 3) 类型的域称为整体的 (global). 相应地, 可称局部类域论和整体类域论.

在局部类域论中, 具有 Galois 群 $G(L/K)$ 的每个有限 Abel 扩张 L/K 与 K 的乘法群 K^* 的范子群 $N_{L/K}(L^*)$ 对应, 群 $N_{L/K}(L^*)$ 完全决定了域 L, 存在一个标准同构 φ: $G(L/K) \simeq K^*/N_{L/K}(L^*)$ —— 类域论的主同构 (main isomorphism). 形式群 (见 [1]) 的理论给出了这个同构的明确形式. 反之, K^* 的任何具有有限指数的开子群都可以成为某一 Abel 扩张 L 的范子群 —— 存在性定理 (existence theorem).

若 L 与 L_1 是域 K 的两个有限 Abel 扩张, $M = L \cap L_1$, $N = L \cdot L_1$, 则

$$\left.\begin{aligned} N_{M/K}(M^*) &= N_{L/K}(L^*) N_{L_1/K}(L_1^*), \\ N_{N/K}(N^*) &= N_{L/K}(L^*) \cap N_{L_1/K}(L_1^*). \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

包含关系 $L_1 \supseteq L$ 成立, 当且仅当

$$N_{L/K}(L^*) \supset N_{L_1/K}(L_1^*),$$

这时图

$$\begin{array}{ccc} G(L_1/K) & \overset{\varphi}{\simeq} & K^*/N_{L_1/K}(L^*) \\ \alpha\downarrow & & \downarrow\beta \\ G(L/K) & \underset{\varphi}{\simeq} & K^*/N_{L/K}(L^*) \end{array} \quad (2)$$

是可交换的, 这里 α 将 L_1 的自同构限制在 L 上, β 是由 $K^* \to K^*$ 的恒等映射诱导出来的. 特别地, 若 K^{ab} 是 K 的极大 Abel 扩张, 则 Galois 群 $G(K^{ab}/K)$ 与群 K^* 的射影有限完全化是典范同构的

同构 φ 也刻画了 $G(L/K)$ 中的分歧子群序列. 例如, 当且仅当 K 的单位群 $U(K)$ 包含在 $N_{L/K}(L^{*})$ 中时, L/K 是不分歧的. 这时生成群 $G(L/K)$ 的 Frobenius 自同构与 $\pi \cdot N_{L/K}(L^{*})$ 对应, 其中 π 是 K 的素元, 这一事实完全决定了同构 φ.

利用群的上同调语言, 同构 φ 解释为 Tate 上同调群之间的同构

$$H^{-2}(G(L/K),\mathbf{Z}) \simeq G(L/K)$$

及

$$H^{0}(G(L/K),L^{*}) = K^{*}/N_{L/K}(L^{*}).$$

进而, 设 L/K 为局部域的任何有限 Galois 扩张, 则对任意整数 n, 有标准同构 φ_n:

$$H^{n-2}(G(L/K),\mathbf{Z}) \simeq H^{n}(G(L/K),L^{*}).$$

给定 Galois 域塔 $M \supset L \supset K$, 则提升

$$\inf: H^{2}(G(L/K),L^{*}) \to H^{2}(G(M/K),M^{*})$$

保持不变量(见 **Brauer 群**(Brauer group)), 而限制

$$\operatorname{res}: H^{2}(G(M/K),M^{*}) \to H^{2}(G(M/L),M^{*})$$

使不变量乘以 $[L:K]$. 若 $\bar{K}$ 是 K 的可分闭包, 不变量定义了 K 的 Brauer 群

$$\mathrm{Br}(K) \simeq H^{2}(G(\bar{K}/K),\bar{K}^{*})$$

与 $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ 之间的典范同构.

在整体类域论中, 伊代尔类群(见伊代尔 (idèle)) 起了乘法群的作用. 设 L/K 是整体域的有限 Galois 扩张, I_L 为域 L 的伊代尔群, 群 L^{*} 嵌入 I_L 成为离散子群(称为主伊代尔群 (group of principal idèles)), 具有商拓扑的商群 $C_L = I_L/L^{*}$ 称为伊代尔类群 (idèle class group). 可以证明 $H^{1}(G(L/K),C_L)=1$ 及 $H^{2}(G(L/K),C_L) \simeq Z/nZ$, 其中 $n=[L:K]$. 有典范嵌入 $\operatorname{inv}: H^{2}(G(L/K),C_L) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. 和局部类域论一样, 对任何整数 n 存在同构(整体类域论的主同构):

$$\psi_n: H^{n-2}(G(L/K),\mathbf{Z}) \simeq H^{n}(G(L/K),C_L).$$

对于 Abel 扩张 L/K, 同构 ψ_0 诱导同构 $\psi: G(L/K) \simeq C_K/N_{L/K}(C_L)$, 范子群 $N_{L/K}(C_L)$ 唯一地决定域 L. 反之, C_K 中任何指数有限的开子群一定是某个有限 Abel 扩张 L 的范子群(整体存在性定理 (global existence theorem)). 与 (1) 和 (2) 类似的关系式对于整体域也成立. 若 K^{ab} 是域 K 的极大 Abel 扩张, 则在函数域的情况, 群 $G(K^{ab}/K)$ 与群 C_K 的射影有限完全化同构. 在数域的情形 $G(K^{ab}/K)$ 与 C_K 对于其连通分支的商群同构.

同构 φ_n 与 ψ_n 是相容的. 若 L/K 是整体域的有限 Galois 扩张, L_v 是 L 关于赋值 v 的完全化, K_v 是 K 关于 v 在 K 上的限制的完全化, 则有交换图:

$$\begin{array}{ccc} H^{n-2}(G(L/K),\mathbf{Z}) & \overset{\psi_n}{\simeq} & H^{n}(G(L/K),C_L) \\ \text{cores}\uparrow & & \uparrow f \\ H^{n-2}(G(L_v/K_v),\mathbf{Z}) & \underset{\varphi_n}{\simeq} & H^{n}(G(L_v/K_v),L_v^{*}), \end{array} \qquad (3)$$

其中映射 f 是由嵌入 $L_v^{*} \to I_v \to C_L$ 及提升映射核诱导出来的. 当 $n=0$ 时, (3) 给出了交换图:

$$\begin{array}{ccc} G(L/K)/[G(L/K),G(L/K)] & \overset{\psi}{\simeq} & C_K/N_{L/K}(C_L) \\ \uparrow & & \uparrow \\ G(L_v/K_v)/[G(L_v/K_v),G(L_v/K_v)] & \underset{\varphi}{\simeq} & K_v^{*}/N_{L_v/K_v}(L_v^{*}). \end{array} \qquad (4)$$

从图 (4) 可以得到域 K 的素除子在 Abel 扩张 L/K 中的分解定律. 即 K 的素除子 $\mathfrak{p}$ 在 L 中不分歧 (完全分裂), 当且仅当 $U(K_{\mathfrak{p}}) \subset N_{L/K}(C_L)$ (相应地, $K^{*} \subset N_{L/K}(C_L)$).

若 K 的素除子 $\mathfrak{p}$ 在 L 中不分歧, v 是 K 中对应于 $\mathfrak{p}$ 的赋值. π 是 K_v 的素元, 则可定义 Artin 符号

$$\left[\frac{L/K}{\mathfrak{p}}\right] = \psi^{-1}(\pi) \in G(L/K),$$

它仅依赖于 $\mathfrak{p}$, 它是 v 的分解子群中的 Frobenius 自同构. 根据 Чеботарев 密度定理 (Chebotarev density theorem), 对于群 $G(L/K)$ 中的任何元素, 有 K 的无限个素除子 $\mathfrak{p}$, 使它表为

$$\left[\frac{L/K}{\mathfrak{p}}\right]$$

例如, 数域 K 的极大非分歧 Abel 扩张 F (称为 Hilbert 类域 (Hilbert class field)) 的范子群是群 $K^{*}\prod_v U(K_v)$ 在投影 $I_K \to C_K$ 下的象, 其中 v 遍历 K 的所有的位. 群 $I_K/K^{*}\prod_v U(K_v)$ 与 K 的类群 Cl_K 典范同构, 这给出了重要的同构 $G(F/K) \simeq \mathrm{Cl}_K$. 特别地, 当且仅当 K 的类数为 1 时, K 没有非分歧 Abel 扩张.

域 K 的素除子 $\mathfrak{p}$ 在 F 中分解的类型由 $\mathfrak{p}$ 在 Cl_K 中的类完全决定. 特别地, 当且仅当 $\mathfrak{p}$ 为主除子时, $\mathfrak{p}$ 完全分裂. K 的所有除子在 F 中成为主除子.

正如非分歧 Abel 扩张的类域论可以用除子类群及其子群来解释那样, 任何 Abel 扩张可以用对于某个适当的模的束类群所表征 (见**代数数论** (algebraic number theorem)). 类域论也可推广到无限 Galois 扩张 ([4]).

虽然类域论是作为 Abel 扩张的理论提出来的, 但是它的结果也给出了非 Abel 的 Galois 扩张的重要信息. 例如, 无限类域塔 (见**域塔** (tower of fields)) 存在性的证明就利用了类域论.

参考文献

[1] Cassels, J. W. S. and Fröhlich, A. (eds.), Algebraic number theory, Acad. Press, 1967, Chapt. Ⅵ.

[2] Weil, A., Basic number theory, Springer, 1973.

[3] Koch, H., Galoissche Theorie der p-Erweiterungen, Deutsch. Verlag Wissenschaft., 1970.

[4] Кузьмин, Л. В., 《Изв. АН СССР Сер. матем.》, 33 (1969), 6, 1220-1254.

Л. В. Кузьмин 撰

【补注】 设 A 是整体域 K 的整数环，则类群 Cl_K 是 A 的**除子类群** (divisor class group)，也就是 A 的理想模主理想的类群.

域 K 的所有除子在它的极大非分歧扩张 F 中都成为主除子的事实称为主理想定理.

[A1] 和 [A2] 是关于类域论的现代最新的好书，后一本书也讨论了类域论的伊代尔理论形式与束类群的关系.

Kronecker - Weber 定理证明 $\mathbf{Q}$ 的每个有限 Abel 扩张都包含在某个 $\mathbf{Q}(\zeta_n)$ 内，这里 ζ_n 是 n 次本原单位根 (即 $\zeta_n^n=1$; $\zeta_n^m\neq1$, 若 $m<n$). Kronecker 还猜测，虚二次域 $\mathbf{Q}(\sqrt{-d})(d\in\mathbf{N})$ 的每一个 Abel 扩张都包含在有复乘的椭圆曲线的扭点生成的扩张内. 这被 T. Takagi ([A3]) 所证明. 它在局部域情况的类似即 Lubin - Tate 定理: 局部域 K 的整数环 A 上的 Lubin - Tate 形式群的扭点和 K 的极大非分歧扩张一起生成 K 的极大 Abel 扩张 ([A4]). 利用这些形式群，可以给出局部互反映射 $K^* \to \mathrm{Gal}(K^{ab}/K)$ 的非常清楚的刻画. 也见 [A5]. Lubin - Tate 形式群类似于具有极大自同态环的有复乘的椭圆曲线.

映射 $L\to N_{L/K}C_L\subset C_K$ 建立了有限 Abel 扩张 L/K 和 K 的伊代尔类群 C_K 中指数有限的闭子群之间的一一对应 (C_K 的拓扑见**伊代尔** (idèle)). 这称为类域论的存在性定理 (existence theorem of class field theory). 若 L/K 与 C_K 中的子群 N 对应，则 L/K 称为 N 的类域. 设 $\mathfrak{m}=\prod_{\mathfrak{p}}\mathfrak{p}^{n_{\mathfrak{p}}}$ 为 K 的素除子的形式积，其中，对所有的 $\mathfrak{p}$ 有 $n_{\mathfrak{p}}\geqslant0$; 对几乎所有的 $\mathfrak{p}$ 有 $n_{\mathfrak{p}}=0$; 当 $\mathfrak{p}$ 为 K 的无限素除子时，$n_{\mathfrak{p}}=0$ 或 1. 这种形式积称为正除子 (positive divisor) 或闭链 (cycle). 对每个 $\mathfrak{p}$，以 $K_{\mathfrak{p}}$ 表示对于 $\mathfrak{p}$ 所定义的赋值实施完备化得到的局部域，$A_{\mathfrak{p}}$ 为其整数环. 对每个有限素数，当 $n>0$ 时，令 $U_{\mathfrak{p}}^n=\{x\in A_{\mathfrak{p}}: x\equiv1 \bmod \mathfrak{p}^n\}$，而 $U_{\mathfrak{p}}^0=U_{\mathfrak{p}}=A_{\mathfrak{p}}^*$，即 $A_{\mathfrak{p}}$ 的单位群. 对于无限素数 $\mathfrak{p}$，当 $\mathfrak{p}$ 为实的时，定义 $U_{\mathfrak{p}}^1=\mathbf{R}^+$，即正实数; 当 $\mathfrak{p}$ 为实数时，定义 $U_{\mathfrak{p}}^0=\mathbf{R}^*$; 当 $\mathfrak{p}$ 为复的时，定义 $U_{\mathfrak{p}}^0=U_{\mathfrak{p}}^1=\mathbf{C}$. 给定一正除子 $\mathfrak{n}$，它对应 C_K 的一个子群 $C_K^{\mathfrak{n}}=I_K^{\mathfrak{n}}K^*/K^*$，其中 $I_K^{\mathfrak{n}}$ 是伊代尔群 I_K 的一个子群:

$$I_K^{\mathfrak{n}}=\{\alpha\in I_K: \alpha_{\mathfrak{p}}\in U_{\mathfrak{p}}^{n_{\mathfrak{p}}}, \text{ 对于一切 } \mathfrak{p}\}.$$

子群 $C_K^{\mathfrak{n}}$ 称为同余子群 (congruence subgroup). 确切地说是 C_K 中模 $\mathfrak{n}$ 的同余子群. 对应的类域 $K^{\mathfrak{n}}/K$，即满足 $N_{K^{\mathfrak{n}}/K}C_K=C_K^{\mathfrak{n}}$ 的 Abel 扩张称为模 $\mathfrak{n}$ 的束类域 (ray class field). 模 1 的束类域有特殊的兴趣，称为 Hilbert 类域 (Hilbert class field)，因为 C_K/C_K^1 显然与所有理想模主理想的理想类群同构.

参考文献

[A1] Iwasawa, K., Local class field theory, Oxford Univ. Press, 1986.

[A2] Neukirch, J., Class field theory, Springer, 1986.

[A3] Takagi, T., Ueber eine Theorie des relativ-abelschen Zahlkörpers, *J. Coll. Sci. Imp. Univ. Tokyo*, 41 (1920), 1-132.

[A4] Lubin, J. and Tate, J., Formal complex multiplication in local fields, *Ann. of Math.*, 81 (1965), 380-387.

[A5] Hazewinkel, M., Local class field theory is easy, *Adv in Math.*, 18 (1975), 148-181.

裴定一 译 赵春来 校

可微类 [class of differentiability; дифференцируемости класс]，光滑类 (smoothness class) $C^k(0\leqslant k\leqslant\infty)$

刻画可微映射(特别是函数)的一种概念. C^0 类由一切连续函数所组成，C^k 类是由一切具有不超过 k 阶的连续导数的函数所组成的函数类(特别，C^∞ 是由一切具有任意阶连续导数所组成的函数类)，而 C^a 类是所有实解析函数构成的类.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 记号 C^a (a 指英文 analytic) 有时不常用，而经常用 C^ω 来代替 (ω 表示第一类超限序数). 王斯雷 译

经典天体力学中的数学问题 [classical celestial mechanics, mathematical problems in; классической небесной механики математические задачи]

由研究重力场中天体运动而产生的天文学中的问题. 太阳系的行星和卫星是天体力学研究的经典对象. 恒星天文学(见**恒星天文学的数学问题** (stellar astronomy, mathematical problems of)) 研究恒星和恒星系统的运动. 天文动力学研究人造天体的运动. 因为太阳系中物体之间距离远大于物体本身的尺寸，所以平移运动和旋转运动可以分别研究，而且在研究平移运动时，太阳系的所有物体可以看作按照牛顿引力定律相互作用的质点——称为 N 体问题 (N-body problem). 大部分经典天体力学的问题可通过这一问题的理想化图式来描述. 对任意初始值情况，解决这一问题的唯一通用方法是数值积分. 不过，数值积分不能阐明时间范围很大的系统的发展. 已知若干适用于任意瞬时的个别类别的解决方法 (例如，Euler 和 Lagrange 周期解 (见[1])). 对**三体问题** (three - body problem) 的一般特性研究较为充分. 涉及 N 体问题的大部分结果是借助行星问题的扰动理论取得的，即当 $N-1$ 物体的质量与中心物体的质量相比很小的情况. 如果对扰动忽略不计，则运动方程退化为双体问题的方程，并且可积分为封闭形式. 此时，行星的运动

服从 Keppler 定律．对于质量很小时的情况，取得了若干重要类型解的解析的延拓：周期解和准周期解．证明了具有不可比量频率的准周期运动是最一般的运动的形式．这些结果使得有可能接近解决行星相互作用下太阳系的稳定性问题．

有限三体问题(restricted three - body problem)研究得最为充分，其中两个有限质量的物体沿椭圆轨道围绕惯性中心运动，第三个物体的质量很小，忽略不计．Hill 问题(Hill's problem)也研究得相当充分，它描述了受到来自非常遥远但是巨大的物体扰动的卫星运动．有限三体问题对于小行星运动理论具有重要意义．Hill 问题则对月亮的运动理论很重要．

为建立具体的天体运动的理论，详细研究了有效的计算方法，它们以将解展开为小参量的幂级数为基础．这些方法依据时间是仅作为扰动表达式中三角函数的自变量而存在，抑或这些表达式以显示方式含有时间(称为长期摄动(secular perturbations))而分成两组．第一组的方法非常复杂，应用于需要求解的时间范围与未扰动运动的周期相比非常大的情况(例如，用于月亮运动的理论)．对天体力学的计算方法而言，必须完成大容量的计算是其突出特点．

大行星的运动理论归结于对 N 体问题求解，这里 $N=10$，理解为太阳及其九个行星．运动方程组的近似积分可以借助于级数的分解(解析法)或用数值积分方法求得．大行星运动的理论应该满足下列四个条件：1)它应建立在统一的数学方法基础上，2)根据相互协调的天文常数系统，确定积分常数，3)理论的准确度应与现代宇航实验的要求相符，4)理论应适用于很长的时间范围．20 世纪 70 年代之前存在的理论(是所有天文星历的基础)不能满足上述四项要求．该理论是由不同的作者，使用不同的方法和在不同的时间建立的．建立满足现代要求的理论，不广泛利用电子计算机和进行完善的观测，是不可想象的．

卫星运动的理论在许多方面都与大行星运动的理论相似，然而，它有一个特点，即卫星围绕转动的行星的质量远小于太阳的质量，而太阳的引力使卫星的运动出现很大的扰动．对近距离的卫星还必须考虑中心天体的不圆度．与此相关，两个固定中心的问题具有重要意义，因为不圆的行星的势能可以相当准确地用适当方式选出的两个质点的势能来近似．

参考文献

[1] Дубошин, Г. Н., Небесная механика, 2 изд., М., 1968.

[2] Справочное руководство по небесной механике и астродинамике, М., 1971.

Г. А. Чеботарев 撰

【补注】 人们不再相信具有不可比量频率的准周期运动是最一般的运动形式．事实上，在 H. Poincaré 的论文发表后，在这一领域工作的人就坚信(Poincaré 称之为双渐近的(bi - assymptotique))匀倾运动(homoclinic motions)的存在．

[A2]，[A3]是一般参考文献．

参考文献

[A1] Poincaré, H., Sur les problèmes des trois corps et les équations de la dynamique, *Acta Math.*, **13** (1890), 1 – 270.

[A2] Arnol'd, V. I., Mathematical methods of classical mechanics, Springer, 1978 (译自俄文).

[A3] Rüssmann, H., Konvergente Reihenentwicklungen der Störungstheorie der Himmelmechanik, in K. Jacobs (ed.): Selecta Mathematica, Vol. 5, Springer, 1979.

朱治强 译　沈　青 校

经典组合问题［classical combinatorial problems；классические комбинаторные задачи］

关于有限集中元素的选取和安排的问题，其原型常常是表述一益智形式的娱乐性内容．

以古代东方的神秘面貌出现的一个经典组合问题是构作幻方(magic square)，这里把开头 n^2 个正整数安排成 $n\times n$ 方阵，使得每一行、列以及对角线上数的和都彼此相等，例如

$$\begin{matrix}4 & 9 & 2\\ 3 & 5 & 7\\ 8 & 1 & 6\end{matrix}$$

是 $n=3$ 时的一个幻方．已经知道好些构作幻方的方法(如见[1])．但当 $n>4$ 时，确定 n 阶幻方的个数是一个至今尚未解决的难题(1978)．

L. Euler 研究过不少组合问题．其中之一是 36 名军官问题(problem of 36 officers)，它要求把来自 6 个不同团队并具有 6 种不同军阶的 36 名军官安排成 6×6 的方阵，使得每行和每列上恰好有来自各团队的一名军官，也恰好有具各军阶的一名军官．元素为 $1,\cdots,n$ 的一个 $n\times n$ 方阵称为一个拉丁方(Latin square)，如果每行和每列上的元素都不同．两个拉丁方称为正交的(orthogonal)，如果把它们叠置起来后，在 n^2 个位置上的各元素偶都不同．36 名军官问题等价于存在一对正交的 6 阶拉丁方．Euler 猜想当 $n=4k+2$，$k=1,2,\cdots$，时不存在一对正交的 n 阶拉丁方．G. Tarry 在 1900 年验证了当 $n=6$ 时猜想成立，从而证明了 36 名军官问题无解．在 1959－1960 年间，已证明对每个 $n=4k+2$，$k=2,3,\cdots$，存在一对正交的 n 阶拉丁方(见[2])．

Euler 研究过的另一个问题是 Königsberg 桥问题(problem of the Königsberg bridges)，其内容如下：一河流经城市，河中有二岛，河上架有连接两岸的 7 座桥，问是否可能从一点出发经过每座桥恰好一次而回到出发处．设顶点对应于地域，边对应于桥，则

问题可以表述为：在图 1 所示的图上，是否能完成一次从一点出发经过每边恰好一次而回到起点的环游（见图的回路（graph circuit））.

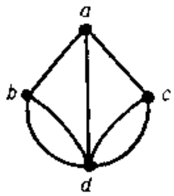


图 1

如果在一个图上可作此环游，则称该图有一个 Euler 圈. Euler 证明了一个图上有这种圈当且仅当该图连通，以及与每一顶点关联的边数是偶数. 因图 1 所示之图不满足这个要求，故 Königsberg 桥问题的解答是这种环游不可能. 即使不要求回到出发点，也不可能有这种巡游. 这时所解决的问题是在图上 Euler 链（Euler chain）的存在性. 一个图具有 Euler 链当且仅当它连通，以及所关联的边数为奇数的顶点数是 0 或 2. 图 1 所示的图满足这个条件（见[3]）.

W. Hamilton 在 1859 年发明了一种"环球旅行"游戏. 它要求在图 2 所示的图上经过每个顶点（城市）恰好一次并回到出发点的路. 图中具有这种性质的路称为 Hamilton 回路（Hamiltonian cycle）. 现在（1978）还不知道在一个图中存在 Hamilton 回路的充分必要条件（见 [3]）.

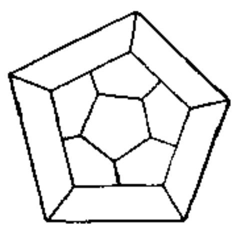


图 2

关于图中 Hamilton 回路的问题有多种推广，旅行推销员问题（travelling salesman problem）是其中之一，它在运筹学，特别是解某些运输问题中有不少应用. 这个问题的内容如下：设有若干城市，它们之间的距离已知，要求找出经过所有城市恰一次并回到出发处的最短路.

T. P. Kirkman 在 1850 年提出了 15 名女生问题（problem of the 15 schoolgirls），并于 1851 年给出该问题的一个解. 女教师要为她的学生安排一个下午散步的日程表：每天把这 15 名女生分成 5 组，每组 3 人，使得每两个女生在 7 天中有且仅有一天分在同一组. 这个问题与构作 Steiner 三元系（Kirkman, 1847；J. Steiner, 1853）有关. 一个 v 阶 Steiner 三元系（Steiner triple system），记为 $STS(v)$ 或 $S(v)$，是 v 元集的一组 3 元子集，使得其中每一对元素恰含于一个 3 元集中. 对 $v\leq 15$ 的 Steiner 三元系已完成分类：对 $v=3, 7, 9$，三元系在（对 v 个元素的置换及由此导出的 3 元子集的置换所定义的）等价关系下只有唯一一类；对 $v=13$ 和 15，则分别有 2 个和 80 个不同等价类. 当 $v>15$ 时，等价类的个数还不知道（1978）. 当 $v>3$ 时，一个 Steiner 三元系是一种特殊的平衡不完全区组设计（block design）.

经典的匹配问题（matching problem）是这样的：设有两付相同的牌，每付 n 张，各张互不相同. 要求确定数 $D_{nr}, r=0, \cdots, n$，它是第二付牌的排列数，使得两付牌的相应牌相比较时，相同牌的相遇数是 r，$r=0, \cdots, n$. 当 $r=0$ 时，这就是更列问题（derangement problem），它首先由 P. Montmort（1708）提出. Euler 考虑过求一个行列式的不含主对角线上元素的项数的问题，这个问题等价于确定 D_{n0}.

匹配问题是组合分析中关于限位排列的研究的分支的发端. 可以在作用于集合 X 上的 n 次置换的集合 S_n 中引入一种距离 ρ，它定义为

$$\rho(s, s') = |\{x: s(x)\neq s'(x),\ x\in X\}|,\quad s, s'\in S_n,$$

则

$$D_{nr} = |\{s: \rho(s, s')=n-r,\ s\in S_n\}|,$$

从而

$$D_{nr} = \frac{n!}{r!}\sum_{k=0}^{n-r}(-1)^k\frac{1}{k!},\quad r=0, \ldots, n.$$

利用置换间的距离还可以表述另一个经典组合问题，通常称为夫妻问题（married couples problem，或 problème de ménages）. 它要求 n 对夫妻围圆桌的 $2n$ 个位置就座，并使每位丈夫与他的妻子不相邻，试算出如此安排的个数 M_n. 于是

$$M_n = 2\cdot n!U_n,$$

$$U_n = |\{s: \rho(s, e)=n,\ \rho(s, c)=n,\ s\in S_n\}|.$$

这里的 e 是恒等置换，$c=(1, \cdots, n)$. 已经得到下述公式：

$$U_n = n!\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}(n-k)!.$$

如果记

$$U_n(s_1, s_2) = |\{s: \rho(s, s_1)=n,\ \rho(s, s_2)=n,\ s\in S_n\}|,$$

则 $U_n(s_1, s_2)$ 只依赖于 $s_1^{-1}s_2$ 的循环结构，并能表示成一个公式，其中用到 **Чебышев 多项式**（Chebyshev polynomials）（见 [4]）.

与上述问题密切相关的是确定 $k\times n$ 拉丁矩形（Latin rectangle）的个数 L_{kn} 和拉丁方的个数 L_n. 一个

$k\times n$ 拉丁矩形可以看成是 n 次置换 $s_1,\cdots,s_k$ 的一个有序组，其中，当 $i\neq j$ 时 $\rho(s_i,s_j)=n$. 可以证明

$$L_{1n}=n!,\ L_{2n}=D_n\cdot n!,\ D_n=D_{n0},$$

$$L_{3n}=n!\sum_{k=0}^{[n/2]}\binom{n}{k}D_kD_{n-k}U_{n-2k},\ U_0=D_0=1.$$

已经证明对 $\varepsilon>0$, $k<n^{\frac{1}{3}-\varepsilon}$ 有

$$L_{kn}\simeq(n!)_k\cdot e^{-\binom{k}{2}}(1+\delta_n),$$

其中当 $n\to\infty$ 时 $\delta_n\to 0$. 当 $n\leqslant 9$ 时的 n 阶拉丁方的个数已经确定.

正整数 n 的分拆个数问题(problem of the number of partitions of a positive integer)最早出现于 1669 年 G. Leibnitz 给 J. Bernoulli 的一封信里. 不过发展这一整类问题的解法是 Euler 完成的，他为此目的成功地使用了无穷乘积形式的生成函数. 特别地，他证明了 $m+n$ 分拆成 n 个加数的分拆个数等于 m 分拆成至多 n 个加数的分拆个数，而后者又等于 m 分拆成加数都不超过 n 的分拆个数，它也等于数

$$m+\binom{n+1}{2}$$

分拆成 n 个不同的加数的分拆个数.

经典的分配问题(allocation problem)是要确定把 m 个不同的东西放入 n 个不同的方格并使有给定数 r 个方格保持空的方法个数 $C_{nm}(r)$. 可以证明

$$C_{nm}(r)=\binom{n}{r}\Delta^{n-r}0^m,\ r=0,\ldots,n,$$

其中

$$\Delta^k0^m=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(k-j)^m$$

右边 $=k!\,\sigma(m,k)$, 其中 $\sigma(m,k)$ 是第二类 Stirling 数.

这种研究，包括其各种推广和变形，是在概率论应用的背景下进行的. 其最有意义的部分是当 m 和 n 无限增大时得到的种种渐近结果.

参考文献

[1] Постников, M. M., Магические квадраты M., 1964.

[2] Hall, M., Combinatorial theory, Blaisdell, 1967.

[3] Ore, O., Theory of graphs, Amer. Math. Soc., 1962.

[4] Riordan, J., An introduction to combinatorial analysis, Wiley, 1958.

[5] Harary, F., Graph theory, Addison-Wesley, 1969 (中译本: F. 哈拉里，图论，上海科技出版社，1980).

B. H. Сачков 撰

【补注】

参考文献

[A1] Ryser, H. J., Combinatorial mathematics, Carus Math. Monogr., 14, Math. Assoc. Amer., 1963 (中译本: H. J. 赖瑟，组合数学，科学出版社，1983).

【译注】 女生问题当元数 v 推及一般时，其设计是历史上著名难题，1971 年由 D. K. Ray-Chaudhuri 和 R. M. Wilson 解决(实际上中国组合数学家陆家羲在 1961－1965 年间已解决此问题，但其结果未能发表).

同一集合 X 上的两个 $S(v)$，如果没有一个区组是共同的，则是不相交的. 用 $d(v)$ 表示两两互不相交的 $S(v)$ 的最大个数，易知对 $v\geqslant 3$ 有 $1\leqslant d(v)\leqslant v-2$，这是由于 v 元集 X 所能构成的全部不同的三元组的总数是 $\binom{v}{3}$，而一个 $S(v)$ 共有 $b=v(v-1)/6$ 个三元组之故. 满足 $d(v)=v-2$ 的所有 $c-2$ 个 $S(v)$ 称为不相交 Steiner 三元系大集. 大集存在问题是组合学史上另一著名难题. 1978－1981 年由陆家羲独立解决，1983－1984 年发表. 由于他 1983 年猝然去世，遗留问题后由 L. Teirlink 解决.

参考文献

[B1] Lu Jiaxi, On large sets of disjoint Steiner triple systems Ⅰ－Ⅲ, *J. Combinatorial Theory* (A), **34** (1983), 1, 140－182; Ⅳ－Ⅵ, *J. Combinatorial Theory* (A), **37** (1984), 3, 136－192.

[B2] 罗见今，Steiner 系若干课题研究的历史回顾，数学进展，**15** (1986), 2, 175－184.

李 乔 译 罗见今、钟 集 校

典型群 [classical group; классическая группа]

右 K 模 E 上的某个半双线性型(sesquilinear form) f 的自同构群，其中 K 是环; f 和 E (同样，有时 K)通常要满足一些附加的条件. 典型群没有精确的定义. 可设 f 是零型或是非退化反身型; 有时 E 取成有限型的自由模. 人们常将与型的自同构群密切相关的其他的群(例如，它们的换位子群或对于中心的商群)或它们的某些推广(例如，E 的在差一个数量因子或 K 的一个自同构的意义下保持 f 的半线性变换的群)算作典型群.

典型群与几何密切相关: 它们能作为射影空间的(也作为对于 Grassmann 的某些簇的，见[2])保持某些自然关联关系的变换的群来刻画. 例如，按射影几何的基本定理，除环 K 上 n 维射影空间 P 中保持共线性的所有变换的群，当 $n\geqslant 3$ 时与 P 中所有射影变换的典型群一致. 由此，典型群结构的研究具有几何意义; 它等价于相应的几何的对称性(自同构)的研究.

当 K 是除环，E 是 K 上的 n 维向量空间时，典型群的理论已建立得非常深入了. 从现在起，假定这些条件已具备，于是下列一系列群(将在后面描述): $GL_n(K)$, $SL_n(K)$, $SP_n(K)$, $O_n(K,f)$, $U_n(K,f)$, 通常称为典型群.

1)设f是零型，则f的全部自同构的群与E的全部自同构(即从E到E的全部线性双射)的群相同；它由$GL_n(K)$表示，称为除环(skew - field) K上n个变量的一般线性群 (general linear group)．有时称为全线性群(full linear group)．$GL_n(K)$中由全部平延(transvection)生成的子群用$SL_n(K)$表示，称为除环K上n个变量的特殊线性群(special linear group)(或幺模群(unimodular group))．它与行列式(determinant)为1的自同构的集合相同．

2)设f是非退化的半双线性型(关于K的一个对合J)，这个型的正交关系是对称的，即

$$f(x,y)=0 \Rightarrow f(y,x)=0.$$

这样的型称为反身的(reflexive)．f的全部自同构的群$U_n(K,f)$称为除环K上n个变量的对于型f的酉群(unitary group)．这只有两种可能：K是域，$J=1$而f是反对称双线性型，或者用一合适的数乘以f并改变J，就可改写f为Hermite型或反Hermite型．对反对称型f，$U_n(K,f)$称为除环K上n个变量的辛群(symplectic group)(若char $K=2$，则必须假定f是交错型)；它记作$SP_n(K)$．记号中不包括f，由于E上所有非退化交错型都是等价的且确定了同构的辛群．在这种情形时n为偶数．对Hermite型和反Hermite型有一特殊情形，即K是特征不为2的域，$J=1$且f是对称双线性型．这时$U_n(K,f)$称为域K上n个变量对于型f的正交群(orthogonal group)，记为$O_n(K,f)$．正交群也可对特征2的域定义(见[2])．通常术语"酉群"对群$U_n(K,f)$是在狭义下使用的，即既非正交群又非辛群，也即对非平凡对合J的情形使用．

与典型群的每个基本系列相应的有它们的射影象$PGL_n(K)$, $PSL_n(K)$, $PSp_n(K)$, $PO_n(K,f)$, $PU_n(K,f)$；这些象是它们模去它们与$GL_n(K)$的中心Z_n的交作成的商群．群

$$O_n^+(K,f)=O_n(K,f)\bigcap SL_n(K)$$

是$O_n(K,f)$的换位子群$\Omega_n(K,f)$，群

$$U_n^+(K,f)=U_n(K,f)\bigcap SL_n(K)$$

以及它们的射影象也分别与典型正交群和典型酉群系列相应．

关于典型群理论的经典探讨，其目的在于阐明它们的代数结构．这化为子群的正规列和它们依次的商群的描述(特别是正规子群和单合成因子的描述)，典型群的自同构及同构的描述(更一般地，同态的描述)，各种类型生成集及它们的关系的描述，等等．关于$GL_n(K)$和$SL_n(K)$类型的群结构的主要结果如下．$GL_n(K)$ $(n\geqslant 2)$的换位子群是$SL_n(K)$，除了$n=2$, $K=F_2$(其中F_q是q个元素的域)的情形以外．$GL_n(K)$的中心Z_n由所有相似变换$x\to x\alpha$组成，其中α是K^*的中心的元素．存在子群的正规列

$$GL_n(K)\supset SL_n(K)\supset SL_n(K)\bigcap Z_n\supset\{1\}.$$

群$GL_n(K)/SL_n(K)$同构于K^*/C，其中K^*是除环K的乘法群，而C是它的换位子群．群$SL_n(K)\bigcap Z_n$是$SL_n(K)$的中心，而商群

$$SL_n(K)/(SL_n(K)\bigcap Z_n)=PSL_n(K)$$

都是单群，除非$n=2$, $K=F_2$或F_3．进一步细节见**一般线性群**(general linear group)，**特殊线性群**(special linear group)，**辛群**(symplectic group)，**正交群**(orthogonal group)及**酉群**(unitary group)．典型群的结构主要依赖于它的类型、除环K、型f的性质以及n．对某些类型典型群可获得更详细的描述．对其他类型还存在一些未解决的问题(这主要涉及$U_n(K,f)$型的群，其中f是非迷向型)．对于典型群构造理论，典型的样式是有一个对几乎所有K, f及n成立的断言以及对断言失效的各例外情况的研究(这样的例外是会产生的，例如对小的n值，低阶的有限域，或对型f的指数的特殊值)．

典型群的同构问题占据特殊的地位．首先有标准同构(standard isomorphisms)．这些是$G(n,K,f)$和$G'(n',K',f')$间的同构，它的定义不依赖于K的特殊性质(也许要除掉它的交换性)．所有其他的同构称为非标准(non - standard)同构．例如从$SP_2(K)$到$SL_2(K)$(其中K是域)，或从$U_2^+(K,f)$到$SL_2(K_0)$(其中K是任何域，$J\neq 1$，f是指数为1的型，而K_0是J的不变量的域)，都存在(标准的)同构．已知的标准同构的更详细的叙述，见[2]，[3]．非标准同构的例子是：

$$PSL_2(F_4)\cong PSL_2(F_5),\quad PSL_2(F_7)\cong PSL_3(F_2),$$
$$PSp_4(F_3)\cong PU_4^+(F_4).$$

还知道，群$PSL_n(K)$和$PSL_m(K')$ $(n,m\geqslant 2)$仅当$n=m$时同构，但要除去情形

$$PSL_2(F_7)\cong PSL_3(F_2);$$

当$m=n>2$时，仅当K和K'是同构或反同构时，才能同构．当$m=n=2$时如K和K'是域也是这样，但除去情形

$$PSL_2(F_4)\cong PSL_2(F_5).$$

群$PSp_n(K)$和$PSp_m(K')$仅当$n=m$和$K\cong K'$时才同构，除去情况$m=n=2$, $K=F_4$及$K'=F_5$外．在$PSL_n(K)$, $PSp_m(K)$, $P\Omega_q(K,f)$(其中K是有限域)之间，除了上面指出的以外没有别的同构．

上面列出的关于典型群构造和它们的同构的结果

是用线性代数和射影几何的方法获得的．它的基础在于典型群的特殊元素及其几何性质的研究，主要的是平延、对合及二维的旋转．后来将 Lie 群和代数几何的方法引入到典型群理论中，因而典型群理论成为线性半单代数群的一般理论的一部分，其中典型群作为型出现，见**代数群的型**（form of algebraic group）：域 K 上经典类型（即 A_n，B_n，C_n，D_n 类型）的线性单代数群的每个型引出典型群，即它的 K 有理点的群（D_4 的型是一个例外，它具有一个三阶的外自同构）．当 K 是 **R** 或 **C** 时，典型群自然地赋有 Lie 群结构，对 p 进域则赋有 p 进解析群的结构，这使得能够将拓扑方法用到这种典型群中，而且反过来，也能从对它的代数结构的了解获得典型群的承载簇的拓扑结构（例如关于它的胞腔分解）的信息．

在 E 是环 K 的模的较一般的情形，典型群的结果不如此详尽（见[3]）．此时典型群的理论与代数 K 理论相联系．

参考文献

[1] Artin, E., Geometric algebra, Interscience, 1957.

[2] Dieudonné, J. A., La géométrie des groups classiques Springer, 1955（中译本：J．狄多涅，典型群的几何学，科学出版社，1960）.

[3] Borel, A. and Mostow, G. D (eds.), Algebraic groups and discontinuous subgroups, Proc. Symp. Pure Math., 9, Amer. Math. Soc., 1966.

[4] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Algebra: Modules. Rings. Forms, 2, Addison-Wesley, 1975, Chapt. 4; 5; 6（译自法文）.

В. Л. Попов 撰

【补注】 代替 [3]，可参考 [A1]，[A2]，[A3]．

参考文献

[A1] Borel, A. and Tits, J., Homomorphisms 'abstraits' de groupes algébriques simples, *Ann. of Math.* (2), **97** (1973), 499–571.

[A2] O'meara, O. T., A survey of the isomorphism theory of the classical groups, in Ring theory and algebra, Vol. 3. M. Dekker, 1980, 225–242.

[A3] Weil, A., Algebras with involutions and the classical groups, *J. Ind. Math. Soc.*, **24** (1960), 589–623.

【译注】

参考文献

[B1] 华罗庚、万哲先，典型群，上海科学技术出版社，1963．

石生明 译 许以超 校

经典正交多项式 [classical orthogonal polynomials; классические ортогональные многочлены]

对 **Jacobi 多项式**（Jacobi polynomials），**Hermite 多项式**（Hermite polynomials）和 **Laguerre 多项式**（Laguerre polynomials）的统称．这些**正交多项式**（orthogonal polynomials）系具有下列共同的性质：

1）权函数 $\varphi(x)$ 在正交区间 (a, b) 上满足 Pearson **微分方程**（Pearson differential equation）

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{p_0 + p_1 x}{q_0 + q_1 x + q_2 x^2} = \frac{A(x)}{B(x)}, \quad x \in (a, b).$$

且在正交区间的端点上满足下列条件：

$$\lim_{x \to a+0} \varphi(x) B(x) = \lim_{x \to b-0} \varphi(x) B(x) = 0$$

2）n 阶多项式 $y = P_n(x)$ 满足微分方程

$$B(x) y'' + [A(x) + B'(x)] y' - n[p_1 + (n+1) q_2] y = 0$$

3）存在推广的 **Rodrigues 公式**（Rodrigues formula）

$$P_n(x) = \frac{c_n}{\varphi(x)} \frac{d^n}{dx^n} [\varphi(x) B^n(x)].$$

其中 c_n 是正规化系数．

4）经典正交多项式的导数亦是经典正交多项式，且在同样的正交区间上正交，一般说来具有不同的权重．

5）对生成函数

$$F(x, w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(x)}{n! c_n} w^n, \quad x \in (a, b).$$

表达式

$$F(x, w) = \frac{1}{\varphi(x)} \frac{\varphi(\lambda)}{1 - wB'(\lambda)}, \quad x \in (a, b)$$

成立，其中 $\lambda = \lambda(x, w)$ 是二次方程 $\zeta - x - wB(\zeta) = 0$ 的根，它对小的 $|w|$ 最靠近 x．

仅这三个提到的正交多项式系统满足这些性质；对于由这三个系统通过自变量的线性变换所得到的系统，这些性质亦成立．

在推广的 Rodrigues 公式中正规化系数 c_n 通常用三种不同方法来选取，其目的是为了得到标准正交多项式，或者具有单位首项系数的正交多项式，或者所谓的标准化正交多项式，它们的引进是由于在应用中最方便且对它们的基本公式有最简单的形式．

经典正交多项式是对 Sturm-Liouville 型方程某些本征值问题的本征函数．在这些问题中每个正交多项式系统（Jacobi 多项式，Hermite 多项式和 Laguerre 多项式）是对应的方程组的唯一的解序列（见[4]）．

经典正交多项式的特别情形是由权函数和正交区间的下列选取所定义的：

1）Jacobi 多项式 $\{P_n(x; \alpha, \beta)\}$ 在区间 $[-1, 1]$ 上和权函数 $\varphi(x) = (1-x)^{\alpha} (1+x)^{\beta} (\alpha, \beta > -1)$ 正交．特别，$\alpha = \beta$ 的情形就给出**超球多项式**（ultraspherical polynomials）或 Gegenbauer **多项式**（Gegenbauer polyno-

mials) $\{P_n(x;\alpha)\}$. **Legendre 多项式**(Legendre polynomials)$\{P_n(x)\}$对应于值 $\alpha=\beta=0$,且在$[-1,1]$上和权函数 $\varphi(x)=1$ 正交.如果 $\alpha=\beta=-1/2$,即 $\varphi(x)=[(1-x)(1+x)]^{1/2}$,那么就得到第一类 **Чебышев 多项式**(Chebyshev polynomials)$\{T_n(x)\}$,而对 $\alpha=\beta=1/2$ 则得到第二类 Чебышев 多项式 $\{U_n(x)\}$.

2) Hermite 多项式$\{H_n(x)\}$在$(-\infty,\infty)$上和权函数 $\varphi(x)=e^{-x^2}$正交.

3) Laguerre 多项式$\{L_n(x;\alpha)\}$在$(0,\infty)$上和权函数 $\varphi(x)=x^{\alpha}e^{-x}$ 正交,这里 $\alpha>-1$.

参考文献

[1] Геронимус, Я. Л., Теория ортогональных многочленов, М. - Л., 1950.

[2] Bateman, H. and Erdélyi, A., Higher transcendental functions. Bessel functions, 2, McGraw - Hill, 1953.

[3] Jackson, D., Fourier series and orthogonal polynomials, Carus Math. Monogr., 6, Math. Assoc. Amer., 1971.

[4] Никифоров, А. Ф., Уваров, В. Б., Основы теории специальных функций, М., 1974.

[5] Суетин, П. К., Классические ортогональные многочлены, М., 1976.

亦见**正交多项式**(orthogonal polynomials)的参考文献.

П. К. Суетин 撰

【补注】 经典正交多项式和从他们通过自变量的线性变换所得到的系统可以称为这样的正交多项式系统,他们满足下列三个性质的任一个(见[A4]):

1) 多项式的导数亦是一正交多项式系统;

2) 多项式是一线性二阶微分算子的本征函数;

3) Rodrigues 公式(见正文)成立,其中 B 是某个多项式.

如果将微分换为有限差分或 q 差分,则就出现更一般的经典型的正交多项式,见[A1]和[A3]中的经典超几何正交多项式的图表.

对 Jacobi 多项式更通用的符号是 $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$,对 Gegenbauer 多项式更通用的符号是 $P_n^{(\alpha)}(x)$ 或 $C_n^{\alpha+1/2}(x)$,对 Laguerre 多项式更通用的符号是 $L_n^{\alpha}(x)$. Laguerre 和 Hermite 多项式可以作为 Jacobi 多项式的极限情形而得到. Jacobi 和 Laguerre 多项式可以分别写为 ${}_2F_1$ 和 ${}_1F_1$ 型的有尽**超几何级数**(hypergeometric series).

经典正交多项式在数学的许多分支中,在物理学中以及在其他科学中有很多应用.这些多项式还有有意义的群理论解释.利用经典正交多项式的级数展开的调和分析是众所周知的,且作为用更一般的正交多项式的**调和分析**(harmonic analysis)的一个典型,见[A5].

参考文献

[A1] Andrews, G. E. and Askey, R., Classical orthogonal polynomials, in C. Brezinski, A. Draux, A. P. Magnus, P. Maroni and A. Ronveaux (eds.): Polynômes Orthogonaux et Applications, Lecture Notes in Math., Vol. 1171, Springer, 1985, 36 – 62.

[A2] Askey, R., Orthogonal polynomials and special functions, Reg. Conf. Ser. Appl. Math., 21, Soc. Industrial Appl. Math., 1975.

[A3] Askey, R. and Wilson, J., Some basic hypergeometric orthogonal polynomials that generalize Jacobi polynomials, Amer. Math. Soc., 1985.

[A4] Chihara, T. S., An introduction to orthogonal polynomials, Gordon and Breach, 1978.

[A5] Szegö, G., Orthogonal polynomials, Amer. Math. Soc., 1975.

孙和生 译

经典半单环 [**classical semi - simple ring**; **классически полупростое кольцо**]

Jacobson 根(Jacobson radical)为零的结合右 Artin 环(或等价地,左 Artin 环). **Wedderburn - Artin 定理**(Wedderburn - Artin theorem)刻画了这类环的结构. 经典半单环类也可用同调性质刻画,见**环的同调分类**(homological classification of rings). 当域的特征数与群阶数互素时,域上每个有限群的**群代数**(group algebra)是经典半单环. 交换的经典半单环是域的有限直和. 与经典半单环有关的 Goldie 定理(Goldie theorem)断言:一个环的经典左分式环是经典半单的,当且仅当它满足左零因子极大条件且不包含任意由左理想组成的无限直和.

Л. А. Скорняков 撰 章璞 译

分类空间 [**classifying space**; **классифицирующее пространство**]

万有纤维丛 $\xi=(E_0,p_0,B_0)$ 的底空间 B_0.

丛 ξ 的万有性应按下述意义理解.设 $k_G(X)$ 为 CW 复形 X 上以 G 为结构群的局部平凡丛(关于(覆盖 X 的恒等映射的)同构)的等价类集合.如果 $\xi=(E,p,B)$ 是结构群为 G 的局部平凡丛,B' 是一个拓扑空间,且 $f,g:B'\to B$ 是同伦映射,则 B' 上的诱导丛 $f^*(\xi)$ 和 $g^*(\xi)$ 属于 $k_G(B')$ 中同一类.局部平凡丛 $\xi^G=(EG,p,BG)$ 称为是万有的(universal),如果对任何 X,映射 $[X,BG]\to k_G(X)$,$f\to f^*(\xi^G)$ 都是一一(且到上)的.这时,空间 BG 称为群 G 的分类空间(classifying space of the group).一个结构群为 G 的主丛(在 CW 复形上的局部平凡丛类中)是万有的,如果该丛的空间有平凡同伦群.

分类空间最重要的例子是相对于群 O_n, SO_n, U_n, SU_n 的 BO_n, BSO_n, BU_n, BSU_n,它们可构造如下.令 $G(n,k)$ 为 **Grassmann 流形**(Grassmann manifold);即以 **Stiefel 流形**(Stiefel manifold)为全空间的主 O_n 丛

的底空间.自然嵌入 $G(n, k) \subset G(n, k+1)$ 和 $V(n, k) \subset V(n, k+1)$ 使我们能做并集 $G(n)=\bigcup_{k=1}^{\infty} G(n, k)$ 和 $V(n)=\bigcup_{k=1}^{\infty} V(n, k)$. 丛 $(V(n), p_0, G(n))$ 是万有的，且 $G(n)=BO_n$ 是群 O_n 的分类空间(对于 $i<k-1$, $\pi_i V(n, k)=0$,且对所有 $i, \pi_i V(n)=0$). Grassmann 流形 $\widetilde{G}(n, k)$ (由 $\mathbf{R}^n$ 中定了向的 n 维平面组成的空间)以相似的方式导出关于群 SO_n 的分类空间 $\bigcup_{k=1}^{\infty} \widetilde{G}(n, k)=\widetilde{G}(n)=BSO_n$. 群 BU_n 和 BSU_n 的分类空间可以类似地构造，所不同的是这时研究的是复 Grassmann 流形.

对任何 O_n 丛 (E, p, B) (其中 B 为 CW 复形), 都存在一个映射 $f: B \to G(n)$, 它在 B 上的诱导丛与 (E, p, B) 同构. 当 B 是光滑 n 维流形，且主 O_n 丛 (E, p, B) 相伴于 B 的切向量丛时, f 的构造尤为简单: 对充分大的 k, 流形 B 可嵌入 Euclid 空间 $\mathbf{R}^{n+k}$,且对 $x \in B$,可取 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}^{n+k}$ 中由 B 在 x 处切空间平移而得到的 n 维子空间. Grassmann 流形提供了构造向量丛分类空间的一个简便方法. 还有一些构造法，可以使我们函子式地为任何拓扑群构造分类空间. 最经常使用的是 Milnor 构造(Milnor construction) ω_G (见主纤维丛 (principal fibre bundle)), 其中 ω_G 在任意拓扑空间上所有可数 G 丛的更广的范畴中是万有的.

分类空间 BG_n 对于 CW 复形 B 上的球面丛 BG_n 的研究起着重要作用; 对于空间 BG_n (以及可定向球面丛 BSG_n 的)构造, Milnor 构造不再适用，因为同伦等价 $S^n \to S^n$ 的集合不是群而是一个 H 空间. 在 [2] 中给出了这些空间的一个明晰的构造. 对于分段线性的及拓扑的微丛也有分类空间 BPl_n 及 $BTop_n$.

对应于 1 维平凡丛与向量丛的相加，有一个自然映射 $BO_n \to BO_{n+1}$. 这个映射可以看作是一个嵌入，因而可以考虑在并集 $BO=\bigcup_{n=1}^{\infty} BO_n$ 中采用归纳极限拓扑. 空间 BSO, BU, BSU, BG, BSG, $BP1$, $BTop$ 等等均可用完全相似的方式来构造. 它们都是连通的有限 CW 复形上某些适当的丛等价类的分类空间. 所有这些空间都有源于纤维丛 Whitney 和的运算的 H 空间结构.

"分类空间"这个词不仅仅在与纤维丛相关时才使用. 有时分类空间指由同伦范畴到集合范畴的任意一个可表示函子 $T: H \to Ens$ 的表示空间(对象). 空间 $B\Gamma_q$ 是这种分类空间的一个例子，在某种意义上，它将流形上余维 q 的**叶状结构** (foliation), 或更一般地，将任意拓扑空间上的 Haefliger q 结构予以分类.

参考文献

[1] Husemoller, D., Fibre bundles, McGraw - Hill, 1966.

[2] Boardman, J. M. and Vogt, R. M., Homotopy invariant algebraic structures on topological spaces, Springer, 1973.

А. Ф. Харшиладзе 撰

【补注】 两个向量丛 ξ_1, ξ_2 (关于某种同构概念)是稳定等价的(stably equivalent), 如果存在平凡丛 γ_1 和 γ_2, 使得 Whitney 和(直和) $\xi \oplus \gamma_1$ 和 $\xi \oplus \gamma_2$ 在选定的意义上同构.

拓扑空间的一个开覆盖 $\{U_i\}$ 是可数的 (numerable). 如果存在一个局部有限的单位分解 $\{u_i\}$, 使得对于所有 i, $u_i^{-1}([0, 1])=U_i$. 一个 B 上的 G 丛 ξ 是可数的，如果有一个可数覆盖 $\{U_i\}$, 使得对所有 i, $\xi|_{U_i}$ 是平凡的.

在文献中，群的分类空间常常被定义为完全零调的主纤维丛的底空间. 我们也可以(如同上面所做的)考虑以 G 为结构群的局部平凡纤维丛类，并把分类空间定义为万有局部平凡丛的底空间. 原则上讲，这样定义的分类空间也就会依赖于特定的纤维类型. 但是正如在文献中所证明的那样,(在同伦等价的意义上)分类空间是独立于纤维类型的.

有关 BPl_n 和 $BTop_n$ 那样的分类空间，详见 [A2]. 分类空间，例如 BSO_n, BU_n, $\cdots$ 的上同调环中的元素，以下面的方式定义了**示性类** (characteristic class): 对于一个给定的元素 $c \in H^*(BU_n)$, 把上同调元素 $c(\xi) = f_\xi^*(c) \in H^*(X)$ 指定给 X 上的 n 维复向量丛 ξ, 其中 $f_\xi: X \to BU_n$ 是使得 $f_\xi^! \xi_n^U$ 同构于 ξ 的(在同伦意义上唯一的)映射,(其中 ξ_n^U 是 BU_n 上的万有复向量丛); $c(\xi)$ 称为由 c 确定的 ξ 的上同调示性类.

参考文献

[A1] Milnor, J. W. and Stasheff, J. D., Characteristic classes, Princeton Univ. Press, 1974.

[A2] Madsen, J. and Milgram, R. J., The classifying spaces for surgery and cobordism of manifolds, Princeton Univ. Press, 1979.

张 平 译 沈信耀 校

Clebsch 条件 [Clebsch condition; Клебша условие]

变分法条件极值问题中，最优性的一个必要条件，为 R. Clebsch 所建立 ([1]). 设极值曲线 $x(t): \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ 给出 **Bolza 问题** (Bolza problem):

$$J(x) = \int_{t_1}^{t_2} f(t, x, \dot{x})\, dt + g(t_1, x(t_1), t_2, x(t_2)).$$

$$f: \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}. \quad g: \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}.$$

$$\varphi(t, x, \dot{x}) = 0, \quad \varphi: \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m, \quad m<n.$$

$$\psi(t_1, x(t_1), t_2, x(t_2)) = 0, \quad \psi: \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p,$$

$$p \leq 2m+2$$

中泛函的条件极小值. 那么，按照乘子方法，它是泛函

$$\int_{t_1}^{t_2} F(t, x, \dot{x}, \lambda)\, dt + \lambda_0 g + \sum_{\mu=1}^{p} e_\mu \psi_\mu \qquad (1)$$

的无条件极值. 这里

$$F(t, x, \dot{x}, \lambda) = \lambda_0 f + \lambda_1(t)\varphi_1 + \cdots + \lambda_m(t)\varphi_m,$$

而

$$\lambda_0, \lambda_i(t),\ i=1,\cdots,m;\ e_\mu,\ \mu=1,\cdots,p$$

是 **Lagrange 乘子** (Lagrange multipliers). 它们与 $x(t)$ 一起须由泛函(1)极值的必要条件来决定. 一个这样的必要条件是 Clebsch 条件.

为了 $x(t)$ 在上述问题中是极小的, Clebsch 条件必须成立. 它要求对于满足方程

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k(t, x, \dot{x})}{\partial \dot{x}_i} \xi_i = 0,\ k=1,\cdots,m$$

的数 ξ_i $(i=1,\cdots,n)$ 的任何非平凡的集合, 下面的二次型是非负的:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 F(t, x, \dot{x}, \lambda)}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_j} \xi_i \xi_j \geqslant 0.$$

Clebsch 必要条件与更强的必要条件 —— **Weierstrass 条件(关于变分极值的)** (Weierstrass conditions (for a variational extremum)) 有直接关系, 并且它能够作为后者的一个推论而得到.

在变分法的无条件极值问题中, 特别在变分法的最简单的问题中, 与 Clebsch 条件相似的是 **Legendre 条件** (Legendre condition).

在最优控制问题中, Clebsch 条件等价于 **Hamilton 函数** (Hamilton function) 二阶微分的非正性, 后者对于一个开区域中的最优控制, 是使 **Понтрягин 极大值原理** (Pontryagin maximum principle) 得以满足的一个必要条件.

参考文献

[1] Clebsch, R. F. A., *J. für Math.*, **55** (1858), 254.

[2] Bliss, G. A., Lectures on the calculus of variations, Chicago Univ. Press, 1947.

И. Б. Ваннярский 撰 李炳仁 译 王声望 校

Clifford 代数 [Clifford algebra; клиффорда алгебра]

交换环上的有限维结合代数; 1876 年它首先由 Clifford 研究. 设 K 是具有单位元的交换环, E 是一个自由 K 模且 Q 是 E 上的二次型. 二次型 Q (或偶对 (E, Q)) 的 Clifford 代数指的是 K 模 E 的张量代数 $T(E)$ 模以由 $x \otimes x - Q(x) \cdot 1$ $(x \in E)$ 生成的双边理想而得到的商代数 $C(Q)$. E 的元素与它们在 $C(Q)$ 中对应的陪集被视为相同的. 对任意 $x, y \in E$ 有 $xy+yx=\Phi(x, y) \cdot 1$, 其中 Φ: $E \times E \to K$ 是对应于 Q 的对称双线性型.

对于零二次型 Q 的情形, $C(Q)$ 即是 E 的**外代数** (exterior algebra) $\Lambda(E)$. 如果 $K=\mathbf{R}$ 为实数域, 且 Q 是 $\mathbf{R}$ 上的 n 维向量空间 E 上的非退化二次型, 则 $C(Q)$ 是交错数组成的代数 ${}^{l}A_{n+1}$, 其中 l 是 Q 的标准型中正平方项的个数(见**交错数** (alternion)).

设 $e_1, \cdots, e_n$ 是 K 模 E 的基. 这时元素 $1, e_{i_1} \cdots e_{i_k}$ $(i_1 < \cdots < i_k)$ 构成 K 模 $C(Q)$ 的基. 特别地, $C(Q)$ 是秩为 2^n 的自由 K 模. 如果 $e_1, \cdots, e_n$ 关于 Q 还是正交的, 则 $C(Q)$ 可以看作是一个具有生成元 $1, e_1, \cdots, e_n$ 的 K 代数, 它们满足关系 $e_i e_j = -e_j e_i$ $(i \neq j)$ 与 $e_i^2 = Q(e_i)$. 由 E 中偶数个元素的乘积生成的 $C(Q)$ 的子模构成 $C(Q)$ 的一个子代数, 记为 $C^+(Q)$.

设 K 是域且二次型 Q 是非退化的. 当 n 是偶数时, $C(Q)$ 是 K 上的 2^n 维**中心单代数** (central simple algebra), 子代数 $C^+(Q)$ 是可分的, 且它的中心 Z 在 K 上具有维数 2. 如果 K 是代数闭的, 则当 n 为偶数时, $C(Q)$ 是矩阵代数且 $C^+(Q)$ 是两个矩阵代数的积. (另一方面, 如果 n 是奇数, 则 $C^+(Q)$ 是矩阵代数且 $C(Q)$ 是两个矩阵代数的积.)

$C(Q)$ (或 $C^+(Q)$) 的满足 $sEs^{-1}=E$ 的可逆元 s 构成二次型 Q 的 Clifford 群 (Clifford group) $G(Q)$ (或特殊 Clifford 群 (special Clifford group) $G^+(Q)$). 变换

$$x \to sxs^{-1}\quad (x \in G(Q))$$

在子空间 E 上的限制定义了一个同态 $\varphi: G(Q) \to \mathrm{O}(Q)$, 这里 $\mathrm{O}(Q)$ 是二次型 Q 的**正交群** (orthogonal group). 核 $\operatorname{Ker}\varphi$ 由代数 Z 的可逆元构成且 $(\operatorname{Ker}\varphi) \cap G^+(Q) = K^*$. 如果 n 是偶数, 则 $\varphi(G(Q)) = \mathrm{O}(Q)$, 而 $\varphi(G^+(Q)) = \mathrm{O}^+(Q)$ 是 $\mathrm{O}(Q)$ 中指标为 2 的子群, 在 K 的特征不为 2 的情况下, 此子群就是特殊正交群 $\mathrm{SO}(Q)$. 如果 n 是奇数, 则

$$\varphi(G(Q)) = \varphi(G^+(Q)) = \mathrm{SO}(Q).$$

设 $\beta: C(Q) \to C(Q)$ 是由张量代数 $T(E)$ 的反自同构

$$x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \to x_n \otimes \cdots \otimes x_1$$

诱导的 $C(Q)$ 的反自同构. 这时, 群

$$\mathrm{Spin}(Q) = \{s \in G^+(Q): \beta(s) = s^{-1}\}$$

称为二次型 Q (或 Clifford 代数 $C(Q)$) 的旋量群 (spinor group).

同态 φ: $\mathrm{Spin}(Q) \to \mathrm{O}^+(Q)$ 有核 $\{\pm 1\}$. 如果 $K=\mathbf{C}$ 或 $K=\mathbf{R}$ 且 Q 是正定的, 则 $\operatorname{Im}\varphi = \mathrm{O}^+(Q) = \mathrm{SO}(Q)$, 且 $\mathrm{Spin}(Q)$ 等同于经典的**旋量群** (spinor group).

参考文献

[1] Bourbaki, N., Elements of mathematics, Addison-Wesley, 1966–1977 (译自法文).

[2] Dieudonné, J. A., La géométrie des groups classiques, Springer, 1955.

[3] Кириллов, А. А., Элементы теории представлений, М., 1972 (英译本: Kirillov, A. A., Elements of the theory of representations, Springer, 1976).

[4] Cartan, E., Leçons sur la théorie des spineurs, Hermann, 1938.

И. В. Долгачев 撰

【补注】 由自由 K 模 E 的偶数个元素的乘积生成的代数 $C^+(Q)$ 亦称为二次型 Q 的偶 Clifford 代数 (even Clifford algebra). 关于 $Q=0$ 的详情可参见条目**外代数** (exterior algebra) (或 Grassmann 代数 (Grassmann algebra)) 及 **Cartan 外形式法** (Cartan method of exterior forms).

参考文献

[A1] Chevalley, C., The algebraic theory of spinors, Columbia Univ. Press, 1954.

[A2] O'Meara, O. T., Introduction to quadratic forms, Springer, 1973.

[A3] Chevalley, C., The construction and study of certain important algebras, *Math. Soc. of Japan*, 1955, Chapt. III.

龚明鹏 译

Clifford 平行线 [Clifford parallel; Клиффорда параллель]

椭圆空间中与一条给定的(基)直线距离为常数的直线. 通过一给定直线和它的极线外的每一点, 有该直线的两条 Clifford 平行线. Clifford 平行线绕它的基直线旋转而形成的曲面称为 Clifford 曲面 (Clifford surface). Clifford 曲面的 Gauss 曲率恒等于零.

W. Clifford (1873) 首先证明了Clifford 曲面的存在性.

参考文献

[1] Богомолов, С. А., Введение в неевклидову геометрию Римана, Л. - М., 1934.

[2] Розенфельд, Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969.

А. Б. Иванов 撰

【补注】 设 E 是 $(n+1)$ 维 Euclid 空间, $P=P(E)$ 为它的由所有过原点的直线组成的相伴射影空间. 对 $L, L'\in P$, 设 $d(L,L')\in[0,\pi/2]$ 为在 E 中直线 L 和 L' 之间的角, 那么具有这个度量的 P 称为相伴于 E 的椭圆空间 (elliptic space). 由这个度量诱导的拓扑是通常的一种, 即 $E\to P$ 的商拓扑. 本条目处理 $n=3$ 的情形.

通过 $\mathbf{P}(\mathbf{R}^4)$ 的两点 $x=(x_0:x_1:x_2:x_3)$ 和 $y=(y_0:y_1:y_2:y_3)$ 的线 l 的 (绝对) 极线, 是由满足 $\langle x, z\rangle=\langle y, z\rangle=0$ 的所有点 $z=(z_0:z_1:z_2:z_3)$ 组成的直线, 这里 $\langle,\rangle$ 表示通常的内积.

在 $\mathbf{P}(\mathbf{R}^4)$ 的二重覆盖 S^3 上也有 Clifford 平行性 (Clifford parallelism) 的概念 [A2].

参考文献

[A1] Klein, F., Vorlesungen über nichteuklidische Geometrie, Springer, 1928.

[A2] Berger, M., Geometry, II, Springer, 1987 (中译本: M. 贝尔热, 几何, 第二卷, 科学出版社, 1989).

潘养廉 译

Clifford 半群 [Clifford semi-group; Клиффордова полугруппа], 完全正则半群 (completely-regular semi-group)

一个半群, 它的每个元素皆为群元 (group element), 即处于某子群中. 半群的元素是群元, 当且仅当它是完全**正则元** (regular element). 半群 S 是 Clifford 半群, 当且仅当下列条件之一成立: 1) 对每个 $a\in S$ 有 $a\in a^2S\cap Sa^2$; 2) S 的每个单边理想 I 都是孤立的 (isolated) (或半素的 (semi-prime)), 即若 $x\notin I$, 则对任何自然数 n 有 $x^n\notin I$.

与**逆半群** (inversion semi-group) 一道, Clifford 半群是最重要类型的正则半群. 它们的研究开始于 A. H. Clifford 的基本论文([1]). 每个 Clifford 半群有一个(唯一)的群分解, 这些群类恰是 $\mathscr{H}$ 类(见 **Green 等价关系** (Green equivalence relations)). 这样的分解不一定是**半群的带** (band of semi-group); 已经知道(见[3]) 这件事成立的条件. Green 关系 $\mathscr{J}$ 和 $\mathscr{D}$ 在 Clifford 半群上是一致的. 每个**完全单半群** (completely-simple semi-group) 是 Clifford 半群; Clifford 半群是完全单的, 当且仅当它是**单半群** (simple semi-group). 每个 Clifford 半群 S 可分解成完全单半群的半格; 这个分解是唯一的, 它的分量正是 $\mathscr{D}$ 类, 且对应的商半格同构于 S 的主理想的半格. 反之, 可分解成完全单半群的半格的半群是 Clifford 半群.

对于 Clifford 半群 S, 下列条件等价: 1) S 是逆半群; 2) S 的每个幂等元在中心中, 即它与 S 的每个元素都可交换; 3) S 的每个单边理想皆为双边理想; 4) 在 S 上 Green 关系 $\mathscr{D}$ 和 $\mathscr{H}$ 一致; 5) S 是群的半格; 6) S 是群与具有零的群的次直积.

任意 Clifford 半群的完全单半群的半格分解决定了它的"全局结构". 这个分解的分量中的元素的乘法规则由 Rees 定理给定, 见**完全单半群**. 对 Clifford 半群的进一步的研究在很大程度上是要搞清它们的"精细结构", 即决定不同分量中元素的乘法规则. 当所有分量是群时 (即对于逆 Clifford 半群) 利用所谓群的直谱的和 (sum of a direct spectrum of groups) 可以有一个构造性的描述. 令 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是一族互不相交的群, 令 A 是一个半格 (见**幂等元的半群** (idempotents, semi-group of)), 对于每对元素 $\alpha,\beta\in A(\alpha\geqslant\beta)$, 都有一个同态 $\varphi_{\alpha,\beta}:G_\alpha\to G_\beta$, 使得对每个 α, $\varphi_{\alpha,\alpha}$ 是恒等自同构, 又当 $\alpha\geqslant\beta\geqslant\gamma$ 时有 $\varphi_{\alpha,\beta}\circ\varphi_{\beta,\gamma}=\varphi_{\alpha,\gamma}$. 在并集 $S=\bigcup_{\alpha\in A}G_\alpha$ 上可以定义乘积 $\cdot$: 对任意 $a\in G_\alpha$ 和 $b\in G_\beta$, 令 $a\cdot b=a\varphi_{\alpha,\alpha\beta}\cdot b\varphi_{\beta,\alpha\beta}$.

于是 S 成为一个逆 Clifford 半群. 反之每个逆 Clifford 半群都可以这样得到.

一般地, Clifford 半群的精细结构问题是极端复杂的. 至今 (1987) 对它还没有满意的答案. 在[5] 中可以找到, 用完全单半群, 用它们的平移, 半格, 以及具有特殊性质的映射包来描述 Clifford 半群的某些很复杂

的构造．正统的 Clifford 半群的情形已取得很大进展，见**正则半群** (regular semi-group)；这样的半群称为正统群 (orthogroups)，对于它们有一些相当繁重但是清楚的构造 (见[2])．所有提到的构造在某些方面推广了[1]中得到的逆 Clifford 半群的构造．

参考文献

[1] Clifford, A. H., Semigroups admitting relative inverses, *Ann. of Math.*, **42** (1941), 4, 1037－1049.

[2] Clifford, A. H., A structure theorem for orthogroups, *J. Pure Appl. Algebra*, **8** (1976), 1, 23－50.

[3] Clifford, A. H. and Preston, G. B., The algebraic theory of semigroups, 1－2, Amer. Math. Soc., 1961－1967.

[4] Ляпин, Е. С., Полугруппы, М., 1960 (英译本: Lyapin, E. S., Semigroups Amer, Math. Soc., 1974).

[5] Petrich, M., The structure of completely regular semigroups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **189** (1974), 211－236.

Л. Н. Шеврин 撰

【补注】 前文中，函数符号写在了变量后面，这在半群理论中是共同的．

涉及 Clifford 半群近代工作的广泛书目，可以在[A1]以及[A2]中 J. Meakin 和 K. S. S. Nambooripad 的文章中找到．

参考文献

[A1] Petrich, M., Inverse semigroups, Wiley, 1984.

[A2] Pollák, G., Schwartz, St. and Steinfeld, O. (eds.), Semigroups, Coll. Math. Soc. J. Bolyai, 39, North-Holland, 1985.

石生明 译　许以超 校

Clifford 定理 [Clifford theorem；Клиффорда теорема]

在代数曲线上一个特殊除子的次数与维数之间建立不等式的定理．它由 W. Clifford 证明．

设 X 是代数闭域上光滑射影曲线，D 是 X 上除子．设 D 的次数为 $\deg D$，维数为 $l(D)$．使 $l(K-D)>0$ 的正除子 D 称为特殊除子，这里 K 是 X 上的典范除子．Clifford 定理断言：对任何特殊除子 D，$\deg D\geqslant 2l(D)-2$，而且当 $D=0$ 或 $D=K$ 或者 X 是超椭圆曲线，D 是 X 上唯一的二次特殊除子的倍数时，等式成立．Clifford 定理的等价叙述是：$\dim|D|\leqslant(\deg D)/2$，这里 $|D|$ 是 D 的线性系．从 Clifford 定理可以知道，对 X 上满足 $0\leqslant\deg D\leqslant 2g-2$ 的任意除子 D，上述不等式都成立，这里 $g=l(K)$ 是 X 的亏格．

参考文献

[1] Walker, R. J., Algebraic curves, Springer, 1978.

[2] Чеботарев, Н. Г., Теория алгебраических функций, М.-Л., 1948.

[3] Шафаревич, И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972 (英译本: Shafarevich, I. R., Basic algebraic geometry, Springer, 1977).

[4] Hartshorne, R., Algebraic geometry, Springer, 1977.

В. А. Исковских 撰

【补注】

参考文献

[A1] Griffiths, P. A., Harris, J. E., Principles of algebraic geometry, Wiley, 1978.

[A2] Arbarello, E., Cornalba, M., Harris, J. E., Griffiths, P. A., Geometry of algebraic curves, 1, Springer, 1985

陈志杰 译

克隆 [clone；клон]，运算的

形如 $\omega: A^n\to A$ 的有限元运算的集合，此集合关于运算的(某种)复合是封闭的，并且包含所有射影运算 $\omega_n^i: A^n\to A$，ω_n^i 定义为：对 A^n 的任意 n 元组 $(a_1,\cdots,a_n)$,

$$\omega_n^i(a_1,\ldots,a_i,\ldots,a_n)=a_i$$

其中 $n\geqslant 1$，$i=1,2,\cdots$，A 是任意一个固定的集合．这里说的运算 $\omega_1(x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_n)$ 与 $\omega_2(y_1,\cdots,y_m)$ 的复合指的是由公式

$$\omega_1(x_1,\ldots,x_{j-1},\omega_2(y_1,\ldots,y_m),x_{j+1},\ldots,x_n)$$

所定义的一个运算 $\omega_3(z_1,\cdots,z_l)$ (对某一 $j\leqslant n$)．其中变数集合 $X=\{x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_n\}$，$Y=\{y_1,\cdots,y_m\}$ 和 $Z=\{z_1,\cdots,z_l\}$ 满足等式

$$Z=(X\setminus\{x_j\})\cup Y,\quad m,l\geqslant 1.$$

В. В. Кудрявцев 撰

【补注】 "clone" 这个词是 P. Hall 创造的．它第一次出现在[A1]中(第一版)．

参考文献

[A1] Cohn, P. M., Universal algebra, Reidel, 1981.

卢景波 译

闭范畴 [closed category；замкнутая категория]

一个具有附加结构的范畴，其中内部 Hom 函子可以用来作为抽象张量积的右伴随函子．

一个范畴 $\mathfrak{M}$ 称为闭的(closed)如果已经给定了一个双函子 $\otimes$：$\mathfrak{M}\times\mathfrak{M}\to\mathfrak{M}$ (见**函子** (functor)) 与一个特定的对象 I，容许自然同构

$$\alpha_{ABC}:(A\otimes B)\otimes C\to A\otimes(B\otimes C)\ \text{(结合性)},$$

$$\lambda_A: I\otimes A\to A\ \text{(左单位元)},$$

$$\rho_A: A\otimes I\to A\ \text{(右单位元)},$$

$$\kappa_{AB}: A\otimes B\to B\otimes A\ \text{(交换性)}.$$

使下列的条件都满足：1) 自然同构 α、λ、ρ、κ 都是凝聚的；2) 每一个函子

$$H_{AB}(X)=H_{\mathfrak{M}}(A\otimes X,B):\mathfrak{M}\to\mathfrak{S},$$

都是可表示的，这里的 $\mathfrak{S}$ 是集合的范畴．表示对象通常记作 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{M}}(A, B)$，并且它们可被看成双函子 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{M}}: \mathfrak{M}^{*} \times \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$（内部 Hom 函子）在对象上的值，如果双函子 $\otimes$ 与一个积重合，而 I 是 $\mathfrak{M}$ 的右零元（终对象），则 $\mathfrak{M}$ 称为一个 Descartes 闭范畴(Cartesian-closed category)．

下列的范畴都是 Descartes 闭的：集合的范畴，小范畴的范畴，在一个拓扑空间上的集合的层的范畴．下列的范畴是闭的：有单位元的交换环上的模的范畴，与实(或复)Banach空间及范数不超过 1 的线性映射的范畴．

参考文献

[1] Бунге, М.,《Математика》, 16 (1972), 2, 11–46.

[2] Lawvere, F. W., Introduction, in Toposes, algebraic topology and logic, Springer, 1972.

[3] Dubuc, E. J., Kan extensions in enriched category theory, Springer, 1970.

М. Ш. Цаленко 撰

【补注】

参考文献

[A1] MacLane, S., Category for the working mathematician, Springer, 1971, Chapt. Ⅳ, Sect. 6; Chapt. Ⅶ, Sect. 7.

周伯埙 译

闭公式 [closed formula; замкнутая формула]

见**形式算术** (arithmetic, formal)．

【补注】 闭公式是形式(逻辑)语言中不含自由变量的公式．

闭测地线 [closed geodesic; замкнутая геодезическая]

在 **Riemann 流形**(Riemannian manifold)M 上，本身是**测地线**(geodesic line)的闭光滑曲线．更一般的概念是环路测地线(geodesic loop)，即当 $t=a$ 和 $t=b$ 时通过同一点 p 的测地线 $\gamma(t)(a \leqslant t \leqslant b)$；作为闭曲线它在点 p 可能有一个角．一条环路测地线是一条闭测地线，仅当它没有角，即 $\gamma(t)$ 在 $t=a$ 和 $t=b$ 有相同的切线．在自然射影 $TM \to M$ 下，M 的切丛 TM 中的**测地流**(geodesic flow)的闭轨线被投影成闭测地线．同一条闭测地线被绕行多次而得到的曲线称为多重闭测地线(multiple closed geodesic)．非多重的闭测地线称为简单闭测地线(simple closed geodesic)．

闭测地线和环路测地线的定义可逐字不变地搬到 M 具有 **Finsler 度量**(Finsler metric)或**仿射联络**(affine connection)的情形．如果 M 是一个度量空间(此时测地线定义成局部最短线)，环路测地线的定义仍是相同的，但闭测地线的定义需稍作修改，因为光滑性或角的概念并不存在．考虑环路测地线 $\gamma(t)(a \leqslant t \leqslant b)$，这里 $\gamma(a)=\gamma(b)=p$ 且 γ 在任何子区间上都不是常值，如果对充分小的 $\varepsilon>0$，线

$$\bar{\gamma}(s)=\begin{cases}\gamma(b+s), & -\varepsilon \leqslant s \leqslant 0, \\ \gamma(a+s), & 0 \leqslant s \leqslant \varepsilon,\end{cases}$$

即 γ 的两段弧的并：第一段连接 $\gamma(b-\varepsilon)$ 和 $\gamma(b)=p$，第二段连接 $p=\gamma(a)$ 和 $\gamma(a+\varepsilon)$，是它的端点 $\gamma(b-\varepsilon)$ 和 $\gamma(a+\varepsilon)$ 之间的最短线，那么 $\gamma(t)$ 是闭测地线．

对闭测地线的已有研究主要是闭 Riemann 流形的情形；对 Finsler 流形也有一些结果；在具有某种特殊性质的更一般的度量空间(称为 Busemann G 空间；见**测地几何学**(geodesic geometry))的情形已经得到一些结果([1])．这些研究是由 J. Hadamard ([2])，H. Poincaré ([3]) 和 G. Birkhoff ([4]) 开创的．

Hadamard 是研究负曲率流形上(无须是闭的)测地线的先驱．重要的现代结果涉及到其上各点所有二维方向的曲率都是负的闭流形 M．对这种流形 M 上的闭测地线已经证明，测地流的闭轨线在 TM 上是处处稠密的(见[5])(类似的现象在几个具有正曲率的例子中已被发现，虽然并不总有([6]))；对长度不超过 l 的闭测地线的数目，作为 l 的递增函数，存在对它的增长的一种估计(见[7])．Hadamard 用闭测地线来近似非闭测地线的长线段——这可认为是**符号动力学**(symbolic dynamics)的开端．

Hadamard 的另一定理是利用**基本群**(fundamental group)$\pi_1(M)$ 的性质，给出闭流形 M(没有关于它的曲率的任何假定)上闭测地线的某些信息．一条有向闭曲线 γ 在 $\pi_1(M)$ 中决定了一个共轭类 $[\gamma]$；同一个共轭类中所有的曲线可通过曲线的自由**同伦**(homotopy)互相导出．结果表明：除了对应于恒等元的共轭类外，对 $\pi_1(M)$ 的每一个共轭类 K，满足 $[\gamma]=K$ 的闭曲线 γ 的集合含有最短的闭曲线，这些最短闭曲线是闭测地线．这个定理(它不仅对 Riemann 度量或 Finsler 度量成立，而且在一般的 Busemann G 空间也成立)是**大范围变分学**(variational calculus in the large)最简单也是历史上最先的结果．然而，作为一个独立的研究领域，大范围变分学则是产生于变分学对研究与球面同胚的流形上的闭测地线的更深奥的应用，对这种流形(更一般地，对单连通流形)上面的定理是没有意义的．

在这种流形上闭测地线的研究由 Poincaré 提出(精确地说：他关心的是卵形面(ovaloid)，即二维凸闭曲面)．由于[3]中的讨论，产生了下面的猜想：在"一般"情形，一个卵形面上存在三条无自交点的闭测地线；其中两条按线性近似是稳定的，而另一条是不稳定的．闭测地线的存在性，它们个数的估计以及它们的稳定性问题之间的这种联系，构成了 Poincaré 的富有启发性论证的一个基本特色，这种论证主要涉及动力系统理论．不过，仅仅对充分接近于"标准"度量(Euclid 空间中球面

$x^2+y^2+z^2=1$ 上 的常用度量,见[8])的那些度量,这种论证才可以在完全严格的水准上完成.对于远离标准度量的那些度量,关于闭测地线假定的 Poincaré 稳定性不一定有效([9]).

开创单连通流形上闭测地线的变分方法的荣誉归于 Birkhoff([4]).他证明了在同胚于球面的流形上,至少存在一条闭测地线.以后,Л. А. Люстерник 和 Л. Г. Шнирельман 证明了关于在二维球面上三条无自交点的闭测地线存在性的 Poincaré 猜想(见[10]).

关于"典型"Riemann(或 Finsler)度量(即在具有给定光滑性阶数的所有度量组成的空间中构成第二范畴集的度量)的闭测地线的性质已有研究(见[11]—[13],[16]).

球面上的标准度量具有这样的性质:它的所有测地线都是闭的且长度相等;球面上还有具有这个性质的其他度量([14]).对流形的拓扑性质以及它们的具有上述性质或其变种性质的度量等问题也已被考虑.

闭测地线理论的详细阐述可以在[15]中找到.

参考文献

[1] Busemann, H., The geometry of geodesics, Acad Press, 1955.

[2] Hadamard, J., Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésique, *J. Math. Pure Appl.*, **4** (1898), 27–75.

[3] Poincaré, H., Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **6** (1904), 237–274.

[4] Birkhoff, G. D., Dynamical systems with two degrees of freedom, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **18** (1917), 199–300.

[5] Аносов, Д. В., Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны, М., 1967(英译本: Anosov, D. V., Geodesic flows on closed Riemannian manifolds with negative curvature, *Proc. Steklov. Inst. Math.*, **90** (1969), 235).

[6] Weinstein, A. D., Sur la non-densité des géodésiques fermées, *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A*, **271**(1970), 504.

[7] Синай, Я. Г., 《Изв. АН СССР Сер матем》, **30** (1966), 6, 1275–1296.

[8] Грюнталь, А. И., 《Успехи матем. наук》, **32** (1977), 4, 244–245.

[9] Грюнталь, А. И., 《Успехи матем. наук》, **32** (1977), 5, 166.

[10] Люстерник, Л. А., Шнирельман, Л. Г., 《Успехи матем. наук》, **2** (1947), 1, 166–217.

[11] Abraham, R., Bumpy metrics, in Global Analysis, Proc. Symp. Pure Math., Vol. 14, Amer. Math. Soc., 1970, 1–3.

[12] Klingenberg, W. and Takens, F., Generic properties of geodesic flows, *Math. Ann.*, **197**(1972), 4, 323–334.

[13] Klingenberg, W., Existence of infinitely many closed geodesics, *J. Diff. Geom.*, **11**(1976), 299–308.

[14] Zoll, O., Ueber Flächen mit Scharen geschlossener geodetischer Linien, *Math. Ann.*, **57** (1903), 108–133

[15] Klingenberg, W., Lectures on closed geodesics, Springer, 1978.

[16] Anosov, D. V., On generic properties of closed geodesics, *Math. USSR Izv.*, **21** (1983), 1, 1–29 (*Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat.*, **46**(1982), 4, 675–709).

Д. В. Аносов 撰

【补注】 在每点关于任何二维方向的曲率都是负的闭流形 M 称为具有负截曲率(negative sectional curvature)(可类似地定义正截曲率(positive sectional curvature)).

一条道路或环路的自由同伦(free homotopy)就是无需有固定基点的同伦.

著名的 Люстерник-Фет 定理(Lyusternik-Fet theorem)([A1])说,在每个紧 Riemann 流形 M 上存在一条闭测地线,因而拓广了 Birkhoff 的结果.对紧 Riemann 流形上的闭曲线的系统研究是由 M. Morse 开创的.他的主要结果是将闭曲线中的闭测地线描述为能量积分的非常值临界点.这种处理方法的现代和精炼的形式应归于 W. Klingenberg:按照一种规范方式,紧 Riemann 流形 M 上的 H^1 类闭曲线空间是一个 Hilbert 流形 ΛM,它具有使能量积分成为可微函数的 Riemann 度量并被赋予规范的与单位圆的种种参数表示相对应的 $O(2)$ 作用.用这种方法能够证明——至少一般地——在 M 上总存在无限多条闭测地线,如果 M 是单连通的.D. Gromoll 和 W. Meyer 证明:如果 ΛM 的 Betti 数序列 $(b_i\,\Lambda M)$ 是无界序列,那么这个结论甚至对 M 上一切度量都成立(Gromoll-Meyer 闭测地线定理(Gromoll-Meyer theorem on closed geodesics),[A2]).详细的阐述见[15].

参考文献

[A1] Lyusternik, L. A. and Fet, A. I., Variational problems on closed manifolds, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, **81** (1951), 17–18 (俄文).

[A2] Gromoll, D. and Meyer, W., Periodic geodesics on compact Riemannian manifolds, *J. Diff. Geom.*, **8** (1973), 207–223.

潘养廉 译

闭图象定理 [closed-graph theorem; замкнутый графк(теорема о замкнутом графике)]

设 X 和 Y 是具有位移不变距离(即 $\rho(x,y)=\rho(x+a,y+a)$, $x,y,a\in X$, 对于 Y 类似)的完全度量线性空间,A 是由 X 到 Y 的线性算子.如果该算子的图象 $\mathrm{Gr}\,A=\{(x,Ax): x\in X\}$ 是 Descartes 积 $X\times Y$ 的闭子集,那么算子 A 是连续的.闭图象定理有各种推广;例如,有闭图象的由分离桶型空间到完满完全

空间的线性映射是连续的．紧密相关的定理是开映射定理和 Banach 同胚定理．

参考文献

[1] Rudin, W., Functional analysis, McGraw-Hill, 1979（中译本：W. Rudin，泛函分析，湖北教育出版社，1989）．

[2] Robertson, A. P. and Robertson, W., Topological vector spaces, Cambridge Univ. Press, 1964.

В. И. Соболев 撰

【补注】 亦见**开映射定理**(open-mapping theorem)(其中也讲到 Banach 同胚定理)．　　史树中 译

闭流形 [closed manifold; замкнутое многообразие]

紧无边流形(见**边界(流形的)**(boundary (of a manifold)))．例如，一个 k 维紧流形的所有边界点的集合是一个 $(k-1)$ 维闭流形．　　徐森林 译

闭映射 [closed mapping; замкнутое отображение]

一个拓扑空间到另一个拓扑空间的映射，使得每个闭集的象仍是闭集．连续闭映射类在一般拓扑学及其应用中起着重要的作用．连续闭紧映射称为完满映射(perfect mapping)．T_1 空间上的连续映射 $f:X\to Y(f(X)=Y)$ 是闭的，当且仅当在 Александров 意义下(上连续)分解 $\{f^{-1}y: y\in Y\}$ 是连续的，或者对 X 中每个开集 U，集合 $f^{\#}=\{y\in Y: f^{-1}y\in U\}$ 是 U 中开集．后一个性质是上半连续(upper semi-continuous)多值映射定义的基础．也就是说，f 是闭的，当且仅当它的(多值)逆映射是上连续的．Hausdorff 紧统到 Hausdorff 空间上的任何连续映射是闭的．T_1 空间上的任何连续闭映射是商映射；反之不成立．平面到直线上的正交投影是连续的开的，但不是闭的．类似地，并不是每个连续闭映射都是开的．如果 $f:X\to Y$ 是连续的并且是闭的，X,Y 完全正则，那么，对任何点 $y\in Y, \bar{f}^{-1}y=[f^{-1}y]\beta X$．这里 βX 是 **Stone-Čech 紧化**(Stone-Čech compactification)，$\bar{f}:\beta X\to\beta Y$ 是这个映射到 X 和 Y 的 Stone-Čech 紧化上的连续扩张；在正规空间类里，其逆也是正确的．在连续闭映射之下，象保持了下述拓扑性质：正规性；族状正规性；完全正规性；仿紧性；弱仿紧性．而完全正则性和强仿紧性在连续闭映射——甚至在完满映射——之下未必保持．在连续闭映射下，前象未必保持上述性质．关于这一点需要说明：在连续闭映射之下，点的前象未必是紧的，尽管在很多情况下，连续闭映射和完满映射之间只有很小的差别．如果 f 是度量空间 X 到满足第一可数性公理的空间 Y 上的连续闭映射，那么 Y 是可度量化的，并且对每个 $y\in Y$，前象 $f^{-1}y$ 的边界是紧的．如果 f 是度量空间 X 到 T_1 空间 Y 上的连续闭映射，那么，使得 $f^{-1}y$ 非紧的所有点 $y\in Y$ 的集合是 σ 离散的．

参考文献

[1] Архангельский, А. В., 《Успехи матем. наук》, 21 (1966), 4, 133－184.

[2] Архангельский, А. В., Пономарев, В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974（英译本：Arkhangel'skiĭ, A. V. and Ponomarev, V. I., Fundamentals of general topology: problems and exercises, Reidel, 1984）．

[3] Engelking, R., General topology, PWN, 1977.

В. И. Пономарев 撰

【补注】 闭映射的概念可引出**空间的上半连续分解**(upper semi-continuous decomposition of a space)的概念，这就是空间 X 的分解 E，它使得商映射 $q: X\to X/E$ 是闭的．

在俄文文献里，[A] 表示集合 A 的闭包，所以在这一条目里，$[f^{-1}y]\ \beta X$ 是在空间 βX 中纤维 $f^{-1}y$ 的闭包(亦见**集合的闭包**(closure of a set))．

许依群、徐定宥、罗嵩龄 译

闭算子 [closed operator; замкнутый оператор]

一个算子 $A: D_A\to Y$，使得 $x_n\in D_A, x_n\to x$ 及 $Ax_n\to y$ 蕴涵 $x\in D_A$ 及 $Ax=y$（这里 X, Y 是相同数域上的 Banach 空间，$D_A\subset X$ 是 A 的定义域)．闭算子的概念可以推广到定义于可分线性拓扑空间上的算子，此时代替序列$\{x_n\}$，须考虑任意的定向网$\{x_\xi\}$．如果 Gr A 是 A 的图象，那么 A 是闭的，当且仅当 Gr A 是 Descartes 积 $X\times Y$ 的闭子集，这个性质常常取作闭算子的定义．

闭算子的概念是定义且连续于一个 Banach 空间的某个闭子集上的算子的概念的推广．一个闭但不连续的算子的例子是 $A=d/dt$，它定义于空间 $C[a,b]$ 中连续可微函数集合 $C_1[a,b]$ 上．数学物理中的许多算子是闭的但并非连续的．

一个算子 A 有闭包(即是可闭的)，指它允许一个闭扩张．一个算子有闭包，当且仅当由 $x_n, x_n'\in D_A$，并且

$$\lim x_n=\lim x_n',\ \lim Ax_n=y,\ \lim Ax_n'=y',$$

可以导出 $y=y'$．一个算子的最小的闭扩张称为它的闭包(closure)．Hilbert 空间上具有稠密定义域的对称算子常常具有闭包．

有界线性算子 $A: X\to Y$ 是闭的，反之，如果 A 定义于整个 X 上并且是闭的，则它是有界的．如果 A 是闭的，并且 A^{-1} 存在，则 A^{-1} 也是闭的．由于 $A: X\to X$ 是闭的，当且仅当 $A-\lambda I$ 是闭的，因此，如果至少对参数 $\lambda\in\mathbf{C}$ 的某个值，预解式 $R_\lambda(A)=(A-\lambda I)^{-1}$ 存在并且有界，那么 A 是闭的．

如果 D_A 在 X 中是稠密的，因而伴随算子 $A^*: D_{A^*}\to X^*, D_{A^*}\subset Y^*$，唯一地被定义，则 A^* 是闭算子．此外，如果

D_{A^*}在 Y^*中是稠密的，且 X, Y 是自反的，那么 A 是一个可闭算子，并且其闭包是 A^{**}.

一个闭算子能够通过在它的定义域上引进一个新范数而成为有界的．令

$$\| x \|_0 = \| x \|_X + \| Ax \|_Y.$$

那么带有这个新范数的 D_A 是一个 Banach 空间，并且 A 作为由 $(D_A, \| \cdot \|_0)$ 到 Y 的算子是有界的．

参考文献

[1] Yosida, K., Functional analysis, Springer, 1980 (中译本：吉田耕作，泛函分析，高等教育出版社，1980).

[2] Kato, T., Perturbation theory for linear operators, Springer, 1980.

В. И. Соболев 撰

【补注】 把整个 Banach 空间映射到一个 Banach 空间中的闭线性算子是连续的，这是熟知的闭图象定理(closed - graph theorem).

参考文献

[A1] Goldberg, S., Unbounded linear operators, McGraw-Hill, 1966.

李炳仁 译

闭集 [closed set; замкнутое множество]，拓扑空间中的

含有它的所有极限点(见**集合的极限点** (limit point of a set))的集合．于是，闭集的补集的所有点都是内点，所以闭集可定义为开集的补集．闭集的概念是把拓扑空间定义为具有满足下列公理的特定集合系统(所谓闭集)的非空集 X 的基础：X 本身和空集是闭集；任意个闭集的交是闭集；有限个闭集的并是闭集．

参考文献

[1] Kuratowski, K., Topology, 1, Acad. Press, 1966 (译自法文).

А. А. Мальцев 撰 方嘉琳 译

闭子概形 [closed subscheme; замкнутая подсхема]

由概形 X 的结构层 $\mathscr{O}_X$ 的拟凝聚理想层 J 按下述方式定义的子概形：子概形的拓扑空间 $V(J)$ 是商层 $\mathscr{O}_X/J$ 的支撑集，结构层则是 $\mathscr{O}_X/J$ 在它的支撑集上的限制．概形的态射 $f: Y \to X$ 称为闭嵌入(closed imbedding)，如果 f 是 Y 到 X 中某闭子概形上的同构；闭嵌入是概形范畴内的单态射．对于任意闭子集 $Y \subset X$，存在以 Y 为空间的一个极小闭子概形，称为空间 Y 的约化闭子概形(reduced closed subscheme)．如果 Y 是 X 的子概形，则 X 的包含 Y 的最小闭子概形 Y_1 称为子概形 Y 在 X 内的(概形)闭包((schematic) closure).

В. И. Данилов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hartshorne, R., Algebraic geometry, Springer, 1977.

陈志杰 译

闭元素(函数)系 [closed system of elements (functions); замкнутая система элементов, замкнутая система функций]

某些赋范线性空间 H 中的元素系 $\{\varphi_n\}$，使得对任意元素 $f \in H$，都可以用该元素系中有限个元素的线性组合(按 H 中的度量)依任意精确度来逼近；也就是：对任给 $\varepsilon > 0$，可以找到数 $c_0, \cdots, c_n$，使得

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k \right\| < \varepsilon. \tag{1}$$

举例说来，幂函数系 $\{x^n\}(n=0,1,\cdots)$ 在空间 $L_p([a,b], d\mu(x))$ 中是闭的，后者是指在有限区间 $[a,b]$ 上带有(积分)权 $\mu(x)$ 的 $p(p \geq 1)$ 次幂可积(或 p 可积)的函数空间．此时，不等式(1)的形式为

$$\int_a^b | f(x) - Q_n(x) |^p \, d\mu(x) < \varepsilon^p, \tag{2}$$

其中的 $Q_n(x)$ 是 n 次多项式．最熟知的情况是，$\{\varphi_n\}$ 是 Hilbert 空间 H 中的规格化正交元素列．这时，闭合条件(1)等价于下面的条件：对所有的 $f \in H$ 有

$$\| f \|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2, \tag{3}$$

其中的 $\{a_n\}$ 是 f 关于元素系 $\{\varphi_n\}$ 的 Fourier 系数．在三角函数系的情形，条件(3)即熟知的 Parseval 恒等式(Parseval identity)；更准确地，它的形式是

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2(x) \, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

这一等式曾被 M. Parseval (1806), Ch. J. de la Vallée - Poussin (1890) 及 A. Hurwitz (1901－1903) 研究过，它(对有界的 f)成立的严格证明是由 A. M. Ляпунов (1896) 给出的．

В. А. Стеклов (1898) 由于解决某些数学物理问题而首次详细研究了闭合条件(3)的一般情形．他引进了专门名词"闭合性"，并从这个观点研究各种具体的正交函数系，特别是 Sturm - Liouville 方程的基本解(见 **Sturm - Liouville 问题** (Sturm - Liouville problem))．因此，等式(3)也常称为 Parseval - Стеклов 闭合条件(Parseval - Steklov closure condition).

闭合的概念广泛地应用于**正交多项式** (orthogonal polynomials) 理论．如果正交性区间是有限区间，则对于任意权函数，正交多项式系都是闭的．对于无穷的正交性区间，Стеклов 建立了关于权函数的各种条件，它们对于保证相应的正交多项式系的闭合性是充分的；特别是，他证明了 Hermite 多项式系及 Laguerre 多

项式系是闭的．对于区间 (a,∞)，Стеклов 给出的一个充分条件是：存在正数序列 $\{a_n\}$，使得

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=0$$

及

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{4}{a_n}\right)^n\int_{a_n}^{\infty} h(x)x^n\,dx\right\}=0,$$

其中 $h(x)$ 是 (a,∞) 上的微分权(函数) (differential weight (function)) (即 $d\mu(x)=h(x)dx$)．对于整个实轴 $(-\infty,+\infty)$ 的一个充分条件是：$h(x)$ 几乎处处是正的目满足不等式

$$h(x)\leqslant c\exp(-\alpha|x|),\quad \alpha>0,\quad x\in(-\infty,\infty).$$

在某种意义下这一条件"差不多"是必要的；事实上，正如 Стеклов 所证明的那样，如果微分权函数的形式为

$$h(x)=\exp(-|x|^{\beta}),\quad \beta=\frac{2m}{2m+1},\quad m=1,2,\dots,$$

则多项式系是非闭的．对于无穷区间，关于多项式系在 $L_2((a,b),d\mu(x))$ 中闭合条件问题的一个圆满的解决是由 M. Riesz (1922) 给出的．他证明了：多项式系在 $L_2((a,b),d\mu(x))$ 中是闭的，当且仅当或者相应的**矩问题** (moment problem) 是确定的，或者在不确定的情形时，函数 $\mu(x)$ 是矩问题的所谓 N 极值解．

与闭合概念密切相连的概念是函数系的完全性：函数系称为完全的，如果由有界线性泛函 f 作用在函数系 $\{\varphi_n\}$ 的所有元素上都等于零便推出 $f=0$．在 Hilbert 空间中，完全性与闭合性是等价的．函数系 $\{\varphi_n\}$ 在空间 L_p 中的完全性等价于该系在空间 L_q 中的闭合性，其中 $p\geqslant1$，$q\geqslant1$ 及 $1/p+1/q=1$．

对于多项式系及更一般的函数系，不等式 (1) 或 (2) 在复域中的类似形式已详细地研究过 (见**正交多项式(复域上的)** (orthogonal palynomials on a complex domain))．

参考文献

[1] Kaczmarz, S. and Steinhaus, H., Theorie der Orthogonalreihen, Chelsea, reprint, 1951.

[2] Геронимус, Я. Л., Теория ортогональных многочленов. Обзор достижений отечественной математики, М. – Л., 1950.

[3] Сегё, Г., Ортогональные многочлены, пер. с англ., М., 1962 (英译本: Szegö, G., Orthogonal polynomials, *Amer. Math. Soc.*, 1975).

[4] Стеклов, В. А., 《Зап. Акад. наук》 (физ.-матем. сер.), **30** (1911), 4, 1–86; **33** (1914), 8, 1–59.

[5] Стеклов, В. А., Основные задачи математической физики, 1–2, П., 1922–1923.

[6] Riesz, M., Sur le problème des moments et le théorème de Parseval correspondant, *Acta Szeged Sect. Math.*, **1** (1923), 209–225 (*Acta Litterarum ac Scientiarum Regiae Universtatis Hungaricae Francisco-Josephine, Sect. Sci. Math.*, 1 (1922–1923), 209–225).

[7] Hewitt, E., Remark on orthonormal sets in $L_2(a,b)$, *Amer. Math. Monthly*, **61** (1954), 249–250.

П. К. Суетин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Geronimus, Ya. L., Polynomials orthogonal on circle and interval, Pergamon, 1960 (译自俄文).

[A2] Alexits, G., Convergence problems of orthogonal series, Pergamon, 1961.

[A3] Freud, G., Orthogonal polynomials, Pergamon, 1971.

朱学贤 译　潘文杰 校

闭包条件 [closure condition; замыкания условие]

网几何学 (webs, geometry of) 中的条件，据此条件，网中的点和线的某种关联蕴含新的关联．例如，下面的 Thomsen 闭包条件 (Thomsen closure condition) (见图 a)．用平行直线表示网的第一族和第二族线，用曲线表示它的第三族线；闭包条件蕴含：如果 A, B, C, D 位于第三族曲线上，那么 E 和 F 也如此．

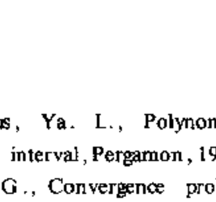


图 a.

如果 x, y 和 z 是定义这三族线的参数，那么闭包条件可用抽象形式表示为一个方程组，其中将 z 看为 x 和 y 的"积"：$z=xy$，

$$x_0y_1=x_1y_0,\ x_0y_2=x_2y_0 \Rightarrow x_1y_2=x_2y_1.$$

如果将 $z=xy$ 看为一个拟群运算，那么 Thomsen 闭包条件等价于这个拟群同痕于一个 Abel 群．

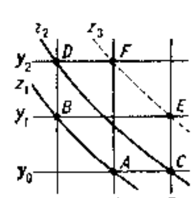


图 b.

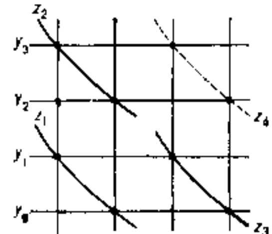


图 c.

图b和图c分别表明 Reidemeister 闭包条件(Reidemeister closure condition)和六角条件(hexagonality condition)(对于一个平面三维网,即使不假定可微性,这三个条件也是等价的).在抽象形式中,这些条件产生不同的拟群类和环路类;在多维网几何学中,则导致不同的网类.

射影几何中一些定理本质上是闭包条件(例如,Desargues 定理和 Pappus 定理).

参考文献

[1] Blaschke, W., Einfürung in die Geometrie der Waben, Birkhäuser, 1955.

[2] Белоусов, В. Д., Рыжков, В. В., в сб., Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т 10, М., 1972, 159 - 188.

[3] Белоусов, В Д., Алгебраические сети и квазигруппы, Киш, 1971.

В. В Рыжков 撰

【补注】 同痕群的概念见同痕(isotopy). 潘养廉 译

算法的闭包 [closure of a computational algorithm; замыкание вычислительного алгоритма]

方程组

$$L_z u = f_z,\quad 0 \leqslant z \leqslant Z, \tag{1}$$

作为已分步求解的方程组

$$L_m^h u^h = f_m^h,\quad m = 0, \ldots, M, \tag{2}$$

当 $h \to 0$, $z(m, h) \to z$ 时的极限而得到.方程组(2)描述解方程

$$L^h u^h = f^h \tag{3}$$

(例如有限差分方程,这时 h 是空间步长)的算法的逐次步骤,当 $h \to 0$ 时方程(3)逼近方程

$$Lu = f. \tag{4}$$

这里假定 $L_0^h = L^h$, $f_0^h = f^h$, L_M^h 是恒等算子,并且 $f_M^h = (L^h)^{-1} f^h = u^h$,即算法的第 M 步产生近似方程(3)的最终解.假设函数 $z(m, h)$ 是随 m 增加的(即是线性增函数),并满足边界条件 $z(0, h) = 0$, $z(M, h) = Z$. $M = \infty$ 的情形是允许的,这时 L_∞^h, f_∞^h, $z(\infty, h)$ 可以理解为变量 L_m^h, f_m^h, $Z(m, h)$ 当 $m \to \infty$ 时的极限.情形 $M = \infty$ 对应于求解方程(3)的迭代法.

如果方程(1)中的算子 L_z 关于 z 是一致有界的,那么就说算法(2)有一个正则闭包(regular closure).虽然具有正则闭包的算法集合与实际上稳定算法的集合并不一致,但闭算法的构造常常有助于研究在各种扰动(特别是计算误差)下的算法的稳定性(见[3],[4]).

闭算法的概念在[1]中引进.在那里得到并研究了求解逼近方程(4)的有限差分方程的逐次消元算法闭包,其中 $Lu = u - Au$,A 是 Fredholm 积分算子.

算法闭包的构造和逆运算——闭包是一给定连续过程的离散算法的构造——在设计解问题的新方法时是有用的.特别地,大量迭代法容许定常过程作为闭包.例如,Laplace 差分方程的简单迭代解法对应于定常过程 $u_t = \Delta u$;而两步迭代法对应于定常过程 $u_{tt} + \alpha u_t = \Delta u$, $\alpha > 0$(见[5]).

参考文献

[1] Соболев, С. Л., 《Изв. АН СССР Сер. матем.》, **20** (1956), 4, 413 - 436.

[2] Бабушка, И., Прагер, М., Витасек, Э., 《Ж. вычисл. матем. и матем. физ.》, **4** (1964), 2, 351 - 353.

[3] Бахвалов, Н. С., Вычислительные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений, К., 1970.

[4] Бахвалов, Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975 (英译本: Bakhvalov, N. S., Numerical methods: analysis, algebra, ordinary differential equations, Mir, 1977).

[5] Саульев, В. К., Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток, М., 1960.

[6] Шапкин, А. Ф., 《Ж. вычисл. матем. и матем. физ.》, 7 (1967), 2, 411 - 416.

А. Ф. Шапкин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Babuška, I. [I. Babushka], Práger, M. and Vitásek, E., Numerical processes in differential equations, Wiley, 1966.

郭祥东 译

集合的闭包 [closure of a set; замыкание множества], 拓扑空间中的

含有该集合的所有闭集(closed set)的交.

А. А. Мальцев 撰

【补注】 在俄文文献中,集合 A 的闭包记作 $[A]$,或 $[A]X$ 表示闭包取在空间 X 中,在西文文献中,用 $\overline{A}$、$\overline{A}^X$, $\mathrm{Cl}\,A$,或 $\mathrm{Cl}_X A$ 表示.

闭包的另一个定义如下:A 在 X 中的闭包是所有满足下述条件的 $x \in X$ 的集合:x 的任一邻域都和 A 相交.

闭包运算(closure operation)满足:1) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$; 2) $A \subseteq \overline{A}$; 3) $\overline{\varnothing} = \varnothing$; 4) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.满足1),2),3),和4)的运算称为闭包运算.用闭包运算可以定义拓扑空间:闭集是等于其闭包的那些集合.

这种做法取自[A1].

参考文献

[A1] Kuratowski, K., Topology, 1, Acad. Press, 1966 (译自法文).

方嘉琳 译

闭包关系 [closure relation; замыкания отношение], 闭包运算(closure operation),偏序集 M 中的

M 到它自身的单值映射,使每个元素 $a \in M$,映为元素 $\overline{a} \in M$,称为 a 的闭包(closure),使得下列条件成立:

1) $a \leqslant \bar{a}$; 2) 若 $a \leqslant b$, 则 $\bar{a} \leqslant \bar{b}$; 以及 3) $\bar{\bar{a}}=\bar{a}$. 如果元素 a 就是它自己的闭包, 则称 a 是闭的 (closed). 在集 M 中, 只要定出它所有的闭元, 就唯一地确定了 M 的一个闭包运算. 特别在 M 是由任意集合 X 的所有子集构成的集合, 按集合的包含关系为序时, 我们可在 X 上来谈论闭包运算. 在任意集合 X 上, 一个闭包运算可以这样来规定: 任取一个由子集所成的族, 其中包含 X 自身, 而且关于任意多的交是封闭的, 以这个族作为 X 的闭子集族. 两个带有闭包运算的偏序集, 如果存在一个偏序集的同构, 使得闭集的象和闭集的原象都是闭的, 则称它们是同构的. 对于由 X 的所有子集所成的集合来说, 一类在数学上有相当重要性的闭包运算要求满足下述附加条件: 空集是闭集, X 的二个子集的并的闭包等于它们的闭包的并. 满足此条件的闭包运算称作集合 X 上的拓扑 (topology on the set).

参考文献

[1] Cohn, P. M., Universal algebra, Reidel. 1981.

[2] Курош, А. Г., Лекции по общей алгебре, М., 1962 (中译本: 库洛什, 一般代数学, 科学出版社, 1964).

О. А. Иванова 撰

【补注】 闭包运算又称作闭包算子 (closure operator) 或并算子 (join operator) (见[1]). 集合 X 的一族子集, 如果在任意交下是封闭的, 则称之为闭包系 (closure system). 例如仿射空间 A 中所有子空间所成的族, 如上所述, 它给出 A 的子集上的一个闭包运算.

与有限并可交换的闭包运算, 为表示崇敬[A1]的作者, 常称作 Kuratowski 闭包运算 (Kuratowski closure operation). 具有闭包运算的 **Boole 代数** (Boolean algebra) 有时称作闭包代数 (closure algebra) (见[A2]).

参考文献

[A1] Kuratowski, C., Sur l'operation $\bar{A}$ de l'analysis situs, *Fund. Math.*, 3 (1922), 182 – 199.

[A2] McKinsey, C. C. and Tasski, A., On closed elements in closure algebras, *Ann. Math.* (2), 47 (1946), 122 – 162.

戴执中 译

回旋曲线 [clothoid; клотоида]

同 **Cornu 螺线** (Cornu spiral).

聚值集 [cluster set; предельное множество]

定义于区域 $G \subset \mathbf{C}$ 上取值于 Riemann 球面 Ω 中的函数 $f: G \to \Omega$ 在点 $z_0 \in \bar{G}$ 处关于集合 $S \subset G (z_0 \in \bar{S})$ 的集合 $C(f, z_0; S)$, 它由满足下述条件的值 $a \in \Omega$ 组成: 存在点列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(z_n \in S)$, $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = a.$$

每个数 $a \in C(f, z_0; S)$ 称为 f 在 z_0 处关于 S 的一个聚值. 聚值集理论是函数论的一个分支, 通过各种聚值集的拓扑和度量性质研究函数的边界性态.

如果取 S 为整个区域 G, 则得到全聚值集 (full cluster set) $C(f, z_0; G) = C(f, z_0)$; 如果包含关系 $S \subset G$ 是严格的, 则有时称相应的集合 $C(f, z_0; S)$ 为偏聚值集 (partial cluster set). 全聚值集 $C(f, z_0)$ 是闭集; 如果集合 S 在点 $z_0 \in \bar{S}$ 处局部连通, f 在 S 上连续, 则聚值集 $C(f, z_0; S)$ 或者是退化的, 即仅由一个点构成, 或者是非退化的连续统. 如果 $C(f, z_0; S)$ 与 Ω 相同, 则称为完全聚值集 (total cluster set). 数 $a \in \Omega$ 属于 f 在 z_0 处关于 S 的回归值集 $R(f, z_0; S)$, 如果存在点 $z_n \in S$ $(n=1, 2, \cdots)$ 构成的满足 $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ 的序列 $\{z_n\}$, 使得 $a = f(z_n)$ $(n=1, 2, \cdots)$. 恒有 $R(f, z_0; S) \subset C(f, z_0; S)$. 如果对于某个 $a \in \Omega$, 在 G 内存在以点 z_0 $(z_0 \in \bar{G})$ 为终点的道路 $L: z=z(t)$ $(0 \leqslant t < 1)$, $\lim_{t\to 1} z(t) = z_0$, 使得 $\lim_{t\to 1} f(z(t)) = a$, 则称 a 为 f 在 z_0 处 (沿 L) 的**渐近值** (asymptotic value). f 在 z_0 处所有渐近值的集合 $A(f, z_0; G)$, 称为渐近集 (asymptotic set).

聚值集概念首次由 P. Painlevé 于 1895 年清晰地表述 (他称它为"不确定性区域", 见 [1]), 他是在研究解析函数接近其某个奇点时的性态并对解析函数的奇点进行分类时引进这个概念的. 当时基本上是研究聚值集理论的三种几何上最简单的情形: a) z_0 是边界 ∂G 的孤立点或是 G 的内点; b) $G = D = \{z: |z| < 1\}$ 是单位圆盘, 或者一般地是 Jordan 域, z_0 是边界 $\Gamma = \partial D$ 上的点; c) 边界 $E = \partial G$ 是平面上的处处不连续紧统 (即不包含任何非退化连续统的完全不连通的紧集) 且 $z_0 \in E$. 复变函数论的许多经典结果可由聚值集表述. 例如, 某种加强形式的 **Сохоцкий 定理** (Sokhotskiĭ theorem) 可陈述为: 如果 z_0 是处处不连续紧统 $E \subset G$ 的孤立点, f 是 $G \setminus E$ 上的亚纯函数, 则聚值集 $C(f, z_0; G \setminus E)$ 或者是退化的, 或者是完全的. 补充上述定理的是 **Picard 定理** (Picard theorem), 它断言: 如果 $C(f, z_0; G \setminus E)$ 是完全的, 即如果 z_0 是本质奇点, 则集 $CR(f, z_0; G \setminus E) = \Omega \setminus R(f, z_0; G \setminus E)$ 至多含有两个不同的值. 此时还有

$$CR(f, z_0; G \setminus E) \subset A(f, z_0; G \setminus E)$$

(**Iverson 定理** (Iverson theorem)).

与亚纯函数接近"薄"边界时性态的理论 (Painlevé 理论 (Painlevé theory)) 有关的主要结果是 (见 [1], [2]): 如果集合 $E \subset G$ 的线性 Hausdorff 测度为零, $\mu(E) = \mu_1(E) = 0$, 函数 f 在 $G \setminus E$ 中亚纯, 则对每个点 $z_0 \in E$, 聚值集 $C(f, z_0; G \setminus E)$ 或者是退化的, 或者是完全的; 而且在第一种情形, f 在 z_0 处也是亚纯的. 因此, 聚值集 $C(f, z_0; G \setminus E)$ 为退化的点 $z_0 \in E$ 是 f 的可去奇点; 对各种函数类的可去集的研究可以看作聚值集理论的一个分支.

Голубев 定理 (Golubev theorem) 是 Picard 定理

的重要强化：如果 $E\subset G$，$\mu(E)=0$，f 在 $G\setminus E$ 内亚纯，则在每个本质奇点 $z_0\in E$ 处，集合 $CR(f,z_0;G\setminus E)$ 的**解析容量**(analytic capacity)为零(从而其平面测度 $\mu_2(CR)=0$).

P. Fatou(1906)关于单位圆盘 $D=\{z:|z|<1\}$ 内全纯函数 $f(z)$ 的边界值的工作是连续边界情形的聚值集理论的出发点．如果这样的函数 f 在 D 内有界，则它在圆 $\Gamma=\{z:|z|=1\}$ 上几乎处处(在 Lebesgue 测度意义下)有径向与角(非切向)边界值(Fatou 定理(Fatou theorem))．设 $\zeta=e^{i\theta}\in\Gamma$ 是任意的点，以 $h(\zeta,\varphi)$ 表示 D 的以 ζ 为终点并与 ζ 处的半径构成角 $\varphi(-\pi/2<\varphi<\pi/2)$ 的弦．设 $\Delta(\zeta,\varphi_1,\varphi_2)$ 表示以 $\zeta\in\Gamma$ 为顶点，由 D 中位于两弦 $h(\zeta,\varphi_1)$ 与 $h(\zeta,\varphi_2)$ $(-\frac{\pi}{2}<\varphi_1<\varphi_2<\frac{\pi}{2})$ 之间的点组成的角域．称点 $\zeta\in\Gamma$ 为 Fatou 点(Fatou point)并属于集合 $F(f)$，如果对所有角域 $\Delta(\zeta,\varphi_1,\varphi_2)$ 取的并

$$\bigcup C(f,\zeta;\Delta(\zeta,\varphi_1,\varphi_2))$$

由单个值 $f(e^{i\theta})$ 构成．这个值称为 f 在 ζ 处的角边界值(angular boundary value)．Fatou 定理的另一表述为：对于 D 内的有界全纯函数 f，分解式 $\Gamma=F(f)\cup E$ (mes $E=0$)成立．F. Riesz 和 M. Riesz 唯一性定理(F. and M. Riesz uniqueness theorem, 1916)补充了上述结果：如果 f 在 D 内全纯并有界，且在某个集合 $M\subset F(f)$ (mes $M>0$)上有角边界值 $f(\zeta)=a(\zeta\in M)$，则 $f(z)\equiv a$．这个陈述由 Н. Н. Лузин 和 И. И. Привалов 各自独立地证明(1919)，他们还得到了它对任意亚纯函数情形的实质性的推广．同年他们发表了径向边界值情形的边界唯一性定理：如果函数 f 在 D 内全纯，集合 M 为第二范畴，且在某个弧 $\gamma\subset\Gamma$ 上度量地稠密，f 在集合 M 上具有相同的径向边界值 $a\in\Omega$ 即 $\lim_{r\to1}f(re^{i\theta})=a(e^{i\theta}\in M)$，则 $f(z)\equiv a$.

Привалов 于 1936 年注意到，当在点 $\zeta=e^{i\theta}\in M$ 处值 $a_\zeta=\lim_{r\to1}f(re^{i\theta})$ 不一定相等但属于一个(对数)容量为零的集合时，上述 $f(z)\equiv$ 常数的结论仍然成立．证明 Лузин - Привалов 定理的基本想法和要素可应用于 D 的连续映射 f 的一般情形，嗣后并为许多论文所运用．

称点 $\zeta\in\Gamma=\{z:|z|=1\}$ 为 Plessner 点(Plessner point)并属于集合 $I(f)$，如果对以 ζ 为顶点的所有角域 $\Delta(\zeta,\varphi_1,\varphi_2)$ 取的交

$$\bigcap C(f,\zeta;\Delta(\zeta,\varphi_1,\varphi_2))$$

与 Ω 相同．A. I. Plessner 证明(1927)，对 D 内的亚纯函数 f，边界 Γ 的几乎所有点属于 $F(f)$ 或 $I(f)$，即 $\Gamma=F(f)\cup I(f)\cup E$，mes $E=0$．称点 $\zeta\in\Gamma$ 为 Meier 点(Meier point)并属于集合 $M(f)$，如果 $C(f,\zeta,D)\neq\Omega$ 并且对引自 ζ 的所有弦取的弦聚值集之交 $\bigcap C(f,\zeta;h(\zeta,\varphi))$ 与 $C(f,\zeta;D)$ 相同，K. Meiser 建立了(1961)下述以 Baire 范畴表达的类似于 Plessner 定理的结果：如果 f 在 D 内亚纯，则可能除去一个第一范畴集 E 外，边界 Γ 的所有点属于并 $M(f)\cup I(f)$．已经得到 Meier 定理的更精确的陈述，其中 E 是第一范畴的 F_σ 型集(见[12]－[14]；在这些文献中得到了 Plessner 定理与 Meier 定理的推广，并给出了后者的逆定理以及 $M(f)$ 的刻画)．

Fatou 的工作是发展关于解析函数边界性质的基本研究的导源．F. Riesz 和 M. Riesz，Лузин，Привалов，R. Nevanlinna，Plessner，В. И. Смирнов 以及其他人各自独立地贯彻了 Painlevé 的想法，他们的研究的特征是使用与测度和积分论有关的方法，包括 Baire 范畴概念(见[4]－[9])．

F. Iversen 和 W. Gross 研究的基本对象是具有 Jordan 边界 $\Gamma=\partial D$ 的区域 D 内的亚纯函数 f．在任意点 $\zeta_0\in\Gamma$ 处的边界聚值集(boundary cluster set) $C(f,\zeta_0;\Gamma)$ 定义如下：如果以 M_r 表示对所有点

$$\zeta\in(\Gamma\setminus\{\zeta_0\})\bigcap\{z:|z-\zeta_0|<r\}$$

取的并 $\bigcup C(f,\zeta;D)$ 的闭包，则 $C(f,\zeta_0;\Gamma)=\bigcap_{r>0}M_r$．他们两人相互独立地得到的主要定理之一断言，在上述条件下，对任何 $\zeta_0\in\Gamma$，集合

$$C_i(f,\zeta_0;D)=C(f,\zeta_0;D)\setminus C(f,\zeta_0;\Gamma)$$

是开的，并且可能除去两个例外值，所有属于 $C_i(f,\zeta_0;D)$ 的值 a 属于回归值集 $R(f,\zeta_0;D)$．此外，每个例外值(如果存在的话)是 f 在 ζ_0 处的渐近值．

在 A. Beurling，W. Seidel(他在 1932 年也引进了"聚值集"这个术语)及其他人的工作(见[5]－[9])中，Iverson 和 Gross 的研究得到了进一步的发展．他们考虑的情形基本上是当 ζ_0 属于边界 Γ 上一个具有零线性测度或零容量的"小"集合 E 时，研究其定义与 $C(f,\zeta_0;\Gamma)$ 类似的聚值集 $C(f,\zeta_0;\Gamma\setminus E)$．在这些研究中还应用了位势理论方法．

下面对于圆盘 $D=\{z:|z|<1\}$ 的情形陈述这个方向的最近成果．假设在 D 的边界 Γ 的弧 γ 上固定了满足 mes $E=0$ 的集合 E 且取 $\zeta_0\in E$．对每个点 $\zeta\in\gamma\setminus E$ 指定一终点为 ζ 的 Jordan 弧 $\Lambda_\zeta\subset D$．设 M_r^* 是对所有点

$$\zeta\in(\gamma\setminus E)\bigcap\{z:|z-\zeta_0|<r\}$$

取的并 $\bigcup C(f,\zeta,\Lambda_\zeta)$ 的闭包并设

$$C^*(f,\zeta_0;\Gamma\setminus E)=\bigcap_{r>0}M_r^*,$$

则集合

$$S(\zeta_0)=C(f,\zeta_0;D)\setminus C^*(f,\zeta_0;\Gamma\setminus E)$$

是开的，集合 $S(\zeta_0)\setminus R(f,\zeta_0;D)$ 具有零容度，并且每个值 $a\in S(\zeta_0)\setminus R(f,\zeta_0;D)$ 是 f 在点 ζ_0 处或在某个序列 $\{\zeta_n\}$ $(\zeta_n\in\Gamma,\ n=1,2,\cdots,\ \lim_{n\to\infty}\zeta_n=\zeta_0)$ 的每个点处的渐近值．如果 E 具有零容度，则对 $S(\zeta_0)$ 的每个连通分支 $S_k(\zeta_0)$ $(k=1,2,\cdots)$，集合 $S_k(\zeta_0)\setminus R(f,\zeta_0;D)$ 由至多两个不同的值组成．

下述 Lindelöf 定理（Lindelöf theorem）已利用正规族（normal family）得到证明：如果全纯函数 f 在 D 内有界且在 $\zeta_0\in D$ 处有渐近值 a，则它在该点处以 a 为角边界值．区域 G 内的亚纯函数 $f(z)$ 组成的族 $F=\{f(z)\}$ 的正规性可以用所谓球面导数（spherical derivative）

$$\rho(f(z))=\frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}$$

来刻画．

确切地说，F 为正规族当且仅当球面导数 $\rho(f(z))$ $(f\in F)$ 在 G 内部一致有界，即对每个紧统 $K\subset G$，存在常数 $C=C(K)$，使得

$$\rho(f(z))\leqslant C(K),\quad z\in K,\quad f\in F.$$

然而，在聚值集理论中，正规族最重要的作用显示在正规函数概念中．单连通域 G 内的亚纯函数 $f(z)$ 称为 G 内的正规函数（normal function），如果当 S 遍历 G 的所有共形自同构构成的族时，族 $\{f(S(z))\}$ 是正规的，称 $f(z)$ 在多连通域 G 内正规，如果它在 G 的通用覆叠面上正规．在 D 内亚纯的函数 $f(z)$ 为正规当且仅当存在常数 $C=C(f)$ $(0<C<\infty)$，使得

$$\rho(f(z))\,|dz|\leqslant C\frac{|dz|}{1-|z|^2}.$$

上式左边是 Riemann 球面 Ω 上对于映射 $w=f(z)$ 的所谓弦度量的线素，而表示式 $d\sigma(z)=|dz|/(1-|z|^2)$ 是 D 的双曲度量的线素．不取三个不同值的有界全纯函数和亚纯函数是正规的，而且所说类中函数的某些性质可以移植到任意的正规函数上．例如，Lindelöf 定理的结论对任意的正规函数成立．D 内所有正规亚纯函数的类与有界特征函数（见**有界特征函数**（function of bounded characteristic））的类有某些相似之处，然而也有本质的差别．例如，存在没有渐近值从而没有径向边界值的正规亚纯函数，但对有界特征函数，这是不可能出现的．G. R. MacLane 进行了关于渐近值的重要研究（[7]，[9]）．用 MacLane 理论可以得到正规函数已知性质的新证明．例如，正规全纯函数 $f(z)$ 在其上具有渐近值从而具有角边界值的点 $\zeta\in\Gamma$ 的集合在 Γ 上是稠密的．

亚纯函数的值分布与正规性概念紧密相联．D 中点 z_n 的满足 $\lim_{n\to\infty}|z_n|=1$ 的序列 $\{z_n\}$ 称为对于 D 内亚纯函数 $f(z)$ 的 P 序列，如果对每个无穷子序列 $\{z_{n_k}\}$ 和每个 $\varepsilon>0$，集合

$$\Omega\setminus R\left\{f,z:\bigcup_{k=1}^{\infty}\{z\in D:\sigma(z,z_{n_k})<\varepsilon\}\right\}$$

至多含有两个值．已证明：f 至少有一个 P 序列，当且仅当

$$\limsup_{|z|\to 1}q_f(z)=+\infty,\quad q_f(z)=(1-|z|^2)\rho(f(z)).$$

于是，亚纯函数 $f(z)$ 的值分布与连续函数 $q_f(z)$ 的聚值集的结构有关．

关于一般映射 $f:D\to\Omega$ $(D=\{z:|z|<1\})$ 的聚值集理论也已取得实质进展．1955 年，下述歧点定理（ambiguous point theorem）得到证明：设 $f:D\to\Omega$ 是任一映射，则满足下述条件的点 $\zeta\in\Gamma$ 构成至多可数集：能在 ζ 处作出两条连续曲线 L_ζ^1，L_ζ^2，使得

$$C(f,\zeta;L_\zeta^1)\neq C(f,\zeta;L_\zeta^2).$$

Collingwood 极大性定理（Collingwood maximality theorem）断言：设 L_0 是 D 中使得 $L_0\cap\Gamma=\{z=1\}$ 的任一连续统，L_θ 是把 L_0 绕坐标原点旋转 θ 所得到的连续统，$f:D\to\Omega$ 是任一映射，则使得

$$C(f,\zeta;L_\theta)=C(f,\zeta;D)$$

的点 $\zeta=e^{i\theta}\in\Gamma$ 构成 Γ 上的第一范畴集．称点 $\zeta\in\Gamma$ 属于集合 $C(f)$，如果聚值集 $C(f,\zeta;D)$ 与对顶点为 ζ 的所有角域取的交

$$\bigcap C(f,\zeta;\Delta(\zeta,\varphi_1,\varphi_2))$$

相同．已经证明（[10]），对任一映射 $f:D\to\Omega$，有

$$\Gamma=C(f)\bigcup E,$$

其中 E 是 F_σ 型的第一范畴集．反之，对任一 F_σ 型的第一范畴集 $E\subset\Gamma$，存在 D 内的有界全纯函数 f，使得 $E=\Gamma\setminus C(f)$．集 $C(f)$ 是集 $K(f)$ 的子集，$K(f)$ 由满足下述条件的所有 $\zeta\in\Gamma$ 构成：在点 ζ 处，对任何两个角域 $\Delta(\zeta,\varphi_1,\varphi_2)$ 和 $\Delta(\zeta,\varphi_1',\varphi_2')$，有

$$C(f,\zeta;\Delta(\zeta,\varphi_1,\varphi_2))=C(f,\zeta;\Delta(\zeta,\varphi_1',\varphi_2')).$$

设 $E\subset\Gamma$，$\zeta\in\Gamma$．对给定的 $\varepsilon>0$，以 $r(\zeta,\varepsilon,E)$ 表示 Γ 上包含于 ζ 的 ε 邻域 $\{e^{i\theta}:|\theta-\arg\zeta|<\varepsilon\}$ 中且与 E 没有公共点的最大开弧的长度；如果不存在这样的开弧，则令 $r(\zeta,\varepsilon,E)=0$．集合 E 称为在 Γ 上是多孔的（porous），如果对任何点 $\zeta\in E$，有

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{r(\zeta,\varepsilon,E)}{\varepsilon}>0;$$

σ 多孔集（σ-porous set）是指至多可数个多孔集之并．任一 σ 多孔集是第一范畴的，且具有零线性测度．对任一映射 $f:D\to\Omega$，等式 $\Gamma=K(f)\bigcup E$ 成立，其中 E

是 $G_{\delta\sigma}$ 型的 σ 多孔集. 反之, 对任一 σ 多孔集 E, 存在 D 内的有界全纯函数 f, 使得 $\Gamma \setminus K(f) \supset E$.

关于多复量函数的聚值集理论, 见, 例如, [15]-[17].

参考文献

[1] Painlevé, P., Leçons sur le théorie analytique des équations différentielles, Paris, 1897.

[2] Zoretti, B., Leçons sur le prolongement analytique, Paris, 1911.

[3] Голубев, В. В., Однозначные аналитические функции. Автоморфные функции, М., 1961.

[4] Привалов, И. И., Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.-Л., 1950 (中译本: И. И. 普里瓦洛夫, 解析函数的边界性质, 科学出版社, 1956).

[5] Noshiro, K. (能代清), Cluster sets, Springer, 1960.

[6] Collingwood, E. F., Lohwater, A. J., The theory of cluster sets, Cambridge Univ. Press, 1966.

[7] MacLane, G. R., Asymptotic values of holomorphic functions, Rice Univ. Studies, Math. Monographs, **49**, Rice Univ., Houston, 1963.

[8] Маркушевич, А. И., Тумаркин, Г. Ц., Хавинсон, С. Я., Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного, М., 1961, 100-110.

[9] Ловатер, А., Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 10, М., 1973, 99-259.

[10] Долженко, Е. П., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **31** (1967), 1, 3-14.

[11] Долженко, Е. П., *Ann. of Math.*, **2** (1976), 191-201.

[12] Гаврилов, В. И., 《Докл. АН СССР》, **216** (1974), 1, 21-23.

[13] Гаврилов, В. И., Канатников, А. Н., 《Докл. АН СССР》, **233** (1977), 1, 15-17.

[14] Канатников, А. Н., 《Докл. АН СССР》, **238** (1978), 5, 1043-1046.

[15] Rudin, W., Function theory in polydiscs, Benjamin, 1969.

[16] Хенкин, Г. М., Чирка, Е. М., Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 4, М., 1975, 13-142.

[17] Rudin, W., Function theory in the unit ball of C^n, Springer, 1980.

В. И. Гаврилов, Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 关于线性 Hausdorff 测度和平面测度的概念, 见 **Hausdorff 测度** (Hausdorff measure); 关于弦度量 (亦称球面度量), 见**扩充复平面** (extended complex plane).

沈永欢 译

余代数 [co - algebra; коалгебра]

交换环 k 上模 A, 且具有两个同态映射 $\varphi: A \to A \otimes_k A$, $\varepsilon: A \to k$, 使得图

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & A \otimes A \\ \varphi \downarrow & & \downarrow 1 \otimes \varphi \\ A \otimes A & \xrightarrow[\varphi \otimes 1]{} & A \otimes A \otimes A \end{array}$$

和

$$\begin{array}{ccccc} A \otimes A & \xleftarrow{\varphi} & A & \xrightarrow{\varphi} & A \otimes A \\ & {\scriptstyle \varepsilon \otimes 1} \searrow & \| & \swarrow {\scriptstyle 1 \otimes \varepsilon} & \\ & & A & & \end{array}$$

可交换. 换句话说, 余代数是环 k 上结合代数概念 (在范畴理论意义下) 的对偶概念.

余代数在许多拓扑应用方面有重要意义. 例如, 拓扑空间的单复形是一个余代数. 和余代数紧密联系的是 Hopf 代数, 它同时具有代数和余代数结构. 见 **Hopf 代数** (Hopf algebra).

参考文献

[1] MacLane, S., Homology, Springer, 1963.

В. Е. Говоров 撰

【补注】 给定 k 上一个余代数 A, 令 $A^* = \mathrm{Hom}(A, k)$ 是从 A 到 k 的所有 k 模同态组成的模. 对于 $f, g \in A^*$, 定义乘积 $fg: A \to k$, 它由公式 $fg(a) = (f \otimes g)(\varphi(a))$ 确定, 这里把 $k \otimes_k k$ 与 k 等同起来. 对任意两个 k 模 M, N, 定义 $\rho: M^* \otimes N^* \to (M \otimes N)^*$, 它由公式 $\rho(f \otimes g)(m \otimes n) = f(m) g(n)$ 确定, 那么 A^* 上的乘积可视为合成 $A^* \otimes A^* \to (A \otimes A)^* \xrightarrow{\varphi^*} A^*$. 元素 $\varepsilon: A \to k$ 是使得 A^* 成为具有单位的结合代数 (即对偶代数 (dual algebra)) 的这一乘积的单位元. 一般地, ρ 未必是同构映射, 并且不存在自然 k 模同态 $(M \otimes N)^* \to M^* \otimes N^*$. 这样, 即使当 k 为域时, 也不存在一个自然构造方法, 能把一个 k 上代数和一个余代数联系起来, 但是, 当 k 为域时, 存在函子 $C \mapsto C^*$ 的**伴随函子** (adjoint functor) $A \mapsto A^0$, 它把一个余代数和它的对偶代数联系起来, 即有 $\mathscr{A}\ell_k(A, C^*) \simeq \mathscr{C}o\ell_k(A^0, C)$, $A \in \mathscr{A}\ell_k$, $C \in \mathscr{C}o\ell_k$, 这里 $\mathscr{A}\ell_k$ 和 $\mathscr{C}o\ell_k$ 分别表示 k 代数范畴与 k 余代数范畴 ([A2], 亦见 **Hopf 代数**). 但是如果 B 是 k 上有限秩的自由模则 $\rho: B^* \otimes B^* \to (B \otimes B)^*$ 是同构映射, 且可以定义对偶余代数 (dual co - algebra).

设 S 是集合 $\{s_0, s_1, \cdots\}$, 设 $kS = \oplus k s_i$, 定义

$$\varphi(s_n) = \sum_{i=0}^{n} s_i \otimes s_{n-i}, \quad \varepsilon(s_n) = 1.$$

则 kS 是一个余代数.

设 (A, φ), (B, ψ) 是两个余代数, 则余代数态射 (morphism of co - algebras) 是 k 模射 $\alpha: A \to B$, 使得 $\psi \circ \alpha = (\alpha \circ \alpha) \circ \varphi$ 和 $\varepsilon_B \circ \alpha = \varepsilon_A$. 余代数 A 的余理想 (co - ideal) 是一个 k 子模 V, 使得 $\varphi(V) \subset V \otimes A + A \otimes V$ 和 $\varepsilon(V) = 0$.

余代数 (C,φ)上余模 (co-module) M 是一个 k 模，具有 k 模射 $\psi: M \to M\otimes C$，使得 $(\psi\otimes 1)\circ\psi=(1\otimes\varphi)\circ\psi$，$(1\otimes\varepsilon)\circ\psi$ 是标准同构 $M\to M\otimes k$．这里当然有余模的同态等明显概念．

参考文献

[A1] Sweedler, M., Hopf algebras, Benjamin, 1969.

[A2] Abe, E., Hopf algebras, Cambridge Univ. Press, 1980.

林亚南 译

共基 [co - basis ; кобазис]

对偶或伴随空间 (adjoint space) 的一组基 (basis).

【补注】 共基也称为对偶基(dual basis)．专门名词 E^* 的"对偶基"或"共基"常用来表示 E^* 的满足 $e_i^*(e_j)=\delta_{ij}$ (Kronecker 符号)的一组基 (e_i^*)，这里 (e_i) 为 E 的一组给定的基．这对基 (e_i)，(e_i^*) 称为对偶基对(pair of dual bases)．

陈公宁 译

上 Euclid 空间 [co - Euclidean space ; коевклидово пространство]，对偶 Euclid 空间(dual Euclidean space)

应用对偶原理从 Euclid 空间得到的同一维数的射影空间，记为 $\mathbf{R}_n^*$，这里 n 为空间的维数．上 Euclid 空间 $\mathbf{R}_n^*$ 具有射影度量，它按照引入射影度量的一般方式来定义．如果 Euclid 空间 $\mathbf{R}_n$ 的射影度量由一绝对形定义，这个绝对形由一个 $n-1$ 维平面和该平面上的一个 $n-2$ 维虚二次曲面组成，那么上 Euclid 空间的射影度量就由对偶绝对形定义，这个对偶绝对形是一个二次虚锥面，称为绝对锥面，且以上述绝对形的绝对点为其顶点．

考虑到空间 $\mathbf{R}_n^*$ 关于 $\mathbf{R}_n$ 的对偶特征，$\mathbf{R}_n^*$ 中两点之间的距离可依照具有射影度量的空间中定义两点之间距离的一般方式来定义．设

$$(\mathbf{u},\mathbf{x})+u_0=0,\ (\mathbf{v},\mathbf{y})+v_0=0$$

是对偶于 $\mathbf{R}_n^*$ 的 Euclid 空间 $\mathbf{R}_n$ 中的某些平面的法方程，其中

$$(\mathbf{u},\mathbf{u})=1,\ (\mathbf{v},\mathbf{v})=1,$$

$(\mathbf{u},\mathbf{x})$ 是 $\mathbf{R}_n$ 中向量的内积．把这些平面与具有坐标

$$x^0=\rho u_0,\ x^i=\rho u_i,\ y^0=\rho v_0,\ y^i=\rho v_i,\ \rho\in\mathbf{R}$$

的 $\mathbf{R}_n^*$ 中的点 $X(x^0,\mathbf{x})$ 和 $Y(y^0,\mathbf{y})$ 相联系，且这些点的坐标由如下条件规范化：

$$(\mathbf{x},\mathbf{x})=\rho^2>0,\ (\mathbf{y},\mathbf{y})=\rho^2>0$$

(x^0 和 y^0 为无穷远奇异平面上的点 X 和 Y 的坐标)．X 和 Y 之间的距离 δ 由如下关系定义：

$$\cos^2\frac{\delta}{\rho}=\frac{(\mathbf{x},\mathbf{y})^2}{(\mathbf{x},\mathbf{x})(\mathbf{y},\mathbf{y})},$$

换句话说，它用对偶于 X 和 Y 的平面之间的夹角来表示．按照点 X 和 Y 的向量的规范形式，上述关系可写为

$$\cos\frac{\delta}{\rho}=\frac{1}{\rho^2}|(\mathbf{x},\mathbf{y})|.$$

实数 ρ 称为上 Euclid 空间的曲率半径．

当点 $X,Y\in\mathbf{R}_n^*$ 对应于对偶空间 $\mathbf{R}_n$ 中的平行平面时，$\delta=0$，此时点 X 和 Y 间的距离定义为这些平行平面间的 Euclid 距离．

按照对偶原理，$\mathbf{R}_n^*$ 中两平面间的夹角定义为与两平面相对应的 $\mathbf{R}_n$ 中两点间的规范化 Euclid 距离．这个角也等于 $\mathbf{R}_n^*$ 中所给平面的某两点之间的规范化距离，这两点是该两平面相交所成的 $n-2$ 维平面关于某两个二次曲面的极点，而这两个二次曲面则由绝对锥面在该两平面上分割而得．利用这个关系，总可以定义不含绝对点的平面之间的夹角．特别，上 Euclid 平面 $\mathbf{R}_2^*$ 中两直线之间的夹角等于该两直线上某两点间的规范化距离；这两点中的每一点连同该两直线的交点，调和分割其所在直线与两绝对直线的交点．

上 Euclid 空间的运动定义为该空间由相应的对偶空间 $\mathbf{R}_n$ 的运动所诱导的变换；因此，$\mathbf{R}_n^*$ 的运动可由正交算子来描述．

上 Euclid 平面 $\mathbf{R}_2^*$ 的几何具有平面 $\mathbf{R}_2$ 的对偶性质．例如，从三角形 ABC 的边长在 $\mathbf{R}_2$ 的运动之下的不变性知道，在 $\mathbf{R}_2^*$ 的运动之下，角盈 $\Delta=\hat{A}+\hat{C}-\hat{B}$ 是不变量且总是正的(这里以及下面，我们都假定在 $\mathbf{R}_2^*$ 中三角形 ABC 的内角 B 包含绝对点)．$\mathbf{R}_2^*$ 中三角形面积 S 与角盈成比例，它是三角形的一个加性函数：$S=\rho^2\Delta$．

作为 $\mathbf{R}_2^*$ 中三角形角的大小和边长之间的对偶特征的一个推论，对于三角形 ABC 有如下三角学关系：

$$b=a+c,$$

$$\hat{A}^2=\hat{B}^2+\hat{C}^2-2\hat{C}\hat{B}\cos\frac{a}{\rho},$$

$$\frac{\sin a/\rho}{\hat{A}}=\frac{\sin b/\rho}{\hat{B}}=\frac{\sin c/\rho}{\hat{C}}.$$

在平面 $\mathbf{R}_2^*$ 中，(直线上)距离度量是射影椭圆的，角度度量是抛物的．在空间 $\mathbf{R}_3^*$ 中，(直线上)射影距离度量是椭圆的；在平面上，它仍是椭圆的，而在面束中，它却是抛物的．

上 Euclid 空间 $\mathbf{R}_n^*$ 是椭圆空间和 Лобачевский 空间的极限情形：$\mathbf{R}_n^*$ 的射影度量可以通过上述空间的射影度量的极限过渡而得．

参考文献

[1] Розенфельд, Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969.

Л. А. Сидоров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Sommerville, D. M. Y., Non - Euclidean geometry, Dover, reprint, 1958.

杨 路、张景中、侯晓荣 译

上 H 空间 [co - H - space ; ко - H - пространство]

具有上乘法的拓扑空间;其对偶概念是 H 空间 (H - space).

【补注】 在有点拓扑空间的范畴里,两个对象 (X, x_0) 与 (Y, y_0) 的和 (sum) 是将 x_0 与 y_0 等同的 X 和 Y 的不交并,这个等同的点作为基点;可以把这种并理解(并具体化)为 $X\times Y$ 的子集 $X\times\{y_0\}\cup\{x_0\}\times Y$. 于是上 H 空间为有点拓扑空间,它具有有点空间的称之为上乘法 (co - multiplication) 的连续映射 $\mu: Q\to Q\vee Q$, 使得复合映射 $Q\xrightarrow{\mu} Q\vee Q\xrightarrow{\mathrm{id}\vee\varepsilon} Q\vee\{q_0\}\simeq Q$ 和 $Q\xrightarrow{\mu} Q\vee Q\xrightarrow{\varepsilon\vee\mathrm{id}} Q$ 都同伦于恒等(映射),其中 ε 是把 Q 映成基点 q_0 的映射. 若两个复合 $Q\xrightarrow{\mu} Q\vee Q\xrightarrow{\mathrm{id}\vee\mu} Q\vee Q\vee Q$ 和 $Q\xrightarrow{\mu} Q\vee Q\xrightarrow{\mu\vee\mathrm{id}} Q\vee Q\vee Q$ 互相同伦,这个上乘法就称为同伦上结合的 (homotopy co - associative) (或同伦结合的 (homotopy associative)). 有点空间的连续映射 $r: Q\to Q$ 是 μ 的同伦上逆 (homotopy co - inverse), 如果两个复合 $Q\xrightarrow{\mu} Q\vee Q\xrightarrow{(\mathrm{id}, r)} Q$ 和 $Q\xrightarrow{\mu} Q\vee Q\xrightarrow{(r, \mathrm{id})} Q$ 都同伦于 $\varepsilon: Q\to Q$. 这里对 $f: X\to Z$, $g: Y\to Z$, (f, g) 是由有点拓扑空间的范畴内和的确定性质所决定的映射,即 (f, g) 在 X 上的限制等于 f, 在 Y 上的限制等于 g. 具有上结合及有同伦上逆的上乘法的上 H 空间称为一个 H 上群 (H - co - group). 这样, H 上群是在有点拓扑空间和映射同伦类的范畴 $\mathscr{H}_{*}$ 里的一个上群元 (co - group object).

参考文献

[A1] Spanier, E., Algebraic topology, McGraw - Hill, 1966, Chapt. 1, Sect. 6.

许依群、徐定宥、罗嵩龄 译

共面向量 [co - planer vectors; компланарные векторы]

平行于一个平面的向量. 三个向量

$$\mathbf{a}_1 = \{x_1, y_1, z_1\},\ \mathbf{a}_2 = \{x_2, y_2, z_2\},$$

$$\mathbf{a}_3 = \{x_3, y_3, z_3\}$$

共面的必要和充分条件是

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

张鸿林 译

上伪 Euclid 空间 [co - pseudo - Euclidean space ; копсевдоевклидово пространство]

由伪 Euclid 空间应用同维射影空间的对偶原理得到的空间记为 ${}^{l}R_n^{*}$. 上伪 Euclid 空间是具有射影度量的空间,按照射影度量的一般定义,这个射影度量可以通过具体指定对应维数的射影空间中一个绝对形来引入. 伪 Euclid 空间 ${}^{l}R_n$ 的射影度量是用一个绝对形定义的,这个绝对形由一个 $(n-1)$ 维超平面和该超平面上一个实的 $(n-2)$ 维二次曲面组成;因此对偶的上伪 Euclid 空间 ${}^{l}R_n^{*}$ 的射影度量是用这个绝对形的对偶来定义的:即有一个顶点的实(绝对)二次锥面,这个顶点被取作绝对点. 这个绝对锥面将 ${}^{l}R_n^{*}$ 分成两个区域,在每个区域中向量与自身的数量积具有固定的符号. 这些区域表示与给定 ${}^{l}R_n^{*}$ 对偶的伪 Euclid 空间中相应超平面的流形. 伪 Euclid 空间的迷向超平面代表 ${}^{l}R_n^{*}$ 中绝对形的点. 按照相对于绝对锥面和绝对点(顶点)的位置,直线被分成四种不同的类型:椭圆直线 (elliptic lines), 它们与绝对锥面交于两个共轭复点;双曲直线 (hyperbolic lines), 它们与绝对锥面交于两个实点;抛物直线 (parabolic lines), 它们通过绝对点;以及迷向直线 (isotropic lines), 它们是与绝对锥面相切的抛物线.

按照伪 Euclid 空间的对偶原理,前两种类型的直线分别是用相交成 Euclid 的和伪 Euclid 的 $(n-2)$ 维超平面的超平面把来表示的;抛物直线用平行超平面把表示;而迷向直线则用相交成迷向 $(n-2)$ 维超平面的超平面把表示.

按照对偶的观点,上伪 Euclid 空间 ${}^{l}R_n^{*}$ 中点之间的距离是参照相应的伪 Euclid 空间 ${}^{l}R_n$ 来定义的. 设 X 和 Y 是 ${}^{l}R_n^{*}$ 中的点,它们对应于 ${}^{l}R_n$ 中规范方程为

$$(\mathbf{u}, \mathbf{x}) + u_0 = 0;\ (\mathbf{v}, \mathbf{y}) + v_0 = 0$$

的平面,因而

$$x^0 = \rho u_0,\ x^i = \rho u_i;\ y^0 = \rho v_0,\ y^i = \rho v_i.$$

此外,

$$(\mathbf{u}E\mathbf{u}) = \pm 1,\ (\mathbf{v}E\mathbf{v}) = \pm 1.$$

这里 E 是定义 ${}^{l}R_n$ 中数量积的线性算子. 两个点 $X(x^0, x)$ 和 $Y(y^0, y)$ 之间的距离 δ 定义为

$$\cos^2\frac{\delta}{\rho} = \frac{(\mathbf{x}E\mathbf{y})^2}{(\mathbf{x}E\mathbf{x})(\mathbf{y}E\mathbf{y})},$$

其中 ρ 是一个虚数或实数,称为 ${}^{l}R_n^{*}$ 的曲率半径.

如果 ${}^{l}R_n$ 中对应于点 X 和 Y 的超平面是平行的,那么这两个点之间的距离可定义为这些超平面之间的距离 d:

$$d = |y^0 - x^0|,\ \text{当}\ (\mathbf{x}E\mathbf{x}) > \text{时},$$

$$d = i|y^0 - x^0|,\ \text{当}\ (\mathbf{x}E\mathbf{x}) < \text{时}.$$

${}^{l}R_n^*$ 中不同类型直线上的几何学是根据它们的射影度量的类型来定义的. 因此, 双曲直线具有双曲空间的射影度量; 依此类推.

上伪 Euclid 空间 ${}^{l}R_n^*$ 中两张超平面之间的角定义为伪 Euclid 空间 ${}^{l}R_n$ 中对应的(对偶)点之间的规范距离. 这个角等于这两个超平面上它们交成的 $(n-2)$ 维超平面关于绝对锥面在超平面上截成的二次曲面的极点之间的规范距离. 在所有的情形, 已定义的角是不包含绝对点的. 特别在 ${}^{l}R_2^*$ 中, 两条直线之间的距离等于这两条直线上和它们的交点一起调和分隔它们与绝对直线的交点的那两个点之间的规范距离.

${}^{l}R_n^*$ 的由对偶伪 Euclid 空间的运动诱导的变换称为 ${}^{l}R_n^*$ 的运动. ${}^{l}R_n^*$ 的运动(像 ${}^{l}R_n$ 的运动一样)可用指标 l 的伪正交算子描述.

由于对偶性支配着空间 ${}^{l}R_2^*$ 和 ${}^{l}R_2$ 的性质, 平面 ${}^{l}R_2^*$ 的几何可从平面 ${}^{l}R_2$ 的几何导出; 这特别适用于 ${}^{l}R_2^*$ 中三角形的几何. 表示边长和角度之间基本关系的公式和**上 Euclid 空间** (co - Euclidean space) 中三角形的公式类似, 只是后者出现的三角函数必须用相应的双曲函数代替. 设 ABC 是一个三角形, 它的内角 B 包含一个绝对点. 那么关于边 a, b, c 和角 $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ 的值有如下关系:

$$b = a + c,$$

$$\frac{\hat{A}}{\sinh(a/\rho)} = \frac{\hat{B}}{\sinh(b/\rho)} = \frac{\hat{C}}{\sinh(c/\rho)},$$

$$\hat{A}^2 = \hat{B}^2 + \hat{C}^2 - 2\hat{B}\hat{C}\cosh\frac{a}{\rho}$$

平面 ${}^{l}R_2^*$ 上的距离度量是一个双曲射影度量, 而角度量是抛物的. 在 3 维空间 ${}^{l}R_3^*$ 中, 平面上的射影度量是双曲的, 而直线上的射影度量是椭圆的; 在平面把中的度量是抛物的(伪 Euclid).

上伪 Euclid 空间构成双曲空间的极限情形.

参考文献

[1] Розенфельд, Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969.

[2] Яглом, И. М., Розенфельд, Б. А., Ясинская, Е. У., 《Успехи матем. наук》, 19 (1964), 5, 51–113.

Л. А. Сидоров 撰

【补注】 上伪 Euclid 空间也称为对偶伪 Euclid 空间 (dual pseudo - Euclidean space). 潘养廉 译

上伪 Galilei 空间 [co - pseudo - Galilean space; копсевдогалилево пространство]

伪 Galilei 空间 (pseudo - Galilean space) 的对偶空间. **半双曲空间** (semi-hyperbolic space) 的特殊情况. 亦称对偶伪 Galilei 空间 (dual pseudo-Galilean space).

参考文献

[1] Розенфельд, Б. А., Неевклидовы пространсва, М., 1969.

张鸿林 译

上伴随表示 [coadjoint representation; коприсоединенное представление]

逆步于 Lie 群 G 的伴随表示 Ad 的表示(见 **Lie 群的伴随表示**(adjoint representation of a Lie group)). 上伴随表示作用于 Lie 群 G 的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的对偶空间 $\mathfrak{g}^*$ 上.

设 G 为实矩阵群, 即 $G(n, \mathbf{R})$ 的子群, 则 $\mathfrak{g}$ 为 n 阶实矩阵空间 $\mathrm{Mat}_n(\mathbf{R})$ 的子空间. 记 $\mathfrak{g}^{\perp}$ 为 $\mathfrak{g}$ 关于双线性型

$$(X, Y) \to \mathrm{tr}\, XY \text{ 在 } \mathrm{Mat}_n(\mathbf{R}) \text{中}$$

的正交补. 设 V 为 $\mathrm{Mat}_n(\mathbf{R})$ 的补于 $\mathfrak{g}^{\perp}$ 的某个子空间, P 为到 V 上平行于 $\mathfrak{g}^{\perp}$ 的投影, 则 $\mathfrak{g}^*$ 可看作是 V, 而上伴随表示可用公式

$$K(g)X = P(gXg^{-1}), \quad g \in G, \quad X \in V$$

给出. Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的对应表示也称为上伴随表示, 在上述情形它可定义为

$$K(X)Y = P(XY - YX), \quad X \in \mathfrak{g}, \quad Y \in V.$$

上伴随表示在**轨道方法** (orbit method) (见[2]) 中扮演了基本的角色, 在上伴随表示中每个 G 轨道 Ω 具有一个标准的 G 不变**辛结构** (symplectic structure). 换句话说, 在每个轨道 Ω 中可唯一地定义一个非退化 G 不变闭微分 2 形式 B_{Ω}(由此也可推出上伴随表示中所有 G 轨道都是偶维的). 为了求出 B_{Ω} 的明显表达式, 进行如下: 设 $F \in \mathfrak{g}^*$, Ω 为过点 F 的轨道, 设 ξ, η 为过点 F 对 Ω 的切向量. 在 $\mathfrak{g}$ 中存在 X 和 Y 使得

$$\xi = K(X)F, \quad \eta = K(Y)F.$$

于是

$$B_{\Omega}(\xi, \eta) = \langle F, [X, Y] \rangle.$$

向量场 $\xi_X(F) = K(X)F$, $\forall X \in \mathfrak{g}$, 关于 B_{Ω} 为 Hamilton 的; 作为 $\mathfrak{g}^*$ 上线性函数, 可以取 X 自身作为它的生成子(生成函数).

在上伴随表示中, 具有最大维数的轨道的点的稳定化子是可交换的([1]). 在每个轨道上作出的 Poisson 括弧产生单个 Berezin 括弧, 它在 $\mathfrak{g}^*$ 上光滑函数空间中定义了**局部 Lie 代数** (Lie algebra, local) 结构 (见[3]). 而 Berezin 括弧的坐标表达式为

$$\{f_1, f_2\} = \sum_{i,j,k} c_{ij}^k x_k \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \frac{\partial f_2}{\partial x_j},$$

其中 C_{ij}^k 为 $\mathfrak{g}$ 的构造常数.

参考文献

[1] Bernat, P. et al., Représentations des groups de Lie résolubles, Dunod, 1972.

[2] Кириллов, А. А., Элементы теории представлений, М.,

1972 (英译本:Kirillov, A. A., Elements of the theory of representations, Springer, 1976).

[3] Кириллов, А. А.,《Успехи матем. наук》. 31 (1976), 4, 57－76

А. А. Кириллов 撰　许以超 译　石生明 校

联盟 [**coalition**; **коалиция**], 对策论中的

在发生冲突时作出决策(行动联盟(coalition of actions))或维护某些利益(利益联盟(coalition of interests))的个人或集团的组合. 见**对策论** (games, theory of).

А. С. Михайлова 撰

【补注】 形式上,在 n 局中人对策中,一个联盟就是局中人集 P 的一个子集(局中人组合). 集合 P 有时称为"大联盟(grand - coalition)". 通常在这样的组合中有一个有关该组合成员如何作出选择的协议. 一般情况下,成员们将联合行动以保证使他们得到比他们独立行动时可能确保的更多的增益(见**增益函数** (gain function)).

一个联盟结构(coalition structure)就是 P 的一个互不相交的非空子集族(亦见[A1]).

参考文献

[A1] Szép, J. and Forgó, F., Introduction to the theory of games, Reidel, 1985.

[A2] Friedman, J. W., Oligopoly and the theory of games, North - Holland, 1977.

史树中 译

联盟对策 [**coalitional game**; **коалиционная игра**]

行动的联盟 $\mathfrak{K}_a$ 和利益的联盟 $\mathfrak{K}_i$ 是局中人集 I 的不同的(一般是相交的)子集族的一种对策,其中对于每个利益的联盟 $K\in\mathfrak{K}_i$ 的偏好是用它的支付函数 H_K(见**对策论** (games, theory of)) 来描述的. 只有 $\mathfrak{K}_i\subset\mathfrak{K}_a$ 的情形被研究过.

集合 $\mathfrak{K}_a$ 自然可方便地理解为有顶点集 I 的单纯复形. $\mathfrak{K}_a$ 的某些拓扑性质有对策论意义;特别是,如果 $\mathfrak{K}_a$ 是零维的,那么对策就变为非合作对策.

联盟对策的进行也可解释为局中人对于每个行动联盟(在"联盟会议"上的)所作的联盟策略(见**策略(对策论中的)** (strategy (in game theory)))的协调选择,经选择后,各种行动联盟形成形势 s,而每个利益联盟 K 收到支付 $H_K(s)$.

联盟对策中的最优性可按自己独有的方式看作"冲突的局部化",即形势 s 在下列条件满足的意义下是稳定的:利益联盟 K 不倾向于离开它的 s 中的联盟策略,即使某个行动联盟 K' 离开它的策略时也一样. Nash 意义下的平衡被这一原则所包括.

参考文献

[1] Воробьев, Н. Н., Коалиционная игра,《Теория вероятн. и ее примен.》, 12 (1967), 2, 289－306.

Н. Н. Воробьев 撰

【补注】 此条目中解释的概念在西方文献中不出现,而是作者及其学派所特有的.

史树中 译

Cobol 语言 [**Cobol**; **Кобол**]

面向数据处理问题的**算法语言** (algorithmic language) (COBOL 为 COmmon Business Oriented Language (面向商业的通用语言)的缩写). 程序的书写方法接近自然语言(英语),并便于学习、文件编制和从一台计算机向另一台计算机的移植. Cobol 语言是 1959 年开始在美国开发的;它已全面推广,并已成为一种国家标准 ([1]). Cobol 语言的俄文版是 1968 年发表的([2]), 1978 年采用了国家标准 ([3]).

Cobol 语言的源程序由 4 个部分组成:

1) 标识部分 (identification division)包括程序和作者的名称、编写日期和其他参考信息.

2) 环境部分 (environment division)规定编译程序、目标计算机、专用硬件特性和输入/输出控制的配置.

3) 数据部分 (data division)包括与机器无关的输入、中间和输出数据的类型和结构的说明. 允许使用数值和非数值的基本数据结合成组,组的组等. 这种结构层次可以由它的层级数给出. 最高层次分配给逻辑记录. 同类或异类记录的集合构成文件 (files). 允许有提高数据格式内部解释的有效性的指示.

4) 过程部分 (procedure division) 规定数据处理操作. 它具有语句序列的形式,命名为段和节,包括命令语句、条件语句和直接编译语句.

Cobol 语言的成分按照其目的分为核心程序 (nucleus) 和 11 个功能处理模块(functional processing modules). 核心程序包括计算机内部存储器中数据处理必需的语言部分. 功能模块分别包括: 表处理 (table handling); 外部文件访问组织的存取 (access)、随机存取 (random access) 和索引输入 - 输出 (indexed input - output); 分类合并 (sorting - merging); 输出报表书写 (output report writing); 执行时涂盖的程序分段 (segmentation); 程序库 (library) 中 Cobol 语言正文的修改并将它们包含在程序中; 数据和过程的调试 (debugging) 与控制; 与其他程序间内部程序通信 (inter-program communications); 此外, 还有发送和接收信息的通信设施.

在具体实现编译程序时, 选择 Cobol 语言标准子集 (standard subsets) 的灵活性是以区分核心程序和功能模块的某些固定层级为基础. 这种语言的成分按层级排列, 以使较高层级保证相应功能的较全面实现, 并包含较低层级作为适当的子集. 有些功能模块包括零集作为它们的最低层级.

Cobol 语言以后发展的主要方向是组织与数据库

的交互作用和运用结构化程序设计的思想.

参考文献

[1] American National Standard Programming Language COBOL, ANSI X 3.23, 1974

[2] Бабенко, Л. П. [и др.], в кн., Тр. 1 Всесоюзной конференции по программированию, И. Алгоритмические языки, К., 1968, 3–15.

[3] ГОСТ 22558–77., Язык программирования КОБОЛ.

[4] Ющенко, Е. Л. [и др.], КОБОЛ, 2 изд., К. 1974.

Г. К. Столяров 撰 钱宝峰 译 仲萃豪 校

配边 [**cobordism**; **кобордизм**], 亦称配边性、配边理论 (cobordism theory)

由 Thom 空间的谱所确定的,并与流形的稳定切丛或法丛的各种结构有关的一种广义上同调论. 配边理论(在 S 对偶性 (S-duality) 意义下)对偶于下配边 (bordism) 理论.

配边的最简单例子是正交或非定向配边. 设 O_r 表示 Euclid 空间 $\mathbf{R}^r$ 的正交变换群, BO_r 为其分类空间 (classifying space). 标准嵌入 $O_r \to O_{r+1}$ 定义一个映射 j_r: $BO_r \to BO_{r+1}$, 它将 BO_{r+1} 上的万有纤维丛 γ_{r+1} 映成丛 $\gamma_r \oplus \theta$, 其中 θ 是 BO_r 上的一维平凡丛. 如果 TBO_r 是 γ_r 的 **Thom 空间** (Thom space), 则得到由 j_r 诱导的映射 s_r: $STBO_r \to TBO_{r+1}$, 其中 S 是纬垂 (suspension). 序列 $\{TBO_r, s_r\}$ 组成一个**空间的谱** (spectrum of spaces), 从而定义了一个上同调论, 称作正交配边理论 (orthogonal cobordism theory) 或非向配边理论 (non-oriented cobordism theory) 或 O 配边理论 (O-cobordism theory), 记作 O^*. 偶对 (X, A) 的 n 维 O 配边群 $O^n(X, A)$ 定义为

$$\lim_{i\to\infty} [S^i(X/A), TBO_{i+n}],$$

其中 $[P, Q]$ 是从 P 到 Q 内的映射的同伦类的集合. 这里 $O^n(x)=O^n(X, \phi)$, ϕ 是空集, $X/\phi = X^+$ 意味着 X 与一个点的无交并. 群 $O^n(X, x_0)$ $(x_0 \in X)$ 称为 X 的 n 维 O 配边约化群 (reduced group) $\widetilde{O}^n(X)$. 对偶于 O 配边理论的广义同调论称为 O 下配边理论 (O-bordism theory). 偶对 (X, A) 的 n 维下配边群 $O_n(X, A)$ 定义为

$$\lim_{i\to\infty} \pi_{i+n}((X/A) \wedge TBO_i).$$

一个点的 n 维 O 下配边群记为 Ω^n_O, 而一个点的 n 维 O 下配边记为 Ω^O_n; 后者可以纯几何地加以描述. 进一步, $\Omega_O^{-n} \approx \Omega^O_n \approx \pi_{n+N}(TBO_N)$, $N \gg n$, 故可将其理解为配边群和下配边群两种意义(见**下配边** (bordism), 那里它记作 $\mathfrak{N}_n$). O 配边理论的全系数群(其分次群 $\Omega_O = \oplus_{-\infty}^{+\infty} \Omega^n_O$)是一个环: 乘法由流形的 Descartes 积给出. 进而, 对任何有限 CW 复形 X, 群 $O(X) = \oplus_{-\infty}^{+\infty} O^n(X)$ 是相对于 X 的自然环, 因为由嵌入 $O_m \times O_n \to O_{m+n}$ 诱导的映射 $BO_m \times BO_n \to BO_{m+n}$ 定义了一个映射 $TBO_m \wedge TBO_n \to TBO_{m+n}$, 故 $\{TBO_r\}$ 是空间的乘法谱.

一般情形可如下描述. 一个结构序列 (structural series) (B, φ) 意指一列丛 $\varphi_r : B_r \to BO_r$ 及映射 $i_r : B_r \to B_{r+1}$, 使得 $\varphi_{r+1} \circ i_r = j_r \circ \varphi_r$. 映射 φ_r 确定了 B_r 上的一个向量丛 $\xi_r = \varphi_r^* \gamma_r$, 故 $i_r^* \xi_{r+1} = \xi_r + \varphi_r^* \theta$. 设 TB_r 是丛 ξ_r 的 Thom 空间; 上述等式确定了一个映射 s_r: $STB_r \to TB_{r+1}$, 使得序列 $T(B, \varphi) = \{TB_r, s_r\}$ 是一个空间谱, 因而定义了一个上同调论. 称之为 (B, φ) 配边理论, 记为 $(B, \varphi)^*$. 因而

$$(B\varphi)^i(X, A) = \lim_{N\to\infty} [S^N(X/A), TB_{i+N}].$$

(B, φ) 配边理论的系数群记为 $\Omega(B, \varphi)$. 此处, $\Omega_i^{(B,\varphi)} = \Omega^{-i}_{(B,\varphi)} = \pi_{i+N}(TB_N)$, $N \gg i$, 其中 $\Omega_i^{(B,\varphi)}$ 是对偶 (B, φ) 下配边理论的系数群, 它具有称之为 (B, φ) **结构** ((B, φ)-structure) 概念的几何定义: 先定义 (B, φ) 下配边性 ((B, φ)-bordancy), 而 $\Omega^{(B,\varphi)}$ 的元素理解为 (B, φ) 下配边流形的类.

配边理论的最初例子从线性群列中产生. 例如, 正交群列 $\{O_r\}$ 定义了结构序列 $\{B_r, \varphi_r\}$, 其中 $B_r = BO_r$, $\varphi_r = \mathrm{id}$. 序列 $\{SO_r\}$ 定义结构序列 $\{B_r, \varphi_r\}$, 其中 $B_r = BSO_r$, $\varphi_r : BSO_r \to BO_r$ 是相应于包含 $SO_r \subset O_r$ 的万有二重覆叠. 相应的配边理论称为定向配边理论 (oriented cobordism theory); 记为 SO^*. 酉群序列 $\{U_r\}$ 定义了酉配边 (unitary cobordism) 或复配边 (complex cobordism)、拟复配边 (quasi-complex cobordism)、殆复配边 (almost-complex cobordism) 的理论; 记为 U^*. 此处序列 $\{B, \varphi\}$ 可如下构造: $B_{2r} = B_{2r+1} = BU_r$ 是 U_r 的分类空间, 而 φ_{2r}, φ_{2r+1} 是分别由自然嵌入 $U_r \subset O_{2r} \subset O_{2r+1}$ 诱导的分类空间的映射 $BU_r \to BO_{2r}$ 及 $BU_r \to BO_{2r} \to BO_{2r+1}$. 辛群序列 $\{\mathrm{Sp}_r\}$ 定义了辛配边理论 (symplectic cobordism theory) Sp^*, 其中 $B_{4r} = B_{4r+1} = B_{4r+2} = B_{4r+3} = B\mathrm{Sp}_r$. 而 φ_r 如同酉的情形同样方法构造. 存在相应于群列 $\{\mathrm{Spin}_r\}$ $\{SU_r\}$, 等等的配边理论. 最后, 单位群列 $\{E_r\}$, 其中 $\varphi_r : B_r \to BO_r$ 是具有可缩 B_r 的纤维丛, 定义了一种与稳定上同伦群理论相同的配边理论, 因此对偶下配边理论同构于稳定同伦群理论, $E_i(X) \approx \pi_{i+N}(S^N X)$, $N \gg i$. 称 E 流形是标架的(平凡化的), 是因为 E 结构恰为稳定法丛的标架(平凡化). E 配边理论称为平凡化的 (trivialized) 或标架配边理论 (framed cobordism theory), 它的 i 维系数群记为 Ω^i_{fr}, 使得 $\Omega_{fr}^{-i} = \Omega_i^{fr} = \pi_{i+N}(S^N)$. 这是配边的第一个例子; 它属于 Л. С. Понтрягин (1955), 他把球面的稳定同伦群解释为(几何化定义的) Ω^i_{fr} 的一个点的标架配边群, 其目的是计算群 $\pi_{i+N}(S^N)$.

所有这些产生于线性群列的配边理论是乘法的, 因此, 对任何有限 CW 复形 X, 全(分次)配边群是一个环. 例如, 对群列 $\{U_r\}$, 有嵌入 $U_m \times U_n \to U_{m+n}$

诱导映射

$$BU_m \times BU_n \to BU_{m+n},$$

因而诱导出映射 $TBU_m \wedge TBU_n \to TBU_{m+n}$. 表示理论 U^* 的谱 $\{M_r\}$ 形如 $M_{2r}=TBU_r$, $M_{2r+1}=STBU_r$, 因此存在映射 $M_r \wedge M_s \to M_{r+s}$, 使得空间的谱 $\{M_r\}$ 是可乘的.

配边理论的发展起始于群 Ω_E, Ω_O, Ω_{SO} 的几何定义和计算. Понтрягин 定理起着重要的作用, 它指出 O 下配边流形具有相同的 Stiefel 数. 配边理论的研究为 R. Thom 所推动. 他引入空间 TBO_N, $TBSO_N$, 并且证明了同构 $\pi_{i+N}(TBO_N) \approx \Omega_{SO}^{-i}$, 使我们可以将同伦拓扑的一些方法带进配边环的计算中. Thom 构造刺激了 TBU_n, $TBSp_n$ 等及相应配边的引入. 配边理论发展第一个阶段的基本问题是一点的配边环的计算.

在一点的配边的研究中, 示性类起着很大作用: Ω_U 的陈类, Ω_O 的 Stiefel 类和 Ω_{SO} 的 Понтрягин 及 Stiefel 类 (见示性类 (characteristic class); 陈(省身)类 (Chern class); **Понтрягин 类**(Pontryagin class)). 一般地, 给定任何结构列 (B, φ) 及任何乘法上同调论 h^*, 使得 B_r 上所有丛 ξ_r 可定向, 则可定义示性类作为群 $h^*(B)$ 的元素, 其中 $B=\lim(B_r, j_r)$. 进一步, 其相应的示性数, 即环 $h^*(\mathrm{pt})$ 的元素, 相对于 (B, φ) 配边性是不变的. 设 $\omega=(i_1, \cdots, i_k)$ 是 n 的一个分割, S_ω 是相应于 ω 的 n 元对称函数. 示性类 $S_\omega(c_1, \cdots, c_n)$ (见陈(省身)类 (Chern class)) 记为 S_ω^c. 对 Понтрягин 类和 Stiefel 类的类似构造分别记为 S_ω^p 和 S_ω^s.

1) 酉配边 (unitary cobordism). 环 Ω_U 是可数个齐次生成元上的自由分次多项式代数

$$\Omega_U = \mathbf{Z}[x_1, \ldots, x_n, \ldots], \ \deg x_i = -2i.$$

集合 $\{x_n\}$ $(\deg x_n=-2n)$ 是多项式生成元系统, 当且仅当

$$S_{(n)}^c(x_n)=\begin{cases} \pm 1, \ n \neq p^r-1, \ \text{对任何素数 } p \text{ 和整数 } r, \\ \pm p, \ n=p^r-1, \ \text{对某素数 } p \text{ 和整数 } r, \end{cases}$$

其中 (n) 是 n 的由单项构成的分割. 有一种 Ω_U 的多项式生成元系统可以如下描述. 设 CP^n 是 n 维复射影空间. $CP^i \times CP^j$ 中双度数 $(1,1)$ 的复代数超曲面是一个复流形, 它的酉配边类记为 $H_{i,j}$, $\dim_{\mathbf{R}} H_{i,j}=2(i+j-1)$. 由于

$$S_{i+j-1}(H_{i,j}) = \begin{pmatrix} i+j \\ i \end{pmatrix}.$$

于是 $H_{i,j}$ 的元素的一个合适的整系数线性组合定义了一个阶为 $2(1-j-i)$ 的 Ω_U 的生成元.

由于 Ω_U 无挠, 且 $H^*(BU;\mathbf{Z})=\mathbf{Z}(c_1, \cdots, c_n, \cdots)$, 其中 c_n 是陈类, $\deg c_n=2n$ (见陈(省身)类 (Chern class)), 因此陈(省身)数 (Chern number) 完全确定了一个殆复流形的酉配边类.

设 n 是正整数, 并设 $(i_1, \cdots, i_k)$, $i_s>0$, $\sum i_s=n$ 是其分割. 对应于每个 $2n$ 维(实维数)殆复流形 M, 有整数集 $\{a_{i_1,\ldots,i_k}\}=\{c_{i_1}\cdots c_{i_k}(M)\}$, 其中多重指标 $i_1, \cdots, i_k$ 取遍 n 的所有分割. 这样整数 $\{b_{i_1}, \cdots, b_{i_k}\}$ 的集合在下列情形可以作为某殆复流形的陈数之集合实现. 设 $S_\omega^c(e) \in H^{**}(BU;\mathbf{Q})$ 是用变量 $e^{x_i}-1$ $(i=1, \cdots, |\omega|)$ 代替 S_ω^c 表达式中吴生成元 x_i 给出的示性类 (characteristic class), 并设 $T \in H^{**}(BU;\mathbf{Q})$ 是由函数 $x_i/(e^{x_i}-1)$ 的积给出的示性类. 设 $x(M)$ 为示性类 $x \in H^n(BU;\mathbf{Q})$ 在有切丛 TM 的殆复流形 M 的基本类 $[M] \in H_n(M, \mathbf{Z})$ 上的值.

对同态 $\varphi: H^n(BU;\mathbf{Q}) \to \mathbf{Q}$, 存在一个闭殆复流形 M, 使对任何 $x \in H^n(BU;\mathbf{Q})$, $\varphi(x)=x(M)$, 当且仅当 φ 在每个示性类 $S_\omega^c(e)T$ 的所有 n 维分支上取整数值 (Stong 定理 (Stong theorem), 见 [1], 第 7 章). 等价地, Hurewicz 同态

$$\pi_{2(k+N)}(TBU_N) \to \tilde{K}_{2(k+N)}(TBU_N),$$

其中 $N \gg k$, 是到一个直和因子上的单同态 (服部定理 (Hattori theorem)). 此处 $\tilde{K}$ 表示约化 K 理论 (K-theory).

2) 非定向配边 (non-oriented cobordism) 或正交配边 (orthogonal cobordism). 环 Ω_O 的每个元素具有阶数 2, 且

$$\Omega_O=\mathbf{Z}_2[x_1, \cdots, x_n, \cdots], \ \deg x_i=-1, \ i \neq 2^s-1,$$

即 Ω_O 是一个自由多项式 $\mathbf{Z}_2$ 代数. 可以选取使 $S_{(i)}^w(M) \neq 0$ 的任何元素 $[M]$ 作为生成元 x_i, 例如 $x_{2i}=\mathbf{R}P^{2i}$. 在这个理论中, 将 CP^k 换成 $\mathbf{R}P^k$ 可得到流形 $H_{i,j}$ 的类似物; 一个合适的流形 $H_{i,j}$ 可作为 $(1-i-j)$ 阶的生成元. **Stiefel 数** (Stiefel number) 完全确定了流形的非定向配边类. 下述定理给出了 Stiefel 数之间的关系: 给定一个同态 $\varphi: H^n(BO,\mathbf{Z}_2) \to \mathbf{Z}_2$, 存在一个闭 n 维流形 M, 使得对所有 $x \in H^n(BO;\mathbf{Z}_2)$, $\varphi(x)=x(M)$ 成立, 当且仅当对所有 $b \in H^*(BO;\mathbf{Z}_2)$, $\varphi(Sqb+vb)=0$, 其中 $v=Sq^{-1}w$. 这里 $Sq=Sq^1+Sq^2+\cdots$ 是全 **Steenrod 运算** (Steenrod operation) 且 $w=w_1+w_2+\cdots$ 是全 Stiefel 类. 环 $(\Omega_O)^2$ 是同态 $\Omega_U \to \Omega_O$ 的象.

3) 具有环 Ω_{SO} 的定向配边 (oriented cobordism). 这个环的挠子群 Tors 的所有元素具有阶数 2. 环 $\Omega_{SO}/\mathrm{Tors}$ 是 $\mathbf{Z}$ 上 $-4i$ 阶的类 x_i 的多项式环. 生成元由以下条件选取:

$$S_{(i)}^p(x_i)=\begin{cases} \pm 1, \ 2^i \neq p^r-1, \ \text{对任何素数 } p \text{ 和整数 } r, \\ \pm p, \ 2^i=p^r-1, \ \text{对某素数 } p \text{ 和整数 } r. \end{cases}$$

流形的 SO 配边类由 **Понтрягин 数** (Pontryagin number) 和 Stiefel 数确定. 流形的**符号差** (signature) 也

是配边类的一个不变量. Stiefel 数之间的关系由如下事实给出:"遗忘"同态 $\Omega_{SO}\to\Omega_0$ 的象恰由包含类 w_1 的所有(Stiefel)数均为 0 的那些配边类组成. 对任一分割 $\omega=(i_1,\cdots,i_k)$,

$$p_\omega(M)\bmod 2 = w^2_{2\omega} = \{w_{2i_1}\cdots w_{2i_k}(M)\},$$

其中 p_ω 是相应的 Понтрягин 数. 在 Понтрягин 数之间,不存在任何 2 素关系.

类似于酉配边类 $S^c_\omega(e)$ 之引入,可引进 $S^p_\omega(e)$. 它是 $e^{x_i}+e^{-x_i}-2$ 的对称函数. 设 L 是确定 Hirzebruch L 亏格(L-genus)的示性类. Понтрягин 数之间所有关系由 Понтрягин 数是整数以及 $(S^p_\omega(e)L)[M]\in\mathbf{Z}[1/2]$ 这一事实给出. 同态 $\Omega_U\to\Omega_{SO}/\mathrm{Tors}$ 是满的.

4) 具有环 Ω_{SU} 的特殊酉配边 (special unitary cobordism). 一个 U 流形 M 有 SU 结构,当且仅当 $c_1(M)=0$. 挠子群 Tors 的所有元素有阶数 2. 同态 $\Omega_{SU}\to\Omega_U$ 的核恰为 Tors. 群 Ω^n_{SU} 是有限生成的,且 $\Omega_{SU}\otimes\mathbf{Q}$ 是 $\mathbf{Q}$ 上 $-2i$ 阶 $(i>1)$ 的类 x_i 的多项式环. 当 $n\neq 8k+1, 8k+2$ 时,挠子群 Tors 形如 $\mathrm{Tors}^{-n}=0$,而当 $n=8k+1,8k+2$ 时,Tors^{-n} 是 $\mathbf{Z}_2$ 上的向量空间,其维数是 k 的分割数. 两个 SU 流形是下配边的,当且仅当它们在整上同调及 KO 理论中有相同的示性数.

n 维 SU 流形的陈数之间所有关系如下给出:对所有 ω,有 $c_1c_\omega(M)=0$ 且 $(S^c_\omega(e)T)[M]\in\mathbf{Z}$; 如果 $n\equiv 4 \bmod 8$,则对所有 ω,$(S^p_\omega(e)T)[M]\in 2\mathbf{Z}$. 同态 $\Omega_{SU}\to\Omega_O$ 的象由类 $[M]^2$ 组成,其中 M 是所有包含类 p_1 的 Понтрягин 数为偶数的有向流形.

环 Ω_{Spin} 和 Ω_{Spin^c} 也完全计算出来了. 环 Ω_{Sp} 和 Ω_{fr} 迄今(1986)尚未算出. 环 $\Omega_{\mathrm{Sp}}\otimes\mathbf{Z}[1/2]$ 是 $(-4i)$ 维生成元上的多项式环. Tors Ω_{Sp} 中所有已知(1986)元有阶数 2.(尽管如此,有人宣称在维数 >100 时有一个 4 阶元.)关于 Ω_{fr},这里的主要结果是关于这些群的有限性的 Serre 定理. 自伴配边环 Ω_{SC} 也被研究过,其对象是殆复流形,它具有把复结构同构映成伴随结构的法丛中已给的算子. $TBSC$ 的谱已经构造出来. 至于群 Ω_{SC},知道它仅有 2 素挠,但不同于 Ω_{Sp},对任何 k,有阶为 4^k 的元素,即 $[\mathbf{R}P^{4k-1}]$. 利用形式群 (formal group) 的技巧,象 $\mathrm{im}(\Omega_{SC}\to\Omega_O)$ 也被算出.

一个配边理论到另一个配边理论的映射,例如,$SU^*\to U^*$ 诱导出谱的映射 $TBSU\to TBU$. 在谱范畴下,这个映射的锥给出了广义上同调论. 如此得到的理论中点的环有以下的几何解释. 设 (U,SU) 为边界(可能空)上具有给定 SU 结构的 U 流形. 引入合适的 (U,SU) 流形的下配边关系,可得到环 $\Omega_{U,SU}$. 群 $\Omega_{U,\mathrm{fr}},\Omega_{O,SO}$ 等用同样方式引入.

直到现在,所考虑的是光滑流形,或等价地是线性群表示(结构列从 BSO_n 上的丛产生). 可以考虑拓扑流形上各种结构,即从 $\mathbf{R}^n$ 的一个同胚(甚至具同伦等价)群出发. 下面是所知道的例子.(字母 S 总是表示过渡到有向情形.)

5) 分段线性配边 (piecewise-linear cobordism). 对象是分段线性流形. 对应的下配边关系导致群 Ω_{PL}, Ω_{SPL}. 通过定义群 PL_n(或 $S\mathrm{PL}_n$)为 $\mathbf{R}^n$ 到自身的保原点(或也保定向)的分段线性同胚群,可以引进分类空间 $B\mathrm{PL}_n$(或 $BS\mathrm{PL}_n$)和 Thom 空间 $TB\mathrm{PL}_n$(或 $TBS\mathrm{PL}_n$),并构造一个 PL(或 SPL)配边理论. 在这种联系下,$\Omega^{-i}_{PL}\approx\pi_i(TB\mathrm{PL})$ 且 $\Omega^{-i}_{SPL}\approx\pi_i(TBS\mathrm{PL})$. 群 Ω_{PL} 已经算出,分段线性流形的配边类由示性数,即 $H^*(B\mathrm{PL};\mathbf{Z}_2)$ 中的元素完全确定.

6) 拓扑配边 (topological cobordism). 对象是定义了群 Ω_{Top} 和 $\Omega_{S\mathrm{Top}}$ 的拓扑流形. 考虑 $\mathbf{R}^n$ 到自身的保原点的同胚群 Top_n,可定义空间 $B\mathrm{Top}$ 和 $TP\mathrm{Top}_n$. 群 $\pi_i(TP\mathrm{Top})$ 和 $H^*(B\mathrm{Top};\mathbf{Z}_2)$ 已算出. 尽管如此,同构 $\Omega^{-i}_{\mathrm{Top}}\approx\pi_i(TP\mathrm{Top})$ 对除 $i=4$ 外的所有 i 成立. 这个同构还缺少证明,它与以下事实相关联:对拓扑流形,同构 $\Omega^{-i}_{B,\varphi}\approx\pi_i(T(B,\varphi))$ 赖以成立的传递性定理在一般情形还没有证明(但也没有被推翻(1986 年)).

7) 具有 Ω_G,Ω_{SG} 的 Poincaré 复形的配边 (cobordism of Poincaré complexes). 对象是有 **Poincare 对偶性** (Poincaré duality) 的复形,下配边是相应的等价关系. 这样的复形有一个由 BG_N(或 BSG_N)上的万有丛诱导出的正规球丛. 此处 G_N(或 SG_N)是球面 S^N 到自身上(度为1的)同伦等价的 H 空间 (H-space). 它们产生的 Thom 谱 TBG 和 $TBSG$ 有有限同伦群,而符号差定义了一个非平凡同态 σ: $\Omega^{-4k}_{SG}\to\mathbf{Z}$. 因此,映射 $\Omega^{-i}_{SG}\to\pi_{i+N}(TBG_N)$ 不是一个同构.

然而,另外一些例子由具有特殊类型的奇点的流形的配边给出.(这是构造各种有特殊性质的上同调论的很好的技巧.)沿这个方向可构造一种配边理论,它与通常的奇异上同调论及与有关的 K 理论相同.

配边理论发展的第二阶段是将配边作为特殊的广义上同调论的研究. 设 F 表示域 $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ 或四元素体 $\mathbf{H}$ 中的一个, GF 是相应的群列 ($G\mathbf{R}_n=O_n$, $G\mathbf{C}_n=U_n$, $G\mathbf{H}_n=\mathrm{Sp}_n$), GF^* 是相应的配边理论. 一个乘法广义上同调论 h^* 称为 F 定向的 (F-orientable),如果任意 F 向量丛是 h^* 定向的,或等价地,如果典范一维 F 向量丛 $\xi\to FP^\infty$ 是 h^* 定向的,其中 FP^∞ 是射影空间. 理论 h^* 的 F 定向指的是丛 ξ 的 h^* 定向 $U_h(\xi)\in h^*(FP^\infty)$,且具有选定定向的理论称为定向的 (oriented). 因为有等式 $FP^\infty=TBGF_1$,故 GF 配边理论有一个典范定向. 理论 GF^* 在 F 定向理论类中是万有的,即对任何有 F 定向 $U_h(\xi)$ 的 F 定向理论 h^*,存在理论间唯一的乘法同态 φ^h: $GF^*\to h^*$,使理论 GF^* 的典范定向映为 U_h. 进一步,当 F_O 是域 $\mathbf{R},\mathbf{C}$ 之一时,对任何 F_O 定向理论 h^* 和任何有

限 CW 复形 X，满足下式的谱序列 $E^r_{p,q}(X)$ 和 $E_r^{p,q}(X)$

$$E^2_{p,q}(X) = \mathrm{Tor}_{p,q}^{\Omega_{GF_O}}(GF^*_O(X), h^*(\mathrm{pt})),$$

$$E_2^{p,q}(X) = \mathrm{Ext}_{\Omega_{GF_O}}^{p,q}(GF^*_O(X), h^*(\mathrm{pt}))$$

收敛到 $h^*(X)$，并且在 X 和 h^* 中是自然的，其中 $h^*_\cdot(\mathrm{pt})$ 借助同态 $\varphi^h(\mathrm{pt})$ 成为一个 Ω_{GF_O} 模．如果 h_* 是与 F 定向的上同调论 h^* 对偶的同调论，则有一同态 $\varphi_h: GF_* \to h_*$．当 h_* 是通常的同调论时，它与闭链的 Steenrod - Thom 实现一致(见 **Steenrod 问题** (Steenrod problem))．配边理论中强有力的方法与**形式群** (formal group) 有关 ([5])．

配边理论最重要和最成功的应用是：椭圆算子的 Atiyah - Singer 指标定理和一般 Riemann - Roch 定理的证明；群作用的不动点研究；给定同伦型的光滑(或分段光滑)流形的分类；有理 Понтрягин 类拓扑不变性定理的证明及拓扑流形可剖性问题的解决．

参考文献

[1] Stong, R. E., Notes on cobordism theory, Princeton Univ. Press, 1968.

[2] Conner, P. E. and Floyd, E. E., Differentiable periodic maps, Springer, 1964.

[3] Новиков, С. П., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, 31 (1967), 4, 855–951.

[4] Bröcker, T. and Tom dieck, T., Kobordismentheorie, Springer, 1970.

[5] Бухштабер, В. М., Итоги науки. и техники. Алгебра. Геометрия. Топология, т. 13, М., 1975, 231–272.

也见**下配边** (bordism) 的参考文献．　　Ю. Б. Рудяк 撰

【补注】 字母 M 常用来表示 Thom 空间和 Thom 谱．因此，例如，$MU(n)$ 用来表示 Thom 空间 TBU_n，MU 代表所有 $MU(n)$ 的谱；类似地，用 $MSO(n)$ 代表 $TBSO_n$ 等等．其相应的广义上同调论按照对由谱确定的广义上同调论的习惯，用相同的符号标出；因此，$MU^n(X)$ 是 X 的第 n 个复配边群，而 $MU^*(X)$ 是其复配边环．

如上定义的结构列 (B,φ) 通常称为 (B,f) 结构(见 **(B,φ) 结构** ((B,φ) - structure)，([1]))．

关于 n 维 (B,f) 流形 $\Omega_n(B,f)$ 的下配边(配边)群同构于 $\lim_{r\to\infty}\pi_{n+r}(TB_r,\infty)$，这个一般定理就是熟知的 Понтрягин - Thom 定理 (Pontryagin - Thom theorem)．

流形 M 上实向量丛 E 的复结构是一个向量丛射 J：$E \to E$，使 $J^2=-1$．如果 M 是无边的复嵌入流形 $M \subset \mathbf{C}^N$，那么在它的法丛上，与 i 的乘积就确定了那个丛(视为实丛)上的一个复结构．一个弱复流形 (weakly - complex manifold)(也称为稳定(殆)复流形 (stably (almost) complex manifold)) 是在它的稳定法丛 (normal bundle) 上有一个复结构的实流形；即如果 F 表示 M 的法丛，则有定义在某个 $F\oplus\theta^r$ 上的复结构，其中 θ^r 表示 M 上的平凡 r 维丛 $\theta^r=M\times\mathbf{R}^r$．空间 S 的复下配边群常记作 $\underline{MU}_*(S)$，现在也可以解释为映射 $f: M \to S$ 的配边类，其中 M 是无边弱复流形．复配边群 $\underline{MU}^q(S)$ 有类似的解释，见[A3]，并有其他下配边和配边群的解释．

配边理论(以及其他(广义)上同调论)与**形式群** (formal group) 理论之间的关系叙述如下．广义上同调论 h 是复有向的 (complex oriented)，如果它有第一陈类 (在适当的意义下；见上文及[A1]，p. 121；[A5]，第 II 部分，(2.1))．设 ξ 是 $\mathbf{C}^\infty$ 中直线的空间 $\mathbf{C}P^\infty$ 上典范线丛 H 的类(H 在 $x\in\mathbf{C}P^\infty$ 处的纤维是直线 x)，那么 $h^*(\mathbf{C}P^\infty)=h^*(\mathrm{pt})[[\xi]]$ 且 $h^*(\mathbf{C}P^\infty\times\mathbf{C}P^\infty)=h^*(\mathrm{pt})[[\xi\otimes 1, 1\otimes\xi]]$．因为 $\mathbf{C}P^\infty=\underline{BU}(1)$ 是复线丛的分类，所以存在一个 $m: \mathbf{C}P^\infty\times\mathbf{C}P^\infty\to\mathbf{C}P^\infty$，使得 $m^1(H)=H\otimes H$，且诱导一个环同态 $h^*(\mathbf{C}P^\infty)\to h^*(\mathbf{C}P^\infty\times\mathbf{C}P^\infty)$．$\xi$ 的象是二元幂级数．这里记为 $F_h(X,Y)=\sum_{i,j}a_{ij}X^iY^j$，$a_{ij}\in h^*(\mathrm{pt})$，其中 X 代表 $\xi\otimes 1$，Y 代表 $1\otimes\xi$．等价地，F_h 是系数在 $h^*(\mathrm{pt})$ 中使 $c_1(H\otimes H)=F_h(c_1^h(H\otimes 1), c_1^h(1\otimes H))$ 成立的幂级数．幂级数 F_h 定义了**形式群定律** (formal group law)．

反之，出现了是否每个(一维交换)形式群可由广义上同调论的形式群产生的问题．这里，具有特殊奇点的流形的下配边(配边)的研究是重要的．

结果是 (D. Quillen [A4]，也见[A12]) 对 $h^*=\underline{MU}$，这个形式群定律 F_h 是万有形式群定律 (universal formal group law)．这种万有性用拓扑术语以定理的形式表示为：如果 h^* 是任一复有向广义上同调论，则唯一存在上同调论间的变换 $\varphi: \underline{MU}^*\to h^*$(线性、保阶及可乘的)，使得 $\varphi_* F_{\underline{MU}}(X,Y)=F_h(X,Y)$，其中 φ_* 意味着：将 $\varphi(\mathrm{pt})$ 作用到 $F_{\underline{MU}}(X,Y)$ 的系数上．这个形式群定律 $F_{\underline{MU}}$ 的对数可以算出 (A. S. Mishchenko，见[A12]；关于形式群定律的对数概念见**形式群** (formal group))．它等于

$$\log F_{\underline{MU}}(X)=\sum_{i=1}^{\infty}m_iX^i,$$

$$m_1=1,\ m_i=i^{-1}[\mathbf{C}P^{i-1}],\ i\geqslant 2,$$

其中 $[\mathbf{C}P^n]\in\underline{MU}^*(\mathrm{pt})$ 表示(复)维数 n 的复射影空间的复配边类．

另一方面，对于 $\mathbf{Z}[u_2,u_3,\cdots]$ 上万有形式群定律的对数，有可能写出显式，见[A2]，第 1 章．那里的结果有采用 $[\mathbf{C}P^n]$ 的术语的 $\underline{MU}^*(\mathrm{pt})=\mathbf{Z}[u_1,u_2,\cdots]$ 的多项式生成元的显式．这些公式采用了对上同调论 $\underline{MU}^*$ 的"p 典型"$\underline{BP}^*$ 特别有用的形式．广义上同调论 $\underline{BP}^*$，对于素数 p 的 Brown - Peterson 上同调 (Brown - Peterson cohomology)，见[A6]，由谱 $\underline{BP}$ 决定，且使 $\underline{BP}(\mathrm{pt})=$

$\mathbf{Z}_{(p)}[v_1, v_2, \cdots]$, v_i 的阶为 $-2(p^i-1)$. 它使得对每个空间 X, $\underline{MU}^*(X) \oplus \mathbf{Z}_{(p)}$ 是 $\underline{BP}^*(X)$ 的(维数移动了的)拷贝的直和,且在 X 中可函子化. 此处, $\mathbf{Z}_{(p)}$ 代表 p 处局部化的整数环,即 $\mathbf{Z}_{(p)}=\{a/b \in \mathrm{Q}:(p,b)=1\}$. 理论 $\underline{BP}^*$ 也可以定义为一个幂零上同调算子 $\underline{MU}^* \oplus \mathrm{Z}_{(p)} \to \underline{MU}^* \oplus \mathrm{Z}_{(p)}$ 的象(例如,见[A1],第 4 章). 这个运算对应于形式群理论中的 p 典型化 (p-typification). $\underline{BP}^*(\mathrm{pt})$ 的 Hazewinkel 生成元 (Hazewinkel generators) ([A1], 137, 369-370) v_1, v_2, $\cdots$, 递归地定义为

$$pm_{p^n-1} =$$

$$= v_n + m_{p-1} v_{n-1}^{p^2} + m_{p^2-1} v_{n-2}^{p^2} + \cdots + m_{p^{n-1}-1} v_1^{p^{n-1}}.$$

它们由 p 典型万有形式群的显明构造产生([A8]). S. Araki 给出了一族不同的生成元 $\overline{v}_1, \cdots, \overline{v}_i \equiv v_i \bmod p$, ([A7]), 即荒木生成元 (Araki generators).

在某种精确意义下,$\underline{BP}$ 理论是一个素数的 $\underline{MU}$ 理论,而现在大部分复配边理论的思想是用 $\underline{BP}$ 而不是用 $\underline{MU}$ 本身的术语写出. 与上同调运算理论有关的形式群理论($\underline{MU}$ 和 $\underline{BP}$ 的运算 $\underline{MU}^*(\underline{MU})$ 和 $\underline{BP}^*(\underline{BP})$ 的环也可用形式群的术语解释, 见[A1], [A9], [A10]), 及谱序列,特别是 Adams-Новиков 谱序列 (Adams-Novikov spectral sequence) 和色谱序列 (chromatic spectral sequence) (见[A1], [A11]) 相结合,复配边和 Brown-Peterson 上同调已成为代数拓扑中强有力的计算工具,例如对球面的稳定同伦群.

参考文献

[A1] Ravenel, D. C., Complex cobordism and stable homotopy groups of spheres, Acad. Press, 1986.

[A2] Hazewinkel, M., Formal groups and applications, Acad. Press, 1978.

[A3] Quillen, D., Elementary proofs of some results of cobordism theory using Steenrod operations, *Adv. Math.*, 7(1971), 29-56.

[A4] Quillen, D., On the formal group laws of unoriented and complex cobordism theory, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 75(1969), 1293-1298.

[A5] Adams, J. F., Stable homotopy and generalized homology, Univ. Chicago Press, 1974.

[A6] Brown, E. H. and Peterson, F. P., A spectrum whose $\mathbf{Z}_p$ cohomology is the algebra of reduced p-th powers, *Topology*, 5 (1966), 149-154.

[A7] Araki, S., Typical formal groups in complex cobordism and K-theory, Kinokyniya Book Store, 1973.

[A8] Hazewinkel, M., Constructing formal groups Ⅲ: applications to complex cobordism and Brown-Peterson cohomology, *J. Pure Appl. Algebra*, 10 (1977), 1-18.

[A9] Landweber, P. S., BP^* (BP) and typical formal groups, 12 (1975), 357-363, *Osaka J. Math.*

[A10] Landweber, P. S., Invariant regular ideals in Brown-Peterson cohomology, *Duke Math. J.*, 42 (1975), 499-505.

[A11] Miller, H. R., Ravenel, D. C. and Wilson, W. S., Periodic phenomena of the Adams-Novikov spectral sequence, *Ann. of Math.*, 106(1977), 469-516.

[A12] Bukhshtaber, V. M., Mishchenko, A. S. and Novikov, S. P., Formal groups and their role in the apparatus of algebraic topology, *Russ. Math. Surveys*, 26(1971), 63-90 (*Uspekhi Mat. Nauk*, 26 (1971), 131-154).

徐森林 译

纽结的配边 [**cobordism of knots**; **узлов кобордизм**], (纽结的正常下配边, 见下配边 (bordism))

纽结集合上的一种等价关系,弱于合痕型关系. 两个光滑 n 维纽结 $K_1=(S^{n+2}, k_1^n)$ 和 $K_2=(S^{n+2}, k_2^n)$ 称为配边的 (cobordant), 如果存在 $[0,1] \times S^{n+2}$ 的光滑有向 $n+1$ 维子流形 V, 其中 V 同胚于 $[0,1] \times S^n$ 且 $\partial V = V \cap \{0,1\} \times (S^{n+2}) = (0 \times k_1) \cup (1 \times -k_2)$. 此处减号表示反定向. 与平凡纽结配边的纽结称为配边于零的 (cobordant to zero),或片纽结 (slice knots). n 维光滑纽结的(配边)等价类的集合记为 C_n. 连通和运算定义了 C_n 上的一个 Abel 群结构. 纽结配边类 (S^{n+2}, k^n) 的逆是纽结配边类 $(-S^{n+2}, -k^n)$.

对每个偶数 n, 群 C_n 是零. 奇数维纽结的纽结配边类由其 **Seifert 矩阵** (Seifert matrix) 确定. 一个整数方阵 A 称作配边于零的 (cobordant to zero), 如果它是么模相合于形如

$$\begin{Vmatrix} 0 & N_1 \\ N_2 & N_3 \end{Vmatrix}$$

的矩阵,其中 N_1, N_2, N_3 是同维方阵, 0 是零矩阵. 两个方阵 A_1, A_2 称为配边的 (cobordant), 如果方阵

$$\begin{Vmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & -A_2 \end{Vmatrix}$$

配边于零. 一个整数方阵 A 称为 ε 矩阵,其中 $\varepsilon = +1$, 或 -1, 如果 $\det(A+\varepsilon A') = \pm 1$. 每个 $(2q-1)$ 维纽结的 Seifert 矩阵是 $(-1)^q$ 矩阵. 对每个 ε, 配边关系是所有 ε 矩阵集上的一个等价关系. 等价类的集合记为 G_ε. 直和运算定义了 G_ε 上的一个 Abel 群结构. 存在 Levine 同态 (Levine homomorphism) φ_q: $C_{2q-1} \to G_{(-1)^q}$, 使纽结 K 的配边类联系到 K 的 Seifert 矩阵的配边类. 对所有的 $q \geqslant 3$, Levine 同态是一同构. 同态 $\varphi_2: C_3 \to G_{+1}$ 是单同态, 其象是 G_{+1} 中一个指标为 2 的子群, 由满足 $A+A'$ 的符号差被 16 整除的 $(+1)$ 矩阵的类组成. 同态 φ_1: $C_{+1} \to G_{-1}$ 是满同态;其核非平凡.

为了研究群 G_{+1} 和 G_{-1} 的结构及纽结配边类不变量完全系的构造,我们使用以下构造法. 域 F 上的等距结构 (isometric structure) 指偶对(< , > ; T),它由 F 上有限维向量空间 V 中非退化二次型 < , > 及等距变换 $T: V \to V$ 组成.如果 V 包含一个在 T 下不变的维数是其维数一半的全迷向子空间,则称等距结构(< , >; T)是配边于零的(cobordant to zero). 二次型的正交和与等距的直和运算定义了等距结构集合上的一个运算⊥. 两个等距结构(< , >; T)与(< , >′; T')称为配边的(cobordant),如果等距结构(< , >; T)⊥(−< , >′; T')是配边于零的. 设 G_F 为满足条件 $\Delta_T(1)\times\Delta_T(-1)\neq 0$ 的等距结构(< , > ; T)的配边类的集合,其中 $\Delta_T(t)$ 是等距 T 的特征多项式. 在群 G_{+1} 和 G_{-1} 的研究中,起重要作用的是将在下面构造出的嵌入 $\chi_+: G_{+1}\to G_Q$ 及 $\chi_-: G_{-1}\to G_Q$. 每个 ε 矩阵的配边类包含一个非退化矩阵.若 A 是一个非退化 ε 矩阵,令 $B=-A^{-1}A'$, $Q=A+A'$, 设(< , >; T)为等距结构,其型 < , > 有给定矩阵 Q, 其等距 T 有矩阵 B. 这就给出了一个定义好的同态 χ_ε,且满足 $\ker \chi_\varepsilon=0$.

设 $\alpha=$(< , >; T)是向量空间 V 上的等距结构,且 $\lambda\in F[t]$. 用 V_λ 表示 V 的 λ 准素分支,即对大的 N, $V_\lambda=\ker\lambda(T)^N$, 如果对所有 i, $a_i=a_{k-i}$,则多项式 $\lambda(t)=t^k+a_1t^{k-1}+\cdots+1$ 称为互反的(reciprocal). 对每个不可约互反多项式 $\lambda\in\mathbf{Q}[t]$. 用 $\varepsilon_\lambda(\alpha)$ 表示 λ 除等距 T 的特征多项式 Δ_T 的约化模 2 指数. 对每个在 $\mathbf{R}[t]$ 上不可约的互反多项式 $\lambda(t)\in\mathbf{R}[t]$,用 $\sigma_\lambda(\alpha)$ 表示 < , > 在 $(V\otimes\mathbf{R})_\lambda$ 上限制的符号差.对任一素数 p 及在 $\mathbf{Q}_p[t]$ 上不可约的互反多项式 $\lambda\in\mathbf{Q}_p[t]$, 用 $<,>_\lambda^p$ 表示 < , > 在 $(V\times\mathbf{Q}_p)_\lambda$ 上的限制,其中 $\mathbf{Q}_p$ 是 p-adic 数域,令

$$\mu_\lambda^p(\alpha)=(-1,1)^{r(r+3)/2}(\det <,>_\lambda^p,-1)^r S(<,>_\lambda^p),$$

其中 (,) 是 $\mathbf{Q}_p$ 中的 Hilbert 符号, S 是 Hasse 符号, $2r$ 是 $<,>_\lambda^p$ 的秩. 两个等距结构 α,β 配边, 当且仅当 $\varepsilon_\lambda(\alpha)=\varepsilon_\lambda(\beta)$, $\sigma_\lambda(\alpha)=\sigma_\lambda(\beta)$ 及 $\mu_\lambda^p(\alpha)=\mu_\lambda^p(\beta)$ 对所有使这些不变量有定义的 λ, p 成立(见 [3], [4]).

Levine 同态, 同态 χ 和函数 ε_λ, σ_λ, μ_λ^p 的复合联将每个奇数维纽结 K 联系到数 $\varepsilon_\lambda(K)\in\{0,1\}$, $\sigma_\lambda(K)\in\mathbf{Z}$, $\mu_\lambda^p(k)\in\{-1,1\}$. 两个 $(2q-1)$ 维纽结 K_1 和 $K_2(q>1)$ 配边,当且仅当

$$\varepsilon_\lambda(K_1)=\varepsilon(K_2),\ \sigma_\lambda(K_1)=\sigma_\lambda(K_2),\ \mu_\lambda^p(K_1)=\mu_\lambda^p(K_2)$$

对所有使这些不变量有定义的 λ 和 p 成立. $\sum^*\sigma_\lambda(K)$ 等于纽结 K 的符号差(见**纽结和连接的二次型** (knots and links, quadratic forms of)),其中求和延拓到形如 $t^2-2t\cos\theta+1$ 的所有 $\lambda(t)$ 上, $0<\theta<\pi$,且在和式中,仅有限项异于零.

类似地可定义局部平坦或分段线性纽结的配边群,分别表为 C_n^{TOP} 和 C_n^{PL}. 对所有 n, 有同构 $C_n^{\mathrm{PL}}\approx C_n$. 对 $n>3$, 自然映射 $C_n\to C_n^{\mathrm{TOP}}$ 是一同构,而当 $n=3$ 时,它是一个具有指数 2 的象的单同态. 特别地,这意味着在 S^5 中存在一个非光滑局部平坦的拓扑三维纽结(见 [5]).

纽结的配边理论与余维数 2 的非局部平坦或分段线性嵌入的奇点的研究有关. 若 P 是一个 $(n+2)$ 维有向流形,作为子复形嵌入到 $(n+3)$ 维流形 M 中, $x\in P$, 且 N 是 x 在 M 中的一个小星状邻域,则 P 在 M 中的嵌入在 x 处的奇异性可如下衡量. 边界 ∂N 是 $(n+2)$ 维球面,其定向由 M 的定向确定; $P\cap\partial N$ 是 n 维球面,其定向由 P 的定向确定.这就定义了一个 n 维纽结 $(\partial N,\partial N\cap P)$, 称为在点 x 处嵌入 $P\subset M$ 的奇异性.

参考文献

[1] Fox, R. H. and Milnor, J. W., Singularities of 2-spheres in 4-space and cobordism of knots, *Osaka Math. J.*, 3(1966), 257–267.

[2] Kervaire, M. A., Les noeuds de dimensions supérieures, *Bull. Soc. Math. France*, 93 (1965), 225–271.

[3] Levine, J., Knot cobordism groups in codimension 2, *Comment. Math. Helv.*, 44(1969), 229–244.

[4] Levine, J., Invariants of knot cobordism, *Invent. Math.*, 8(1969), 98–110.

[5] Capell, S. E. and Shaneson, J. L., Topological knots and knot cobordism, *Topology*, 12 (1973), 33–40.

[6] Stoltzfus, N. W., Unraveling the integral knot concordance group, *Mem. Amer. Math. Soc.*, 12(1977), 192.

M. Ш. Фарбер 撰

【补注】 纽结配边性的另一用语是纽结的和谐性 (concordance of knots),相应地有纽结和谐群 (knot concordance group).

参考文献

[A1] Kaufmann, L. H., On knots, Princeton Univ. Press, 1987.

徐森林 译

上链 [cochain ; коцепь]

一个 Abel 上链群 C^* 的齐次元素(或者, 在一般情况, 一个模), 即一个分次 Abel 群, 附有一个次数为 +1 的自同态 δ, 使 $\delta\delta=0$. 自同态 δ 称为上边缘映射 (coboundary mapping) 或上边缘 (coboundary).

一个上链群 C^* 通常来自一个群 $\mathrm{Hom}(C_*,\mathbf{Z})$ 或 $\mathrm{Hom}(C_*,G)$, 其中的 G 是一个任意的 Abel 群, 称为系数群(coefficient group), 而 C_* 是一个链群(chain group), 即一个分次 Abel 群, 附有一个次数为 −1 的自同态 ∂(边缘映射, 或边缘), 且 $\partial\partial=0$. 在这种情况下,群 $C^*=\mathrm{Hom}(C_*,G)$ 上的映射 δ 定义为 ∂: $(\delta f)\sigma=f(\partial\sigma)$ 的伴随, 这里 $f\in C^*$, $\sigma\in C_*$.

给定一个拓扑空间 X, 我们定义奇异链的群 $C_*(X)$

为形式有限和$\sum a_i s_i$所成的 Abel 群，其中$a_i \in \mathbf{Z}$而s_i是X中的任意的连续单形，即，标准单形到X的连续映射．X中的一个其系数在G内的奇异上链(singular cochain)定义为群$C^*(X, G) = \mathrm{Hom}(C_*(X), G)$的一个齐次元素．

类似地，X中的一个单纯复形的一个系数在一个 Abel 群G内的单纯n上链(simplicial n-cochain)定义为一个同态$C_n(X) \to G$，其中$C_n(X)$是X的n链的群，即，形式有限和$\sum a_i s_i$所成的群，$a_i \in Z$，而s_i是X中的n单形．特别地，在 Aleksandrov-Čech 意义下的一个任意拓扑空间X中的一个上链是X的一个开覆盖的神经的一个上链．

若X是一个 CW 复形(X_n表示X的n骨架)，则 Abel 群$H^n(X_n, X_{n-1})$就称为复形X的n维胞腔上链(cellular cochains)的群．上边缘同态$\delta: H^n(X_n, X_{n-1}) \to H^{n+1}(X_{n+1}, X_n)$令其等于三元组$(X_{n+1}, X_n, X_{n-1})$的连接映射．

实际上，群C^*常被添上另外一种乘法结构，即，它是一个分次代数．在这样的情况下，上边缘映射δ具有 Leibniz 性质：$\delta(xy) = (\delta x)y + (-1)^{\deg x} x(\delta y)$，这里，元素$x \in C^*$被假定为齐次的，其次数为$\deg x$．这样一个分次的上链代数的一个例子是一个光滑的流形上的微分形式的代数，在这个流形内，外微分起着上边缘的作用．

参考文献

[1] Hilton, P. J. and Wylie, S., Homology theory. An Introduction to algebraic topology, Cambridge Univ. Press, 1960.

[2] MacLane, S., Homology, Springer, 1963.

А. Ф. Харшиладзе 撰

【补注】

参考文献

[A1] Steenrod, N. E. and Eilenberg, S., Foundations of algebraic topology, Princeton Univ. Press, 1966.

[A2] Spanier, E. H., Algebraic topology, McGraw-Hill, 1966.

[A3] Maunder, C. R. F., Algebraic topology, v. Nostrand-Reinhold, 1970.

周伯埙 译

蜗牛线 [cochleoid ; кохлеоида]

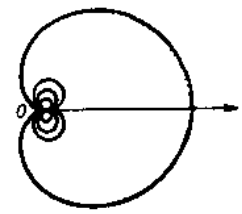
平面超越曲线之一，它在极坐标中的方程是

$$\rho = a\frac{\sin\varphi}{\varphi}.$$

蜗牛线具有无穷多个通过极点并与极轴相切的螺线．极点是无限重的奇点．任何通过极点O的直线都与蜗牛线相交；在这些交点上的蜗牛线的切线通过同一点．

参考文献

[1] Савелов, А. А., Плоские кривые, М., 1960.



Д. Д. Соколов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Lawrence, J. D., A catalog of special plane curves, Dover, reprint, 1972.

张鸿林 译

上闭链 [cocycle ; коцикл]

一个在上边缘映射下消失的上链(cochain)，换言之，在边缘链上等于 0 的一个上链．上闭链的概念推广了光滑流形上一个闭微分形式的概念，该流形具有一个在其一个边缘链上等于 0 的积分．

根据上链的概念的不同的提法，上闭链也有不同的提法．例如，在一个拓扑空间内的一个 Aleksandrov-Čech 上闭链是这空间的某个开覆盖的神经的上闭链．只有具有非 Abel 系数的一维上闭链需要特别讨论．一个其系数在一个非 Abel 群G内的单形集K的一维上闭链是一个函数$\sigma \to f(\sigma) \in G$，它定义于$K$的一维单形的集合$K_1$上，使得对任何二维单形$\sigma \in K$，$f(\sigma^{(0)}) \cdot f(\sigma^{(2)}) = f(\sigma^{(1)})$．两个上闭链$f$与$g$称为上同调的(cohomologous)，如果存在一个函数$h: K_0 \to G$，使对任何一维单形$\tau \in K$，恒有$f(\tau)h(\tau^{(0)}) = h(\tau^{(1)})g(\tau)$．一维上闭链的上同调类组成一个有点集$H^1(K; G)$．类似地，我们在 Aleksandrov-Čeck 意义下定义一维上闭链与其上同调类，其系数在非 Abel 群的一个层内．这些上闭链的上同调群是与具有结构群的纤维丛相关的．

参考文献见上链(cochain)．

А. Ф. Харшиладзе 撰　周伯埙 译

码 [code ; код]

在**编码与译码** (coding and decoding)理论中研究的取自某个**字母表** (alphabet)的**字** (word)的有限或可数集合．见**算术误差校正码** (code with correction of arithmetical errors)；**删除与插入误差校正码** (code with correction of deletions and insertions)；**纠错码** (error-correcting code)．

沈世镒 译

算术误差校正码 [code with correction of arithmetical errors ; код с исправлением арифметических ошибок]，**算术码**(arithmetic code)

一种用于控制加法器运算差错的码．当加数为二

进数表示时，加法器运算中一个单一的差错通常将导致运算结果改变2的某次幂．因此，一个(单一的)在整数环Z中的算术误差(arithmetic error)被定义为一个数 N 到一个数 $N'=N\pm 2^i(i=0, 1, \cdots)$ 的变换．$\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ 上的函数 $\rho(N_1, N_2)$ 被定义为 N_1 到 N_2 的算术误差的最小个数，它是一个距离度量．任一有限子集(一个码) $K\subset\mathbf{Z}$ 由它的最小距离(minimum distance)

$$\rho(K) = \min \rho(N_1, N_2)$$

来刻画，其中最小值是对所有不同的 $N_1, N_2\in K$ 取的．少于或等于 t 个算术误差的集合可将一个数 N 变为一个以 N 为中心 t 为半径的度量球．这样，如果以一个码的任意两个数为中心、以 t 为半径的度量球互不相交(即码的最小距离大于 $2t$)，则称这个码能校正 t 个算术误差．如果以一个码的任意数为中心、以 s 为半径的度量球不包含码的其他数(即码的最小距离大于 s)，则称这个码能检测 s 个算术误差．距离度量 ρ 可有另一种描述：

$$\rho(N_1, N_2) = w(N_1 - N_2),$$

其中 $w(N)$ 是数 N 的(算术)权(weight)，也就是，在 N 的表示式

$$N = \sum_{i=0}^{k} N_i 2^i, \quad N_i = 0, \pm 1; \quad k = 0, 1, \cdots \qquad (*)$$

中的最小的非零系数的个数．对于每个 N，(*)的表示式在 $N_k\neq 0$, $N_i N_{i+1}=0\ (i=1; \cdots, k-1)$ 时是唯一的，且非零系数的个数为 $w(N)$．例如，$23=2^4+2^2+2^1+2^0=2^5-2^3-2^0$ 且 $w(23)=3$．因为 $\rho(N_1+N, N_2+N)=\rho(N_1, N_2)$ 对于任何 $N_1, N_2, N\in\mathbf{Z}$ 成立，我们可限制这个码不含负数．K 的码的长度(length of a code)用 $[\log_2 B(K)]+1$ 来表示，其中 $B(K)$ 为码 K 中的最大数．对于一个长度为 n 的码的任意一个数 B 有唯一的字 $\beta(B)=b_{n-1}\cdots b_0$, b_i 取值于字母表 $\{0, 1\}$ 且使 $B=\sum_{i=0}^{n-1} b_i\cdot 2^i$．如果码 $K\subset\mathbf{Z}$ 能纠正 t 个算术误差，那么码 $\{\beta(B): B\in K\}$ 可纠正 t 个误差(置换型的误差)，这是由于 $d(\beta(B_1), \beta(B_2))\geqslant\rho(B_1, B_2)$ 成立，其中 $d(\cdot, \cdot)$ 是 Hamming 距离(见**纠错码**(error-correcting code))．在加法器控制问题的研究中，人们常常研究编码 $f:\{0, \cdots, M-1\}\to\mathbf{Z}$ (见**编码与译码**(coding and decoding))使 $f(i+j)=f(i)+f(j)$ 对于 $i+j<M$ 成立(这等价于 $f(i)=A\cdot i$，其中 $A=f(1)$)．在此情形，这个编码运算由被编码的数与 A 相乘构成，这时加法器运算误差的检测可通过验证加法运算的结果是否被 A 整除来实现．码 $K_{A, M}=\{0, A, \cdots, (M-1)A\}$ 称为 AM 码(AM-code)．AM 码的最小距离是 $w(A\cdot i)$ $(i=1, \cdots, M-1)$ 的最小值，例如，$3M$ 码的最小距离为2；这个码可检测单个算术误差且在计算机中经常使用(取控制模为3)．最好的研究结果是 $M=(2^n\pm 1)/A$ 的 AM 码(循环的与非循环的)；它们被这样一个性质所刻画：如果数 $B=\sum_{i=0}^{n-1} b_i\cdot 2^i\ (b_i=0, 1)$ 属于这个码，则数 $B'=\pm b_{n-1}+\sum_{i=1}^{n-1} b_i\cdot 2^i$ 也属于这个码．这样的码称为 (n, A) 码((n, A)-code)，为方便起见，它能够被看作一个距离空间 $N_m=\{0, \cdots, m-1, m=2^n\pm 1\}$ 的子集，距离度量为 $\rho_m(x, y)=w_m(x-y)=\min\{w(x-y), w(x-y-m)\}$．这个 (n, A) 码的最小距离在度量 ρ 与 ρ_m 中是相等的．每个 (n, A) 码有一个相伴的 (n, A^*) 码，其中 $A\cdot A^*=m$；它被称为对偶码(dual code)．如果2或-2是以素数 p 为模的本原根，那么 $((p-1)/2, p)$ 码可纠正单个算术误差且在距离度量 ρ_m 中是完满的．即以这个码的数为中心半径为1的度量球两两互不相交且充满了整个 $\mathbf{N}_m$．在对偶码中，所有不同的数之间的距离等于 $[(p+1)/6]$．这个结果类似于二元线性循环纠错码的结果．同时，我们不知道与 B. C. H. (Bose-Chaudhury-Hocquenghem)码类似的算术码；也不知道在算术码中，对于给定码的长度与距离是否存在与纠错码类似的关于码的大小的最小上界．纠正 q 进算术误差的码($q>2$)具有更多的特征(一个 q 进算术误差是一个从数 N 到数 $N'=N\pm aq^i$ 的变换，其中 $a=1, \cdots, q-1$; $i=0, 1, \cdots$)．随着计算技术的发展对这种码的兴趣在增加．与纠错码不同的是在 $q=2^l$ $(l>1)$ 时它没有纠正单个 q 进算术误差的完满 AM 码；对于 $q=6$ 存在这样的码的例子．完满 AM 码的存在条件由数论特征来刻画，并且与数域中的互反律的研究相联系．

参考文献

[1] Дадаев, Ю. Г., Арифметические коды, исправляющие ошибки, М., 1969.

[2] Peterson, W. and Weldon, E., jr, Error-correcting codes, M. I. T., 1972.

[3] Massey, J. L. and Garcia, O. N., Advances in information systems science, Vol. 4, New York-London, 1952, 273-326.

[4] Бояринов, И. М., Кабатянский, Г. А., 《Проблемы передачи информации》, 12 (1976), 1, 16-23.

Г. А. Кабатянский 撰　沈世镒 译

删除与插入误差校正码[code with correction of deletions and insertions; код с исправлением выпадений и вставок]

一种用来校正在信息传递中遇到的两种类型误差的码．从一个长度为 n 取值于字母表 B 的字 $\beta=b_1\cdots b_n$ 删除(deletion)一个字母的过程可用一个从字 β 到长度为 $n-1$ 的字 $\beta'=b_1\cdots b_{i-1}b_{i+1}\cdots b_n$ 的变换来表示 $(1\leqslant i\leqslant n)$．记 $N_S(\beta)$ 为由 β 删除 s 个字母所得到的字的个数，对此有以下估计式

$$\binom{\tau(\beta)-s+1}{s} \leqslant N_s(\beta) \leqslant \binom{\tau(\beta)+s-1}{s}.$$

这里 $\tau(\beta)$ 是 β 的级数的个数（字 $\beta=b_1\cdots b_n$ 的级数(series of a word)指的是满足以下条件的一个字 $b_{i+1}\cdots b_j(j\geqslant i+1)$：1) $b_{i+1}=\cdots=b_j$；2)如果 $i\geqslant 1$，那么 $b_i\neq b_{i+1}$；且 3)如果 $j<n$，那么 $b_{j+1}\neq b_j$）. 在特殊情形下，$N_1(\beta)=\tau(\beta)$. 从一个字 $\beta=b_1\cdots b_n$ 插入(insertion)一个字母的过程可用一个从字 β 到长度为 $n+1$ 的字 $\beta'=b_1\cdots b_i b b_{i+1}\cdots b_n$ 的变换来表示，其中 $b\in B$, $1\leqslant i\leqslant n$. 由任意一个长度为 n 的字 β 从字母表 B 中增加 s 个字母所得到的字的个数等于

$$\sum_{j=0}^{s}\binom{n+s}{j}(r-1)^j,$$

其中 r 是 B 中字母的个数. 一个在字母表 B 中取值的字的集合 K 称为可校正 s 个删除(插入，删除或插入)，如果从 K 的任何两个不同的字上各自删除(插入，删除或插入) s 个字母不能得到 B 中取值的同一个字. 定义一个在 B 中取值的字对 (β_1,β_2) 上的函数为通过对 β_1 删除和插入字母变为 β_2 的最小的字母数，那么这个函数是一个距离度量. 一个在字母表 B 中取值的字的集合 K 是一个可纠正 s 个删除(插入，删除或插入)的码，当且仅当 K 的任何两个不同的字的距离大于 $2s$，因此以上三种码的定义是等价的. 一个可纠正一个删除或一个插入的码的例子是长度为 n 的取值于字母表 $B=\{0,1\}$ 的字的集合 $\{\beta=b_1\cdots b_n\}$，使 $\sum_{i=1}^{n} i b_i \equiv 0(\bmod n+1)$. 码中字的个数等于

$$\frac{1}{2(n+1)}\sum\varphi(d)2^{(n+1)/d},$$

其中求和是对所有 $n+1$ 的奇数因子 d 而取，$\varphi(d)$ 是 Euler 函数；当 $n\to\infty$ 时，它接近于最大值.

B. И. Левенштейн 撰　沈世镒 译

余维数 [codimension；коразмерность]

1) 向量空间 V 的子空间(subspace) L 的余维数(或商维数(quotient dimension)或因子维数(factor dimension))是商空间 V/L 的维数，记为 $\operatorname{codim}_V L$，或简记为 $\operatorname{codim} L$，它等于 L 在 V 中的正交补的维数. 这些维数间有等式

$$\dim L+\operatorname{codim} L = \dim V.$$

如果 M 与 N 是 V 的两个有有限余维数的子空间，则 $M\cap N$ 与 $M+N$ 也有有限余维数，且

$$\operatorname{codim}(M+N)+\operatorname{codim}(M\cap N)$$

$$=\operatorname{codim} M+\operatorname{codim} N.$$

2) 微分流形 M 的子流形(submanifold) N 的余维数是在 $x\in N$ 处切空间 $T_x(M)$ 的切子空间 $T_x(N)$ 的余维数. 如果 M 与 N 是有限维的，则

$$\operatorname{codim} N = \dim M-\dim N.$$

如果 M 与 N 是微分流形，L 是 N 的子流形，且 $f:M\to N$ 是横截 L 的可微映射，则

$$\operatorname{codim} f^{-1}(L) = \operatorname{codim} L.$$

3) 代数簇(或解析空间) X 的代数子簇(algebraic subvariety)(或解析子空间(analytic subspace)) Y 的余维数是差

$$\operatorname{codim} Y = \dim X-\dim Y.$$

参考文献

[1] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Algebra: Algebraic structures. Linear algebra, 1, Addison-Wesley, 1974, Chapt. 1;2 (译自法文).
[2] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Differentiable and analytic manifolds, Addison-Wesley, 1966 (译自法文).
[3] Golubitsky, M. and Guillemin, V., Stable mappings and their singularities, Springer, 1973.

B. E. Говоров, A. Ф. Харшаладзе 撰

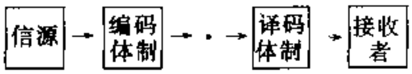
【补注】 向量空间 V 的子空间 L 的余维数，等于 L 在 V 中的任一补空间的维数，因为所有的这种补空间(与正交补)均有相同的维数.　　陈公宁 译

字母表编码 [coding, alphabetical；кодирование алфавитное]，非一致编码(non-uniform coding)

信息按标准形式(standard form)的表示，在这种表示下消息语言中的基本句法单位(语言字母表中的字母)依次对应于某一固定字母表上的编码字符组合. (这里，信息指的是一字符串). 著名的 Morse 电码便是字母表编码的一个示例. 在 Morse 电码中，英文字母(包括空格)依次对应于字母表{·，—，∧}上的字；英文语句被逐字母地编码. 计算的十进制是一个自然产生的编码，但却不在字母表编码之列. 字母表编码的研究思想一方面是源于信息过程与系统的控制论观点，另一方面是源于通信工程中的实际要求(在那里经常需要把信息变换成一种在某一方面更为合适的形式)；研究的起点是 C. Shannon 1948 年发表的奠基性著作([1]). 字母表编码理论是应用数学中的一个分支，旨在运用各种数学方法研究通信信道的各种数学模型. 研究得最为透彻的要算是一致码即分组码，这时编码符号组合是定长的. 对于这类码现已发展了一整套的数学理论(见纠错码(error-correcting code)). 最一般的抽象体制是自动编码，这时语言字母表中的字

母与编码符号组合之间的对应关系由一个有限自动机实现．在实际中，一致编码通常都能给出让人满意的结果；因此当使用其他编码方法时，这些编码方法必须具有显著的优点(例如，实现了信息的压缩)，而且它们的缺陷(编码和译码的复杂程度)不能过于严重．

仅对逐字母的字母表编码(此时相应的编码自动机只有一个内部状态)能够叙述一般性的基本结论．这是因为这些结论的现有推广没有什么实质性的意义，而关于其他模型的研究在理论上又没有导致有意义的进展．考虑下列通信信道模型：



这里，$A=\{a_1,\cdots,a_n\}$是通信信道的字母表，即能在该信道上发送的信号表，$\tau(a_i)$是信号a_i的时宽，$B=\{b_1,\cdots,b_m\}$是消息语言的字母表．在最简单的情形中，信源是一个离散的概率信源，其输出为B中的字母在离散时间的每一个时刻出现，而且出现的概率$p_i=p(b_i)$与时间无关．一个编码体制f把B中的字母映成A^*(A^*是由A中的元素生成的自由半群)中的字，$f(b_i)=V_i$，然后B^*中的字被逐字母地编码：$f(b_{i_1}\cdots b_{i_k})=f(b_{i_1})\cdots f(b_{i_k})$．因此，$f$完全被码$V=\{V_1,\cdots,V_n\}$所确定．如果$f$是一个一一映射，那么译码体制的问题是要实现映射$f^{-1}$，恢复传送的消息．

由码V的选择所确定的**信息传输速率**(information, transmission rate of)及译码复杂性是评估以上通信信道模型的两项指标．传输速率(transmission rate)由传输消息中单个字母所需的时间的数学期望定量地刻画：字母b_i的传输时间为

$$\tau(b_i)=\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}\tau(a_j),$$

其中ω_{ij}是字母a_j在字V_i中出现的次数；要求的数学期望为

$$\mathsf{E}_f=\sum_{i=1}^{m}p_i\tau(b_i)$$

(E_f也称为编码f的费用(cost of the coding))．在一般的情况下，E_f依赖于码V的结构，后者由如下的结构多项式描述：

$$S_f(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{m}\left[\prod_{j=1}^{n}x_j^{\omega_{ij}}\right].$$

结构多项式又称为生成函数，它枚举了码V中的所有码字．在$\tau(a_1)=\cdots=\tau(a_n)=\tau$的特殊情况下，有$\mathsf{E}_f=\tau\sum_{i=1}^{m}p_il_i$，即$\mathsf{E}_f$仅由码字长度的谱$\{l_1,\cdots,l_m\}$所决定，其中$l_i$是码字$V_i$的长度．这时，寻找最优码(optimal code)(即费用最小的码)的问题已经完全解决；已经证明([2])，唯一可译码存在的充分必要条件是码字长度的谱满足

$$\sum_{i=1}^{m}n^{-l_i}\leqslant 1.$$

文献[4]中已经证明，(1)和条件

$$\gcd(l_1,\ldots,l_m)=1$$

是具有自同步性质(property of self-synchronization)的码存在的充分必要条件．自同步的含义指的是，译码中的误差以概率1自动定位．

从抽象的观点看，译码复杂性(complexity of decoding)的下列定性测度是十分有趣的：译码中的延迟应该具有有限性性质(指的是译码可由有限自动机实现)．对自动机的线路实现的复杂性进行定量的估计，超出了编码理论的范围．所谓的前缀码(prefix code)(即具有如下性质的码：码中的任何一个字都不是另外一个字的前缀)都具有这种有限性性质．已经证明([2])，任何一个使得f是一对一的码都谱等价于一个前缀码，这里谱等价的含义是它们具有相同的谱．相比之下，前缀码更受人们的青睐；对于$\tau(a_1)=\cdots=\tau(a_n)$的情形，所有的成功结果都是用前缀码来解释的．

在一般情形下，已有算法能够识别码的一对一性质及其译码延迟的有限性性质．f的一对一性质可以被看作是码V的噪声稳定性的最低水平．在要求译码延迟是有限的一般情形下，已有算法计算任意码的实际纠错能力．自由码(即唯一可译码)具有高度复杂的结构，但是对它的极值要求往往会导致本质的限制．例如，已经证明，对于最大(在包含的意义上)码(这时不等式(1)变成了等式；最大码又称为完全码，这是因为只有在最大码中信道字母表才被充分使用，即A^*中的任一字都是某一编码消息中的一部分)，有限延迟性质成立的充分必要条件是最大码具有前缀性．

参考文献

[1] Shannon, C., A mathematical theory of communication, *Bell System Techn. J.*, **27** (1948), 379－423; 623－656.

[2] McMillan, B., *Kibernet. Sb.*, **3**(1961), 88－92.

[3] Haffman, D., *Kibernet. Sb.*, **3**(1961), 79－87.

[4] Schützenberger, M. P., On synchronizing prefix codes, *Information and Control*, **11** (1967), 396－401.

[5A] Марков, Ал. А., 《Пробл. кибернетики》, **8** (1962), 169－186.

[5B] Марков, Ал. А., 《Пробл. кибернетики》, **12** (1964), 137－153.

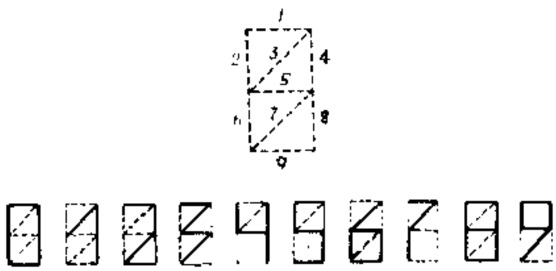
[5C] Марков, Ал. А., 《Пробл. кибернетики》, **19** (1967), 307－309.

[5D] Марков, Ал. А., 《Пробл. кибернетики》, **31**(1976), 77－108.

A. A. Марков 撰　杨恩辉 译

编码与译码[coding and decoding; кодирование и декодирование]

按一定的标准形式表示信息 (information)的过程以及依据信息的这种表示恢复其原信息的逆过程. 在数学文献中,编码(encoding)就是一个从任意集合 A 到某一字母表 B 上的有限序列(字)集的映射;它的逆映射便称为译码 (decoding). 编码的例子有: 自然数的 r 进制表示,在这个表示下每一个自然数 $N=1, 2, \cdots$, 都对应于字母表 $B_r=\{0, \cdots, r-1\}$ 上的一个字 $b_1 \cdots b_e$, 其中 $b_1 \neq 0$ 且 $b_1 r^{l-1}+\cdots+b_l=N$; 借助于电报代码所实现的俄文报文到脉冲串的变换;以及在(俄国的)邮政编码数字的书写中所应用的法则(见图). 在最后一个例子中,每一个十进制数字对应于字母表 $B_2=\{0, 1\}$ 上的一个长度为 9 的字,其对应法则是,如果第 i 条线被使用,那么在 0, 1 序列中第 i 个位置上的符号便是 1. (例如,字 110010011 对应于数字 5.)



编码与译码的各种性质以及各种具有指定性能且在一定意义上有效的编码的构造,是编码理论 (coding theory) 的主要研究对象. 通常,编码有效性的准则总是以某种方式与码字(集合 A 中的元素的象)长度的最小化相联系;编码的指定性能总是与保证编码具有一定的在某种意义下的抗噪声性 (noise immunity) 水平有关. 特别地,抗干扰性的含义指的是,在码字没有失真或具有可容许失真的情况下能够唯一地译码. 除了抗干扰性以外,对编码还可附加其他一些要求. 例如,在邮政编码数字的编码选择中,考虑所选的编码要与数字的通常写法相匹配是必要的. 与复杂性有关的限制(指的是实现编码和译码的方案应具有可容许的复杂性)也经常作为附加条件而加以考虑. 编码理论中的问题大体上是在 C. Shannon 所创立的信息传输理论([1])的影响下产生的. 新的问题则来源于信息搜集、存储、传输及处理的自动化系统的建立与完善. 在编码理论中解决问题的方法主要是组合学的、概率论的及代数学的方法.

任何一个用字母表 B 上的字来表示字母表 A 中的字母的编码 f 都可扩张到 A 上所有字的集合 A^*(消息)上:

$$f(a_1 \cdots a_k) = f(a_1) \cdots f(a_k),$$

其中 $a_i \in A (i=1, \cdots, k)$. 这样的映射 $f: A^* \to B^*$ 称为消息的逐字母编码 (letter - by - letter encoding). 更一般的消息的编码是自动编码 (automated encoding), 由初始非同时化的自动机 (automaton) 实现, 在每一个瞬时自动机输出字母表 B 上的一个(空或非空)字. 这种推广的重要性在于,自动机在不同的状态下能够对同一个消息字母表实现不同的编码. 逐字母编码是由单一状态的自动机实现的自动编码. 在编码理论中,特别有一个分支专门研究编码的一般性质以及识别这些性质的算法的构造(见字母表编码 (coding, alphabetical)). 特别地,对于自动编码和逐字母编码,已经找到了它们具有下列性质的充分必要条件: 1) 译码是单值的; 2) 存在一个译码自动机,即存在一个能够实现该译码的自动机(带有某一有界的延迟); 或者 3) 存在一个自动调节的译码自动机(使得在有限的时间内消除输入序列中的或自动机本身工作中的错误所造成的影响成为可能).

编码理论中的大多数问题归结为对字母表 B_r 上的字的有限或可数集合的研究. 这种集合称为码 (codes). 特别地, 对于每一个单值编码 $f: B_m \to B_r^*$ (及逐字母编码 $f: B_m^* \to B_r^*$), 在 B_r^* 中有一个码 $\{f(0), f(1), \cdots, f(m-1)\}$ 与之对应. 编码理论中的基本结论之一便是, 逐字母编码 $f: B_m^* \to B_r^*$ 的单射性条件对码字 $f(i)$ 的长度 $l_i=l_i(f)$ 施加以下的限制:

$$\sum_{i=0}^{m-1} r^{-l_i} \leqslant 1. \tag{1}$$

上述结论的逆命题同样成立: 如果 $(l_0, \cdots, l_{m-1})$ 是一组满足(1)的自然数,那么存在着一个一对一的逐字母编码 f: $B_m^* \to B_r^*$ 使得码字 $f(i)$ 具有长度 l_i. 进一步,如果 l_i 是递增地排列, 则可取 $f(i)$ 为 $\sum_{j=0}^{i-1} r^{-l_j}$ 的 r 进制小数展开式中小数点后面的前 l_i 个字符 (Shannon 法 (Shannon method)).

编码理论中最完善的结果都是与有效的一对一的编码的构造有关. 这里叙述的编码构造在实际中被用于信息的压缩和信息在存储器中的存取. 编码的有效性概念往往依赖于成本准则的选择. 在一对一的逐字母编码 $f: B_m^* \to B_r^*$ 的费用 (cost) $L(f)$ 的定义中,总是假定对每一个数 $i \in B_m$, 有一个正数 p_i 与之对应,并记 $P=\{p_0, \cdots, p_{m-1}\}$. 成本 $L(f)$ 的定义的下列形式一直为人们所研究:

1) $L_{\mathrm{mean}}(f)=\sum_{i=0}^{m-1} p_i l_i$,

2) $L^{(t)}(f)=(\log_r \sum_{i=0}^{m-1} p_i r^{t l_i})/t$, $0<t<\infty$,

3) $L'(f)=\max_{0 \leqslant i \leqslant m-1}(l_i-p_i)$,

其中假定: 在前两种情形下, p_i 是某一 Bernoulli 信源产生字母表 B_m 中相应的字母的概率 ($\sum_{i=0}^{m-1} p_i=1$); 而在第三种情形下, p_i 是期望的码字长度. 在第一种定义中, 成本等于码字的平均长度; 在第二种定义中, 随着参数 t 的增大, 较长的码字对费用的影响也随之增大 ($L^{(t)}(f)_{t \to 0} \to L_{\mathrm{mean}}(f)$, $L^{(t)}(f)_{t \to \infty} \to \max_{0 \leqslant i \leqslant m-1} l_i$);

在第三种定义中，费用等于码字长度 l_i 超出期望的长度 p_i 的最大超出量．构造一个一对一的逐字母编码 f: $B_m^* \to B_r^*$ 使得其成本 $L(f)$ 达到最小的问题，等价于在满足条件(1)的自然数组 $(l_0, \cdots, l_{m-1})$ 集合内，求解使函数 $L(f)$ 达到最小的问题．对于上述三种成本的定义，这一问题的解已经求得．

设函数 $L(f)$ 在满足条件(1)的数组(不必是自然数组) $(l_0, \cdots, l_{m-1})$ 集合上的最小值等于 $L_r(P)$，且在点 $(l_0(P), \cdots, l_{m-1}(P))$ 上达到．非负量 $I(f)=L(f)-L_r(P)$ 称为编码 f 的冗余度(redundancy)，$I(f)/L(f)$ 称为编码 f 的相对冗余度(relative redundancy)．对于由 Shannon 法在长度 $l_i(l_i(P)\leqslant l_i<l_i(P)+1)$ 上所构造的一对一的编码 $f: B_m^* \to B_r^*$，其冗余度满足不等式 $I(f)<1$．对于最常用的第一种成本的定义，即把成本定义为信源所产生的消息的单个字母所需的码符号的平均数目，量 $L_r(P)$ 等于该信源的 Shannon 熵(Shannon entropy)

$$H_r(P) = -\sum_{i=0}^{m-1} p_i \log_r p_i ,$$

而 $l_i(P)=-\log_r p_i$．冗余度 $I(f)=L_{\text{mean}}(f)-H_r(P)<1$ 的界可以通过使用所谓的长度为 k 的分组编码(block coding) 来加以改进，而在分组编码中，用 Shannon 法来进行编码的对象是长为 k 的消息(而不是单个的字母)．这样的编码(指分组编码)的冗余度不会超过 $1/k$．同样的方法也可用于相关信源的有效编码中．在由 Shannon 法构造的编码中，长度 l_i 的确定是基于对信源的统计知识．与这一事实相联系，对于某些信源类，现已研制出了构造通用编码的方法，这种通用编码能保证一个明确的适用于该信源类中任何信源的冗余度上界．特别地，现已构造出了一个组长为 k 的分组编码，它对于 Bernoulli 信源类的冗余度的渐近值至多为 $((m-1)/2k)\log_r k$ (m，r 固定，$k\to\infty$)，而且这一渐近的极限不能再改进．

在考虑信息的有效压缩问题的同时，具体类型的信息的冗余度估计问题也在研究之中．例如，对于某些自然语言(特别是英语和俄语)，在假定它们的文本是由状态数目很大的 Марков 信源产生的条件下，它们的相对冗余度已被估出．

在关于有效的抗干扰编码的构造问题的研究中，通常考虑的编码 $f: B_m \to B_r^*$ 都具有这样的性质：同它对应的码 $\{f(0), \cdots, f(m-1)\}$ 属于字母表 B_r 上的长为 n 的字的集合 B_r^n．这里消息字母表 B_m 中的字母被理解为等概率的．对于这样的编码，其有效性由冗余度 $I(f)=n-\log_r m$ 或传输速率(transmission rate)$R(f)=(\log_r m)/n$ 来估计．而在编码的抗干扰性的定义中，则要涉及误差概念的形式化定义以及产生误差的模型．一个代换型误差(error of substitution type)(或简称误差(error))是字间的这样一个变换：字中的某一字符被字母表 B_r 中的另一字符所取代．例如，在俄国的邮政编码数字的书写中，多写一条线会导致码字中的一个 0 被 1 所取代，而少写一条线则会导致码字中的一个 1 被 0 所取代．检错与纠错之所以可能，是因为如下这样的事实：对于任何一个具有非零冗余度的编码 f，其译码 f^{-1} 可以以任意的方式扩展到 B_r^n 中其他 r^n-m 个非码字的字上．特别地，如果 B_r^n 被分割成 m 个互不相交的集合 $D_1, \cdots, D_{m-1}$ 并使得 $f(i)\in D_i$，如果译码 f^{-1} 被扩展成为 $f^{-1}(D_i)=i$，那么在译码中，所有把码字 $f(i)$ 变换成 D_i $(i=0, \cdots, m-1)$ 中的字的误差都将得以纠正．对于其他类型的误差，如字符的疑符(指的是被另一个不同的字母表中字符所代替)，码字的数值的增减(算术误差，增减量为 $\pm br^i$，$b=1, \cdots, r-1$，$i=0, 1, \cdots$)，字符的删除与插入，等等，类似的可能性同样存在．

在**信息传输**(information transmission of)的理论中，所考虑的产生误差的模型是概率模型；这些模型称为信道(channels)．最简单的无记忆信道是由转移概率矩阵 (p_{ij}) 来定义的，其中 p_{ij} 是字符 j 代替字符 i 的概率．对于这种信道，人们定义了如下的量(信道容量(channel capacity))

$$C = \max \sum_{i=0}^{r-1}\sum_{j=0}^{r-1} q_i p_{ij} \log_r \left(\frac{p_{ij}}{\sum_{h=0}^{m-1} q_h p_{hj}} \right),$$

其中求最大值的范围是数组集 $(q_0, \cdots, q_{r-1})$：$q_i\geqslant 0$，$\sum_{i=0}^{r-1} q_i=1$．一个编码 f 的有效性是由其传输率 $R(f)$ 来刻画，而它的抗扰性则是由最优译码中的平均误差概率来刻画．信息传输理论中的主要结果(Shannon 定理(Shannon theorem))是，信道容量 C 是如下实数 R 的最小上界：对于任意的 $\varepsilon>0$ 以及所有的充分大的 n，存在一个编码 $f: B_m \to B_r^n$ 使得 $R(f)\geqslant R$，$P(f)<\varepsilon$．

产生误差的另外模型(见**纠错码**(error - correcting code)；**算术误差校正码**(code with correction of arithmetical errors)；**删除与插入误差校正码**(code with correction of deletions and insertions))具有如下的性质：在每一个长为 n 的字中，至多只能出现 t 个错，其中 t 是预先给定的数目．设 $E_i(t)$ 是所有由 $f(i)$ 转变而成的但只有至多 t 个错误的字组成的集合．如果对于码

$$\{f(0), \ldots, f(m-1)\} \subset B_r^n$$

集合 $E_i(t)$ $(i=0, \cdots, m-1)$ 两两不相交，那么在使得 $E_i(t)\subseteq D_i$ 的译码中，上面类型的模型所产生的所有误差都将得以纠正．这样的码称为 t 纠错码(t - error - cor-

recting code). 对于许多类型的误差(例如,代换误差、算术误差、删除及插入误差), 函数 $d(x, y)$ 是一个距离, 数量上等于把字 $X \in B_r^n$ 变换成字 $y \in B_r^n$ 所产生的给定类型的误差的最小数目,而 $E_t(t)$ 则是该距离下的一个半径为 t 的球. 因此,在 B_r^n 中构造最有效的(即,码字数目 m 最大的) t 误差纠正码的问题等价于用半径为 t 的球最稠密地填充距离空间 B_r^n 的问题. 用于书写俄国邮政编码数字的码并不是一个 1 纠错码,因为 $d(f(0), f(8))=1$, $d(f(5), f(8))=2$, 尽管其他码字间的距离至少是 3.

对 B_r^n 中的 t 个代换型纠错码的最小冗余度 $I_r(n, t)$ 的研究分成两种情形. 在第一种情形下, t 固定而 $n \to \infty$. 这时,下列渐近关系成立:

$$I_2(n, t) \sim t \log_2 n, \tag{2}$$

这一"功效"界的建立依赖于对半径为 t 的球内的长度为 n 的字的数目的计数. 当 $t \geqslant 2$, $r \geqslant 2$ 时(除 $t=2$, $r=3$ 或 4 以外), $I_r(n, t)$ 的渐近行为至今仍是一个有待解决的问题(1990). 对于许多其他类型的误差(例如,算术误差,删除及插入误差),即使是在 $r=2, t \geqslant 2$ 的情况下,这一问题仍是一个难题(1990). 在第二种情形下, $t=[pn]$, 而 $n \to \infty$, 其中 p 是一个固定的实数, $0<p<(r-1)/2r$. 这时"功效"界

$$I_r(n, [pn]) \gtrsim nT_r(p)$$

被大大地改进了,其中 $T_r(p)=-p\log_r(p/(r-1))-(1-p)\log_r(1-p)$. 利用随机编码的方法,可以得到下列上界

$$I_r(n, [pn]) \leqslant nT_r(2p), \tag{3}$$

当 $r=2$ 时,这一上界已被猜想为是渐近精确的,即 $I_2(n, [pn]) \sim n\,T_2(2p)$. 然而,这个猜想是否成立, 迄今仍是编码理论中的中心问题之一.

大部分抗干扰码的构造都是有效的,只要它们的码字长度足够大. 在这一点上,与实现编码和译码的系统(编码器和译码器)的复杂性有关的问题便有了特别重要的意义. 对可用的译码器的类型或译码器的复杂性的限制会导致冗余度(指的是为了保证预先给定的抗干扰性而所必需具有的冗余度)的增加. 例如,对于 B_2^n 中的 1 误差纠正码,如果要求其相应的译码器是由一个移位寄存器和一个最优元素组成,则其最小的冗余度具有 $\sqrt{n}$ 的量级(比较(2)). 对于编码器与译码器而言,逻辑元件图通常被看作是它们的数学模型而加以考虑, 而它们的复杂性则指的是图中所包含的元件数目. 对于现已知道的几类纠错码, 它们的编码和译码算法一直是人们的研究对象; 相应的编码器和译码器的复杂性上界已经求得. 不仅如此, 编码的传输率、编码的抗扰性以及译码器的复杂性之间的某些关系也已被揭示(见[5]).

对编码理论的研究, 还存在另外一种研究方向,它与如下的事实相联系: 编码理论中的许多结果(例如, Shannon 定理以及上界(3))都不是"构造性的",而是关于无穷码列 $\{K_n\}$ ($K_n \subseteq B_r^n$)的存在性定理. 在这一点上,已做了很多工作来加强这些结果, 以便能够在具有如下性质的码列 $\{K_n\}$ 所组成的集合中证明它们: 对于码列 $\{K_n\}$, 存在一个 Turing 机使得集合 $U_{n=\phi}^{\infty} K_n$ 中的任何长为 l 的字都能在适当的时间(关于 l 具有较低的增长阶,如 $l\log l$)内被该 Turing 机识别.

某些建立界的新方法和新构造(这些方法与构造已在编码理论中得到发展),在一些表面看起来与编码理论的传统问题相距甚远的领域,导致了实质性的进展. 这里值得提及的是: 纠正一个错误的最大码在实现(通过触点模式(contact scheme))逻辑代数函数的渐近最优方法中的运用; n 维 Euclid 空间的球填充密度的上界的重要改进;在实现(由公式)一类逻辑代数函数所需的复杂性的估计中, 不等式(1)的运用. 编码理论的思想与结果在自纠正系统和不可靠元组成的可靠系统的综合中获得了进一步的发展.

参考文献

[1] Shannon, C., A mathematical theory of communication, *Bell Systems Techn. J.*, 27 (1948), 379-423; 623-656.

[2] Berlekamp, E., Algebraic coding theory, McGraw-Hill, 1968.

[3] Peterson, W. and Weldon, E., Jr., Error-correting codes, M. I. T. Press, 1972.

[4] Дискретная Математика и математические вопросы кибернетики, т. 1, М., 1974, раздел 5.

[5] Баccальго, Л. А., Зяблов, В. В., Пинскер, М. С., 《Пробл. передачи информации》, 13 (1977), 3, 5-17.

[6] Сидельников, В. М., 《Матем. сб.》, 95 (1974), 1, 148-158.

В. И. Левенштейн 撰

【补注】 下面的[A1], [A2] 是纠错码和编码理论的两本标准参考书.

参考文献

[A1] MacWilliams, F. J. and Sloane, N. J. A., The theory of error-correcting codes, Ⅰ-Ⅱ, North-Holland, 1977.

[A2] Lint, J. H. van, Introduction to coding theory, Springer, 1982.

杨恩辉 译 方符伟 校

系数 [coefficient; коэффициент]

代数表达式中的数值因子,未知数的幂前面的已知因子,或与变量相乘的常数因子. 例如,单项式 $-(3/4)\cdot a^2b^2$ 中的系数是 $-3/4$; 在方程 $x^2+2px+q=0$ 中, x^2 的系数是 1, x 的系数是 $2p$; 在圆周长的公式 $l=2\pi r$ 中, 系数是 2π. 在直线方程 $y=kx+b$ 中, 数 k 表示该直线与 x 轴所成之角的正切, 称为角系数(angular coef-

ficient).

БСЭ-3 张鸿林 译

变差系数 [**coefficient of variation**; **вариации коэффициент**]

随机变量分布的离散程度的一种无量纲的度量.这个系数可以用几种方式定义.在实践中,最常用的定义由公式

$$V = \frac{\sigma}{\mu}$$

给出,其中 σ^2 是方差,μ 是数学期望(μ必须是正的).这种表示法常采取百分比形式,即 $V=100\,\sigma/\mu\%$.这个定义是1895年由K. Pearson提出的.

Т. С. Лельчук 撰 刘秀芳 译

系数问题 [**coefficient problem**; **коэффициентов проблема**],关于类 S 的

关于圆盘 $|z|<1$ 内正则单叶函数

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n$$

所组成的函数类的一个问题.即对于每个 $n\ (n \geqslant 2)$ 确定该类函数的系数组 $\{c_2,\cdots,c_n\}$ 的值域,特别是要在类 S 中求出 $|c_n|$ 的精确界限,$n \geqslant 2$(见 **Bieberbach 猜想** (Bieberbach conjecture)).关于 $|z|<1$ 内正则函数类 R 的系数问题是对于每个 $n\ (n \geqslant 1)$,确定 R 中函数关于 z 的幂级数展开式中前 n 项系数的值域,特别是要在类 R 中求出这些系数的精确界限.对于 **Carathéodory 类** (Carathéodory class),星形单叶函数类,以及 $|z|<1$ 内有界正则函数类,系数问题已经解决.

已知 V_2 是圆盘 $|c_2| \leqslant 2$.关于类 S 的系数问题已得到一些深刻的定性结果(见[7]).集合 V_n 是有界闭区域;点 $c_2=0,\cdots,c_n=0$ 是 V_n 的内点;V_n 同胚于 $(2n-2)$ 维闭球;V_n 的边界是有限个部分 $\Pi_1,\cdots,\Pi_N$ 的并,每个部分上的点 $(c_2,\cdots,c_n)$ 的坐标是有限个($\leqslant 2n-3$个)参数的函数.对应于 V_n 的每个边界点,有类 S 中唯一的一个函数.V_3 的边界是两个3维超平面 Π_1 和 Π_2 的并以及它们的交:平面 Π_3 和 Π_4 及一条曲线 Π_5.对于 Π_1 和 Π_2,参数公式可用初等函数表达.V_3 同平面 $\operatorname{Im} c_2=0$ 的交关于平面 $\operatorname{Re} c_2=0$ 及 $\operatorname{Im} c_3=0$ 对称.V_3 同平面 $\operatorname{Im} c_3=0$ 的交关于平面 $\operatorname{Im} c_2=0$ 及 $\operatorname{Re} c_2=0$ 对称.对应于 Π_1 上的点的函数 $w=f(z)$ 把 $|z|<1$ 映射为割去一条通向无穷远点的解析曲线的 w 平面.对应于 Π_2 上一点的函数 $w=f(z)$ 把 $|z|<1$ 映射为割去三条解析弧的 w 平面,这三条弧从一个有限点引出且在该点彼此交角为 $2\pi/3$,其中一条位于直线 $\arg w=$ 常数上并且通向无穷远点.

在其余的特殊区域中,已对下列区域作了研究:由 c_2 和 c_3 是实数的那些函数组成的 S 的子类中的 $\{c_2, c_3\}$ 值域;在 S 中可表示为

$$f(z) = z + \sum_{n=1} c_{nk+1} z^{nk-1}$$

的有界函数子类上,当 $\operatorname{Im} c_{k+1}=\operatorname{Im} c_{2k+1}=0$ 时的 $\{|c_{k+1}|, |c_{2k+1}|\}$ 和 $\{c_{k+1}, c_{2k+1}\}$ 值域;S 中有界函数子类上的 $\{c_2, c_3\}$ 值域;S 中具有实系数 c_2, c_3, c_4 的函数组成的子类上的 $\{c_2, c_3, c_4\}$ 值域.

已经得到的 $|c_n| \leqslant A_n\ (n \geqslant 2)$ 形式的系数精确界限:对 S 中的凸函数子类 $A_n=1$(见**凸函数(复变量的)** (convex function (of a complex variable))),对 S 中的星形函数子类 $A_n=n$,对 S 中的星形奇函数子类 $A_n=1$,$n=3, 5, \cdots$,对实系数单叶函数类 $A_n=n$,对 S 中的近于凸函数子类 $A_n=n$,对于类 S 本身 $A_n=n$(见 **Bieberbach 猜想** (Bieberbach conjecture),[8]).对于 $|z|<1$ 内典型实正则函数

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n$$

组成的函数类有精确界限 $|c_n| \leqslant n$, $n \geqslant 2$,而对于 **Bieberbach - Eilenberg 函数** (Bieberbach - Eilenberg function) $f(z)=a_1 z+a_2 z^2+\cdots$ 有精确界限 $|a_n| \leqslant 1$,$n \geqslant 1$.

关于 $|\zeta|>1$ 内亚纯单叶函数

$$F(\zeta) = \zeta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{\zeta^n}$$

所组成的函数类 Σ,已知的精确界限有

$$|b_1| \leqslant 1,\ |b_2| \leqslant \frac{2}{3},\ |b_3| \leqslant \frac{1}{2}+e^{-6}$$

对于 Σ 中的星形函数子类有精确界限

$$|b_n| \leqslant \frac{2}{n+1},\ n \geqslant 1.$$

S 和 Σ 的一些其他子类的系数精确界限亦已知晓(见[1]-[4]),并且也已得到关于某些 p 叶函数类和平均 p 叶函数类的系数精确界限(见[5]).

参考文献

[1] Голузин, Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966(中译本:Г. М. 戈鲁辛,复变函数的几何理论,科学出版社,1956).

[2] Базилевич, И. Е., в кн., Математика в СССР за сорок лет. 1917-1957, т. 1, М., 1959, с. 444-472(中译本:И. Е. 巴西列维奇,苏联数学四十年(1917-1957)).

[3] Jenkins, J. A., Univalent functions and conformal mapping, Springer, 1958.

[4] Hayman, W. K., Coefficient problems for univalent functions and related function classes, *J. London Math. Soc.*, **40** (1965), 3, 385-406.

[5] Goodman, A. W., Open problems on univalent and multivalent functions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **74** (1968),

6, 1035-1050.
[6] Phelps, D., On a coefficient problem in univalent functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **143** (1969), 475-485.
[7] Schaeffer, A. C. and Spencer, D. C., Coefficient regions for schlicht functions, Amer. Math. Soc., 1950.
[8] Branges, L. de, A proof of the Bieberbach conjecture, *Acta Math.*, **154** (1985), 1-2, 137-152

Е. Г. Голузина 撰

【补注】 上面提到的关于类 Σ 中 $|b_2|$ 和 $|b_3|$ 的估计分别出自 M. Schiffer [A1] 和 P. R. Garabedian 与 M. Schiffer [A2]. 关于 Σ 中星形函数的精确界限出自 J. Clunie [A3] 和 C. Pommerenke [A4]. 公认的英文参考文献有 [A5]-[A7].

参考文献

[A1] Schiffer, M., Sur un problème d'extrémum de la représentation conforme, *Bull. Soc. Math. France*, **66** (1938), 48-55.
[A2] Garabedian, P. R. and Schiffer, M., A coefficient inequality for schlicht functions, *Ann. of Math.*, **61** (1965), 116-136.
[A3] Clunie, J., On meromorphic Schlicht functions, *J. London Math. Soc.*, **34** (1959), 215-216.
[A4] Pommerenke, C., On meromorphic starlike functions, *Pacific J. Math.*, **13** (1963), 221-235.
[A5] Hayman, W. K., Multivalent functions, Cambridge Univ. Press, 1967.
[A6] Pommerenke, C., Univalent functions, Vandenhoeck & Ruprecht, 1975 (中译本:Ch. 泊茂仁克, 单叶函数, 科学出版社, 1987).
[A7] Duren, P. L., Univalent functions, Springer, 1983.
[A8] Tammi, O., Extremum problems for bounded univalent functions II, Lect. Notes in Mathematics, 913, Springer, 1982.

杨维奇 译

强制边值问题 [coercive boundary value problem; коэрцитивная краевая задача]

满足**强制性不等式** (coerciveness inequality) 的边值问题. 有时把椭圆型方程的强制边值问题称作椭圆型边值问题 (elliptic boundary value problem) ([4]).

设 $P(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ 是 $2m$ 次齐次多项式, 而

$$P(D)u = f,\quad D = \left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right) \qquad (1)$$

是 $2m$ 阶椭圆型方程. 对方程 (1) 在半空间 $\mathbf{R}_n^+:\{x_n>0\}$ 中考虑具有下面边界条件的边值问题:

$$q_j(D)u = \varphi_j,\ j=1,\ldots,m,\ 对\ x_n=0, \qquad (2)$$

其中 $q_j(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ 是 $\mu_j(j=1,\cdots,m)$ 次齐次多项式.

问题 (1), (2) 在 $\mathbf{R}_n^+$ 中是强制的, 如果所有算子 q_j 关于 $\partial/\partial x_n$ 的阶小于 $2m$, 并且这个问题没有如下形式的有界解:

$$u(x) = w(x_n)\exp i(x_1\xi_1+\cdots+x_{n-1}\xi_{n-1}), \qquad (3)$$
$$\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_{n-1}) \neq 0.$$

多项式 $P(\xi,\tau)$ 关于 τ 在上半平面 $\operatorname{Im}\tau>0$ 中恰有 m 个根 $\tau_1,\cdots,\tau_m$. 如果所有这些根都不同, 那么问题 (1), (2) 没有形如 (3) 的有界解就等价于满足不等式

$$\left[\prod_{l<j}(\tau_j-\tau_l)\right]^{-1}\det(q_j(\xi,\tau_l)) \neq 0,\ \xi\neq 0. \qquad (4)$$

这个条件有时称作**互补性条件** (complementarity condition).

对域 G 中的 $2m$ 阶线性椭圆型方程的边值问题

$$P(x,D)u = f,\ x\in G,\ q_j(x,D)u = \varphi_j,\ x\in\partial G, \qquad (5)$$
$$j = 1,\ldots,m,$$

在域 G 的边界 Γ 上一点 x_0 是强制的, 如果下面的问题是强制的:

$$P_{2m}(x_0,D)u = f,\ q_j^0(x_0,D)u = \varphi_j,\ j=1,\ldots,m,$$

其中 P_{2m} 和 $q_j^{(0)}$ 是相应的多项式的最高次齐次分量.

为了研究强制边值问题, 应用边界校正法是有成效的. 利用定义在域 G 边界 Γ 上的点 X 的邻域 $U(X)$ 上的某个同胚映射, 它把交集 $U(X)\cap\Gamma$ 映为平面 $y_n=0$ 的某个域, 而把 $U(X)\cap G$ 映到变量 $y_1,\cdots,y_n$ 的半空间 $\mathbf{R}_n^+$ 中. 由于这样的映射, 对具有充分光滑边界 Γ 的任意域 G 的强制边值问题的研究就化为对 $\mathbf{R}_n^+$ 的问题的研究.

在问题 (5) 的情形, 条件 (4) 表明, 在域 G 的边界 Γ 上点的邻域中给出的微分算子组

$$q_j(x,D)u,\ j=1,\ldots,m$$

的特征方向在 Γ 的任何点处都不与 Γ 相切. 当满足此条件时, 问题 (5) 的解 u 满足强制性估计

$$\|u\|_{2m,G} \leqslant C\left\{\|f\|_{0,G}+\sum_{j=1}^m\|\varphi_j\|_{2m-\mu_j,\Gamma}\right.$$
$$\left.+\|u\|_{0,G}\right\}.$$

这里, u 在 Соболев 空间 $W_2^{2m}(G)$ 中的范数用 u 在 $L_2(G)$ 中的范数和 f 在 $L_2(G)$ 中及 φ_j 在 $W_2^{2m-\mu_j}(\Gamma)(j=1,\cdots,m)$ 中的范数来估计, 其中 μ_j 是算子 q_j 的阶.

强制边值问题的概念可以推广到椭圆型方程组. 对一个椭圆型方程的强制边值问题成立的研究方法和结果, 可推广到对椭圆型方程组的强制边值问题

([3]). 对椭圆型方程和方程组的强制边值问题,例如用拟基本解法(parametrix method),常可化为奇异积分方程组的研究. 这个组是 Noether 型积分方程组(见[2],[6]),而条件(4),或在方程组情形中这个条件的类似式,保证了积分方程组的正规性. 强制边值问题总是 Noether 型的,即当给在方程右端和给在边界条件中的已知函数上的有限个正交性条件满足时非齐次问题是可解的,而对应的齐次问题则有有限个线性无关解.

任一椭圆型方程为强制的边值问题的一个例子是 Dirichlet 问题. 在此情形

$$q_j(x, D) = \frac{\partial^{j-1}}{\partial n^{j-1}},\ j=1,\dots,m,$$

其中 $\partial/\partial n$ 表示沿已给椭圆型算子的余法线方向的导数. 然而 Dirichlet 问题并不是对任何椭圆组都是强制边值问题. 这样的组的一个例子是两个方程的组,它写成复形式称作 **Бицадзе 方程**(Bitsadze equation).

参考文献

[1] Бицадзе, А. В., Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М., 1966 (英译本: Bitsadze, A. V., Boundary value problems for second-order elliptic equations, North-Holland, 1968).

[2] Лопатинский, Я. Б., 《Укр. матем. ж.》, 5 (1953), 2, 123-151 (英译本: Lopatinskiĭ, Ya. B., On a method of reducing problems for a system of differential equations of elliptic type to regular integral equations, *Amer. Math. Soc. Transl.* (2), 89 (1970), 149-183).

[3] Miranda, C., Partial differential equations of elliptic type, Springer, 1970 (译自意大利文).

[4] Hörmander, L., Linear partial differential operators, Springer, 1963 (中译本: L. 霍曼德尔, 线性偏微分算子, 科学出版社, 1980).

[5] Hörmander, L., *Matematika*, 4(1960), 4, 37-73.

[6] Шапиро, З. Я., 《Матем. сб.》, 28 (1951), 55-78.

А. И. Янушаускас 撰

【补注】 互补性条件也称作容许性条件(admissibility condition).

其他基本文献有[A1],[A2],补充的重要文献有[A3],[A4].

参考文献

[A1] Agmon, S., Douglis, A. and Nirenberg, L., Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions, *Comm. Pure Appl. Math.*, 12 (1959), 623-727.

[A2] Agmon, S., Douglis, A. and Nirenberg, L., Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II, *Comm. Pure Appl. Math.*, 17 (1964), 35-92.

[A3] Lions, J. L. and Magenes, E., Non-homogeneous boundary value problems and applications, 1-2, Springer, 1972 (译自法文).

[A4] Friedman, A., Partial differential equations, Holt, Rinehart and Winston, 1969.

孙和生 译 陆柱家 校

强制性不等式 [**coerciveness inequality**; **коэрцитивности неравенство**]

对某个双线性形式给出下界估计的不等式,或者用已知函数的范数和边界数据的范数给出某个椭圆型方程解的范数的上界估计的不等式.

设

$$L = \sum_{|\alpha| \le 2m} a_\alpha(x)\partial^\alpha,$$

$$(-1)^m \mathrm{Re} \sum_{|\alpha| = 2m} a_\alpha(x)\xi^\alpha \ge c|\xi|^{2m}$$

是具有系数 $a_\alpha(x) \in C^\infty(\Omega_1)$ 的、空间 $\mathbf{R}^n$ 中域 Ω_1 上的一致椭圆型算子,设域 Ω 包含在域 Ω_1 中,且在域 Ω 的边界 S 的某个邻域中已给这样的 j 阶微分算子 $M_j (j=0,1,\cdots,m-1)$ 使得这些算子的特征,在曲面 S 的任何点上都不与 S 相切. 于是在 S 的某个邻域中存在 $j\,(j=m,\cdots,2m-1)$ 阶的微分算子 N_j,使得

$$\sum_{\substack{|\alpha| \le m,\\ |\beta| \le m}} (\partial^\alpha v, a_{\alpha\beta}\partial^\beta u) - (v, L(u)) = \sum_{j=0}^{m-1}\int_S M_j(v)\overline{N_{2m-1-j}(u)}\,d\sigma \tag{1}$$

对所有的 $v, u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ 成立. 这里 $(\,,\,)$ 表示 $L_2(\Omega)$ 中的标量积.

形式

$$D(v, u) = \sum_{\substack{|\alpha| \le m,\\ |\beta| \le m}} (\partial^\alpha v, a_{\alpha\beta}\partial^\beta u)$$

被称作空间 X 上的强制形式(coercive form),其中 $W_{2c}^m(\Omega) \subset X \subset W_2^m(\Omega)$,如果存在常数 $C>0$ 和 $\lambda \ge 0$ 使得

$$\mathrm{Re}\, D(u, u) \ge C\|u\|_{m,\Omega}^2 - \lambda\|u\|_{0,\Omega}^2 \tag{2}$$

对所有 $u \in X$ 成立. 这里 W_2^m 是 **Соболев 空间**(Sobolev space),而 W_{2c}^m 是它的具有紧支集的元(即在域 Ω 的边界附近为零的元)的子空间. 不等式(2)是对形式 $D(v,u)$ 的强制性不等式. 如果在(2)中可以令 $\lambda=0$,那么 $D(v,u)$ 称作严格强制的(strongly coercive).

如果方程 $L(u)=f$ 的解在 S 上满足条件 $M_j(u)=0$ $(j=0,\cdots,m-1)$,那么下列不等式成立:

$$\|u\|_{2m,\Omega} \le C_1\|L(u)\|_{0,\Omega} + \lambda_1\|u\|_{0,\Omega}, \tag{3}$$

其中 $C_1>0$, $\lambda_1 \ge 0$ 是某些常数. 当方程 $L(u)=f$ 的解在

S 上满足条件 $M_j(u)=\varphi_j(j=0,\cdots,m-1)$ 时，代替不等式(3)的是下列不等式成立：

$$\|u\|_{2m,\Omega}\leqslant C\left\{\|L(u)\|_{0,\Omega}+\sum_{j=0}^{m-1}\|\varphi_j\|_{2m-j,s}+\|u\|_{0,\Omega}\right\}.$$

这个不等式通过用 u 在 $L_2(\Omega)$ 空间中的范数和函数 f 及 $\varphi_i(i=0,\cdots,m-1)$ 在相应空间中的范数来给出方程 $L(u)=f$ 的解 u 在 Соболев 空间 $W_2^{2m}(\Omega)$ 中范数的估计. 不等式(4)是对椭圆型方程边值问题的强制性不等式.

利用不等式(4)可以得到更一般的不等式：

$$\|u\|_{2m+k,\Omega}\leqslant C\left\{\|L(u)\|_{k,\Omega}+\sum_{j=0}^{m-1}\|\varphi_j\|_{2m-j+k,s}+\|u\|_{0,\Omega}\right\}.$$

强制性不等式在研究强制边值问题和证明椭圆型方程解的光滑性时起着重要作用，特别地，在证明解析椭圆型方程的解的解析性时更是如此.

参考文献

[1] Agmon, S., Lectures on elliptic boundary value problems, N. Y., 1965.

[2] Morrey, C. B., Nirenberg, L., *Comm. Pure Appl. Math.*, **10**(1957), 2, 271－290.

А. И. Янушаускас 撰

【补注】 如(3)、(4)这样的对椭圆边值问题给出上界估计的不等式，通称为椭圆边值问题的边界估计，而不称为强制性不等式. 对双线性形式的下界估计通常出现在变分不等式理论中(也见**变分方程**(variational equation)). 还可见**强制边值问题**(coercive boundary value problem).

(1)式中函数 $a_{\alpha\beta}$ 是由函数 a_α 通过分部积分表达式 (v,Lu) 来得到的. 显见，(2)中限制 $\lambda\geqslant0$ 是非本质的.

孙和生 译 陆柱家 校

代数余子式 [(algebraic) cofactor；алгебраическое дополнение]，子式(minor) M 的数

$$(-1)^{s+t}\det A_{i_1\cdots i_k}^{j_1\cdots j_k},$$

这里 M 为某 n 阶方阵 A 的带有行 $i_1,\cdots,i_k$ 与列 $j_1,\cdots,j_k$ 的 k 阶子式；$\det A_{i_1\cdots i_k}^{j_1\cdots j_k}$ 是从 A 划去 M 的所有行与列后得到的 $n-k$ 阶矩阵的行列式；$s=i_1+\cdots+i_k$，$t=j_1+\cdots+j_k$. 下述 Laplace 定理(Laplace theorem)成立：如果在一个 n 阶行列式中任意固定 r 行，则对应于这些固定行的所有 r 阶子式与它们的代数余子式的乘积的和等于这个行列式的值.

В. Н. Ремесленников 撰

【补注】 此 Laplace 定理通常称为行列式的 Laplace 展开(Laplace development of a determinant).

参考文献

[A1] Turnball, H. W., The theory of determinants, matrices, and invariants, Dover, reprint, 1980.

陈公宁 译

上纤维化 [cofibration；корасслоение]

一个三元组 (X, i, Y)，其中 X 和 Y 为拓扑空间，$i: X\to Y$ 是一个嵌入，具有下述熟知的关于多面体的同伦扩张性质(homotopy extension property)：对于任何多面体 K，任何映射 $f: Y\to K$ 和任何使 $F|_{X\times\{0\}}=f\circ i$ 的同伦

$$F: X\times[0,1]\to K$$

都存在一个同伦

$$G: Y\times[0,1]\to K$$

使得

$$G|_{Y\times\{0\}}=f\quad 和\quad G\circ(i\times\mathrm{id})=F,$$

其中

$$(i\times\mathrm{id}): X\times[0,1]\to Y\times[0,1].$$

如果这个性质关于任何拓扑空间都成立，则上纤维化 (X, i, Y) 称为 Borsuk 对(Borsuk pair)(事实上"上纤维化"一词有时也在"Borsuk 对"的意义上使用). 空间 $Y/i(X)$ 称为 (X, i, Y) 的上纤维(cofibre). **映射柱**(mapping cylinder)构造把任何连续映射转变为上纤维化，并且使我们有可能构造拓扑空间的序列

$$X\to Y\to Y/i(X)\to C_1\to C_2\to\cdots,$$

其中 $C_1\sim SX$ (SX 是 X 的**纬垂**(suspension))是映射 $Y\to Y/i(X)$ 的上纤维，它将映射转化为上纤维化；$C_2\sim SY$ 是映射 $Y/i(X)\to C_1$ 的上纤维，等等. 如果 (X, i, Y) 是有基点空间的上纤维化，那么，对任何有基点的多面体 K，诱导序列

$$[X,K]\leftarrow[Y,K]\leftarrow[Y/i(X),K]\leftarrow[C_1,K]\leftarrow\cdots$$

是有基点集合的正合序列；这个序列从第四项起都是群，而从第七项起都是 Abel 群.

参考文献

[1] Spanier, E. H., Algebraic topology, McGraw - Hill, 1966. (中译本：E. H. 斯潘尼尔，代数拓扑学，上海科学技术出版社，1987).

А. Ф. Харшиладзе 撰

【补注】 在西方的文献中，上纤维化总是指我们这里

所说的 Borsuk 对.　　张 平 译　沈信耀 校

Cohen - Macaulay 环 [Cohen - Macaulay ring；Коэна - Маколея кольцо]，又称 Macaulay 环 (Macaulay ring)

交换局部 Noether 环 A，它的深度 prof A 等于维数 dim A. 用同调论术语，Cohen - Macaulay 环可这样刻画：群 $\mathrm{Ext}^i_A(k, A)$ 或局部上同调群 $H^i_{\mathfrak{m}}(A)$ 对于一切 $i<\dim A$ 都等于 0，其中 $\mathfrak{m}$ 是 A 的极大理想，k 是 A 的剩余类域. 另一个可替代的定义用到正则序列 (regular sequence) 的概念. 正则序列是由 $\mathfrak{m}$ 中元素组成的序列 $a_1, \cdots, a_k$，使得对任何 i，元素 a_i 都不是 $A/(a_1, \cdots, a_{i-1})$ 中的零因子. 一个局部环 A 是 Cohen - Macaulay 环，如果存在一个正则列 $a_1, \cdots, a_k$，使得商环 $A/(a_1, \cdots, a_k)$ 是 Artin 环. 在此情形时有 $k=\mathrm{prof}\, A=\dim A$.

如 $\mathfrak{p}$ 是一个 Cohen - Macaulay 环 A 中的素理想，则它的高 ht$(\mathfrak{p})$ (见**理想的高** (height of an ideal)) 满足关系式

$$\mathrm{ht}(\mathfrak{p})+\dim(A/\mathfrak{p})=\dim A.$$

特别地，Cohen - Macaulay 环是等维数的且是悬链线环. 关于 Cohen - Macaulay 环的基本结果是下述的非混合性定理 (unmixedness theorem). 设 A 是一个 d 维 Cohen - Macaulay 环，$a_1, \cdots, a_k$ 是 A 中元素的序列，使得 $\dim(A/(a_1, \cdots, a_k))=d-k$，则 $a_1, \cdots, a_k$ 是正则序列，且理想 $\mathfrak{A}=(a_1, \cdots, a_k)$ 是非混合的，即任何与 $\mathfrak{A}$ 相伴的素理想必有高 k 和余高 $d-k$. 这个非混合性定理是由 F. S. Macaulay([1]) 和 I. S. Cohen ([2]) 分别对多项式环和形式幂级数环证明的.

Cohen - Macaulay 环的例子. 一个正则局部环 (一般地，任何 Gorenstein 环) 是 Cohen - Macaulay 环；任何 Artin 环，一维约化环，任何二维正规环，所有这些都是 Cohen - Macaulay 环. 若 A 是局部 Cohen - Macaulay 环，则 A 的完全化、A 上的形式幂级数环和任何有限平坦扩张皆是 Cohen - Macaulay 环. 一个 Cohen - Macaulay 环的完全交 (complete intersection)，即商环 $A/(a_1, \cdots, a_k)$，是 Cohen - Macaulay 环，其中的 $a_1, \cdots, a_k$，是正则序列. 最后，Cohen - Macaulay 环对于一个素理想的局部化仍是个 Cohen - Macaulay 环，这使得有可能将 Cohne - Macaulay 环的定义扩大到任意环和概形上去. 一个 Noether 环 A (概形 X) 称为 Cohen - Maculay 环 (Cohen - Macaulay 概形 (Cohen - Macaulay sheme))，如果对任何素理想 $\mathfrak{p}\subset A$ (相应地，任一点 $x\in X$)，局部环 $A_{\mathfrak{p}}$ (相应地，$\mathcal{O}_{X,x}$) 是一个 Cohen - Macaulay 环；例如，对于任意半群环 $K[G\cap \mathbf{Z}^n]$ 这就是对的，其中 G 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个凸多边形锥 (见[6]).

Cohen - Macaulay 环在过渡到不变子环时是保持稳定的. 如果 G 是一个作用在 Cohen - Macaulay 环 A 上的有限群. 另外，若 G 的阶在 A 中可逆，则不变子环 A^G 也是 Cohen - Macaulay 环.

如果 A 是分次环，则它是 Cohen - Macaulay 环这一性质在射影概形 Proj(A) 上的可逆层的上同调情形中也显现出来 (见[4]). 若齐次环 A 在 A^{n+1} 中的锥与射影簇 $X\subset P^n$ 相伴，且 A 是一个 Cohen - Macaulay 环，则 X 称为算术 Cohen - Macaulay 簇 (arithmetical Cohen - Macaulay variety). 这时环 A 同构于 $\oplus_{v\in \mathbf{Z}} H^0(X, \mathcal{O}_X(v))$，且对 $0<i<\dim X$，有 $H^i(X, \mathcal{O}_X(v))=0$ 对一切 $v\in \mathbf{Z}$ 成立，其中 $\mathcal{O}_X(v)$ 是 X 上的极化可逆层 $\mathcal{O}_X(1)$ 的 v 次张量幂. 这个性质对于射影空间及其乘积、完全交、Grassmann 流形、Schubert 子簇 ([7]) 以及旗流形和推广的旗流形都是成立的 ([8]).

局部环 A 上的模 M，若其深度等于维数，则称为 Cohen - Macaulay 模 (Cohen - Macaulay module). Cohen - Macaulay 环上的很多结果都可搬到 Cohen - Macaulay 模上来；例如，这种模的交集是等维的. 有人猜测：任何局部完全环 A 都有 Cohen - Macaulay 模 M，使得 $\dim M=\dim A$.

参考文献

[1] Macaulay, F. S., The algebraic theory of modular systems, Cambridge Univ. Press, 1916.

[2] Cohen, I. S., On the structure and ideal theory of complete local rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **59** (1946), 54 – 106.

[3] Zariski, O., Commutative algebra, 2, v. Nostrand, 1960.

[4] Mumford, D., Lectures on curves on an algebraic surface, Princeton Univ. Press, 1966.

[5] Serre, J. - P., Algèbre locale. Multiplicités. Lecture Notes in Math., 11, Springer, 1965.

[6] Hochster, M., Rings of invariants of tori, Cohen - Macaulay rings generated by monomials, and polytops, *Ann. of Math.*, **96** (1972), 318 – 337.

[7] Hochster, M., Grassmannians and their Schubert subvarieties are arithmetically Cohen - Macaulay, *J. of Algebra*, **25** (1973), 40 – 57.

[8] Kempf, G. R., Linear systems on homogeneous spaces, *Ann. of Math.*, **103** (1976), 557 – 591.

В. И. Данилов 撰

【补注】 关于深度、维数、正则局部环、正规环及 Gorenstein 环分别见**模的深度** (depth of a module)、**维数** (dimension)、**局部环** (local ring)、**正规环** (normal ring) 及 **Gorenstein 环** (Gorenstein ring) 等条目. 关于可逆层 $\mathcal{O}_X(1)$ 的描述见**射影谱** (projective spectrum). 有关局部上同调群 $H^i_{\mathfrak{m}}(A)$ 的讨论见**局部上同调** (local cohomology) 及 **Koszul 复形** (Koszul complex).

冯绪宁 译

凝聚代数层 [**coherent algebraic sheaf**; **когерентный алгебраический пучок**]

代数簇或概形上的凝聚模层. Noether 概形及作为其特例的代数簇的结构层都是凝聚层.

凝聚代数层是研究代数簇的一个方便的工具. 直观上,凝聚代数层可看成簇上线性空间的一个连续代数系(见代数簇上的**向量丛** (vector bundle)),而且出现在下面的研究中,即除子的线性簇及代数簇,簇到射影空间的嵌入,微分形式,向量场以及自同构,簇与子簇的形变.总而言之,出现在代数几何学所有各类问题的线性化中(见[3]).这里的结果是用凝聚代数层的上同调的术语表述的.凝聚代数层的上同调理论包括: a)(代数几何学中)**有限性定理** (finiteness theorem),它指出完全簇 X 上凝聚层 $\mathscr{F}$ 的上同调空间 $H^i(X, \mathscr{F})$, $(i\geqslant 0)$ 维数的有限性; b) **Riemann - Roch 定理** (Riemann - Roch theorem),它计算了凝聚代数层的 Euler - Poincaré 特征标; c) Serre 型定理 (见**仿射概形** (affine schems)) 或小平消失定理(见**小平定理** (Kodaira theorem)), (见[4], [5]); d) 对偶定理 (见代数几何学中的**对偶性** (duality)),它把 n 维光滑簇上层的 i 维与 $(n-i)$ 维上同调空间联系起来; e) **Künneth 公式** (Künneth formula),它给出了在簇的积上某些层的同调空间的表达式; f) 把代数几何学中的定理与其他上同调定理——解析的、形式的、平展的相比较; g) **局部上同调** (local cohomology)理论.它在研究非完全簇上的凝聚代数层时有用. 它的最重要的应用之一与比较簇及其超平面截口性质的 **Lefschetz 定理** (Lefschetz theorem) 有关.

许多结果可推广到把单独一个簇 X 换成一族簇的情形,即态射 $f: X\to Y$ 的情形. 在这种情形下,上同调空间被正象函子 f_* 导出的层 R^if_* 代替;在这里这些层在**换基** (base change)时的行为起着重要作用.

亦见**拟凝聚层** (quasi - coherent sheaf); 取值在层中的**上同调** (cohomology).

参考文献

[1] Serre, J.-P., Faisceaux algébriques cohérents, *Ann. of Math.*, **61** (1955), 197-278.

[2] Grothendieck, A., Eléments de géometrie algébrique 3, *Pub. Math. IHES*, **11**, **17** (1961).

[3] Mumford, D., Lectures on curves on an algebraic surface, Princeton Univ. Press, 1966.

[4] Kodaira, K., On a differential-geometric method in the theory of stacks, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **39** (1953), 1268-1273.

[5] Mumford, D., Pathologies Ⅲ, *Amer. J. Math.*, **89** (1967), 1, 94-104.

[6] Итоги науки и техники. Алгебра. Геометрия. Топология, т. 10, М., 1972, 47-112.

В. И. Данилов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hartshorne, R., Algebraic geometry, Springer, 1977.

陈志杰 译

凝聚解析层 [**coherent analytic sheaf**; **когерентный аналитический пучок**]

在一解析空间 (analytic space) $(X, \mathscr{O})$ 上 $\mathscr{O}$ 模的凝聚层. 一空间 $(X, \mathscr{O})$ 称为凝聚的 (coherent),如果 $\mathscr{O}$ 是环的凝聚层. 代数闭域上的任一解析空间是凝聚的. 在这样的空间 $(X, \mathscr{O})$ 上的凝聚解析层的最重要的例子是局部自由层 (locally free sheaf) (即一局部同构于层 $\mathscr{O}^p$ 的解析层)以及一解析集 (analytic set) $Y\subset X$ 的理想层 (sheaf of ideals), 即 Y 上等于 0 的解析函数的芽层([1]).

如果 $\mathscr{F}$ 是在一解析空间 $(X, \mathscr{O})$ 上的凝聚解析层,那么当 X 可分时,它的截面的空间 $\Gamma(X, \mathscr{F})$ 赋予一自然拓扑而成为一 Fréchet 空间. 当 $\mathscr{F}=\mathscr{O}$ 时,这个拓扑与紧集上解析函数的一致收敛拓扑是相同的. 在这种情形下, $\mathscr{F}$ 变为一 Fréchet 层 (Fréchet sheaf), 即对任意开集 $U\subset V\subset X$, 限制映射 $\Gamma(V, \mathscr{F})\to\Gamma(U, \mathscr{F})$ 是连续的. 一凝聚层的解析同态 $\mathscr{F}\to\mathscr{G}$ 诱导一连续线性映射 $\Gamma(X, \mathscr{F})\to\Gamma(X, \mathscr{G})$. 如果 $\mathscr{F}$ 是 X 上的一凝聚解析层又 M 是 $\mathscr{F}_x$, $x\in X$ 的一个子模, 那么对 X 的任意邻域 U 子模 $\{s\in\Gamma(U, \mathscr{F}): s(x)\in M\}$ 在 $\Gamma(U, \mathscr{F})$ 中是闭的. 上同调空间 $H^p(X, \mathscr{F})$ 也有一自然拓扑, 一般来说当 $p>0$ 时它不是可分的(它们是 Fréchet 空间的商空间) ([2], [4]).

凝聚解析层的引进是与 $\mathbf{C}^n$ 中区域上的解析函数理论的问题相联系的 (见[3], [5]). 以后凝聚解析层和它们的上同调就成为解析空间整体理论的基本工具. 判别取值于一凝聚解析层的上同调成为零 (见**小平定理** (Kodaira theorem); **丰富向量丛** (ample vector bundle); **Stein 空间** (Stein space)) 以及判别它的有限性和可分性(见解析空间理论中的**有限性定理** (finiteness theorem) 的准则在这个理论中起着重要的作用.

亦见解析空间理论中的**解析向量丛** (vector boundle, analytic); **对偶性** (duality).

参考文献

[1] Abhyankar, S. S., Local analytic geometry, Acad. Press, 1964.

[2] Banica, C. and Stanasila, O., Algebraic methods in the global theory of complex spaces, Wiley, 1976 (译自罗马尼亚文).

[3] Cartan, H., Idéaux et modules de fonctions analytiques de variables complexes, *Bull. Soc. Math. France*, **78** (1950), 28-64.

[4] Gunning, R. C. and Rossi, H., Analytic functions of several complex variables, Prentice-Hall, 1965.

[5] Oka, K. Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables (Ⅶ. Sur quelques notions arithmétiques). *Bull. Soc. Math. France*, 78 (1950), 1–27.

А. Л. Онищик 撰

【补注】 亦见**凝聚层** (coherent sheaf)

参考文献

[A1] Grauert, H. and Remmert, R., Coherent analytic sheaves, Springer, 1984 (译自德文).

钟同德 译

相依数 [coherent numbers; когерентные числа]

仅以**拟素数** (quasi-prime number) 为其不同除数的正整数. 在求解**加性问题** (additive problems) 时,经常利用这样一个事实:某些加性问题对于不同的相依数的解数是渐近相等的.

Б. М. Бредихин 撰 潘承彪 译 戚鸣皋 校

凝聚环 [coherent ring; когерентное кольцо]

一个环,其中每个有限生成左理想都是有限可表示的 (finite presentable). 这就是说,是一个有限生成自由模对一个子模的商模,该子模是一个有限生成自由模的象集. 这种环称为左凝聚环 (left coherent ring),用右理想可类似地定义右凝聚环 (right coherent ring). 一个左凝聚环也能用下列两个等价条件中的任何一个作为定义: 1)任何有限可表现的左 R 模的每个有限生成子模是有限可表示的; 2)平坦右 R 模的直积是一个平坦右 R 模.

很多熟知的关于 **Noether 环** (Noetherian ring)上的模的构造的结果已证明对凝聚环上的模也可实现. 例如,在一个凝聚环上的每个有限可表示模有一个由有限可表示模作成的投影结式. 同时,凝聚环类比 Noether 环要广,例如,它包含所有**正则环 (在 von Neumann 意义下的)** (regular ring (in the sense of von Neumann)) 和 Noether 环上任意多个(有限或无限)变量的多项式环.

参考文献

[1] Bourbaki, N., Element of mathematics, Commutative algebra, Addison-Wesley, 1972, Chapt. 1 (译自法文).

В. Е. Говоров 撰

【补注】 一个左 A 模 E 是有限可表示的, 如果存在一个**正合序列** (exact sequence)

$$A^r \to A^s \to E \to 0, \quad r, s \in \mathbf{N}.$$

一个左 A 模是伪凝聚的 (pseudo-coherent), 如果每个有限型的(即具有有限个生成元的)子模是有限可表示的. 如果该模本身也是有限型的,则就是凝聚模 (coherent module). 一个左模 E 是凝聚的, 当且仅当对于每个左模态射 $f: F \to E$ (其中 F 是有限型的), f 的核是有限型的. 因此, A 是一个左凝聚环是指: 如果将 A 视为左 A 模,则是一个凝聚左 A 模. 这等价于要求每个有限可表示的左模是凝聚的.

更一般地,在适当的范畴中,可以定义凝聚对象 (coherent object), 这是一个有限型对象 X, 使得对任意态射 $f: Y \to X$, Y 为有限型, $\operatorname{Ker} f$ 也是有限型的 ([A1]).

参考文献

[A1] Popescu, N., Abelian categories with applications to rings and modules, Acad. Press, 1973.

冯绪宁 译

凝聚层 [coherent sheaf; когерентный пучок], 环空间 $(X, \mathcal{O})$ 上的

环层 $\mathcal{O}$ 上的模层 $\mathcal{F}$, 它具有以下性质: 1) $\mathcal{F}$ 是有限型 (finite type) 的层, 即在 $\mathcal{O}$ 上局部地由有限个截面生成; 2) 在开集 $U \subset X$ 上模层的任意同态 $\mathcal{O}^p|_U \to \mathcal{F}|_U$ 的核是一个有限型层. 如果在 $\mathcal{O}$ 模层的正合序列 $0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_3 \to 0$ 中, 三个层 $\mathcal{F}_i$ 中的两个是凝聚的, 那么第三个也是凝聚的. 如果 $\varphi: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ 是凝聚 $\mathcal{O}$ 模层的同态, 则 $\operatorname{Ker} \varphi$, $\operatorname{Coker} \varphi$, $\operatorname{Im} \varphi$ 也是凝聚层. 如果 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 是凝聚的, 则 $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{G}$ 和 $\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ 也是凝聚层 ([4]).

结构层 $\mathcal{O}$ 称为环的凝聚层 (coherent sheaf of rings), 如果 $\mathcal{O}$ 作为自身上的模层是凝聚的, 这归结到条件 2). 若 $\mathcal{O}$ 是环的凝聚层, 则 $\mathcal{O}$ 模层 $\mathcal{F}$ 是凝聚的, 当且仅当空间 X 的每个点都有一个邻域 U, 其上有 $\mathcal{O}$ 模层的正合序列:

$$\mathcal{O}^p|_U \to \mathcal{O}^q|_U \to \mathcal{F}|_U \to 0$$

(见 [4]). 此外, 在这个条件下, 对所有凝聚层 $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, 及对所有的 p, $\operatorname{Ext}^p_{\mathcal{O}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ 是凝聚的 (见 [2]).

具有凝聚结构层 $\mathcal{O}$ 的环空间的基本类是: 代数闭域上的解析空间 ([1]), Noether 概形, 特别是代数簇 ([4]). 一个古典的特例是 $\mathbf{C}^n$ 的一个区域内的全纯函数的芽层 $\mathcal{O}$; 冈凝聚定理 (Oka coherence theorem) ([3], [5]) 断言它是凝聚的. 实解析空间的结构层一般不是凝聚的.

亦见**凝聚解析层** (coherent analytic sheaf), **凝聚代数层** (coherent algebraic sheaf).

参考文献

[1] Abhyankar, S. S., Local analytic geometry, Acad. Press, 1964.
[2] Bănică, C., Stănăşilă, O., Metode algebrice în teoria globală a spatiilor complexe, Buc., 1974 (英译本: Banica, C., Stanasila, O., Algebraic methods in the global theory of complex spaces, Wiley, 1976).
[3] Gunning, R. C., Rossi, H., Analytic functions of several complex variables, Prentice-Hall, 1965.
[4] Serre, J.-P., Faisceaux algébriques cohérents, *Ann. of*

Math., **61** (1955), 197－278.

[5] Фукс, Б. А., Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных, М., 1963 (英译本: Fuks, B. A., Special chapters in the theory of analytic functions of several complex variables, Amer. Math. Soc., 1965). A. Л. Онищик 撰 陈志杰 译

相干态 [coherent states; когерентные состояния]

【补注】 携带 Lie 群不可约表示的 Hilbert 空间中某些超完全向量(态)族. 设 G 为一 Lie 群, 并设 $T(g)$ $(g\in G)$ 为 Hilbert 空间 H 中作用的一个不可约酉表示. 选取一固定向量 $\psi_0\in H$. 考虑全部向量 $\psi_g=T(g)\psi_0$ 的向量族. 这是相干向量(coherent vectors)集合. 记住 H 的(模为 1 的)两个向量 ψ_1 和 ψ_2, 如果仅相差一个相因子: $\psi_2=\exp(i\alpha)\psi_1$, 则它们定义相同的量子力学态. 设 H 为 G 的子群, 包含所有 h 使得 $T(h)\psi_0=\exp(i\alpha(h))\psi_0$, 为态 ψ_0 的迷向子群. 于是相干态 ψ_g 通过齐性空间 G/H 而参数化.

经典情况, 可以追溯到 E. Schrödinger 和 J. von Neumann, 涉及由通常的 Schrödinger (或 Фок)表示(见 **Фок 空间** (Fock space) 与**对易和反对易关系的表示** (commutation and anti-commutation relationships, representation of)) 作用的 Heisenberg - Weyl 群, 具有 ψ_0 为 Фок 真空. 一个自由度的情况 (量子谐振子)下, Heisenberg - Weyl 群(Heisenberg - Weyl group)可以写成 $W_1=\{(t,\alpha): t\in\mathbf{R},\ \alpha\in\mathbf{C}\}$, $(t,\alpha)\ (s,\beta)=(t+s+\mathrm{Im}(\alpha\bar{\beta}),\alpha+\beta)$. 在这个情况下, H 是正规子群 $\{(t,0)\}$, 结果是相干态由平面 $\mathbf{C}$ 参数化. 在 von Neumann 应用相干态来研究量子测量(quantum measurements)([A1])时, 这个系统的由 $\mathbf{C}$ 中格点为指标的超完全子系是重要的. 相干态的一个早期应用是对相干激光束的描述([A2], [A3]), 而这正是相干态名称的来源. 以后, 相干态已变成数学中 (Lie 群表示, 特殊函数, θ 函数, 再生核 Hilbert 空间)和理论物理学各分支中的一个重要工具([A4], [A5]).

参考文献

[A1] Neumann, J. von, Mathematische Grundlagen der Quantummechanik, Springer, 1932.

[A2] Glauber, R. J., The quantum theory of optical coherence, *Phys. Rev.*, **130** (1963), 2529－2539.

[A3] Glauber, R. J., Coherent and incoherent states of the radiation field, *Phys. Rev.*, **131** (1963), 2766－2788.

[A4] Perelomov, A., Generalized coherent states and their applications, Springer, 1986.

[A5] Klander, J. R. and Skagerstam, B. S., Coherent states. Applications in physics and mathematical physics, World Scientific, 1985 徐锡申 译

Cohn - Vossen 变换 [Cohn - Vossen transformation; Кон-Фоссена преобразование]

一对等距曲面 F_1 和 F_2 与所谓的中间曲面 F_m 的无穷小形变之间的一种对应: 如果 x_1 和 x_2 是曲面 F_1 和 F_2 的径(位置)向量, 那么 F_m 的径向量 x_m 由 $(x_1+x_2)/2$ 给出, 无穷小形变 Z 的速度场 z 是 $(x_1-x_2)/2$. 它是由 S. E. Cohn - Vossen ([1]) 引入的. 如果 F_1 和 F_2 是光滑曲面, 并且 F_1 和 F_2 上在等距下互相对应的曲线的半切线 τ_1 和 τ_2 之间的角小于 π, 那么知道 F_m 是光滑的. 这个事实, 已经使得在许多情形下, 能够将对 F_1 和 F_2 的等距的研究, 化成对 F_m 的**无穷小形变**(infinitesimal deformation)的研究. 对 F_1 上固定点 M_1 和 F_2 上固定点 M_2, Cohn - Vossen 变换定义了正交矩阵 O 到描述 F_m 无穷小形变的斜对称矩阵的一个 Cayley 变换, 其中 O 表示从 F_1 的切空间到 F_2 的切空间的等距.

Cohn - Vossen 变换能推广到常曲率空间的情形([2]).

参考文献

[1] Кон-Фоссен, С. Э., Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом, М., 1959.

[2] Погорелов, А. В., Внешняя геометрия выпуклых поверхностей, М., 1969. М. И. Войцеховский 撰

【补注】 对这种类型的无穷小形变也使用无穷小弯曲(infinitesimal bending)这个术语. 中间曲面是空间中将连接 F_1 和 F_2 上对应点(在等距之下)的线段分成比为 $\lambda:(\lambda-1)$ 的点所定义的等距曲面 F_1 和 F_2 的配比曲面(mixture of isometric surfaces)在 $\lambda=1/2$ 时的特殊情形. 对这些配比曲面的研究是凸曲面同痕问题(isotopy problem of convex surfaces)中的一个重要工具(见**凸曲面**(convex surface) 和 [2], 第 3 章第 3 段).

潘养廉 译

上同调维数 [cohomological dimension; когомологическая размерность]

1) 拓扑空间 X 相对于系数群 G 的上同调维数 $(\dim_G X)$ 是存在 X 的闭子集 A, 使上同调群 $H^p(X,A;G)$ 非零的最大整数 p. 可类似地定义同调维数 $h\dim_G X$ (见**空间的同调维数**(homological dimension of a space)). 如果 G 是整数群(或实数模 1 群)的子群, 则有限 Lebesgue 维数(覆盖维数)与 $\dim_G$ (或 $h\dim_G$)相同. 对 Euclid 空间 $X\subset\mathbf{R}^n$ 等式 $\dim_G X=p$ 等价于 X 被(系数取自 G 的) $n-p-1$ 维闭链局部地环绕. 对仿紧空间 X, 不等式 $\dim_G X\leqslant p$ 等价于存在长度为 p 的 G 的软分解 (见**软层** (soft sheaf) 与**分解** (resolution)). 由于软层是零调的, 以此方式就建立了与同调代数中关于维数的一般定义的联系; 例如, 一个模的内射(或投射)维数 $\leqslant p$, 如果它有一个长度为 p 的内射(或投射)分解; 环的总体维数是这个环上模的内射(或投射)维数的最大值, 这是对

X 的 Lebesgue 维数的类比.

参考文献

[1] Aleksandrov, P.S., *Ann. of Math.*, (1929), 101-187.

[2] Aleksandrov, P.S., Dimensionstheorie: Ein Beitrag zur Geometrie der abgeschlossenen Mengen, *Math. Ann.*, **106** (1932), 161-238.

[3] Александров, П. С., Введение в гомологическую теорию размерности и общую комбинаторную топологию, М., 1975.

[4] Харлап, А.Э., 《Матем. сб.》, **96** (1975), 3, 347-373.

[5] Кузьминов, В. И., 《Успехи матем. наук》, 23 (1968), 5, 3-49.

[6] Bredon, G., Sheaf theory, McGraw-Hill, 1967.

[7] Cartan, H. and Eilenberg, S., Homological algebra, Princeton Univ. Press, 1956.

Е. Г. Скляренко 撰

2) 概形的上同调维数 (cohomological dimension of a scheme) 是在指定了上同调论的代数簇或概形上,拓扑空间上同调维数概念的类比.设 X 为一个代数簇或 n 维 Noether 概形. X 的上同调维数定义为整数 $\mathrm{cd}(X)$,它等于当 $j>i$ 时使拓扑空间 X 上的所有 Abel 层 $\mathcal{F}$ 均有 $H^j(X, \mathcal{F})=0$ 的所有那些 i 的下确界. 不等式

$$\mathrm{cd}(X) \leqslant n$$

成立. 概形 X 的凝聚上同调维数 (coherent cohomological dimension) 是数 $\mathrm{cohcd}(X)$,它等于当 $j>i$ 时使 X 上的所有**凝聚代数层** (coherent algebraic sheaf) $\mathcal{F}$ 均有 $H^j(X, \mathcal{F})=0$ 的所有那些 i 的下确界.根据定义, $\mathrm{cohcd}(X) \leqslant \mathrm{cd}(X)$. 根据 Serre 定理 (Serre theorem),当且仅当 X 是仿射概形时, $\mathrm{cohcd}(X)=0$. 另一方面,如果 X 是域 k 上的代数簇,则当且仅当 X 在 k 上正常时, $\mathrm{cohcd}(X)=n$ (Lichtenbaum 定理 (Lichtenbaum theorem), 见 [3]).

设 X 为域 k 上的一个正常概形, Y 为 X 的一个余维 d 的闭子概形,且 $U=X \setminus Y$, 则下述结论成立 ([2]-[4]).

如果 Y 是 X 上丰富除子的集论完全交集,则

$$\mathrm{cohcd}(U) \leqslant d-1.$$

如果 X 是射影 Cohen-Macaulay 簇(例如,一个非奇异射影簇)且 Y 是零维的,则 $\mathrm{cohcd}(U)=n-1$. 条件 $\mathrm{cohcd}(U) \leqslant n-2$ 等价于 Y 为连通的.如果 $X=P^n$ 是射影空间,而 Y 是连通的且维数 $\geqslant 1$,则

$$\mathrm{cohcd}(U) < n-1.$$

如果 X 是复代数簇,则可以考虑相应的拓扑空间 $X(C)$ 的上同调维数.在 X 为 Noether 概形的一般情形下,上同调维数的类比概念为概形 X 的 étale 上同调维数 (étale cohomological dimension). 更精确地,设 X_{et} 为 Grothendieck 概形的 **étale 拓扑** (étale topology) 且 l 为一个素数. 概形 X 的上同调 l 维数(或 étale 上同调维数)指的是数 $\mathrm{cd}_l(X)$,它等于当 $j>i$ 时,使 X_{et} 上所有 l 挠 Abel 层 $\mathcal{F}$ 均有 $H^j(X_{et}, \mathcal{F})=0$ 的那些 i 的下确界. 如果 $X=\mathrm{Spec}\,A$ 是仿射概形,则 $\mathrm{cd}_l(\mathrm{Spec}\,A)$ 也称为环 A 的上同调维数.特别地,如果 A 是一个域,那么 $\mathrm{cd}_l(A)$ 的概念与在 **Galois 上同调** (Galois cohomology) 理论中所研究的域的上同调维数相同.

如果 X 是域 k 上的 n 维代数簇且 $l \neq \mathrm{char}\, k$, 则 $\mathrm{cd}_l(X) \leqslant 2n + \mathrm{cd}_l(k)$. 特别地,如果 k 是一个可分闭域,则 $\mathrm{cd}_l(X) \leqslant 2n$. 如果 X 是可分闭域 k 上的一个仿射代数簇,则 $\mathrm{cd}_l(X) \leqslant \dim X$.

设 k 为具有有限特征 p 的域;则对 k 上的任何 Noether 概形 X, 不等式

$$\mathrm{cd}_p(X) \leqslant \mathrm{cohcd}(X)+1$$

成立.特别地,对任何 Noether 交换环 A,

$$\mathrm{cd}_p(A) \leqslant 1.$$

如果 X 是可分闭域 k 上的拟射影代数簇,则 $\mathrm{cd}_p(X) \leqslant \dim X$, 其中 p 为 k 的特征.

参考文献

[1] Grothendieck, A., Sur quelues points d'algèbre homologique, *Tohôku Math. J.*, **9** (1957), 119-221.

[2] Hartshorne, R., Cohomological dimension of algebraic varieties, *Ann. of Math.*, **88** (1968), 403-450.

[3] Hartshorne, R., Ample subvarieties of algebraic varieties, Springer, 1970.

[4] Hartshorne, R., Cohomology of non-complete algebraic varieties, *Compositio Math.*, **23** (1971), 257-264.

[5] Artin, M., Grothendieck, A. and Verdier, J. L. (eds.), Théorie des topos et cohomologie étale des schemas, Sem. Geom. Alg., 4, Springer, 1972-1973.

И. В. Долгачев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Iversen, B., Cohomology of sheaves, Springer, 1986.

张 平 译 彭天堂 校

上同调 [cohomology; когомология]

相对于具有同调性质的函子而使用的一个词. 不同于同调,按规定它反变地依赖于它们在其上有定义的基本范畴中的对象.与同调相反,正合上同调序列中的连接同态升高维数.在典型情形,上同调与相应的同调同时出现.

Е. Г. Скляренко 撰

拓扑空间的上同调 (cohomology of a topological space) 是一个与拓扑空间 X 和 Abel 群 G 相关的分次群

$$H^*(X, G) = \sum_{n \geqslant 0} H^n(X, G),$$

上同调概念是同调概念的对偶(见同调论(homology theory);**同调群**(homology group);**Александров-Čech 同调与上同调**(Aleksandrov-Čech homology and cohomology)).如果 G 是环,则群 $H^*(X, G)$ 中定义了一种自然的乘法(Колмогоров - Alexander 积 (Kolmogorov - Alexander product)或 $\cup$ 积 ($\cup$- product)),把这个群变成分次环(上同调环 (cohomology ring)).当 X 是微分流形时,上同调环 $H^*(X, \mathbf{R})$ 可以借助 X 上的微分形式计算(见 **de Rham 定理** (de Rham theorem)).

取值于Abel群层中的上同调(cohomology with values in a sheaf of Abelian groups).这是拓扑空间通常上同调的推广.有两种取值于(或系数在)Abel 群层中的上同调论:Čech 上同调和 Grothendieck 上同调.

Čech 上同调 (Čech cohomology).设 X 是一个拓扑空间,$\mathscr{S}$ 是 X 上的一个 Abel 群层,$\mathfrak{U}=\{U_i\}_{i\in I}$ 是 X 的开覆盖.$\mathfrak{U}$ 的一个 N 维上链,是指一个映射 f,它对每个满足

$$U_{i_0\cdots i_n}=U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_n}\neq\emptyset$$

的有序集 $i_0, \cdots, i_n\in I$,对应有 $U_{i_0\cdots i_n}$ 上的层 $\mathscr{S}$ 的一个截面 $f_{i_0\cdots i_n}$. 所有 n 维上链的集合 $C^n(\mathfrak{U}, \mathscr{S})$,关于加法是一个 Abel 群.上边缘算子

$$\delta_n: C^n(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \to C^{n+1}(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$$

定义如下:

$$(\delta_n f)_{i_0\cdots i_{n+1}} = \sum_{j=0}^{n+1}(-1)^j f_{i_0\cdots\hat{i}_j\cdots i_{n+1}},$$

其中符号 ^ 表示与之相应的指标省略.

序列

$$C^*(\mathfrak{U}, \mathscr{F}): C^0(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \xrightarrow{\delta_0} C_1(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \xrightarrow{\delta_1} \cdots$$

是复形(Čech 复形 (Čech complex)).该复形的上同调记为 $H^n(\mathfrak{U}, \mathscr{S})$, 且称为覆盖 $\mathfrak{U}$ 取值于 $\mathscr{S}$ 的 Čech 上同调.群 $H^0(\mathfrak{U}, \mathscr{S})$ 与 $\mathscr{S}$ 的截面群 $\Gamma(X, \mathscr{S})$ 相同.计算上同调时,Čech 复形可以用交错上链所组成的子复形代替,所谓交错上链,是指上链在两个指标交换时变号,而两个指标相同时为 0.

如果覆盖 $\mathfrak{U}$ 是 $\mathfrak{B}=\{V_j\}$ 的加细,即对每个 $i\in I$,存在 $\tau(i)\in J$ 使得 $U_i\subseteq V_{\tau(i)}$, 则定义了一个典范同态 $H^n(\mathfrak{B}, \mathscr{S})\to H^n(\mathfrak{U}, \mathscr{S})$, 它不依赖于加细 τ. 空间 X 取值于 $\mathscr{S}$ 的 n 维 Čech 上同调群由下述公式定义:

$$\check{H}^n(X, F) = \varinjlim H^n(\mathfrak{U}, \mathscr{F}),$$

其中归纳极限在开覆盖的等价类(两个覆盖等价,当且仅当每一个是另外一个的加细)的有向(相对于加细)集上取.Čech 上同调的定义也适用于预层.

Čech 上同调的一个缺点(对于非仿紧空间)是它不构成上同调函子(见**同调函子** (homology functor)).当 $\mathscr{S}$ 是对应于 Abel 群 $\mathscr{S}$ 的常数层时,群 $\check{H}^n(X, \mathscr{S})$ 与系数在 $\mathscr{S}$ 中的 Александров - Čech 上同调群相同.

Grothendieck 上同调 (Grothendieck cohomology).考虑从 X 上 Abel 群层范畴到 Abel 群范畴的函子 $\mathscr{S}\to\Gamma(X, \mathscr{S})$. 该函子的右导出函子(见**导出函子** (derived functor))称为取值于层 $\mathscr{S}$ 的 n 维 Grothendieck 上同调群,并记为 $H^n(X, \mathscr{S})$ $(n=0, 1, \cdots)$. 相应于 Abel 群层的正合序列

$$0 \to \mathscr{F}_1 \to \mathscr{F}_2 \to \mathscr{F}_3 \to 0$$

有正合序列

$$\cdots \to H^{n-1}(X, \mathscr{F}_3) \to H^n(X, \mathscr{F}_1) \to H^n(X, \mathscr{F}_2) \to$$
$$\to H^n(X, \mathscr{F}_3) \to H^{n+1}(X, \mathscr{F}_1) \to \cdots,$$

即 $\{H^n(X, \mathscr{S})\}_{n=0,1,\cdots}$ 组成上同调函子.此外,$H^0(X, \mathscr{S})=\Gamma(X, \mathscr{S})$.若 $\mathscr{S}$ 是**松弛层**(flabby sheaf),则 $H^n(X, \mathscr{S})=0\ (n>0)$. Grothendieck 上同调群的这三个性质在同构的意义上唯一刻画了函子 $\mathscr{S}\to\{H^n(X, \mathscr{S})\}_{n=0,1,\cdots}$.

为了计算层 $\mathscr{S}$ 的 Grothendieck 上同调,可以用 $\mathscr{S}$ 的左分解,它由正维数的 Grothendieck 上同调为零的层组成.例如,对任意拓扑空间,可以取松弛层分解;对仿紧空间,可以取**优层**(fine sheaf)或**软层**(soft sheaf)分解.

Grothendieck 上同调与覆盖的上同调有以下联系.设 $\mathfrak{U}=\{U_i\}_{i\in I}$ 是空间 X 的开覆盖,则存在收敛于 $\{H^n(X, \mathscr{S})\}$ 的谱序列 $\{E_r^{p,q}\}$, 使得

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathfrak{U}, \mathscr{H}^q(X, \mathscr{F})),$$

其中 $\mathscr{H}^q(X, \mathscr{S})$ 是预层,它规定开集 $V\subset X$ 上的群是 $H^q(V, \mathscr{S})$. 如果所有值在 $\mathscr{S}$ 中的 $U_{i_0\cdots i_n}$ 的上同调在正维数上为零,则序列退化,并且

$$H^n(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \simeq H^n(X, \mathscr{F}),\ n=0, 1, \ldots$$

(Leray 定理 (Leray theorem))在一般情形下,谱序列定义一个函子式同态

$$H^n(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \to H^n(X, \mathscr{F})$$

过渡到极限,是函子式同态

$$\check{H}^n(X, \mathscr{F}) \to H^n(X, \mathscr{F}).$$

后一个同态当 $n=0, 1$ 时是双射,当 $n=2$ 时是单射(一般地不是满射).当 X 仿紧时,对所有的 n 是双射.因而,对仿紧空间 X,

$$\check{H}^n(X, \mathscr{F}) \simeq H^n(X, \mathscr{F}),\ n=0, 1, \ldots.$$

以上定义的上同调群的推广是支集在族 Φ 中的上

同调群 $H^n_\Phi(X, \mathscr{F})$. X 的一个闭子集族 Φ 称为支集族(family of supports),如果 1) Φ 中成员的任何闭子集属于 Φ; 2) Φ 中任何两个成员的并在 Φ 中. 群 $H^n_\Phi(X, \mathscr{F})$ 定义为函子 $\mathscr{F} \mapsto \Gamma_\Phi(X, \mathscr{F})$ 的右导出函子,其中 $\Gamma_\Phi(X, \mathscr{F})=H^0(X, \mathscr{F})$ 是层 $\mathscr{F}$ 的支集在 Φ 中的截面群. 它们构成一个上同调函子. 如果 Φ 是所有闭集族,则 $H^n_\Phi(X, \mathscr{F})=H^n(X, \mathscr{F})$. 另一个重要的特殊情形: $\Phi=c$, 所有紧子集的族. 群 $H^n_c(X, \mathscr{F})$ 称为有紧支集的上同调群 (cohomology groups with compact supports).

当 $\mathscr{F}$ 是环层时,群

$$H^*(X, \mathscr{F}) = \sum_{n\geq 0} H^n(X, \mathscr{F})$$

有一个自然定义的乘法,从而把它变为分次环(上同调环 (cohomology ring)). 这里层 $\mathscr{F}$ 中的结合性导出 $H^*(H, \mathscr{F})$ 中乘法的结合性. 交换环或 Lie 环的层分别给出分次交换环或 Lie 上同调环. 如果 $\mathscr{F}$ 是环层 $\mathscr{A}$ 上的模层,则 $H^n(X, \mathscr{F})$ 是环 $\Gamma(X, \mathscr{A})$ 上的模.

关于取值于非 Abel 群层的上同调,见**非 Abel 上同调** (non - Abelian cohomology).

参考文献

[1] Grothendieck, A., Sur quelques points d'algèbre homologique, *Tohoku Math. J.*, 9 (1957), 119-221.

[2] Godement, R., Topologie algébrique et théorie des faisceaux, Hermann, 1958.

[3] Serre, J.-P., Faisceaux algébriques cohérentes, *Ann. of Math.*, (2), **61** (1955), 2, 197-278.

Д. А. Пономарев 撰

【补注】 对奇异同调的描述见**奇异同调** (singular homology).

参考文献

[A1] Serre, J.-P., Homologie singulière des espaces fibrés. Applications, *Ann. of Math.*, **54** (1951), 425-505.

[A2] Steenrod, N. E. and Eilenberg, S., Foundations of algebraic topology, Princeton Univ. Press, 1966.

[A3] Spanier, E. H., Algebraic topology, McGraw-Hill, 1966(中译本: E. H. 斯潘尼尔,代数拓扑学,上海科学技术出版社, 1987).

[A4] Dold, A., Lectures on algebraic topology, Springer, 1980.

带算子的空间的上同调 (cohomology of spaces with operators). 在其上定义了群作用的拓扑空间的上同调不变量. 设 G 是一个作用在空间 X 上的群,其中对每个 $g\in G$,映射 $x\mapsto gx$ 是一个同胚 $X\to X$,则 X 上 Abel 群的 G 层意指 X 上的 Abel 群层,连同群 G 的作用,这个作用是连续的,与在 X 上的作用协调并且在层的茎之间同构映射. G 层 $\mathscr{F}$ 的截面群(更一般地,上同调群 $H^n(X, \mathscr{F})$) 上定义了自然的 G 模结构. X 上 Abel 群的 G 层组成一个 Abel 范畴,其每个对象可嵌入另一个内射对象中. 从该范畴到 Abel 范畴中的函子 $\mathscr{F}\mapsto \Gamma(X, \mathscr{F})^G$, 其中 $\Gamma(X, \mathscr{F})^G$ 是 G 层 $\mathscr{F}$ 的 G 不变截面群,有右导出函子 $\mathscr{F}\mapsto H^n(X, G, \mathscr{F})$ $(n=0, 1, \cdots)$, 成为一个上同调函子,其中 $H^0(X, G, \mathscr{F})=\Gamma(X, \mathscr{F})^G$. 群 $H^n(X, G, \mathscr{F})$ 在研究空间 X, 商空间 $Y=X/G$ 和群 G 之间的关系时起着基本的作用. 存在第二项是 $E_2^{p,q}=H^p(G, H^q(X, \mathscr{F}))$ 的谱序列 $\{E_r\}$, 并且收敛于 $H^*(X, G, \mathscr{F})$. 将有向象 $f_*\mathscr{F}(f: X\to Y$ 是自然投影$)$ 看作空间 Y 上的 G 层,在其上 G 有平凡作用,设 $\mathscr{F}^G$ 是 $f_*\mathscr{F}$ 的不变量的层. 如果 G 在 X 上的作用完全不连续并且自由(见**离散变换群** (discrete group of transformations)), 则 $H^*(X, G, \mathscr{F})\simeq H^*(Y, \mathscr{F})^G$(见[1]). 特别地,如果 A 是 G 模,则 X 上的常数层 $\mathscr{F}=A$ 有自然的 G 层结构,并且层 $\mathscr{F}^G$ 在 Y 上是局部常数. 这时谱序列 $\{E_r\}$ 满足条件 $E_2^{p,q}=H^p(G, H^q(X, A))$ 并收敛于 $H^*(Y, \mathscr{F}^G)$ (覆盖的谱序列 (spectral sequence of a covering)). 更进一步,如果 X 是连通的并且对 $q>0$, $H^q(X, A)=0$, 则 $H^p(G, A)\simeq H^p(Y, \mathscr{F}^G)$, 这给出了群 G 的上同调的一种拓扑解释 ([2]). 如果 G 完全不连续且 Y 仿紧,则群 $H^n(X, G, \mathscr{F})$ 可以用计算 Čech 上同调的同样方法,用 X 的 G 不变覆盖来计算(见[1]).

在 G 是 Lie 群,并自由地可微地作用在微分流形 X 上时, X/G 也是光滑流形,类似的覆盖的谱序列 $\{\widetilde{E}_r\}$ 是熟知的 ([3]). 序列 $\{\widetilde{E}_r\}$ 收敛于 X 上 G 不变微分形式的复形的上同调,并且 $\widetilde{E}_2^{p,q}=H^p(G, H^q(X, \mathbf{R}))$, 其中 G 的上同调是借助 C^∞ 类的上链计算的.

亦见**群的上同调** (cohomology of groups); **同变上同调** (equivariant cohomology).

参考文献

[1] Grothendieck, A., Sur quelques points d'algèbre homologique, *Tohoku Math. J.*, **9** (1957), 119-221.

[2] Cartan, H. and Eilenberg, S., Homological algebra, Princeton Univ. Press, 1956.

[3] Est, W. T. van, A generalization of the Cartan - Leray spectral sequence Ⅰ, Ⅱ, *Proc. Nederl. Akad. Wetensch. Ser. A*, **61** (1958), 399-413.

А. Л. Онищик, Д. А. Пономарев 撰 高红铸 译 沈信耀 校

上同调函子 [cohomology functor; когомологический функтор]

见**同调函子** (homology functor).

上同调群 [cohomology group; когомологий группа], Abel 群的上链复形 $K=(K_n, d_n)$ 的

分次群 $H(K)=\oplus H^n(K)$, 其中 $H^n(K)=\operatorname{Ker} d_{n+1}/\operatorname{Im} d_n$(见**复形** (complex)). 群 $H^n(K^\cdot)$ 称为复形 K 的 n 维或第 n 个上同调群. 这个概念对偶于链复形的同调群(见**复形的同调** (homology of a complex)).

在模的范畴中,上链复形的上同调模也称上同调

群.

设 Λ 是一个具有单位元的结合环，A 是一个 Λ 模．系数或值取自于 A 的 Λ 模的链复形(chain complex) $K.=(K_n, d_n)$ 的上同调群(cohomology group)是上链复形

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(K, A) = (\mathrm{Hom}_\Lambda(K_n, A), d_n^*)$$

的上同调群

$$H(K, A) = \oplus H^n(K, A),$$

其中 $d_n^*(\gamma)=\gamma \circ d_n$，$\gamma \in \mathrm{Hom}_\Lambda(K_n, A)$．这种构造的特殊情形是多面体的上同调群，拓扑空间的奇异上同调群，以及群或代数的上同调群等等．

如果 $O \to K. \to {}^{\alpha}L. \to {}^{\beta}M. \to 0$ 为 Λ 模的复形的一个正合序列，其中 K_n 的象是 L_n 的直和因子，则自然有如下的正合序列：

$$\cdots \to H^n(M, A) \xrightarrow{\alpha^*} H^n(L, A) \xrightarrow{\beta^*} H^n(K, A) \xrightarrow{d^*}$$
$$\xrightarrow{d^*} H^{n+1}(M, A) \to \cdots.$$

另一方面，如果 K 为 Λ 模的复形，并且所有 K_n 均为投影模，则对 Λ 模的每个正合序列 $O \to A \to B \to C \to 0$，均有相关的上同调群的正合序列

$$\cdots \to H^n(K, A) \to H^n(K, B) \to H^n(K, C) \to$$
$$\to H^{n+1}(K, A) \to \cdots.$$

见**拓扑空间的同调群**(homology group of a topological space)；(关于拓扑空间的上同调群的)**上同调**(cohomology)．

参考文献

[1] Cartan, H. and Eilanberg, S., Homological algebra, Princeton Univ. Press, 1956.

[2] Godement, R., Topologie algébrique et théorie des faisceanx, Hermann, 1958.

[3] MacLane, S., Homology, Springer, 1963.

Л. В. Кузьмин 撰

【补注】 上面给出的上同调群的正合序列通常被称为与复形的短正合序列相关的上同调群的长正合序列(long exact sequence of cohomology groups)．

高红铸 译　彭天堂 校

上同调流形 [cohomology manifold; когомологическое многообразие]

见**同调流形** (homology manifold)．

复形的上同调 [cohomology of a complex; когомологии комплекса]

见**复形的同调** (homology of a complex)．

代数的上同调 [cohomology of algebras; когомологии алгебр]

群

$$H^n(R, A) = \mathrm{Ext}_R^n(K, A), \quad n \geqslant 0$$

(见函子(functor)Ext)，这里 R 是交换环 K 上的结合代数，并配有固定的 K 代数同态 $\varepsilon: R \to K$(增广映射)，使得可将 K 看成 R 模，A 是 R 模．这一定义包括了若干类型(泛)代数的很多上同调理论．

群的所有维数的上同调群是首先由 S. Eilenberg 和 S. Maclane ([3]) 在 20 世纪 40 年代联系拓扑学研究以及 Д. К. Фаддеев ([5]) 从一个纯代数观点——作为广义商系统类的群——而引入的．低维上同调群以这样那样的方式在更早就被研究过(见[1]，[2]，[4])．

上同调群的例子．1) 若 $K=\mathbf{Z}$ 是整数环，G 是一个群，$R=\mathbf{Z}G$ 是 G 在 $\mathbf{Z}$ 上的群环，并且

$$\varepsilon\left[\sum n_i g_i\right] = \sum n_i, \quad n_i \in \mathbf{Z}, \quad g \in G,$$

则群 $H^n(R, A)$ 称为系数(或值)属于 R 模 A 的群 G 的上同调群(cohomology groups of the group)；记为 $H^n(G, A)$．若用幺半群代替群，则可类似地定义幺半群 G 的上同调群(cohomology groups of the monoid) $H^n(G, A)$．

2) 若 S 是一个结合 K 代数，S^0 是其反 K 代数，并且

$$R = S \otimes_K S^0, \quad \varepsilon\left[\sum s_i \otimes t_i\right] = \sum s_i t_i,$$

则群 $\mathrm{Ext}_R^n(S, A)$ 称为系数属于 S 双模 A(即属于 R 模 A)的结合代数 S 的上同调群(cohomology groups of the associative algebra)；记为 $H^n(S, A)$．如果 K 是域，则群 $H^n(S, A)$ 称为 K 代数 S 的 Hochschild 上同调群(Hochschild cohomology groups)．

3) 若 S 是域 K 上的 Lie 代数，$R=U_S$ 是其具有增广映射 $\varepsilon: R \to K$ 的**泛包络代数**(universal enveloping algebra)，则群 $H^n(R, A)$ 称为系数属于 U_S 模 A(即属于 Lie S 模 A)的 Lie 代数 S 的上同调群(cohomology groups of the Lie algebra)；记为 $H^n(S, A)$．

$n=0$，1 和 2 时的上同调群在若干情况下有简单的解释．

a) 若 G 是一个群，则 $H^0(G, A)$ 同构于 A 的不动元素子群

$$A^G=\{a \in A: ga=a \text{ 对一切 } g \in G\}$$

$H^1(G, A)$ 同构于商群 $\mathrm{Der}(G, A)/\mathrm{Ider}(G, A)$，这里

$$\mathrm{Der}(G, A) = \{f: G \to A: f(xy)=xf(y)+f(x) \text{ 对一切 } x, y \in G\}$$

是导子群(或交叉同态群).

$$\mathrm{Ider}(G, A) = \{f: G \to A: \exists a \in A\ (f(x)=xa-a \text{ 对一切 } x \in G\}$$

是内导子群(或主交叉同态群); 此处有正合序列

$$0 \to A^G \to A \to \mathrm{Der}(G, A) \to H^1(G, A) \to 0.$$

对于交换群 G, $H^2(G,A)$ 同构于 A 通过 G 的扩张群(见 **Baer 乘法**(Baer multiplication)); G 的三维上同调群与扩张的障碍有联系(见[9] 第 4 章).

b) 若 S 是结合 K 代数, 则 $H^0(S, A)$ 同构于群

$$\{a \in A: xa=ax \text{ 对一切 } x \in S\};$$

$H^1(S, A)$ 同构于商群

$$\mathrm{Der}(S, A) / \mathrm{Ider}(S, A),$$

这里

$$\mathrm{Der}(S, A) = \{f: S \to A: f \text{ 是} K-\text{线性的}$$
$$\text{和 } f(xy)=xf(y)+f(x)y \text{ 对 } x, y \in S\},$$
$$\mathrm{Ider}(S, A) = \{f: S \to A: \exists a \in A\ (f(x)=xa-ax$$
$$\text{对一切 } x \in S)\};$$

$H^2(S,A)$ 刻画了 S 双模 A 通过环 S 的扩张(见[14]).

c) 若 S 是 Lie 代数, 则 $H^0(S, A)$ 同构于 K 模 $\{a \in A \mid xa=0, \forall x \in S\}$; $H^1(S, A)$ 同构于商群

$$\mathrm{Der}(S, A) / \mathrm{Ider}(S, A),$$

这里

$$\mathrm{Der}(S, A) = \{f: S \to A: f([x, y])=xf(y)-yf(x)$$
$$\text{对一切 } x, y \in S\},$$
$$\mathrm{Ider}(S, A) = \{f: S \to A: \exists a \in A\ (f(x)=xa$$
$$\text{对一切 } x \in S)\};$$

Lie 代数的二维上同调群 $H^2(S, A)$ 对应于 Lie 代数的 K 分裂扩张(见[6] 第 14 章); 在有些情况下, $H^3(S, A)$ 中元素是扩张问题中的障碍.

上同调群在代数的各个分支中获得了广泛的应用. 例如, 若 G 是群, 并且对所有 ZG 模 A 有 $H^2(G,A)=0$, 则 G 是自由群(Stalling 定理(Stalling theorem), 见**同调维数**(homological dimension)). 若 G 是有限群, $\mathbf{C}^*$ 是复数域的乘法群, 则群 $M(G)=H^2(G, \mathbf{C}^*)$ 称为 G 的 Schur 乘子(Schur multiplier). 它在群的中心扩张的研究和有限群的射影表示理论中起着重要作用[1]. 若 G 是群, A 是 ZG 模, 并且对一个素数 p 满足 $pA=0$, 则

$$\mathrm{Ext}^n_{ZG}(\mathbf{Z}, A) \cong \mathrm{Ext}^n_{kG}(k, A),$$

这里 $k=GF(p)$ 是 p 个元素的域. 若 G 是有限 p 群, 则 $d(G)=\dim_k H^1(G, k)$ 是 G 的生成元的最小个数, $r(G)=\dim_k H^2(G, k)$ 是将 G 考虑成射有限 p 群时的定义关系的最小个数 $r(G) \leq R(G)$, 这里 $R(G)$ 是离散群 G 的定义关系的最小个数. 在 $d(G) \to \infty$ 时 $r(G)-d(G)$ 趋向无限这一事实引出了类域塔问题(见**类域论**(class field theory))、诣零代数的 Курош 问题(见**诣零代数**(nil algebra))和非限制的 **Burnside 问题**(Burside problem)的否定解决([10]).

如果 G 是射有限群, $\{U_i, i \in I\}$ 是它的一族开正规子群, 则群

$$\lim_{\to} H^n(G / U_i, A^{U_i})$$

称为系数属于 ZG 模 A 的射有限群 G 的 n 维上同调群(n-th cohomology group of the profinite group); 记为 $H^n(G, A)$. 若 E 是域 L 的 Galois 扩张, (Galois 群 $G=G(E/L)$), 则 G 是射有限的; 在这种情况下, 群 $H^n(G,A)$ 称为 Galois 上同调群. 群 $H^q(G, E^*)$ 起着重要作用, 这里 E^* 是 E 的乘法群. 例如 $H^1(G, E^*)=0$; 这一事实的一个推论是 Hilbert 定理 90(关于循环扩张). 若 E 是 L 的可分闭包, 则 $H^2(G(E/L), E^*)$ 称为域 L 的 Brauer 群(Brauer group of the field)(见 **Brauer 群**(Brauer group)). 目前(1987), 交换环的 Galois 理论正得到发展, 而交换环的 Galois 上同调和 Brauer 群是其基本部分.

若 S 是结合代数, 如果 $H^2(S, S)=0$, 则 S 是刚性的(见**代数的形变**(deformation)).

从某种意义上说, 上同调群 $H^n(R, A)$ 对偶于结合 K 代数 R 的系数属于 R 模 A 的同调群

$$H_n(R, A) = \mathrm{Tor}^R_n(A, K).$$

如果 G 是群, $R=ZG$, $K=\mathbf{Z}$, 则群 $H_n(R, A)$ 称为系数属于 R 模 A 的群 G 的同调群(homology groups of the group): 记为 $H_n(G, A)$. 若 S 是结合 K 代数, $R=S \otimes_K S^0$, 则群 $\mathrm{Tor}^R_n(S, A)$ 称为系数属于 S 双模 A 的结合代数 S 的同调群(homology groups of the associative algebra); 记为 $H_n(S, A)$. 如果 S 是 Lie 代数, $R=U_S$ 是其泛包络代数, 则群 $H_n(R, A)$ 称为系数属于 Lie S 模 A 的 Lie 代数 S 的同调群(homology groups of the Lie algebra). 记为 $H_n(S, A)$. 在一些情况下, 低维同调群有简单解释. 例如, 若 G 是群, 则 $H_0(G, \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$, $H_1(G, Z) \cong G/[G, G]$.

如果在一个 Abel 范畴中, 函子 Hom 有导出函子 Ext, 并且也定义了函子 $\otimes$ 和其导出函子 Tor. 则按以上步骤也可定义这种范畴中的上同调和同调理论. 构造上同调理论的一个非常一般的方法可利用余三元组发展而来([11]). (余)三元组的概念来源于对构造单形分解所必须的最少工具的分析. 范畴 $\mathfrak{A}$ 中三元组

(triple) $T=(T,k,p)$ 是一个函子 $T:\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}$ 并配有自然函子变换 $k:1_{\mathfrak{A}}\to T$, $p:T^2\to T$, 满足以下条件

$$p\circ Tk = p\circ kT = 1,\ p\circ Tp = p\circ pT.$$

余三元组概念与此对偶，就是将箭头反向得到．如果对象 $X\in\mathfrak{A}$ 和射 $q:T(X)\to X$ 使得 $q\circ k(X)=1_X$: $X\to X$, $q\circ T(q)=q\circ p(X)$: $T^2(X)\to X$, 则偶 (X,q) 称为一个 T 代数．设 $\mathfrak{A}^T$ 是 T 代数的范畴，如果 $X\in\mathfrak{A}$, 则 $f(X)=(T(X),p(X))\in\mathfrak{A}^T$, 这定义了函子 $F:\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}^T$ (某种意义上，$F(X)$ 是 X 上的自由对象)．设 $U:\mathfrak{A}^T\to\mathfrak{A}$ 是忘记 T 结构的函子，则 F 和 U 是**伴随函子** (adjoint functor), $UF=T$, 且 $G=FU:\mathfrak{A}^T\to\mathfrak{A}^T$, 配上 $l:G\to 1_{A^T}$, $q:G\to G^2$ 就定义了余三元组 (G,l,q) 和复形

$$X \overset{d_0}{\leftarrow} G(X) \overset{d_1}{\leftarrow} G^2(X) \overset{d_2}{\leftarrow} G^3(X) \leftarrow \cdots$$

且具有微分 $d_n=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i G^{n-i}lG^i$ (这个复形类似于对象 X 的典范自由分解式)．如果 $\mathfrak{A}^T$ 是一个 Abel 范畴并且这样得到的复形是零调的，则函子 Hom (或者 $\otimes$) 的标准应用就给出了对象 X 的上同调群(或同调群)的构造、一般地，需要构造 T 代数 (X,q) 上 (X,q) 模构成的一个新 Abel 范畴，使得在这个范畴上有一个自然的余三元结构可以构造群，它们便称为原范畴的上同调群(相似于群范畴，结合代数范畴和 Lie 代数范畴的上同调群的构造)．这种格式包括了群，结合代数和 Lie 代数的上同调，也包括了一些其他的上同调理论(交换代数的 Harrison 上同调，André - Quillen 上同调，Amitsur 上同调等，见[8])．

这里说明的所有结构都是关于某个 Abel 范畴的．同时，一些数学分支(例如群扩张理论)需要构造系数属于非 Abel 范畴的上同调理论(例如，在群 G 情况下，系数属于非交换 G 模 A) (见[8], [11])．构造代数的各种非 Abel 上同调理论的出发点是上同调在 0 维和 1 维上的解释，使是经典理论的某些方面(上同调的群结构等)不得不舍弃了．拓扑代数结构的上同调已经有所研究(例如，拓扑群的上同调([5])，Banach 代数的上同调等)．

参考文献

[1] Schur, J., Untersuchungen über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen, *J. Reine Angew. Math.*, **132** (1907), 85 – 137.

[2] Baer, R., Erweiterung von Gruppen und ihren Isomorphismen, *Math. Z.*, **38** (1934), 374 – 416.

[3] Eilenberg, S., and Maclane, S., Relations between homology and homotopy groups, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **29** (1943), 155 – 158.

[4] Hopf, H., Ueber, die Bettischen Gruppen, die zu einer beliebigen Gruppen gehören, *Comment. Math. Helv.*, **17** (1944 – 1945), 39 – 79.

[5] Фаддеев, Д. К., 《Докл. АН СССР》, **58** (1947), 3, 361 – 364.

[6] Cartan, H. and Eilenberg, S., Homological algebra, Princeton Univ. Press, 1956.

[7] Grothendieck, A., Sur quelques points d'algèbre homologique, *Tohôku Math. J.*, **9** (1957), 119 – 221.

[8] Итоги науки. Алгебра. 1964, M., 1966, 203 – 235.

[9] Maclane, S., Homology, Springer, 1963.

[10] Serre, J.-P., Cohomologie Galoisienne, Springer, 1964.

[11] Eckmann, B. (ed.), Seminar on triples and categorical homology theory Zürich, 1966 – 1967, Lecture Notes in Math., 80, Springer, 1969.

[12] Gruenberg, K. W., Cohomological topics in group theory, Springer, 1970.

[13] Stammbach, U., Homology in group theory, Springer, 1973,

[14] Fossum, R., Griffiith, P. and Reiter, I., Trivial extensions of Abelian categories. Homological algebra of trivial extensions of Abelian categories with applications to ring theory, Springer, 1975.

В. Е. Говоров, А. В. Михалев 撰

【补注】 在以上 Schur 乘子的定义中，不必要求群是有限的．不过，在无限群情况下，定义术语并未取得一致．

在 20 世纪 60 年代早期，S. U. Chase, D. K. Harrison 和 A. Rosenberg ([A1]) 发展了交换环的一种 Galois 理论．特别地，他们建立了一个七项的正合序列，合并了 Hilbert 定理 90 和 Brauer 群，利用 Amitsur 上同调作为 Galois 上同调的一个适当推广．1982 年，А. С. Меркурьев 和 А. А. Суслин ([A3]) 证明了，对于一个域 F 和 $n\neq \mathrm{char}F$, 存在 $H^2(F,\mu_n\otimes\mu_n)$ 和**代数 K 理论** (algebraic K-theory) 中的群 $K_2(F)/nK_2(F)$ 之间的同构，这里 μ_n 是 n 次单位根的群(概型)．若 F 含有一个本原 n 次单位根，则这个结果给出了 F 的 Brauer 群的 n 次挠率的精确计算．

较全面地论述 Banach 代数(上)同调的专著是[A4]. 关于非 Abel 上同调可参见 [A2].

参考文献

[A1] Chase, S. U., Harrison, D. K., and Rosenberg, A., Galois theory and cohomology of commutative rings, Memoirs Amer. Math. Soc., 52, Amer. Math. Soc., 1965.

[A2] Giraud, J., Cohomologie non abélienne, Springer, 1971.

[A3] Merkurev, A. S. and Suslin, A. A., *K*-cohomology of Severi-Brauer varieties and the norm residue homomorphism, *Math. USSR-Izv.*, **21** (1983), 307 – 340 (*Izv. Akad. Nauk SSSR*, **46** (1982), 1011 – 1046).

[A4] Helemski, A. Ya., Cohomology of Banach and topological spaces, Reidel, Forthcoming (译自俄文).

肖 杰 译

Banach 代数的上同调 [cohomology of Banach algebras; когомологии Банаховых алгебр]

定义为下列上链复形的上同调群的群 $H^n(A,X)$, $n\geqslant 0$:

$$0 \to C^0(A,X) \to \cdots \to C^n(A,X) \xrightarrow{\delta^n} C^{n+1}(A,X) \to \cdots,$$

这里 X 是 Banach 代数 A 上的双边 Banach 模，其中的 n 维链是由 A 到 X 的连续 n 线性算子，且

$$\delta^n f(a_1,\ldots,a_{n+1}) = a_1 f(a_2,\ldots,a_{n+1}) + \\ +\sum_{k=1}^{n}(-1)^k f(a_1,\ldots,a_k a_{k+1},\ldots,a_{n+1}) + \\ +(-1)^{n+1} f(a_1,\ldots,a_n)a_{n+1}.$$

Banach 代数的上同调也可以通过函子 Ext 的 Banach 类似来引入，并且也有一种公理化的定义.

类似于代数的上同调，Banach 代数的一维上同调群 $H^1(X,A)$ 可以解释为由 A 到 X 的"按内求导的模"的连续求导，而二维上同调群的元素可解释为 A 的通过 X 的且使 X 有补空间的扩张的等价类. 同时，一系列特殊的分析和拓扑概念也可以用 Banach 代数上同调的语言来表达.

使得 $H^2(A,X)=0$ 对于所有 X 成立的代数 A 称为完全分离的 (completely separated); 这种代数的特征在于它的所有奇异扩张都是分裂的. Banach 结构的标志特性反映在下列非常苛刻的要求上: 全分离交换 Banach 代数必定有有限谱(极大理想空间). 特别是，全分离函数代数是有限多个复数域 $\mathbf{C}$ 的直和.

对于具有高维($n\geqslant 3$)平凡上同调的 Banach 代数类没有那么多限制; 例如，它包含双射影代数类，即作为双边 Banach A 模为射影的代数 A, 紧群的 L^1 代数和 C^* 代数都是双射影的，在所有的经典 Banach 空间中的核算子代数也是双射影的. 当在 Banach 结构上附加一定的条件时，拓扑单纯的双射影代数就可完全刻画，且每个半单双射影代数是这种代数的拓扑直和.

一个交换代数称为弱遗传的，如果它的极大理想是射影的. 这一性质等价于 $H^2(A,X)$ 的平凡性，其中 X 满足下述条件: 对于所有 $x\in X$ 和 $a\in A$, $xa=\lambda x$ 成立. 为使一个交换 Banach 代数 A 中的理想是射影的，必要条件为它的谱是仿紧的. 如果 $A=C(\Omega)$, 那么这个条件也是充分的. 特别是, $C(\Omega)$ 是弱遗传的，当且仅当所有形式为 $\Omega\setminus\{t\}(t\in\Omega)$ 的集合是仿紧的.

对偶于双边 A 模 X 的空间自身也是双边 A 模. 对于所有 X 和 $n>0$ 有 $H^n(A,X^*)=0$ 的代数称为是顺从的 (amenable), 因为对于 $A=L^1(G)$, 这一性质等价于 G 的顺从性(可平均性). 在一般情形下, A 是顺从的，当且仅当代数

$$I_\Delta = \left\{u=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\otimes b_k\in A_t\hat{\otimes}A_t:\ \sum_{k=1}^{\infty}a_k b_k=0\right\}$$

具有有界近似恒等元.

参考文献

[1] Johnson, B. E., Cohomology of Banach algebras. *Mem. Amer. Math. Soc.*, **127** (1972).

[2] Хелемский, А. Я., 《Труды семинара им. Петровского》, **3** (1978), 223–242.

А. Я. Хелемский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Helemsky, A. Ya. [A. Ya. Khelemskii]. Cohomology of Banach and topological spaces, Reidel, Forthcoming (译自俄文).

史树中 译

群的上同调 [cohomology of groups; когомологии групп]

历史上**代数的上同调** (cohomology of algebras) 的最早的理论.

每个对 (G,A) (其中 G 是群, A 是一个左 G 模(即整群环 $\mathbf{Z}G$ 上的模)), 对应于一个 Abel 群 $H^n(G,A)$ 的序列，它们称为 G 的系数在 A 中的上同调群 (cohomology groups)). 数 n 取遍非负整数，称为 $H^n(G,A)$ 的维数 (dimension). 群的上同调群是重要的不变量，它既含有 G 的信息又含模 A 的信息.

按定义, $H^0(G,A)$ 是 $\mathrm{Hom}_G(\mathbf{Z},A)=A^G$, A^G 是 A 中 G 不变元素的子模. 当 $n>1$ 时群 $H^n(G,A)$ 定义成函子 $A\mapsto H^0(G,A)$ 的 n 次导出函子 (derived functor) 的值，令

$$\cdots \to P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \to P_0 \to \mathbf{Z} \to 0$$

是平凡 G 模 $\mathbf{Z}$ 在 G 模范畴中的某个投影分解 (resolution), 即它是一个正合列，其中每个 P_i 是投影 $\mathbf{Z}G$ 模，则 $H^n(G,A)$ 是复形 (complex)

$$0 \to \mathrm{Hom}_G(P_0,A) \xrightarrow{d_0'} \mathrm{Hom}_G(P_1,A) \to \cdots$$

的第 n 个上同调群，即 $H^n(G,A)=\mathrm{Ker}\,d_n'/\mathrm{Im}\,d_{n-1}'$, 其中 d_n' 是由 d_n 诱导而得.

群的同调群 (homology groups of group) 用对偶构造定义，其中每一处 Hom_G 皆用 $\otimes_G$ 来代替.

函子 $A\mapsto H^n(G,A)(n=0,1,\cdots)$ 的集合是左 G 模范畴中的上同调函子，见**同调函子** (homology functor); **上同调函子** (cohomology functor).

作模 $B=\mathrm{Hom}(\mathbf{Z}[G],X)$, 其中 X 是 Abel 群，且 G 按下列公式作用于 B 上,

$$(g\varphi)(t)=\varphi(tg),\ \varphi\in B,\ t\in \mathbf{Z}G,$$

这样形式的模 B 称为上诱导的 (co-induced). 若 A

是内射模或上诱导模，则$H^n(G, A)=0$对$n\geqslant 1$成立. 每个模A皆同构于上诱导模B的一个子模. 于是序列

$$0 \to A \to B \to B/A \to 0$$

的正合同调序列确定了同构$H^n(G, B/A)\simeq H^{n+1}(G, A)$ ($n\geqslant 1$)及正合列

$$B^G \to (B/A)^G \to H^1(G, A) \to 0.$$

因此A的$n+1$维上同调群的计算化为计算B/A的n维上同调群. 这个计划称为维数位移(dimension shifting).

由维数位移,能给出上同调群的一个公理定义,即它们能定义成从G模范畴到Abel群范畴的函子序列$A\mapsto H^n(G, A)$,它形成上同调函子, 且对每个上诱导模B满足$H^n(G, B)=0, n\geqslant 1$.

对于适当定义的等价关系,群$H^n(G, A)$也能定义成形如

$$0 \to A \to M_1 \to \cdots \to M_n \to \mathbf{Z} \to 0$$

的G模正合序列的等价类(见[1], Chapt, 3, 4).

为了计算上同调群,一般地要用到平凡G模的标准分解式,在其中$P_n=\mathbf{Z}[G^{n+1}]$及对于$(g_0, \cdots, g_n)\in G^{n+1}$, 令

$$d_n(g_0, \cdots, g_n)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i(g_0, \cdots, \hat{g}_i, \cdots, g_n),$$

其中g_i上的符号 ^ 表示g_i被删去. $\mathrm{Hom}_G(P_n, A)$的上链是函数$f(g_0, \cdots, g_n)$, 对于它, $gf(g_0, \cdots, g_n)=f(gg_0, \cdots, gg_n)$. 按规则$g_0=1$, $g_1=h_1$, $g_2=h_1h_2, \cdots$, $g_n=h_1\cdots h_n$来改变变量以后,能改用非齐次上链$f(h_1, \cdots, h_n)$. 于是上边缘运算如下:

$$d f(h_1, \ldots, h_{n+1}) = h_1 f(h_2, \ldots, h_{n+1})+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}(-1)^i f(h_1, \ldots, h_ih_{i+1}, \ldots, h_{n+1})+$$
$$+(-1)^{n+1} f(h_1, \ldots, h_n).$$

例如, 一维上闭链是函数$f: G\to A$, 满足$f(g_1, g_2)=g_1f(g_2)+f(g_1)$对所有$g_1, g_2\in G$成立,而上边缘是形为$f(g)=ga-a$的函数(对某个$a\in A$). 一维上闭链也称为交叉同态(crossed homomorphism), 一维上边缘称为平凡交叉同态(trivial crossed homomorphism). 当G平凡地作用于A时, 交叉同态是通常的同态, 且所有平凡交叉同态是零, 这时有$H^1(G, A)=\mathrm{Hom}(G, A)$.

$H^1(G, A)$的元素可以解释成正合序列$1\to A\to F\to G\to 1$中的截影$G\to F$的A共轭类,其中F是G和A的半直积(semi-direct product). $H^2(G, A)$的元素可解释成A藉助于G的扩张的类. $H^3(G, A)$可解释成具有中心A的非Abel群藉助于G的扩张的障碍(见[1]). 当$n>3$时,还未知(到1978年)对$H^n(G, A)$有类似的解释.

如果H是G的子群,那么对所有n, 上闭链从G到H的限制确定了函子的限制同态:

$$\mathrm{res}: H^n(G, A) \to H^n(H, A).$$

对$n=0$, res正是嵌入$A^G\subset A^H$. 若G/H是G的某个商群,则上闭链从G/H到G的提升诱导了函子的膨胀同态

$$\inf: H^n(G/H, A^H) \to H^n(G, A).$$

令$\varphi: G'\to G$是同态,则每个G模A可看成G'模. 这只要令$g'a=\varphi(g')a$ ($g'\in G'$). 组合映射res和inf就给出映射$H^n(G, A)\to H^n(G', A)$. 在这个意义下, $H^*(G, A)$是G的逆变函子. 设Π是G的自同构群,则$H^n(G, A)$可赋以Π模结构. 例如,设H是G的正规子群,群$H^n(H, A)$可具有一个自然的G/H模结构. 这是因为G的内自同构诱导$H^n(G, A)$上的恒等映射,特别地, 对G中正规子群H, $\mathrm{Im}\ \mathrm{res}\subset H^n(H, A)^{G/H}$.

令H是群G中有限指数的子群. 利用范数映射$N_{G/H}: A^H\to A^G$, 能藉助维数位移对所有n来定义函子的上-限制映射:

$$\mathrm{cores}: H^n(H, A) \to H^n(G, A).$$

这些映射满足$\mathrm{cores}\cdot\mathrm{res}=(G:H)$.

若H是G的正规子群,则存在Lyndon谱序列, 它的第二项为$E_2^{pq}=H^p(G/H, H^q(H, A))$, 并收敛于上同调$H^n(G, A)$(见[1], 第11章). 在小维数情况,它引出正合列

$$0 \to H^1(G/H, A^H) \xrightarrow{\inf} H^1(G, A) \xrightarrow{\mathrm{res}} H^1(H, A)^{G/H} \xrightarrow{\mathrm{tr}}$$
$$\xrightarrow{\mathrm{tr}} H^2(G/H, A^H) \xrightarrow{\inf} H^2(G, A),$$

其中tr是超渡映射.

对有限群G,范数映射$N_G: A\to A$诱导了映射$\hat{N}_G: H_0(G, A)\to H^0(G, A)$, 其中$H_0(G, A)=A/J_GA$, J_G是$\mathbf{Z}G$的由形为$g-1(g\in G)$的元素生成的理想. 映射N_G可用于统一正合的上同调和同调序列. 确切地说对所有n可定义修改的上同调群(也称Tate上同调群(Tate cohomology groups)) $\hat{H}^n(G, A)$. 其中

$$\hat{H}^n(G, A) = H^n(G, A)\text{ , 对 } n\geqslant 1,$$

$$\hat{H}^n(G, A) = H_{-n-1}(G, A)\text{ , 对 } n\leqslant -1,$$

$$\hat{H}^{-1}(G, A) = \mathrm{Ker}\,\hat{N}_G \quad \text{和} \quad \hat{H}_0(G, A) = \mathrm{Coker}\,\hat{N}_G.$$

对这些上同调群存在正合的上同调序列,它在两个方

向上都是无限的．G 模 A 称为上同调平凡的(cohomologically trivial)，如果 $\hat{H}^n(H,A)=0$ 对所有 n 及所有子群 $H\subseteq G$ 成立．模 A 是上同调平凡的，当且仅当存在一个 i，使得对每个子群 $H\subseteq G$ 有 $\hat{H}^i(H,A)=0$ 和 $\hat{H}^{i+1}(H,A)=0$．每个模 A 都是一个上同调平凡的模的子模或商模，从而允许用维数位移来提升和下降维数．特别地，维数位移能使我们对所有整数 n 定义 res 和 cores (但不能定义 inf)．对有限生成的 G 模 A，群 $\hat{H}^n(G,A)$ 是有限群．

群 $\hat{H}^n(G,A)$ 用 G 的阶相乘就被零化，且由限制所诱导的映射 $\hat{H}^n(G,A)\to\oplus_p\hat{H}^n(G_p,A)$ 是单射，其中 G_p 是 G 的 Sylow p 子群，见 **Sylow 子群**(Sylow subgroup)．涉及有限群上同调的许多问题都可用这种方法化为考虑 p 群的上同调．循环群的上同调具有周期 2，即 $\hat{H}^n(G,A)\simeq\hat{H}^{n+2}(G,A)$ 对所有 n 成立．

对任意整数 m 和 n 可定义映射

$$\hat{H}^n(G,A)\otimes\hat{H}^m(G,B)\to\hat{H}^{n+m}(G,A\otimes B)$$

(称为 $\cup$ 积 ($\cup$-product)，上积 (cup-product))，其中 A 和 B 的张量积被看成 G 模．在 A 是环及 G 的运算是自同构的特殊情形，$\cup$积就将 $\bigoplus_n\hat{H}^n(G,A)$ 变成分次环．$\cup$积的对偶定理(duality theorem for $\cup$-product) 断言，对每个可除 Abel 群 C 及每个 G 模 A，$\cup$积

$$\hat{H}^n(G,A)\otimes\hat{H}^{-n-1}(G,\mathrm{Hom}(A,C))\to\hat{H}^{-1}(G,C)$$

定义了 $\hat{H}^n(G,A)$ 和 $\mathrm{Hom}(\hat{H}^{-n-1}(G,\mathrm{Hom}(A,C)),\hat{H}^{-1}(G,C))$ 之间的一个群同构(见[2])．当 $n,m>0$ 时，对无限群也可定义 $\cup$ 积．

很多问题导致必须考虑拓扑群 G 的上同调，其中 G 连续地作用于一个拓扑模 A 上．特别地，若 G 是**副有限群** (pro-finite group) (这是最接近于有限群的情况)及 A 是离散 Abel 群且是连续 G 模，则可以考虑 G 的系数在 A 中的上同调群，它可用连续上链来计算([5])．这些群也可定义成为对于膨胀映射的极限 $\lim_{\to}H^n(G/U,A^U)$，其中 U 遍历 G 的全部开的正规子群．这个上同调有着有限群的上同调的所有通常的性质．如 G 是副 p 群，系数在 $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ 中的第一、第二上同调群在 $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ 上的维数可分别解释为 G 的生成元和关系的最小数目．

对于连续上同调的各种演算和某些别的类型的上同调群可参见[6]．对具有非 Abel 系数群的上同调可参见**非 Abel 上同调** (non Abelian cohomology)．

参考文献

[1] MacLane, S., Homology, Springer, 1963.

[2] Cartan, H. and Eilenberg, S., Homological algebra, Princeton Univ. Press, 1956.

[3] Cassels, J. W. S. and Fröhlich, A. (eds.), Algebraic number theory, Acad. Press, 1967.

[4] Serre, J.-P., Cohomologie Galoisienne, Springer, 1964.

[5] Koch, H., Galoische Theorie der p-Erweiterungen, Deutsch. Verlag Wissenschaft., 1970.

[6] Итоги Науки. Математика. Алгебра, 1964, M., 1966, 203-235.

Л. В. Кузьмин 撰

【补注】 范数映射 $N_{G/H}:A^H\to A^G$ 定义如下．令 $g_1,\cdots,g_k$ 是 G/H 在 G 中的代表集合，则 $N_{G/H}(a)=g_1a+\cdots+g_ka$ 在 A^G 中．一般谱序列中的超渡关系 (transgression relation) 的定义可参见**谱序列** (spectral sequence)；对群的上同调的特殊情形，对所有 $n>0$，它给出 $H^n(G,A)$ 和 $H^{n+1}(G/H,A^H)$ 间的一个关系，有时称为联络 (connection)，可参见[A1]，第 11 章第 9 段．

参考文献

[A1] Brown, K. S., Cohomology of groups, Springer, 1982.

石生明 译 许以超 校

Lie 代数的上同调 [**cohomology of Lie algebras; когомологии алгебр Ли**]

代数的上同调的一个特殊情形．令 $\mathfrak{G}$ 是一个有单位元的交换环 K 上的 Lie 代数，并且假设给定了一个左 $\mathfrak{G}$ 模 V，即给定了 $\mathfrak{G}$ 在 K 模 V 内的一个 K 线性表示．Lie 代数 $\mathfrak{G}$ 的值在模 V 内的 p 维上同调模就是模 $H^p(\mathfrak{G},V)=\mathrm{Ext}^p_{U\mathfrak{G}}(K,V)$，$p=0,1,\cdots$，这里 $U\mathfrak{G}$ 是 $\mathfrak{G}$ 的通用包络代数([3])．换句话说，对应 $V\mapsto H^p(\mathfrak{G},V)$ 是由 $\mathfrak{G}$ 模范畴到 K 模范畴的函子 $V\mapsto V^{\mathfrak{G}}$ 的 p 次右导出函子(derived functor)，这里 $V^{\mathfrak{G}}=\{v\in V: xv=0\ (x\in\mathfrak{G})\}$．函子 $V\mapsto H^*(\mathfrak{G},V)=\sum_{p\geqslant0}H^p(\mathfrak{G},V)$ 是一个**上同调函子**(homology functor)．

在小维数时，Lie 代数的上同调可作如下解释：模 $H^0(\mathfrak{G},V)$ 就是 $V^{\mathfrak{G}}$．如果 V' 和 V'' 都是 $\mathfrak{G}$ 模，则 $H^1(\mathfrak{G},\mathrm{Hom}_K(V'',V'))$ 可以等同于 $\mathfrak{G}$ 模 V'' 的具有核 V' 的扩张的等价类的集合．如果把 $\mathfrak{G}$ 看成关于伴随表示 ad (见 **Lie 群的伴随表示** (adjoint representation of a Lie group))的 $\mathfrak{G}$ 模，则 $H^1(\mathfrak{G},\mathfrak{G})$ 与一切导子的模(见**环中的导子** (derivation in a ring)) 关于内导子的子模的商模 $\mathrm{Der}\,\mathfrak{G}/\mathrm{ad}\,\mathfrak{G}$ 同构．如果 $\mathfrak{G}$ 是一个自由 K 模(例如，当 K 是一个域时)，则 $H^2(\mathfrak{G},V)$ 可以等同于 $\mathfrak{G}$ 的这样的扩张的等价类的集合，其扩张的核是带有 $\mathfrak{G}$ 的给定表示的交换 Lie 代数 V，模 $H^2(\mathfrak{G},\mathfrak{G})$ 也可以看作 Lie 代数 $\mathfrak{G}$ 的无穷小形变(deformation)的集合．

在 Lie 代数的上同调与结合代数的上同调之间存在以下关系：如果 $\mathfrak{G}$ 是一个自由 K 模而 V 是任意一个双边 $U\mathfrak{G}$ 模，则 $H^p(U\mathfrak{G},V)\cong H^p(\mathfrak{G},V)$，其中代数 $\mathfrak{G}$ 在 V 内的表示由公式 $(x,v)\mapsto xv-vx$ 来定义．

另一种定义 Lie 代数的上同调的方法 (见[6]，[14]) 是利用上链复形 $C^*(\mathfrak{G},V)=\sum_{p\geqslant0}C^p(\mathfrak{G},V)$，这里

$C^p(\mathfrak{G}, V)=C^p$是一切斜对称 p 线性映射 $\mathfrak{G}^p \to V$ 的模，带有上边缘$d: C^p \to C^{p+1}$，其作用为

$$(d\omega)(x_1, \ldots, x_{p+1}) =$$
$$=\sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i+1}x_i\omega(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{p+1})+$$
$$+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([x_i, x_j], x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_{p+1}),$$
$$\omega \in C^p;\ x_1, \ldots, x_{p+1} \in \mathfrak{G},$$

其中符号 ^ 表示将相应的变元去掉．如果 $\mathfrak{G}$ 是一个自由K模，那么这个复形的上同调模自然地与模 $H^p(\mathfrak{G}, V)$ 同构．对于每个子代数 $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$ 来说，有一个子复形 $C^*(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}; V) \subset C^*(\mathfrak{G}, V)$与之相关联，导致相对上同调(relative cohomology)

$$H^*(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}; V)=\sum_{p\geqslant 0}H^p(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}; V).$$

如果 V 是 K上一个代数，而 $\mathfrak{G}$ 通过导子作用在其上，那么在上同调模内产生一个自然乘法，使得$H^*(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}; V)$成为一个分次代数．

令 $\mathfrak{G}=\mathfrak{X}(M)$是一个微分流形 M 上的光滑向量场的($\mathbf{R}$上的)Lie 代数，$V=F(M)$是 M 上的光滑函数空间，带有自然的 $\mathfrak{G}$ 模结构．在$C^*(\mathfrak{X}(M), F(M))$里上边缘的定义形式上与一个微分形式的外微分的定义一致．更确切地说，de Rahm 复形(见**微分形式**(differential form))是由在 $F(M)$上是线性的上链所组成的$C^*(\mathfrak{X}(M), F(M))$的子复形．另一方面，如果 $\mathfrak{G}$ 是一个连通实 Lie 群 G 的 Lie 代数，那么复形 $C^*(\mathfrak{G}, \mathbf{R})$ 可以等同于 G 上左不变微分形式的复形．类似地，如果 $\mathfrak{H}$ 是对应于 G 的一个连通闭子群 H 的子代数，那么 $C^*(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}; \mathbf{R})$自然地与流形 G/H 上 G 不变微分形式的复形同构．特别地，如果 G 是紧的，那么由此得出分次代数的同构：

$$H^*(\mathfrak{G}, \mathbf{R}) \cong H^*(G, \mathbf{R});\ H^*(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}; \mathbf{R}) \cong H^*(G/H, \mathbf{R}).$$

$H^*(\mathfrak{G}, \mathbf{R})\cong H^*(G, \mathbf{R}); H^*(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}; \mathbf{R})\cong H^*(G/H, \mathbf{R})$.
正是这些事实提供了Lie 代数上同调定义的出发点．在此基础上，Lie 代数上同调理论的内容也应用到了主丛和齐次空间的上同调的研究上(见[8], [14])．

Lie 代数 $\mathfrak{G}$ 的系数在一个右 $\mathfrak{G}$ 模 V 内的同调以对偶的方式定义．p 维同调群是 K模 $H_p(\mathfrak{G}, V)=\mathrm{Tor}_p^{U\mathfrak{G}}(V, K)$．特别地，$H_0(\mathfrak{G}, V)=V/V\mathfrak{G}$，并且当 V是一个平凡 $\mathfrak{G}$模时，$H_1(\mathfrak{G}, V)\cong V\otimes_K\mathfrak{G}/[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$．

在计算 Lie 代数的上同调时，以下的谱序列被广泛地应用；它们也常称为 Hochschild-Serre 谱序列(Hochschild-Serre spectral sequences)．令 $\mathfrak{H}$ 是 $\mathfrak{G}$ 的一个理想而 V 是一个 $\mathfrak{G}$ 模．如果 $\mathfrak{H}$ 和 $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ 都是自由 K 模，则存在一个**谱序列**(spectral sequence) $\{E_r^{p,q}\}$，其中 $E_2^{p,q}=H^p(\mathfrak{G}/\mathfrak{H}, H^q(\mathfrak{H}, V))$，收敛于 $H^*(\mathfrak{G}, V)$(见[3], [14])．对于同调来说也存在类似的谱序列([3])．再者，令 $\mathfrak{G}$ 是一个特征为 0 的域 K上的有限维 Lie 代数，令 $\mathfrak{G}''\subset\mathfrak{G}'$ 是 $\mathfrak{G}$ 的子代数，使得 $\mathfrak{G}'$ 在 $\mathfrak{G}$ 内是约化的(见**约化 Lie 代数**(Lie algebra, reductive))，又令 V 是一个半单 $\mathfrak{G}$ 模，这时存在一个谱序列$\{F_r^{p,q}\}$，其中 $F_2^{p,q}=H^p(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}'; V)\otimes H^q(\mathfrak{G}', \mathfrak{G}''; K)$，收敛于 $H^*(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}''; V)$(见[12], [14])．

特征为 0 的域上的有限维约化(特别，半单)Lie 代数的上同调已经研究得很完满．如果 $\mathfrak{G}$ 是这样一个域上的有限维半单 Lie 代数，那么下列结果对于每一个有限维 $\mathfrak{G}$ 模 V成立：

$$H^1(\mathfrak{G}, V) = 0;\ H^2(\mathfrak{G}, V) = 0$$

(Whitehead 引理(Whitehead lemma))．第一个性质是有限维代数 $\mathfrak{G}$ 的半单性的一个充分条件，并且等价于一切有限维 $\mathfrak{G}$ 模的半单性．第二个性质与具有交换根的 Lie 代数的 Levi 定理等价(见 **Levi-Мальцев 分解**(Levi-Mal'tsev decomposition))([1], [5], [14])．如果 $\mathfrak{G}$ 是一个约化 Lie 代数，$\mathfrak{H}$ 是它的一个子代数，而 V 是一个有限维半单模，则 $H^*(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}; V)\cong H^*(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}; V^{\mathfrak{G}})$，这就把上同调的计算归结到平凡 $\mathfrak{G}$ 模 $V=K$ 的情形(见[5], [14])．一个约化 Lie 代数 $\mathfrak{G}$ 的上同调代数 $H^*(\mathfrak{G}, K)$ 自然地与在 ad 之下不变的上链的代数 $C^*(\mathfrak{G}, K)^{\mathfrak{G}}$ 同构．在这种情形下$H^*(\mathfrak{G}, K)$是一个 Hopf 代数，因而是本原元素的空间 $P_{\mathfrak{G}}$上的一个外代数，按奇数次 $2m_i-1(i=1, \cdots, r)$分次．特别地，$\dim H^1(\mathfrak{G}, K)=\dim P_{\mathfrak{G}}^1$是 $\mathfrak{G}$ 的中心的维数，而 $P_{\mathfrak{G}}^3$ 则与$\mathfrak{G}$上不变二次型的空间同构(见[12], [14])．如果 K是代数闭的，则 r 是代数 $\mathfrak{G}$ 的秩，即它的 Cartan 子代数 $\mathfrak{A}$ 的维数，而m_i 是 $\mathfrak{G}$上在 ad 之下不变的多项式代数(或 $\mathfrak{A}$ 上在 Weyl 群之上不变的多项式代数，这两个代数是同构的)的自由生成元的次数．在这种情形下，数 $2m_i-1$ 是对应的紧 Lie 群的本原上同调类的维数．数 m_i-1 称为 Lie 代数 $\mathfrak{G}$ 的指数(exponents)．一个特征为 0 的域上的约化 Lie 代数 $\mathfrak{G}$ 的同调代数 $H_*(\mathfrak{G}, K)$ 是对偶于$H^*(\mathfrak{G}, K)$的外代数．对于任何 n 维 Lie 代数 $\mathfrak{G}$ 来说，类似于 Poincaré 对偶性的性质成立：

$$H^p(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}; K) \cong H_{n-m-p}(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}; K),$$

其中 $0\leqslant p\leqslant n-m$，而 $\mathfrak{H}$ 是 $\mathfrak{G}$ 的任意一个 m 维约化子代数(见[14], [16])．

关于可解 Lie 代数的上同调只知道少数几个一般性的论断．例如，令 $\mathfrak{G}$ 是一个无限域上的有限维幂零 Lie 代数，V是一个有限维 $\mathfrak{G}$ 模．如果V没有平凡的 $\mathfrak{G}$ 子模，则对于一切p来说$H^p(\mathfrak{G}, V)=0$，如果有这样一个 $\mathfrak{G}$

子模，则对于 $p=0,\cdots,n=\dim\mathfrak{G}$ 来说，$H^p(\mathfrak{G},V)\neq 0$，且对于 $1\leqslant p\leqslant n-1$ 来说，$H^p(\mathfrak{G},K)\geqslant 2$（见[7]）. 在 $\mathfrak{N}$ 是一个特征为 0 的代数闭域上的某一个半单 Lie 代数 $\mathfrak{G}$ 的抛物子代数 $\mathfrak{P}$ 的幂零根，而 $\mathfrak{N}$ 在 V 内的表示是 $\mathfrak{G}$ 在 V 内的某个表示的限制的情形下，群 $H^p(\mathfrak{N},V)$ 被很好地研究过（见[11]）. 这些上同调群与对应于 $\mathfrak{G}\supset\mathfrak{P}$ 的复齐次空间 G/P 的、其值在 G/P 上的齐次向量丛的全纯截面的芽层内的上同调群有密切关系. 在计算特征为 0 的域上有限维非半单 Lie 代数的上同调时，用到以下公式：

$$H^*(\mathfrak{G},V)\cong H^*(\mathfrak{G}/\mathfrak{H},K)\otimes H^*(\mathfrak{H},V)^{\mathfrak{G}},$$

这里 $\mathfrak{H}$ 是 $\mathfrak{G}$ 的一个理想，使得 $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ 是半单的([14]).

在某些情形下，Lie 代数的上同调与**群的上同调**(cohomology of groups) 之间可以建立一个联系. 令 G 是一个连通实 Lie 群，K 是它的一个极大紧子群，令 $\mathfrak{G}\supset\mathfrak{K}$ 是它们的 Lie 代数，又令 V 是一个有限维光滑 G 模. 如果在 V 上定义了一个自然的 $\mathfrak{G}$ 模结构，则上同调 $H^*(\mathfrak{G},\mathfrak{K};V)$ 同构于群 G（作为一个抽象群）通过连续上链来计算的上同调([10]). 另一方面，令 $\mathfrak{G}$ 是一个单连通可解 Lie 群 G 的 Lie 代数，Γ 是 G 内一个格，而 $\rho: G\rightarrow \mathrm{GL}(V)$ 是一个光滑的有限维线性表示. 如果 $\rho(\Gamma)\times\mathrm{Ad}\,\Gamma$ 在 $\rho(G)\times\mathrm{Ad}\,G$ 的代数闭包内是 Zariski 稠密的，那么 $H^*(\mathfrak{G},V)\cong H^*(\Gamma,V)$（见[4]）. 一般地，$\dim H^p(\Gamma,V)\geqslant\dim H^p(\mathfrak{G},V)(p=0,1,\cdots)$. 对于幂零的 $\mathfrak{G}$，只需要求 ρ 是幂么的. 如果在一个单连通 Lie 群 G 内的格 Γ 具有性质：$\mathrm{Ad}\,\Gamma$ 在群 $\mathrm{Ad}\,G$ 的代数闭包内是稠密的（例如，G 是幂零群），那么 $H^*(\mathfrak{G},\mathbf{R})\cong H(G/\Gamma,\mathbf{R})$.

近年来对于某些无限维 Lie 代数的上同调已有一些系统的研究. 这些 Lie 代数包括一个微分流形 M 上向量场的代数 $\mathfrak{X}(M)$，形式向量场的 Lie 代数，这些代数中由无梯度的、Hamrilton 的或典范向量场所组成的子代数（见[2]，[13]），以及某些典型 Banach Lie 代数.

参考文献

[1] Jacobson, N., Lie algebras, Interscience, 1962 (中译本: N. 贾柯勃逊，李代数，上海科学技术出版社，1964).

[2] Fuchs, D. B. [D. B. Fuks], Cohomology of infinite-dimensional Lie algebras, Plenum Press, 1986 (译自俄文).

[3] Cartan, H. and Eilenberg, S., Homological algebra, Princeton Univ. Press, 1956.

[4] Ragunathan, M., Discrete subgroups of Lie groups, Springer, 1972.

[5] Théorie les algèbres de Lie, Topologie des groupes de Lie, in *Sem. S. Lie*, Vol. le année 1954/5, 1955.

[6] Chevalley, C. and Eilenberg, S., Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **63** (1948), 85 - 124.

[7] Dixmier, J., Cohomologie des algèbres de Lie nilpotents, *Acta Sci. Mat. Szeged*, **16** (1955), 3 - 4, 246 - 250.

[8] Greub, W., Halperin, S. and Vanstone, R., Connections, curvature and cohomology, Cohomology of principal bundles and homogeneous spaces, 3, Acad. Press, 1975.

[9] Harpe, P. de la, Classical Banach - Lie algebras and Banach - Lie groups of operators in Hilbert spaces, Springer, 1972.

[10] Hochschild, G. and Mostow, G. D., Cohomology of Lie groups, *Ill. J. Math.*, **6** (1962), 3, 367 - 401.

[11] Kostant, B., Lie algebra cohomology and the generalized Borel - Weil theorem, *Ann. Math.*, **74** (1961), 2, 329 - 387.

[12] Koszul, J. L., Homologie et cohomologie des algèbres de Lie, *Bull. Soc. Math. France*, **78** (1950), 65 - 127.

[13] Lichnerowicz, A., Cohomologie 1 - différentiables des algèbres de Lie attaché à une variété symplectique ou de contact, *J. Math. Pures Appl.*, **53** (1974), 4, 459 - 483.

[14] Verona, A., Introducere in coomologia algebrelor Lie, Bucharest, 1974.

[15] Guichardet, A., Cohomologie des groupes topologiques et des algèbres de Lie, F. Nathan, 1980.

А. Л. Онищик 撰

【补注】 相对上链子复形 $C^*(\mathfrak{G},\mathfrak{H};V)$ 是由 $C^q(\mathfrak{G},\mathfrak{H}:V)=\{f\in C^q(\mathfrak{G},V): f(g_1,\cdots,g_q)=0$ 且 $df(g_1,\cdots,g_q)=0$，若 $g_1\in\mathfrak{H}\}$ 定义的. 等价地，$C^q(\mathfrak{G},\mathfrak{H};V)=\mathrm{Hom}_{\mathfrak{H}}(\Lambda^q(\mathfrak{G}/\mathfrak{H}),V)$.

Poincaré 对偶性结果有一推广如下. 令 $\mathfrak{G}$ 是 K 上有限维自由 Lie 代数. 对于一个 $\mathfrak{G}$ 模 M，令 $M^*=\mathrm{Hom}(M,K)$ 是对偶 Lie 模，由 $\langle uf, m\rangle=\langle f, um\rangle$ $(f\in M^*, m\in M, u\in\mathfrak{G})$ 来定义，又令 M^{tw} 是在基础 K 模 M 上将 $\mathfrak{G}$ 的作用换成 $u\mapsto\rho(u)-\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\,u)\in\mathrm{End}_K(M)$ 所得到的 $\mathfrak{G}$ 模，这里 ρ 是 $\mathfrak{G}$ 在 M 上的作用. 那么存在一个 K 模的典范同构([A1])

$$H^s(\mathfrak{G},(M^{tw})^*)\xrightarrow{\sim}(H^{n-s}(\mathfrak{G},M))^*,$$

这里 $n=\dim_K\mathfrak{G}$. 注意：如果 $\mathfrak{G}$ 是半单的，则 $M^{tw}=M$.

参考文献

[A1] Hazewinkel, M., A duality theorem for the cohomology of Lie algebras, *Math. USSR - Sb.*, **12** (1970), 638 - 644.

郝钢新 译

上同调运算 [cohomology operation; когомологическая операция]

上同调函子到另一上同调函子（经常是到自身）的一个自然变换. 设 n, m 为整数，π, G 为 Abel 群，则 $(n,m;\pi,G)$ 型上同调运算 (cohomology operation of type $(n,m;\pi,G)$) 是对任何空间 X 均有定义的上同调群之间的映射（不必为同态）族 θ_X: $H^n(X;\pi)\rightarrow H^m(X,G)$,

使得对任意连续映射 $f: X \to Y$ 均有 $\theta_X \circ f^* = f^* \circ \theta_Y$（自然性）. 所有 $(n, m; \pi, G)$ 型上同调运算的集合关于复合 $(\theta+\psi)_X = \theta_X + \psi_X$ 构成一个 Abel 群, 记为 $O(n, m; \pi, G)$.

上同调运算的例. **Steenrod 约化幂** (Steenrod reduced power) Sq^i 和 $\mathscr{P}^i$; **Понтрягин 平方** (Pontryagin square) $\mathscr{P}_1$; **Постников 平方** (Postnikov square); 升 k 次幂运算 μ_k: $\mu_k \in O(s, ks; \pi, \pi)$. 对 $x \in H^s(X; \pi)$, 其中 π 为环, $\mu_k(x) = x^k$; Bockstein 同态 β; 由系数群之间的同态 $\pi \to G$ 诱导的上同调运算, 例如 mod p: $H^n(X) \to H^n(X; \mathbf{Z}_p)$.

上同调运算为上同调函子提供了一个附加结构, 因此用它们可解决同伦拓扑中若干在上同调群的"水平"上所不能解决的问题. 例. 1) 设 X 和 Y 为两个空间, $x \in H^n(X; \pi)$, $y \in H^n(Y; \pi)$ 为两个元素. 是否存在映射 $f: X \to Y$ 使 $f^*(y) = x$ 呢? 不存在这种 f 的第一个充分条件是使 $g(y) = x$ 的同态 $g: H^*(Y; \pi) \to H^*(X; \pi)$ 不存在. (用这个方法我们可以证明, 例如, 关于不动点的 **Brouwer 定理** (Brouwer theorem). 如果 g 存在, 亦可按如下方式证明 f 不存在: 设 θ 是上同调运算, $\theta \in O(n, m; \pi, G)$ 使 $\theta_Y(y) = 0$, $\theta_X(x) \neq 0$, 则 $0 \neq \theta_X(x) = \theta_X(f^*(y)) = f^*(\theta_Y(y)) = f^*(0) = 0$, 这不可能. 2) 映射 $f: S^m \to S^n$ 是本质的吗? 令 $C_f = S^n \bigcup f e^m$, 则 (对 $m \neq n$) 有 $H^{m+1}(C_f; G) = G$, $H^n(C_f; \pi) = \pi$. 若存在上同调运算 $\theta \in O(n, m+1; \pi, G)$ 使 $\theta_{C_f} \neq 0$, 则 f 为本质的. 此时称运算 θ 侦出(detect) 映射 f 或元素 $[f] \in \pi_m(S^n)$.

存在着群同构 $O(n, m; \pi, G) \approx H^m(K(\pi, n); G)$, 其中 $K(\pi, n)$ 为 **Eilenberg - MacLane 空间** (Eilenberg-MacLane space), 因此 $O(n, m; \pi, G) \approx [K(\pi, n), K(G, m)]$ (见**可表示函子** (representable functor)). 群 $H^m(K(\pi, n); G)$ 对所有 n, m 及有限生成的 π, G 均已算出 ([9]).

上同调运算 $\theta \in O(n, m; \pi, G)$ 的上同调纬垂 (cohomology suspension) ${}^1\theta \in O(n-1, m-1; \pi, G)$ 是由复合

$$H^{n-1}(X; \pi) \to H^n(SX; \pi) \xrightarrow{\theta_{SX}} H^m(SX; G)$$

$$\to H^{m-1}(X; G)$$

给出的映射 ${}^1\theta_X$, 其中 SX 为 X 的**纬垂** (Suspension). 例如, ${}^1\mu_k = 0$, ${}^1Sq^i = Sq^i$, ${}^1\mathscr{P}^i = \mathscr{P}^i$. 当 $m \leqslant 2n-1$ 时, $\theta \to {}^1\theta$ 为同构. ${}^1\theta_X$ 对任意的 X 均为群同态.

k 次 (π, G) 型稳定上同调运算 (stable cohomology operation of type (π, G)) 是指满足 $\theta_n \in O(n, n+k; \pi, G)$ 及 ${}^1\theta_n = \theta_{n-1}$ 的集合 $\{\theta_n\}_{-\infty}^{+\infty}$. 这样的上同调运算构成一个 Abel 群 $O_s(k; \pi, G)$, 它同构于群 $\lim_{\leftarrow n} H^{n+k}(K(\pi, n); G)$, 后者是序列

$$\cdots \leftarrow H^{n+k}(K(\pi, n); G) \leftarrow$$

$$\leftarrow H^{n+k-1}(K(\pi, n-1); G) \leftarrow \cdots$$

的逆向极限. 群 $\oplus_k O_S(k; \pi, G)$ 记为 $O_S(\pi, G)$.

稳定上同调运算的例. Steenrod 幂 $Sq^i \in O_S(i; \mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_2)$ 和 $\mathscr{P}^i \in O_S(2(p-1)i; \mathbf{Z}_p, \mathbf{Z}_p)$ (其中 $p > 2$ 为素数), 以及 Bockstein 同态 $\beta \in O_S(1; \mathbf{Z}_m, \mathbf{Z}_m)$.

若 $\theta \in O(n, m; \pi, G)$, $\varphi \in O(m, l; G, \tau)$, 则可定义上同调运算 $\varphi \circ \theta \in O(n, l; G, \tau)$. 特别地, 可定义任意两个稳定上同调运算 $\theta \in O_S(\pi, G)$ 和 $\varphi \in O_S(G, \tau)$ 的复合 $\varphi \circ \theta \in O_S(\pi, \tau)$, 使群 $O_S(\pi, \pi)$ 是一个环; $O_S(\mathbf{Z}_p, \mathbf{Z}_p)$ 称为 **Steenrod 代数** (Steenrod algebra) A_p.

上同调运算最初被用来解决 $(n+1)$ 维多面体到 n 维球面的映射分类问题 ($n=2$ 见[1], $n>2$ 见[2]). 分类定理 (classification theorem) ([2]): 存在群正合序列

$$0 \to \mathrm{Coker}(Sq^2: H^{n-1}(X; \mathbf{Z}_2) \to H^{n+1}(X; \mathbf{Z}_2)) \to$$

$$[X, S^n] \to \ker \left[H^n(X) \xrightarrow{\mathrm{mod} 2} H^n(X; \mathbf{Z}_2) \xrightarrow{Sq^2} \right.$$

$$\left. \to H^{n+2}(X; \mathbf{Z}_2) \right] \to 0.$$

扩张定理 (extension theorem) ([2]): 设 Y 为 $(n+2)$ 维多面体, Y^{n+1} 为其 $(n+1)$ 维骨架. 映射 $f: Y^{n+1} \to S^n$ 定义了元素 $y = f^*(s) \in H^n(Y^{n+1})$, 其中 $s \in H^n(S^n)$ 为一生成元. 映射 f 可以扩张为映射 $g: Y \to S^n$, 当且仅当 $Sq^2(z \bmod 2) = 0$, 其中对于包含映射 $j: Y^{n+1} \to Y$ 有 $j^*(z) = y$.

相应于上同调运算 $\theta \in O(n, m; \pi, G)$, 映射 θ: $K(\pi, n) \to K(G, m)$, 从标准的 **Serre 纤维化** (Serre fibration)

$$K(G, m-1) \to PK(G, m) \to K(G, m)$$

诱导出纤维化

$$F = K(G, m-1) \xrightarrow{i} E(\theta) \xrightarrow{p} K(\pi, n) = B.$$

二阶上同调运算 (secondary cohomology operation) 是空间 $E(\theta)$ 的上同调类. 更精确地讲, 取定 $\varphi \in H^q(E(\theta); H)$, 其中 H 为 Abel 群. 对任意使 $\theta_X(u) = 0$ 的 $u \in H^n(X, \pi)$ 存在元素 $\tilde{u} \in [X, E(\theta)]$, 使得 $p_\#(\tilde{u}) = u$, 这里 $p_\#: [X, E(\theta)] \to [X, B]$ 为由 p 诱导的映射; 元素 $v = \varphi \circ \tilde{u} = \tilde{u}^*(\varphi) \in H^q(X; H)$ 依赖于元素 $\tilde{u}$ 的选取. 但是 $\tilde{u}$ 选取的任意性决定于逆象 $p^{-1}(u)$, 即群 $[X, F] = H^{m-1}(X; G)$ 在集合 $[X, E(\theta)]$ 上作用的轨道. 当 $m < 2n-1$ 且 $q < 2n-1$ 时, $i_\#$ 和 $\varphi_\#$ 均为群同态, 于是 $\tilde{u}$ 的不同选取仅使 v 被群 $H^q(X; H)$ 的子群 $\mathrm{Im}(i^*(\varphi)$: $H^{m-1}(X; G) \to H^q(X; H)) = Q$ 中的某个元素所改变. 以 $\Phi_X(u) = v + Q$ (陪集 $v+Q$ 由元素 u 唯一决定) 来定义二阶上同调运算 Φ. 因此映射 Φ 定义在子群 $\mathrm{Ker}\, \theta_X$ 上, 取

值于商空间 $H^q(X;H)/Q$. 其中 Q 称为上同调运算 Φ 的不定集 (indeterminacy of the cohomology operation). 另一种说法是 Φ 为 $H^n(\cdot;\pi)$ 到 $H^q(\cdot;H)$ 的偏多值上同调运算 (partial multivalued cohomology operation).

二阶上同调运算在下述意义下是自然的: 对任意 $f: Y\to X$ 及任意 $u\in\mathrm{Ker}\,\theta\subset H^n(X;\pi)$, 有 $f^*(\Phi_X(u))\subset\Phi_Y(f^*(u))$([3]). 若 $i^*(\varphi)=0$, 则对某 $\theta'\in H^q(B;H)$ 有 $\varphi=p^*(\theta')$, 于是 $\bar{u}^*(\varphi)=\theta'(u)$. 因此 $\Phi u=u^*(\theta')=\theta'(u)$ 具有零不定集. 若 θ'' 为 $H^q(B;H)$ 中满足 $p^*(\theta'')=\varphi$ 的任意上同调运算, $u\in\mathrm{Ker}\,\theta$, 则有 $\theta'(u)=\theta''(u)$, 于是上同调运算 Φ 为单值上同调运算 θ' 在 $\mathrm{Ker}\,\theta$ 上的限制.

每个二阶上同调运算均对应着通常的(一阶(primary))上同调运算间的一个关系. 若 $q<2m-1$, 则上同调运算 $i^*(\varphi)\in H^q(K(G,m-1);H)$ 可唯一地表成 $^1\psi$ 的形式, 其中 $\psi\in H^{q+1}(K(G,m+1);H)$ 满足 $\psi\circ\theta=0$. 若 $\varphi'\in H^q(E(\theta);H)$ 满足 $i^*(\varphi-\varphi')=0$, 则相应于上同调运算 φ' 有相同的关系 $\psi\circ\theta=0$. 反之, 相应于形如 $\psi\circ\theta=0$ 的任何关系, 均有二阶上同调运算的集合 $\{\Phi\}$, 其中任意两个之间彼此相差一个定义在 θ 的核上的一阶上同调运算.

二阶上同调运算更一般的概念可由集合 $\theta=(\theta_1,\cdots,\theta_n)$, 其中 $\theta_i\in H^{m_i}(K(\pi,n);G)$, 及关系 $\sum\psi_i\circ\theta_i=0$ 出发得到(见[3]).

二阶上同调运算的例. 设

$$\theta=Sq^2\circ\mathrm{mod}\,2: H^n(\cdot;\mathbf{Z})\to H^{n+2}(\cdot;\mathbf{Z}_2)$$

并设 $\varphi\in H^{n+3}(E(\theta);\mathbf{Z}_2)$ 为 $\mathbf{Z}_2$ 生成元. 由此可给出对应于关系 $Sq^2\circ(Sq^2\circ\mathrm{mod}\,2)=0$ 的二阶上同调运算 $\alpha: H^n(\cdot;\mathbf{Z}_2)\to H^{n+3}(\cdot;\mathbf{Z}_2)$. 这使得我们能够给出 $(n+2)$ 维多面体到 n 维球面的映射分类, $n>2$. 相应的扩张问题的解答如下. 设 Y 为 $(n+3)$ 维多面体, 给定映射 $f: Y^{n+1}\to S^n$, 从而有元素 $y\in H^n(Y^{n+1})$, $y\in f^*(s)$, 则 $Sq^2(y\bmod 2)=0$ 是 f 可扩张到 Y^{n+2} 上的一个必要条件; 若 f 可扩张到 Y^{n+2} 上, 则 α 在 y 上有定义. 由此 f 可扩张到 Y 上当且仅当 $0\in\alpha(y)$. 而且 α 侦出映射 $S^{n+2}\to S^{n+1}\to S^n$, 它是 Hopf 映射 $S^3\to S^2$ 的同纬映象的复合, 并给出了群 $\pi_{n+2}(S^n)=\mathbf{Z}_2$ 的一个生成元.

(关于 Hopf 不变量为 1 的元的存在性的)"Hopf 不变量问题"的解决最初也借助了二阶上同调运算([7]). 对映射 $f: S^{2n-1}\to S^n$, Hopf 不变量(Hopf invariant) $H(f)\in\mathbf{Z}$ 由公式 $u^2=H(f)v$ 给出, 其中 $v\in H^{2n}(S^n\cup fe^{2n})=\mathbf{Z}$, $u\in H^n(S^n\cup fe^{2n})=\mathbf{Z}$ 为生成元. $H(f)$ 为奇数等价于条件 $Sq^nu_n\neq0$, 其中 $u_n\in H^n(S^n\cup fe^{2n};\mathbf{Z}_2)=\mathbf{Z}_2$. 当 $n\neq2^s$ 时, 运算 Sq^n 在一阶运算类中可分解, 即 $Sq^n=\sum_{i<n}a_iSq^i$, 于是仅当 $n=2^s$ 时 $H(f)$ 方能为奇数. 但是在二阶运算类中, 只要 $s\neq1,2,3$, 则 Sq^{2^s} 可分解, 于是仅当 $n=2,4,8$ 时 $H(f)$ 方能为奇数.

除了二阶上同调运算外, 还有三阶, 甚至更为一般地, 任意高阶的上同调运算. 对应于一阶上同调运算 θ 及用来定义二阶上同调运算 Φ 的元素 $\varphi\in H^q(E(\theta);H)$, 存在映射 $E(\theta)\to K(H;q)$, 它由 $K(H;q)$ 上的 Serre 纤维化诱导出纤维化 $K(H,q-1)\to E(\Phi)\to E(\theta)$; $E(\Phi)$ 称为上同调运算 Φ 的空间 (space of the cohomology operation). 如果给出上同调类 $\gamma\in H^r(E(\Phi);A)$, 则可构造一个定义在 $\mathrm{Ker}\,\Phi$ 上的三阶上同调运算 (tertiary cohomology operation) $\Gamma: H^n(X;\pi)\to H^r(X;A)$, 其不定集为 $\mathrm{Im}(i^*(\gamma))$ (在维数的适当限制下). 对应于这个上同调运算的是关系 $\psi\circ\Phi=0$, 其中 ψ 为一阶上同调运算, $I_\psi=i^*(\gamma)$. 归纳地进行这一过程就得到 n 阶上同调运算 (n-th order cohomology operation) 的定义. 换言之, 给定 n 阶上同调运算 ξ, 其空间为 $E(\xi)$, 并给定元素 $\lambda\in H^r(E(\xi);C)$, 可构造定义在 $\mathrm{Ker}\,\xi$ 上的 $(n+1)$ 阶上同调运算 Λ. 此外, 空间 $E(\Lambda)$ 是由映射 $\lambda: E(\xi)\to K(C,s)$ 从 $K(C,s)$ 上的 Serre 纤维化诱导的纤维化的空间. [12] 中给出了高阶上同调运算的公理系统.

高阶上同调运算最简单的例子是高阶 Bockstein 同态 (Bockstein homomorphism). 设给定群的短正合序列

$$0\to\mathbf{Z}\xrightarrow{p}\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}_p\to0,$$

则相应的正合序列为

$$\cdots\to H^n(X)\xrightarrow{p}H^n(X)\xrightarrow{\mathrm{mod}\,p}H^n(X;\mathbf{Z}_p)\xrightarrow{\delta}$$

$$H^{n+1}(X)\to\cdots$$

同态 $\beta=\mathrm{mod}\,p\circ\delta: H^n(X;\mathbf{Z}_p)\to H^{n+1}(X;\mathbf{Z}_p)$ 亦为 Bockstein 同态; $\beta\in O_S(1;\mathbf{Z}_p,\mathbf{Z}_p)$. 公式 $\beta\circ\beta=0$ 成立; 对应于这一关系有二阶上同调运算 β_2. 进一步有 $\beta\circ\beta_2=0$, 于是有三阶上同调运算 β_3. 更一般地, β_r 为由关系 $\beta\circ\beta_{r-1}=0$ 构造出的 r 阶上同调运算. β_r 定义在 $\mathrm{Ker}\,\beta_{r-1}$ 上. 按如下方式可以给出 β_r 的一个具体描述: 设 $x\in H^n(X;\mathbf{Z}_p)$, c 为代表 x 的系数取自 $\mathbf{Z}_p$ 的上闭链, 则等式 $\beta_{r-1}x=0$ 蕴含存在上闭链 c 的整数代表元 z, 使其上边缘 δz 被 p^r 整除. β_rx 为上闭链 $\delta z/p^r$ 的 mod p 上同调类. 因此关于高阶 Bockstein 上同调运算在群 $H^*(X;\mathbf{Z}_p)$ 上的作用的信息, 能使我们计算群 $H^*(X;\mathbf{Z})$ 的自由部分以及 p 分支.

每个偏上同调运算 Φ 均对应于一个同伦地简单空间 $E(\Phi)$, 它具有有限个(非平凡)同伦群. 反之, 对每个这样的空间 E, 均有上同调运算 Φ, 使得 E 与 $E(\Phi)$ 弱同伦等价, $E\sim^*E(\Phi)$. 例如, 若空间 E 有两个非平凡的同伦群 $\pi_n(E)=\pi$, $\pi_m(E)=G\ (m>n)$, 则有映射 $E\to K(\pi,n)$ 诱导出同构 $\pi_n(E)\to\pi_n(K(\pi,n))$. 这个映射可转换为以 $K(G,m)$ 为纤维的纤维化; 该纤维化由 $K(G,$

$m+1$)上的 Serre 纤维化通过某映射 $K(\pi, n) \to K(G, m+1)$ 诱导出来;后者定义了一个上同调运算 $\theta \in O(n, m+1; \pi, G)$.

这些考虑可使我们通过赋予任意空间称为其第 n 个 Постников 因子(见 **Постников 系统** (Postnikov system)) 的一系列高阶上同调运算 $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ 来描述该空间的弱同伦型. 例如对于球面 S^n $(n>3)$, 第一个 Постников 因子为 Sq^2, 第二个为 α.

另一类重要的上同调运算是泛函上同调函数运算(functional cohomology operation) ([3]). 为定义它们,给定映射("函数")$f: Y \to X$ 及上同调运算 $\theta \in O(n, m; \pi, G)$.当 $m \leqslant 2n-2$ 时,θ 在上同调同纬映象的象内,而且为群同态.若 f 为闭的嵌入 (上纤维化)而 $j: X \to (X, Y)$ 为包含映射,则泛函上同调运算 $\theta_f: H^n(X;\pi) \to H^{m-1}(Y;G)$ 定义为偏多值映射 $\theta_f = \delta^{-1} \circ \theta \circ (j^*)^{-1}$:

$$\theta_f: H^n(X;\pi) \xleftarrow{j^*} H^n(X, Y;\pi) \xrightarrow{\theta(X,Y)} H^m(X, Y; G) \xleftarrow{\delta} H^{m-1}(Y; G);$$

这一上同调运算定义在 $H^n(X;\pi)$的子群 $\operatorname{Ker} f^* \cap \operatorname{Ker} \theta_X$ 上,其不定集为 $H^{m-1}(Y; G)$ 的子群 $\operatorname{Im}({}^1\theta_Y) + \operatorname{Im}(f^*)$. 函数上同调运算的构造对 f 是自然的.例.若对映射 $f: Y \to X$, 存在 (一阶)上同调运算 θ 及空间 X 的上同调类 u, 使得 $\theta_f(u)$ 有定义且 $0 \notin \theta_f(u)$, 则 f 为本质的. 泛函上同调运算和二阶上同调运算由 Peterson - Stein 公式相互关联(见[3]).这使得我们在许多情形可将二阶上同调运算的计算转化为一阶上同调运算和泛函上同调运算的计算.也存在高阶泛函上同调运算([6]). Massey 积 (Massey product)在结构和应用上均与高阶上同调运算相似.

上同调运算的概念已被移到**广义上同调论**(generalized cohomology theory)中. 广义上同调论 h^* 中的一个(关于 X 自然的)变换 $h^n(X) \to h^m(X)$ 称为 (n, m) 型的上同调运算. 这些关于群的上同调运算同构于群 $h^m(M_n)$,其中 $\{M_k, s_k\}$为理论 h^* 的 Ω 谱代表.所有稳定上同调运算的群(关于复合运算)是一个环 A^h, 于是 h^* 是对 X 自然的一个 A^h 模.在广义上同调论中亦有类似的偏上同调运算和泛函上同调运算的概念.

原则上讲,在普通上同调论中借助偏上同调运算,可以解决任何同伦问题;然而, $n>3$ 阶的上同调运算的具体应用极为困难.与此同时,经常有这样的情形:一个问题的解决需要用到高阶普通上同调运算,而用适当选择的广义上同调论中的一阶上同调运算却可以很容易地解决.例如,"Hopf 不变量问题"就可用 K 理论中的 Adams 一阶上同调运算 ψ^k 容易地解决 ([10]). 在[8]中为解决球面向量场问题而引进的这些上同调运算是广义上同调论中的上同调运算的最初例子.

对 $h=U$, 即酉配边(cobordism)论,代数 A^h 已被算出([4]),并被用于 Adams 型谱序列的构造中,它的第一项就是代数 A^U 的上同调空间.有关环 A^h 在群 $h^*(X)$ 上作用的信息,在理论 h^* 的 Atiyah - Hirzebruch 谱序列的计算中被证明是有用的([11]).

参考文献

[1] Понтрягин, Л. С.,《Матем. сб.》, 9(1941), 331－363.

[2] Steenrod, N., Products of cocycles and extensions of mappings, *Ann. of Math.*, **48**(194), 290－320.

[3] Mosher, R. and Tangora, M., Cohomology operations and applications in homotopy theory, Harper & Row, 1968.

[4] Новиков, С. П.,《Изв. АН СССР Сер матем.》, **31** (1967), 4, 855－951.

[5] Steenrod, N., Cohomology operations and obstructions to extending continuous functions, in Colloquium Lectures, Princeton Univ. Press, 1957.

[6] Peterson, F. P., Functional cohomology operations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **86**(1957), 197－211.

[7] Adams, J. F., On the non-existence of elements of Hopf invariant one, *Ann. of Math.*, (2), **72** (1960), 20－104.

[8] Adams, J. F., Vector fields on spheres, *Ann. of Math.*, **75**(1962), 603－632.

[9] Cartan, H., Algèbres d·Eilenberg - MacLane et homotopie, in *Sém. H. Cartan*, Vol. 7, (1954 / 1955).

[10] Atiyah, M. F., *K*-theory, Benjamin, 1967.

[11A] Бухштабер, В. М.,《Матем. сб.》, **78** (1969), 307－320.

[11B] Бухштабер, В. М.,《Матем. сб.》, **83**(1974), 61－76.

[12] Maunder, C. R. F., Cohomology operations of the N-th kind, *Proc. London Math. Soc.*, **13**(1963), 125－154.

Ю. Б. Рудяк 撰

【补注】 在[4]中引进的谱序列, 常称为 Adams - Новиков 谱序列 (Adams - Novikov spectral sequence), 是大量后继工作的基础, 见[A1].

若象通常那样以 E^* 记由谱 E 定义的广义上同调论,则 E^* 的稳定上同调运算环为 $E^*(E)$. $E^*(E)$在 $E^*(X)$ 上的作用,是由 $g: E \to E$ 及 $f: X \to E$ 变为 $g \circ f: X \to E$ 来定义的.事实上环 $E^*(E)$ 具有一个**Hopf 代数**(Hopf algebra) 结构.对偶 Hopf 代数 $E_*(E)$也是一个极有用的等效对象,而且事实上,有时从技术上讲更容易处理([A4], [A5]).有关细节及 $E^*(E)$和 $E_*(E)$ 的 Hopf 代数结构的定义,见**广义上同调论** (generalized cohomology theory).对复协边 MU^*(或 U^*)及 Brown - Peterson 上同调 BP^*, 由 MU 和 BP 定义的形式群律,可以阐述 Hopf 代数 $MU^*(MU)$ 及 $BP^*(BP)$, 见[A1], [A6].

参考文献

[A1] Ravenei, D. C., Complex cobordism and stable homotopy groups of spheres, Acad. Press, 1986.

[A2] Spanier, E. H., Algebraic topology, McGraw - Hill,

1966 (中译本: E. H. 斯潘尼尔、代数拓扑学, 上海科学技术出版社, 1987).
[A3] Steenrod, N. E. and Epstein, D. B. A., Cohomology operations, Princeton Univ. Press, 1962.
[A4] Switzer, R., Algebraic topology - homotopy and homology, Springer, 1975, Chapts. 17; 18.
[A5] Adams, J. F., Stable homotopy and generalized homology, Univ. Chicago Press, 1974.
[A6] Landweber, P. S., BP$_*$(BP) and typical formal groups, *Osaka J. Math.*, 12(1975), 499–506.

李贵松 译 沈信耀 校

上同调环 [cohomology ring; когомологий кольцо]

一种环,其加法群是分次上同调群

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} H^n(X, A),$$

其中 X 是链复形, A 是系数群, 乘法由下述映射的线性集定义:

$$\nu_{m,n}: H^m(X, A)\otimes H^n(X, A) \to H^{m+n}(X, A),$$

对所有 $m, n \geq 0$, 它是内上同调乘法(杯积). 上同调环有分次环的结构.

关于映射 $\nu_{m,n}$ 的存在性, 只需要有满足某些附加性质的映射 $\hat{\nu}_{m,n}$: $X_{m+n} \to X_m \otimes X_n$ 的集合, 和映射 $A\otimes A \to A$ 即系数群 A 中的乘法就够了, (见[2]). $\hat{\nu}_{m,n}$ 诱导映射

$$\mathrm{Hom}(X_m, A)\otimes \mathrm{Hom}(X_n, A) \to \mathrm{Hom}(X_{m+n}, A),$$

这个映射又诱导上同调的映射 $\nu_{m,n}$.

特别地, 在分次群 $H(G, \mathbf{Z}) = \oplus_{n=0}^{\infty} H^n(G, \mathbf{Z})$ 上定义了一个环结构, 其中 G 是群, $\mathbf{Z}$ 是有平凡 G 作用的整数环. 相应的映射 $\nu_{m,n}$ 就是 $\cup$ 积. 这是一个有单位元的结合环, 对于度数分别为 p, q 的齐性元 $a, b \in H(G, \mathbf{Z})$, 有 $ab = (-1)^{pq}ba$.

类似地, $\cup$ 积在群 $\oplus_{n=0}^{\infty} H^n(X, \mathbf{Z})$ 上定义了环结构, 这里 $H^n(X, \mathbf{Z})$ 是拓扑空间 X 的系数在 $\mathbf{Z}$ 中的 n 维奇异上同调群.

参考文献

[1] Cartan, H. and Eilenberg, S., Homological algebra, Princeton Univ. Press, 1956.
[2] MacLane, S., Homology, Springer, 1963.

Л. В. Кузьмин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Dold, A., Lectures on algebraic topology, Springer, 1972, Chapt. Ⅶ.

高红铸 译 沈信耀 校

上同调序列 [cohomology sequence; когомологическая последовательность]

见同调序列 (homology sequence).

上同伦群 [cohomotopy group; когомотопическая группа]

一维上同调群的一种推广; 在某种意义下, 是同伦群 (homotopy group) 的对偶概念.

设 $\pi^n(X) = [X, S^n]$ 为由带基点空间 X 到带基点球面的连续映射同伦类构成的集合. 集合 $\pi^n(X)$ 不总具有自然的群结构. (对 $n = 1, 3, 7$, 则不然, 因为此时 S^n 为群.) 群 $\pi^1(X)$ 与 $H^1(X, \mathbf{Z})$ 一致.

若 X 为维数至多是 $2n-2$ 的 CW 复形 (CW-complex), 则可如下定义 $\pi^n(X)$ 上的群结构. 对 $[\alpha], [\beta] \in \pi^n(X)$, 考虑映射

$$(\alpha\times\beta)\circ\Delta: X \to S^n\times S^n,$$

其中 Δ: $X \to X\times X$ 为对角线映射, $\alpha, \beta: X \to S^n$ 为类 $[\alpha], [\beta]$ 的代表元. 依 X 的维数限制的观点, 存在映射 f: $X \to S^n \vee S^n$ (这里 $S^n \vee S^n$ 为带基点球面的并集) 的唯一同伦类, 它和自然包含 $S^n \vee S^n \subset S^n \times S^n$ 的复合与 $(\alpha\times\beta)\circ\Delta$ 同伦. 我们将 $[\alpha]+[\beta] \in \pi^n(X)$ 定义为 $\theta\circ f: X \to S^n$ 的同伦类 $[\theta\circ f] \in \pi^n(X)$, 其中 $\theta: S^n \vee S^n \to S^n$ 为折迭映射. 在这一运算下集合 $\pi^n(X)$ 为 Abel 群; 于是函子 π^n 通常被视为仅在维数至多为 $2n-2$ 的 CW 复形范畴内有定义, 并取值于 Abel 群范畴. 对维数小于 n 的 CW 复形 X, $\pi^n(X) = 0$. 于是函子 π^n 仅在维数 n 到 $2n-2$, 即所谓的稳定维数 (stable dimension) 内有意义.

若 $\dim X \leq 2n-2$, 则 $\pi^n(X) \approx \pi^{n+1}(SX)$, 这里 SX 是 X 的纬垂 (suspension). 该同构由同纬映象函子 $[X, S^n] \to [SX, SS^n] = [SX, S^{n+1}]$ 给出. 若 X 为任意有限维 CW 复形, 则对充分大的 N, 集合 $\pi^{n+N}(S^N X)$ 有群结构 (当 $N \geq \dim X - 2n + 2$ 时, $\dim(S^N X) = N + \dim X \leq 2(n+N) - 2$). 群 $\pi_s^n(X) = \pi^{n+N}(S^N X)$, 其中 $N \geq \dim X - 2n + 2$, 称为 CW 复形的稳定上同伦群 (stable cohomotopy group). 群 $\pi_s^n(X)$ 对所有整数 n (不仅仅正整数) 均有定义. 如果取 X 为两个点 (其中之一被指定为基点), 则对 $n \geq 0$ 有 $\pi_s^n(X) = 0$, $\pi_s^0(X) = \mathbf{Z}$; 而对 $n < 0$, $\pi_s^n(X) = \pi_{N-n}(S^N)$ 是球面的稳定同伦群.

若 $(X; A)$ 为 m 维 CW 复形偶, 则当 $m \leq 2n-2$ 时, 可定义相对上同伦群 (relative cohomotopy group) $\pi^n(X, A) = \pi^n(X/A)$. 我们有如下 Abel 群的正合序列

$$\pi^i(X) \to \pi^i(A) \to \pi^{i+1}(X, A) \to \pi^{i+1}(X) \to$$
$$\to \pi^{i+1}(A) \to \pi^{i+2}(X, A) \to \cdots,$$

该序列向右无限延伸; 但从某项开始所有群均平凡: 当 $i > m$ 时, $\pi^i(X, A) = \pi^i(X) = \pi^i(A) = 0$. 该序列向左只能延伸至满足 $m \leq 2i-2$ 的 i. 序列中的同态 $\pi^i(X) \to \pi^i(A)$

及$\pi^i(X/A)\to\pi^i(X)$由自然映射$A\subset X$及$X\to X/A$诱导出.同态$\pi^i(A)\to\pi^{i+1}(X/A)$则按如下方式构造. 对于类$[f]\in\pi^i(A)=[A,S^i]$及其代表元$f:A\to S^i$,选取定义于子空间$A\subset X$并取值于$S^i\subset D^{i+1}$的映射$f$的一个扩张$F:X\to D^{i+1}$. 映射$F$诱导出映射$X/A\to D^{i+1}/S^i=S^{i+1}$,其同伦类($\pi^{i+1}(X,A)$的元素)就是与类$[f]\in\pi^i(A)$相对应的.

若(X,A)为带基点的有限维CW复形偶,则有稳定上同伦群的正合序列

$$\cdots\to\pi_S^i(X)\to\pi_S^i(A)\to\pi_S^{i+1}(X,A)$$

$$\to\pi_S^{i+1}(X)\to\cdots,$$

它在两个方向均可无限延伸.由此我们可将稳定上同伦群视为一种广义上同调论.对任意(不带基点的)有限维CW复形X,令$\pi_s^i(X)=\pi_s^i(X\cup x_0,\ x_0)$,这里$(X\cup x_0,x_0)$是由具有指定点的$X$的无交并所得到的带基点的CW复形.设

$$\pi_S^*(X,A)=\tilde{\pi}_S^*(X/A)=\mathrm{Ker}[\pi_S^*(X/A)\to\pi_S^*(\mathrm{pt})].$$

在有限维CW复形范畴中定义的函子π_S^*给出了该式的一个广义上同调论.该理论在一点上的值等于球面的稳定同伦群.

和同伦群一样,上同伦群即便对最简单的情形也无法具体算出,这严重地限制了上述函子广泛应用的可能性.

参考文献

[1] Hu, S.-T., Homotopy theory, Acad. Press, 1959.

[2] Spanier, E. H., Algebraic topology, McGraw-Hill, 1966(中译本:E. H. 斯潘尼尔,代数拓扑学,上海科学技术出版社,1987).

A. Ф. Харшиладзе 撰

【补注】

参考文献

[A1] Whitehead, G. W., Elements of homotopy theory, Springer, 1978.

李贵松 译 沈信耀 校

上核 [**cokernel**; **коядро**],范畴中一个态射的

与范畴中态射的核(kernel of a morphism in a category)相对偶的概念.在向量空间、群、环,等等的范畴中,它描述了一个对象B的一个最大的使同态$\alpha:A\to B$的象消失的商对象(quotient object).

设$\mathfrak{K}$是一个有零态射的范畴.一个态射$\nu:B\to C$称为态射$\alpha:A\to B$的上核(cokernel of a morphism),如果$\alpha\nu=0$并且当态射φ满足$\alpha\varphi=0$时,φ可唯一地表成$\varphi=\nu\psi$.态射α的上核表以coker α.

如果$\nu=$coker α且$\nu'=$coker α,则存在唯一的同构ξ,使$\nu'=\nu\xi$.

反过来,如果$\nu=$coker α,且ξ是一个同构,则$\nu'=\nu\xi$也是α的一个上核.所以,一个态射α的所有上核组成B的一个商对象,记成Coker α.如果$\nu=$coker α,则ν是一个正规的满态射.其逆未必正确. 零态射$0:A\to B$的上核是1_B. 单位态射1_A的上核存在,当且仅当$\mathfrak{K}$有一个零对象.

在一个有零对象的范畴$\mathfrak{K}$中,一个态射$\alpha:A\to B$有一个上核,当且仅当对于态射α与$0:A\to0$,$\mathfrak{K}$包含一个上Descartes正方形. 特别地,如果$\mathfrak{K}$是一个右局部小的范畴,且有零对象与积,则对任何态射这个条件都是满足的.

M. Ш. Цаленко 撰

【补注】 两个态射$f:S\to A$,$g:S\to B$的上Descartes正方形(co-Cartesian square)或称纤维和(fibred sum)或推出(pushout)是一个交换图(如果存在)

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{f} & A \\ g\downarrow & & \downarrow f_1 \\ B & \xrightarrow[g_1]{} & B\amalg_S A \end{array}$$

使对任何两个态射$a:A\to Y$,$b:B\to Y$,只要$af=bg$,就有唯一的态射$h:B\amalg_S A\to Y$,使$a=hf_1$,$b=hg_1$.

周伯埙 译

共线向量 [**collinear vectors**; **коллинеарные векторы**]

处于一条直线或一些平行线上的向量. 为使两个非零向量是共线的,其必要和充分条件是它们的坐标成比例. 零向量同任何向量都是共线的,类似地,处于一条直线上的点也称为是共线的.

A. Б. Иванов 撰 张鸿林 译

直射变换 [**collineation**; **коллинеация**]

射影空间Π_n的能表示为有限个**透视**(perspective)之积的**射影变换**(projective transformation)(射影同构(projective isomorphism)).这种变换有时称为射影直射变换(projective collineation). 如果ν是射影直射变换,那么对任意子空间S_q,存在一个不多于$q-1$个透视之积π,使得对任意$S_p\subset S_q$,$\nu(S_p)=\pi(S_q)$. 例如,使得某条直线的每个点不动的射影变换是直射变换, 即透射(homology)(在狭义之下).

如果把Π_n解释为非交换域K上的线性空间$A_{n+1}^e(K)$的子空间的集合,则使射影变换是射影直射变换的充要条件是,它由$A_{n+1}^e(K)$的线性变换所诱导. 所有射影直射变换之集形成射影变换群G的一个正规子群G_0.

射影直射变换穷尽所有的射影变换, 当且仅当非交换域K的每个自同构都是内自同构. 一个域具有这个性质,当且仅当其任一自同构都是恒等的. 诸如此类,如实数域$\mathbf{R}$. 复数域$\mathbf{C}$不具有这个性质,而非交换域四元数域$\mathbf{H}$的每一自同构都是内自同构.

若K是不可易的非交换域,则存在一个非平凡的射影直射变换,使得一给定单形的每一点不动. 每个

单形恰能由一个射影直射变换映成任一别的单形，当且仅当 K 是一个域(射影几何学第二基本定理(second fundamental theorem of projective geometry)).

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 在射影几何的文献中，对各种不同的变换采用许多混淆不清的术语．上面定义的射影直射变换有时称为射影性(projectivity)，通常定义为可表为有限个透视之积的任何变换．有些作者，只对于直线之间的映射是有限个透视之积时才使用射影这个术语．射影变换通常称为射影同构，或在较老的文献中简单地称为直射变换(collineation)．它是射影空间之间的保持关联性的双射．

参考文献

[A1] Berger, M., Geometry, 1, Springer, 1987, Chapt. 4 (中译本：M. 贝尔热，几何，1，科学出版社，1987).

杨 路、张景中、侯晓荣 译

配置法 [collocation method; коллокации метод]

求解积分和微分方程的一种投影方法，通过使方程在某些给定的点上满足的条件来定出近似解．例如求以下积分方程的近似解：

$$u(t) = \int_a^b K(t, s, u(s))\,ds + f(t)$$

选取某一 n 个参数的函数族 $\varphi(t, c_1, \cdots, c_n)$ 并在区间 $[a, b]$ 中取一些点 $t_1, \cdots, t_n$，即配置结点(collocation knots, collocation nodes)．近似解 $u_n(t) = \varphi(t, c_1, \cdots, c_n)$ 由以下条件确定：

$$u_n(t_i) = \int_a^b K(t_i, s, u_n(s))\,ds + f(t_i),\quad i = 1, \ldots, n,$$

此条件表示一个关于未知量 $c_1, \cdots, c_n$ 的 n 个方程的方程组．若上述积分方程是线性的，且所求近似解是已知(所谓坐标)函数 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 的线性组合 $u_n(t) = c_1\varphi_1(t) + \cdots + c_n\varphi_n(t)$，则关于 $c_1, \cdots, c_n$ 的方程组也是线性的．

线性边值问题配置法的收敛性．假设对于 t 在 $(-1, 1)$ 中提出以下边值问题：

$$Lu = u^{(m)} + a_1(t)u^{(m-1)} + \cdots + a_m(t)u = f(t), \quad (1)$$

$$\sum_{j=0}^{m-1}[\alpha_{ij}u^{(j)}(-1) + \beta_{ij}u^{(j)}(1)] = 0,\quad i = 1, \ldots, m. \quad (2)$$

求这一问题如下形式的近似解：

$$u_n(t) = c_1\varphi_1(t) + \cdots + c_n\varphi_n(t),$$

其中 $\varphi_j(t)$ 是满足边界条件(2)的 $(m+j-1)$ 次多项式．常数 $c_1, \cdots, c_n$ 由线性方程组

$$[Lu_n - f]_{t=t_i} = 0,\quad i = 1, \ldots, n, \quad (3)$$

确定，其中 $t_i = t_i^{(n)} = \cos((2i-1)\pi/2n)$ $(i = 1, \cdots, n)$ 是 Чебышев 结点(Chebyshev nodes)．下述定理(见[1])成立：设函数 f 和 a_j $(j = 1, \cdots, m)$ 在 $[-1, 1]$ 中连续，而且边值问题(1)，(2)有唯一解 $u(t)$，则存在 n_0，使当 $n \geqslant n_0$ 时方程组(3)是唯一可解的，且

$$\max_{-1 \leqslant t \leqslant 1} | u_n^{(k)}(t) - u^{(k)}(t) | \leqslant cE_n(u^{(m)}) \to 0,$$

$$k = 0, \ldots, m-1,$$

$$\left\{\int_{-1}^{1} \frac{| u_n^{(m)}(t) - u^{(m)}(t) |^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt\right\}^{1/2} \leqslant cE_n(u^{(m)}) \to 0.$$

这里 c 是常数，

$$E_n(v) = \min_{b_0, \ldots, b_{n-1}} \max_{-1 \leqslant t \leqslant 1} \left| v(t) - \sum_{j=0}^{n-1} b_j t^j \right|.$$

如果节点是关于某权函数的正交多项式的根，类似的结果也成立(见[1])．对于等距节点，上述方法是发散的．

使用样条坐标函数的配置法的有效计算格式也已发展起来(见[2]，[3]，[4])．

参考文献

[1] Приближенное решение операторных уравнений, М., 1969(英译本：Krasnosel'skiĭ, M. A., Vainikko, G. M. and Zabreiko, P. P., et al., Approximate solution of operator equations, Wolters-Noordhoff, 1972).

[2] Russell, R. D. and Shampine, L. F., A collocation method for boundary value problems, *Numer. Math.*, 19 (1972), 1, 1-28.

[3] Boor, C. de and Swartz, B., Collocation at Gaussian points, *SIAM J. Numer. Anal.*, 10 (1973), 4, 582-606.

[4] Boor, C. de, A practical guide to splines, Springer, 1978.

Г. М. Вайникко 撰

【补注】 一般配置法包含线性方程组(3)，其中 L 是稠密的(即不包含很多系统的零元素)．然而通过使用分片多项式，效率会大大地提高(导出的方程组带宽小)．最流行的方法是把区间分成子区间 (t_j, t_{j+1}) 并要求(近似的)局部多项式在 Legendre 或 Lobatto 多项式的零点处满足(1)(见 **Legendre 多项式**(Legendre polynomials))．这类配置法的数值性质已超出了近似的考虑．由于它们显示出非常好的数值稳定性(numerical stability)(见**差分格式理论**(difference schemes, theory of))，这使它们非常适用于求解奇异扰动问题(见**扰动理论**(perturbation theory))．

配置法除了用于上述求解 Fredholm 方程及边值问题外，还用于初值问题和 Volterra 积分方程．

在 [A12] 与 [A13] 中,介绍了求解一阶常微分方程初值问题的经典样条空间中的配置法，低阶样条的应用亦见[A6].多项式样条配置的一般分析可在 [A14] 中找到. [A10] 中研究了一些非多项式样条空间中的配置法. 求解 k 阶常微分方程初值问题的投影法(配置法是其特殊情况)的一般分析在 [A11] 中给出. 所谓的扰动配置法(perturbed collocation method)(这种方法为 **Runge - Kutta 方法** (Runge - Kutta method)阶的研究提供了优美的框架)在[A15]及[A16]中介绍. 这一工作推广了发表在[A7]及[A18]中的早期结果. 从后来的参考文献中可看到,一些隐式的 Runge -Kutta 方法实际上是配置法,这样就把 Runge - Kutta 方法所能达到的阶同基本求积公式(quadrature formula)所能达到的阶联系了起来. 在 [A1] 中讨论了求解一阶初值问题的配置法的超收敛问题.

利用分片线性多项式空间中的元素来得到 Volterra 积分方程近似解的思想显然归功于 A. Huber ([A8]) (见[A17]). [A9] 中证明了 Huber 的方法是配置法的特殊情况. [A2] 中提出了一种相关的方法,其中 Volterra 方程的核与强制函数由阶梯函数逼近. 用于第二类方程的配置软件将发表在 [A3], [A4] 中. Volterra 方程配置法的最近发展主要归功于 H. Brunner. Volterra 方程配置法的现状和直至 1986 年的广泛的书目可在[A5]中查到.

参考文献

[A1] Axelsson, A., A class of A - stable methods, *BIT*, **9** (1969), 185 - 189.

[A2] Bel'tyukov, B. A., A method of approximate solution of Volterra integral equations, *Sibirsk. Mat. Zh.*, **2** (1961), 789 - 791 (俄文).

[A3] Blom, J. G. and Brunner, H., The numerical solution of nonlinear Volterra integral equations of the second kind by collocation and iterated collocation, SIAM. J. Stat. Comp. (1987).

[A4] Blom, J. G. and Brunner, H., Algorithm XXX: Discretized collocation for nonlinear Volterra integral equations of the second kind, Trans. Math. Software (1988).

[A5] Brunner, H. and Houwen, P. J. van der, The numerical solution of Volterra equations, North - Holland, 1986.

[A6] Callender, E. D., Single step methods and low order splines for solutions of ordinary differential equations, *SIAM J. Num. Anal.*, **8** (1971), 61 - 66.

[A7] Guillou, A. and Soule, J. L., La résolution numérique de problèmes differentiels aux conditions initiales par des méthodes de collocation, *RAIRO Anal. Num.*, **3** (1969), 17 - 44.

[A8] Huber, A., Eine Approximations methode für die Lösung der Volterra Integralgleichungen, *Monatsh. Math Phys.*, **47** (1939), 240 - 246.

[A9] Kadner, H., Numerical treatment of integral equations by collocation methods, *Num. Math.*, **10** (1967), 241 - 260.

[A10] Keller, G., Numerical solution of initial - value problems by collocation methods using generalized piecewise functions, *Computing*, **28** (1982), 199 - 211.

[A11] Kramarz, L., Gobal approximations to solutions of initial value problems, *Math. Comp.*, **32** (1978), 35 - 59.

[A12] Loscaizo, F. R., An introduction to the application of spline functions to initial value problems, in T. N. E. Grevikke (ed.), Theory and application of spline functions, *Acad. Press*, 1969, 37 - 64.

[A13] Loscaizo, F. R. and Talbot, T. D., Spline function approximations for solutions of ordinary differential equations, *SIAM J. Num. Anal.*, **4** (1967), 433 - 445.

[A14] Multhei, H. N., Numerische Behandlung von gewöhnlichen Differentialgleichungen mit Splines, *Computing*, **25** (1980), 317 - 325.

[A15] Nørsett, S. P., Collocation and perturbed collocation methods, in G. A. Waston (ed.), *Numerical analysis*, Springer, 1980, 119 - 132.

[A16] Nørsett, S. P. and Wanner, G., Perturbed collocation and Runge - Kutta methods, *Num. Math.*, **38** (1981), 193 - 208.

[A17] Wagner, R., On the numexical solution of Volterra integral equations, *J. Math. Phys.*, **32** (1954), 289 - 301.

[A18] Wright, K., Some relationships between implicit Runge - Kutta, Collocation and Lanczos methods, and their stability properties, *Bit*, **10** (1970), 217 - 227.

[A19] Ascher, U. M., Christiansen, J. and Russel, R. D., A collocation solver for mixed order systems of boundary value problems, *Math. Comp.*, 33 (1979), 659 - 679.

[A20] Ascher, U. M., Matthey, R. M. M. and Russel, R. D., The numerical solution of boundary value problems for ordinary differential equations, Prentice Hall, 1987.

金保侠 译

冒号 [colon ; двоеточие]

两点组成的拓扑空间 F. 若 F 中两个单点子集都是开的(此时二者都是闭的),则称 F 为简单冒号(simple colon). 若 F 中只有一个单点子集是开的,则称 F 为连通冒号(connected colon). 最后,若 F 中只有空子集和 F 本身是开的,则称 F 是粘合冒号(identified colon); 这个空间 —— 不像前两个空间,它们虽然简单,却很重要 —— 还没有找到应用.

参考文献

[1] Александров, П. С., Введение в теорию множеств и

общую топологию, М., 1977. А. А. Мальцев 撰

【补注】 两点离散空间(two - point discrete space)这一术语通常用于简单冒号. 它的拓扑幂称为 Cantor 立方(Cantor cubes). 这些空间在两个方面是万有的: 每个零维紧统可以嵌入到同权的 Cantor 立方内; 而每个紧统可由一个同权的 Cantor 立方中闭集的连续象得到. 这些事实推广了关于可数权的 Cantor 立方—— Cantor 集(Cantor set)的一些熟知的结果. 连通冒号亦称为 Sierpiński 空间(Sierpiński space), 它的拓扑幂称为 Александров 立方(Alexcandrov cubes). 它们是万有的, 因为它们拓扑地包含所有的 T_0 空间.

参考文献

[A1] Engelking, R., Genaral topology, PWN, 1977.

许依群、徐定宥、罗嵩龄 译

组合 [**combination**; **сочетание**], 从 m 个元素中取 n 个元素的

某一给定的基数为 m 的有限集的基数为 n 的子集. 从 m 个元素中取 n 个元素的组合数记为 C_m^n 或 $\binom{m}{n}$, 它等于

$$\frac{m!}{n!(m-n)!}.$$

序列 $C_m^n(n=0,1,\cdots,m, C_m^0=1)$ 的生成函数具有下列形式:

$$\sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}x^n=(1+x)^m$$

也可把组合看成从 m 个元素的总体中所取的大小为 n 的无序样本. 在组合分析中, 一个组合是从 m 个元素中取 n 个元素的排列(arrangement)的等价类; 从一个给定的 m 个元素的集合中所取的含 n 个元素的两个排列称为等价的, 如果它们是由相同元素组成的, 且每个元素所取次数也相同. 在无重复排列的情况下, 每个等价类由其中任意一个排列的元素集合来确定, 因此可以看成一个组合. 在有重复排列的情况下, 则得到组合概念的推广, 这时, 一个排列的等价类称为一个有重复的组合(combination with repetitions). 从 m 个元素中取 n 个元素的有重复的组合数等于 C_{m+n-1}^n, 而这些数的生成函数具有下列形式:

$$\sum_{k=0}^{\infty}C_{m+k-1}^k x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{m+k-1}{k}x^k=\frac{1}{(1-x)^m}.$$

参考文献

[1] Сачков, В. Н., Комбинаторные методы дискретной математики, М., 1977.

[2] Riordan, J., An introduction to combinatorial analysis, Wiley, 1958

В. М. Михеев 撰

【补注】

[A1] Hall, M., Combinatorial theory, Wiley, 1986.

张鸿林 译

组合分析 [**combinatorial analysis**; **комбинаторный анализ**], 组合数学(combinatorical mathematics), 组合论(combinatorics)

从事于解决某些(通常是有限的)集合中元素按照指定规则选取和安排问题的数学分支. 每种这样的规则确定了作出该集合元素的某种结构的一个方法, 这种结构称为组合构形(combinatorial configuration). 因此可以说, 组合分析的目的是研究组合构形. 这种研究包括组合构形的存在性问题, 算法及其构造, 这些算法的优化, 还有解决计数问题, 特别是确定所给的一类构形的个数. 组合构形的最简单的例子是组合、排列和全排列.

n 个元素的集合 X 称为 n 集(n-set); 它的一个 m 子集($m\leqslant n$)称为一个大小是 m 的组合(combination). n 个不同元素中大小是 m 的组合的个数等于

$$C_n^m=C(n,m)=\binom{n}{m}=\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}$$

公式

$$(1+t)^n=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}t^m,\quad \binom{n}{0}=1$$

通常称为Newton 二项式公式(Newton binomial formula). 数 $C(n,m)$ 称为二项式系数(binomial coefficients). 一个有序的 m 子集称为一个大小是 m 的排列(arrangement). n 个不同元素中大小是 m 的排列的个数等于

$$A(n,m)=n(n-1)\cdots(n-m+1).$$

当 $m=n$ 时的排列是 X 的元素的一个(全)排列(permutation), 这种全排列的个数是 $p(n)=n!$.

组合分析的基本概念的产生以及这一分支的发展与其他一些数学分支的发展相平行, 这些分支如代数, 数论, 概率论等, 它们都和组合分析密切相关. 古代东方的数学家早已知道用二项式系数给出组合个数的表示式以及当 n 是正整数时的 Newton 二项式公式. 3 阶幻方(magic square)曾经为了神秘的目的而被研究. 组合分析作为一个数学分支的诞生是与 B. Pascal 和 P. de Fermat 关于赌博理论的工作联系在一起的. 这些工作形成了概率论的基础, 同时也包含了确定一个有限集中元素的组合的个数的原理, 从而建立了组合分析和概率论之间的传统联系.

G. Leibnitz 的论文"Ars Combinatoria"(组合术(Art of Combinatorics))为组合方法的系统发展做出

了一大贡献，而且'组合的'一词看来也最早出现于此文．J. Bernoulli 的论文"Ars Conjectandi"(推测术(Art of Conjecturing))对组合分析的建立有重大意义；此文研究概率论的基本概念，就此必须提出一系列组合的概念并指出它们在概率演算中的应用．可以说，组合方法成为独立的数学分支始于 Leibnitz 和 Bernoulli 的工作问世之时．

L. Euler 对组合方法的发展做出了重大贡献．在他的关于正整数分拆和分解成若干加数的论文中，Euler 开创了计算组合构形的一种基本方法，即生成函数方法．

本世纪 50 年代以来，对组合分析的兴趣的复兴联系着控制论和离散数学的急剧发展以及计算机技术的广泛应用．在这段时期，对经典组合问题的兴趣又活跃起来了．

两种因素影响着进一步研究方向的形成．一种是研究对象的选择；另一种是研究目标的形成，这有赖于对研究对象的复杂性的最终估计．如果所研究的组合构形性质复杂，则研究的目标在于阐明其存在之条件和发掘构造它的算法．

组合分析的一大发达分支是**区组设计**(block design，亦见[2]，[3]，[10])的理论；这一分支的主要问题涉及区组设计的分类、存在的条件和构造某些类的方法等方面．一类特殊的区组设计是所谓的平衡不完全区组设计(balanced incomplete block design)或(b, v, r, k, λ)构形，它们定义为某个 v 集的 b 个 k 子集的总体，其中每个 k 子集称为区组，而且每个元素出现在 r 个区组中，每一对元素同时出现在 λ 个区组中．当 $b=v$，从而 $r=k$ 时，一个 (b, v, r, k, λ) 构形称为 (v, k, λ) 构形((v, k, λ)-configuration)，或对称平衡不完全区组设计(symmetric balanced incomplete block design)．即使对 (v, k, λ) 构形而言，其存在的充分必要条件问题尚未解决(1988)．(v, k, λ) 构形存在的必要条件是：当 v 是偶数时，$k-\lambda$ 是完全平方；而当 v 是奇数时，方程

$$z^2 = (k-\lambda)x^2 + (-1)^{(v-1)/2}\lambda y^2$$

必定有 x, y, z 不全为零的一组整数解．

当 $v=n^2+n+1$，$k=n+1$，$\lambda=1$ 时，一个 (v, k, λ) 构形表示一个 n 阶的射影平面(projective plane)，这是在指定的关联关系下含有限个点和线的有限几何(finite geometry)的一种特殊情形．对应于每个 n 阶射影平面，有 $n-1$ 个两两正交的 n 阶拉丁方(Latin square)组成的唯一的完全集．存在 n 阶射影平面的一个必要条件是：当 $n \equiv 1, 2 \pmod 4$ 时，存在整数 a，b，使得

$$n = a^2 + b^2.$$

n 阶射影平面的存在性只有在 $n=p^\alpha$ 时才得到肯定回答，这里的 p 是素数，α 是正整数．即使当 $n=10$ 时，存在性问题尚未解决(1988)．与这组问题有关的一个结果是：关于当 $n=4k+2$，$k=1, 2, \cdots$ 时不存在一对正交的 n 阶拉丁方的 Euler 猜想被证明不真(见**经典组合问题**(classical combinatorial problems))．

组合分析的另一个方向和**选择定理**(selection theorem)有关，这个方向上一系列结果的基础是 Hall 定理(Hall theorem)，它论及集合 X 的一个子集族 $(X_1, \cdots, X_n)$ 的相异代表系(或称横截(transversal))的存在性．子集族 $(X_1, \cdots, X_n)$ 的一个横截就是一个元素系 $(x_1, \cdots, x_n)$，其中 $x_i \in X_i$，且当 $i \neq j$ 时 $x_i \neq x_j$．存在一个横截，当且仅当对任意的 $i_1, \cdots, i_k$，$1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n$，$1 \leqslant k \leqslant n$，下述不等式成立：

$$|X_{i_1} \cup \cdots \cup X_{i_k}| \geqslant k,$$

这里用 $|Y|$ 表示集合 Y 的元素个数．Hall 定理的一个推论是关于拉丁方的一个存在定理：任意一个 $k \times n$ $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ 阶拉丁矩形可以扩充成一个 n 阶拉丁方．Hall 定理的另一个推论是：任一非负矩阵 $A = \| a_{ij} \|_{i, j=1}^{n}$，其中

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = t > 0$$

可以表示成

$$A = \alpha_1 \Pi_1 + \cdots + \alpha_s \Pi_s,$$

这里的 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 都是正数，$\Pi_1, \cdots, \Pi_s$ 都是 n 阶置换矩阵，而且 $s \leqslant (n-1)^2+1$．Hall 定理还蕴涵这样的定理：在一个非负矩阵中，包含所有正元素的行和列的最小个数等于一组两两不位于同一行或同一列的正元素的最大个数．与这一定理相类似，有下述关于半序集的极值性质的定理：不相交链的最小个数等于由两两不可比元素组成的最大子集的大小．下述定理也具有极值特性：如果把 n 集 X 的所有 $C(n, r)$ 个 r 元组合划分成 k 个不交类，则给定一个正整数 m，一定存在 $n_0 = n_0(m, r, k)$，使得当 $n \geqslant n_0$ 时，有 m 元子集 $Y \subset X$，Y 的所有 $C(m, r)$ 个组合都属于同一类．

旅行推销员问题也是一个极值问题，它要求作出遍访 n 个城市后回到出发处的最短路线，这里城市间的距离是已知的．这个问题在运输网络的研究中有应用．具有极值性质的组合问题在网络流理论和图论中得到研究．

计数问题(enumeration problem)是组合分析的一个重要组成部分．作为计数问题的解，人们或者对所给出的一类组合构形指出一种分类整理的方法，或者定出它们的个数，或者二者都做到．计数问题的典

型结果有：具有 k 个轮换的 n 阶置换的个数等于 $|S(n,k)|$，这里的 $S(n,k)$ 是第一类 Stirling 数(Stirling number of the first kind)，它也可由方程

$$x(x-1)\cdots(x-n+1)=\sum_{k=0}^{n}S(n,k)x^k$$

所定义；一个 n 元集划分成 k 个子集的划分的个数等于第二类 Stirling 数(Stirling number of the second kind)

$$\sigma(n,k)=\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(k-j)^n,$$

而把 m 个不同的东西分放进 n 个格子并使得没有空格的放法个数等于 $n!\sigma(m,n)$.

解计数问题的一种有用的工具是矩阵的积和式(permanent of a matrix). 元素属于某个环的矩阵 $A=\|a_{ij}\|$ $(i=1,\cdots,n;\ j=1,\cdots,m,\ n\leqslant m)$ 的积和式由和式

$$\operatorname{per}A=\sum_{(j_1,\cdots,j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{nj_n},$$

所定义，其中求和是对 m 个不同元素的所有大小是 n 的排列来进行的，一个有限集的某一子集族的横截的个数等于相应的关联矩阵的积和式.

有关确定限位排列(permutation with restrict positions)个数的一整类问题都可以化成计算积和式. 为方便起见，这些问题有时叙述成在 $n\times n$ 棋盘上放置互不相吃的棋子的问题. 与确定某一类矩阵的积和式有联系的还有二聚物问题(problem of dimers)的若干变形，它产生于吸附现象的研究，问题在于确定双原子分子中的原子在某一界面上结合方式的个数. 问题的解可以用 **Pfaff 式(Pfaffian)**给出，而后者是矩阵的某种与行列式相近的函数. 拉丁矩形(方)的计数也与找出计算某些(0,1)矩阵的积和式的有效方法有关.

下述公式被用来计算积和式:

$$\operatorname{per}A=\sum_{k=m-n}^{m}(-1)^{k-m+n}\binom{k}{m-n}S_k,$$

其中

$$S_k=\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_k\leqslant m}\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{m}a_{il}-\sum_{r=1}^{k}a_{ij_r}\right).$$

有大量不等式给出了某些矩阵类中矩阵积和式大小的估计. 在特定的一类非负矩阵中确定积和式的极值是有意义的. 对于各行上 1 的个数为给定值 $r_1,\cdots,r_n$ 的 (0,1) 矩阵 A，有估计式

$$\operatorname{per}A\leqslant\prod_{i=1}^{n}(r_i!)^{1/r_i},$$

见[12]. 著名的 van der Waerden 猜想说：n 阶双随机矩阵的最小积和式是 $n!/n^n$，这个猜想由 D. I. Falikman (1979) 和 G. P. Egorichev (1980) 各自独立地证实，见 [13].

生成函数(generating function)方法在解计数问题时起着重要的作用. 一个生成函数

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n$$

看成是形式幂级数，它建立了序列 $(a_0,a_1,\cdots)$ 与某个环的元素之间的对应. 按照这个定义，生成函数平行于递推关系和有限差分方程方法被有效地用来解计数问题. 为了得到渐近公式，常用实或复变量解析函数作为生成函数. 在复解析函数的情形，应用 Cauchy 积分来找到系数的表示式.

在计数方法的可能统一的方向上有一些结果，它们与所谓的关联代数(incidence algebra)的研究以及使用半序集上的 Möbius 函数有联系(如见[10]). 在解计数问题时，使对象的不可辨别性概念数学形式化至关紧要. 用对象关于某个置换群等价的概念、并结合使用生成函数方法构成了所谓的 Pólya 计数理论(Pólya theory of enumeration, 见[10])的基础. 这个理论的实质如下. 考察构形

$$f:X\to Y,\quad |X|=m,\quad |Y|=n$$

的集合 Y^X. 设置换群 A 作用在 X 上，则可在 Y^X 上定义等价关系 ~ 如下：对 $f,f_1\in Y^X$，如果存在 $\alpha\in A$，使得对于所有的 $x\in X$，有 $f(\alpha(x))=f_1(x)$，则 $f\sim f_1$. 设每个 $y\in Y$ 对应着一个特征 $[y]=(s_1,\cdots,s_k)$，这里的 s_i, $i=1,\cdots,k$，都是一个 Abel 群的元素，构形 f 的特征由下式给出:

$$[f]=\sum_{x\in X}[f(x)].$$

如果具有给定特征 $(s_1,\cdots,s_k)$ 的元素 $y\in Y$ 的个数是 $a(s_1,\cdots,s_k)$ 而 Y^X 中不等价的构形 f 的个数是 $b_m(s_1,\cdots,s_k)$，设

$$F(y_1,\ldots,y_k)=\sum_{(s_1,\ldots,s_k)}a(s_1,\ldots,s_k)y_1^{s_1}\cdots y_k^{s_k},$$

$$\Phi_m(y_1,\ldots,y_k)=\sum_{(s_1,\ldots,s_k)}b_m(s_1,\ldots,s_k)y_1^{s_1}\cdots y_k^{s_k},$$

则 Pólya 基本定理(Pólya fundamental theorem)断言:

$$\Phi_m(y_1,\ldots,y_k)=Z(F(y_1,\ldots,y_k),\ F(y_1^2,\ldots,y_k^2),\ldots,F(y_1^m,\ldots,y_k^m)),$$

这里的 Z 是群 A 的循环指标(cyclic index of the group)，它由方程

$$Z(t_1,\ldots,t_m;A)=$$

$$= \sum_{j_1+2j_2+\cdots+mj_m=n} C(j_1,\ldots,j_m;A)t_1^{j_1}\cdots t_m^{j_m}$$

所定义，其中 $C(j_1,\cdots,j_m;A)$ 是 A 的循环类$\{1^{j_1}\cdots m^{j_m}\}$(见**对称群** (symmetric group))的元素的个数．这个定理基于 Burnside 引理(Burnside lemma)：集合 X 上由置换群 A 所定义的等价类的个数 $N(A)$ 由公式

$$N(A)=\frac{1}{|A|}\sum_{\alpha\in A}j_1(\alpha)$$

给出，其中$j_1(\alpha)$是$\alpha\in A$的单位循环的个数．Pólya 的理论可用来解图论中的计数问题和对碳化合物计数．Pólya 的理论可以推广到构形的等价关系由分别作用在 X 和 Y 上的两个群 G 和 H 来定义的情形(见[4] 和 [10])．这种推广形式可用来确定不同构的抽象自动机的个数．

设 $X=\{1,\cdots,m\}$，$Y=\{a_1,\cdots,a_n\}$ 而 $\sigma:X\to Y$，其中 a_j 是 X 中 α_j 个元素的象，则表示式

$$[\sigma]=[a_1^{\alpha_1}\cdots a_n^{\alpha_n}],\ \alpha_1+\cdots+\alpha_n=m$$

称为 σ 的第一清单(first specification)．如果在数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 中有 β_0 个 0，β_1 个 1，等等，则表示式

$$[[0^{\beta_0}\cdots m^{\beta_m}]],\ \beta_0+\cdots+\beta_m=n,$$
$$\beta_1+2\beta_2+\cdots+m\beta_m=m$$

称为第二清单(second specification)．对某些特定的用以定义构形 $\sigma:X\to Y$ 的等价关系的群 G 和 H，有可能给出一种关于不等价构形计数的生成函数的构作方法，这种方法称为一般组合格式(general combinatorial scheme)，它可以按照 G 和 H 取成单位群 E 和相应阶的对称群 S_n 的不同取法而分成 4 种特殊情形．这些特殊情形是对大多数已知组合格式的模型(见[9]，[10])．

1．可换非对称情形：$G=S_m$，$H=E$．这是把相同的东西放入不相同的空格等组合格式的模型．不等价构形 σ 的计数的生成函数形如

$$\Phi(t;x_1,\ldots,x_n;\Lambda)=\prod_{j=1}^{n}\sum_{\alpha_j\in\Lambda_j}(tx_j)^{\alpha_j},$$

其中

$$[\sigma]=[a_1^{\alpha_1}\cdots a_n^{\alpha_n}],$$
$$\alpha_i\in\Lambda_i\subseteq\mathbf{N}_0=\{0,1,\ldots\},\ \Lambda=(\Lambda_1,\ldots,\Lambda_n).$$

2．不可换非对称情形：$G=E$，$H=E$．这是把不相同的东西放入不相同的空格等分配格式的模型．不等价构形 σ 的计数的生成函数形如

$$\tilde{\Phi}(t;x_1,\ldots,x_n;\Lambda)=\prod_{j=1}^{n}\sum_{\alpha_j\in\Lambda_j}\frac{t^{\alpha_j}}{\alpha_j!}x_j^{\alpha_j},$$

其中

$$[\sigma]=[a_1^{\alpha_1}\cdots a_n^{\alpha_n}],\ \alpha_i\in\Lambda_i,\ \Lambda=(\Lambda_1,\ldots,\Lambda_n).$$

3．可换对称情形：$G=S_m$，$E=S_n$．这是把相同的东西放入相同的空格、自然数分拆的计数等格式的模型．构形 σ 的计数基于使用形如

$$\Psi(t;x_1,\ldots;\Lambda)=\prod_{j=1}^{\infty}\sum_{\beta_j\in\Lambda_j}(x_jt^j)^{\beta_j}$$

的生成函数，其中

$$[[\sigma]]=[[0^{\beta_0}\cdots m^{\beta_m}]],\ \beta_j\in\Lambda_j,\ \Lambda=(\Lambda_1,\Lambda_2,\ldots).$$

4．不可换对称情形：$G=E$，$H=S_n$．这是把有限集划分成区组，把不同的东西放入到相同的空格等格式的模型．构形 σ 的计数基于使用形如

$$\tilde{\Psi}(t;x_1,\ldots;\Lambda)=\prod_{j=1}^{\infty}\sum_{\beta_j\in\Lambda_j}\left(\frac{x_jt^j}{j!}\right)^{\beta_j}\frac{1}{\beta_j!}$$

的生成函数，其中

$$[[\sigma]]=[[0^{\beta_0}\cdots m^{\beta_m}]],\ \beta_j\in\Lambda_j,\ \Lambda=(\Lambda_1,\Lambda_2,\ldots).$$

渐近方法在组合分析中占有重要的地位．它们既被应用于当其中的参数很大时复杂的有限表示式的化简，又用来在精确公式未知时以迂回方式得到近似式．有时把一个计数性质的问题表述为寻求某随机过程的分布的特征是合适的．通过这种解释使得人们有可能使用概率论中求渐近或极限定理的发展得很好的手段．把东西随机分放进格子的经典格式有待于从这种观点去仔细研究；同样还有集合的随机划分，随机置换的循环结构，以及各类随机图，包括映射的图(见[8]，[9]，[11])．

概率方法被用于研究对称群和半群的组合性质．对称群 S_n 的一个随机元素的阶当 $n\to\infty$ 时的极限分布，以及其随机元素产生的概率的渐近性质都曾被研究过．对于某些随机的非负矩阵类，矩阵中零行的个数以及积和式的分布也都被研究过，此外还给出了这些矩阵的本原性概率的估计．为了在不构造它们的情况下证明组合构形的存在，人们有时运用某些专门的概率手法．这种手法的本质在于藉对某事件的概率的估计而(不经构造地)证明构形的存在．

参考文献

[1] Riordan, J., An introduction to combinatorial analysis, Wiley, 1958.

[2] Ryser, H. J., Combinatorial mathematics, Carus Math. Monogr., 14 Math. Assoc. Amer, 1963 (中译本：H. J. 赖瑟，组合数学，科学出版社，1983).

[3] Hall, M., Combinatorial theory, Blaisdell, 1967

[4] Beckenbach, E. F. (ed.), Applied combinatorial mathematics, Wiley, 1964

[5] Harary, F., Graph theory, Addison - Wesely, 1969 (中译本: F. 哈拉里, 图论, 上海科学技术出版社, 1980).

[6] Harary, F. and Palmer, E., Graphical enumeration Acad. Press, 1973

[7] Erdös, P. and Spencer, J., Probabilistic methods in combinatorics, Acad Press. 1974.

[8] Колчин, В Ф., Чистяков, В. П., Итоги науки и техники. теория вероятностей. математическая статистика. Теоретическа кибернетика, т 11 М., 1974, 5 – 45.

[9] Сачков, В Н., Вопросы кибернетики. Тр семинара по комбинаторной математике, М., 1973, Математике, М., 1973.

[10] Сачков, В Н., Комбинаторные методы дискретной математики, М., 1977.

[11] Sachkov, V. N., Probabilistic methods in combinatorial analysis, Moscow, 1978 (俄文).

[12] Minc, H., Permanents, Addison - Wesley, 1978.

[13] Egorychev, G. P. [G P. Egorichev], The solution of van der Waerden's problem for permanents, *Adv. in Math.*, **42** (1981) 3, 299 – 305.

В. Н Сачков 撰

【补注】 婚配问题(marriage problem)是这样的: 设有n个少女$\{g_1,\cdots,g_n\}$和m个少男$\{b_1,\cdots,b_m\}$. 每个少女g_i喜欢部分少男$B_i\subset\{b_1,\cdots,b_m\}$. 在什么条件下每个少女都能与她喜爱的少男结婚? 问题的解答当然由关于相异代表系的P. Hall定理给出, 因此该定理也被叫做婚配定理(marriage theorem)或P. Hall婚配定理. 通常把相异代表系简记成SDR. 设G是二部分图(graph, bipartite), 其顶点为$\{g_1,\cdots,g_n,b_1,\cdots,b_m\}$, 且$g_i$和$b_j$有边相连,当且仅当少女$g_i$喜欢$b_j$(而且再没有别种边). 则婚配问题的一个解提供了一个匹配(matching), 在这种意义下婚配问题也被叫做P. Hall匹配定理(P. Hall matching theorem).

关于设计理论的一本新近的好书是[A1]. 关于图论中极值问题的更多内容见[A2]. 关于二聚物问题(dimer problem)和运用组合论于理论物理的更多内容可见例如[A3]. 最后, [A4]专门研究包括无限情况在内的横截理论.

参考文献

[A1] Hughes, D R., and Piper, F. C., Design theory, Cambridge Univ. Press, 1985.

[A2] Bollobás, B., Extremal graph theory, Acad Press, 1978.

[A3] Percus, J. K., Combinatorial methods, Springer, 1971.

[A4] Mirsky, L., Transversal theory, Acad. Press, 1971

【译注】

参考文献

[B1] Stanley, R. P., Enumerative combinatorics, I., Wadsworth & Books 'Cole Advanced Books & Software, 1986.

李 乔译 钟 集校

组合几何学 [**combinatorial geometry**; **комбинаторная геометрия**]

研究图形系统的具有组合特性的极值问题的一个数学分支. 这些问题首先与凸集(在某种意义下)的最佳放置有关. 此类问题的最早的例子之一是13球问题(problem of 13 spheres): 在Euclid空间中, 同时与一个实心球相切的与该球同样大小的实心球最多有几个? J. Kepler在1611年指出最多有12个, 但其严格证明是在20世纪中期由B. L. van der Waerden和K. Schütte给出的.

"组合几何学"这一术语最早大概出现在1955年(见[1]). 组合几何学作为一个数学领域, 其开端通常也和这一年联系在一起, 虽然已经有一些更早的有关结果(如见[2]). 组合几何学的特点是其问题的直观性. 在组合几何学中, 广泛使用组合论证和来自各种数学领域(拓扑学、泛函分析、整体几何学、图论等)的手段的结合. 组合几何学的中心问题之一是关于图形的剖分(见**分解**(decomposition)), 如**Borsuk问题**(Borsuk problem).

组合几何学的一大类问题是覆盖问题, 后者研究用某种特定形式的图形来覆盖给定集合(见**覆盖(集合的)**(covering (of a set)))的可能性(如见关于用最少个数的与某一凸体相似且相似系数为$k(0<k<1)$的小凸体覆盖该凸体的**Hadwiger假设**(Hadwiger hypothesis); 关于用最少个方向的平行光束(或光源)照亮某一凸体的边界的**光照问题**(illumination problem)等等).

组合几何学与离散几何学紧密相关; 如见**Erdös问题**(Erdös problem), 它提出求得Euclid空间$\mathbf{R}^n$中具有下述性质的一组点的最大点数: 这组点中任意三点不构成钝角三角形. Erdös问题以某种方式与Hadwiger假设和光照问题有联系.

组合几何学与凸集理论紧密相连, 如见**Helly定理**(Helly theorem), 它论述了某些凸集族中凸集相交非空取决于其子族中凸集相交非空.

参考文献

[1] Hadwiger, H., Eulers Characteristik und Kombinatorische Geometrie, *J. Reine Angew. Math*, **194** (1955), 101 – 110.

[2] Alexandroff, P. S. and Hopf, H., Topologie, **1**, Verlag Wissenschaft., 1935.

[3] Hadwiger, H. and Debrunner, H., Kombinatorische Geometrie in der Ebene, Monographie de l'Enseignement Math., Genève, 1959 (英译本见[5])

[4] Grünbaum, B., Borsuk's problem and related questions, in V L. Klee (ed.): Convexity, Proc. Symp Pure Math., Vol. 7, Amer. Math. Soc., 1963, 271 – 284.

[5] Hadwiger, H and Debrunner, H., Combinatorial geometry in the plane, Holt, Rinehart and Winston, 1964 (译自德文).

[6] Яглом, И М., О комбинаторной геометрии, Москова,

1971.

[7] Болтянский, В. Г., Солтан, П. С., Комбинаторная геометрия различных классов выпуклых множеств, Киш., 1978.

П. С. Солтан 撰

【补注】 在上述 13 球问题中要求的数通常称为接触数(kissing number).

最近 20 年中，Radon 定理和 H. Tverberg 对它的推广(1966)引起不少关注. 在[A1]中给出了广泛而详尽的综述. Radon 定理(Radon theorem)断言：在 R^d 中每个 $d+2$ 个点的集可以表示成两个不相交子集的并，而这两个子集的凸包(convex hull)有一个公共点. 此外，$d+2$ 是具有此性质的最小数.

参考文献

[A1] Eckhoff, J., Radon's theorem revisited, in J. Töllee and J. M. Wills (eds.): Contributions to geometry. Proc. Geometry Symp. Siegen, 1978, 1979, 164 – 185.

李 乔译 钟 集校

组合几何[combinatorial geometry; комбинаторная геометрия]

有限集 S 连同对 S 的所有子集 A 定义的一个闭包关系(closure relation).

$$A \to \overline{A}$$

(即 $A\subseteq\overline{A}$, $A\subseteq B$ 蕴涵 $\overline{A}\subseteq\overline{B}$, 以及 $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$, 但不一定有 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$)并满足下列条件: 1) 对空集有 $\overline{\varphi}=\varphi$; 2) 对每个元素 $p\in S$ 有 $\overline{p}=p$; 以及 3) 如果 $p, q\in S$, $A\subseteq S$, 而且 $q\in\overline{A\cup p}$ 但 $q\notin\overline{A}$, 则有 $p\in\overline{A\cup q}$ ("交换"性质('exchange' property)). 闭集, 或子空间, ($\overline{A}=A$)构成几何格(geometric lattice)(见半 **Dedekind 格**(semi-Dedekind lattice)). 子集 $I\subseteq S$ 称为独立的, 若对每个 $p\in I$ 有 $p\notin\overline{I\setminus p}$; 所有极大独立子集, 或称基, 都有相同的基数. 组合几何的直和以及一个组合几何在子集 A 上的限制按通常方式定义. 一个组合几何在子集 A 上的限制的基的基数称为 A 的秩 $r(A)$. 秩函数满足条件

$$r(A\cup B)+r(A\cap B)\leqslant r(A)+r(B).$$

子集 $A\subseteq S$ 若满足 $r(A)<|A|$, 则称为相关的; 一个组合几何的极小相关集称为循环. 在组合几何的定义中去掉条件 1) 和 2) 则成为前几何(pre-geometry)或拟阵(matroid)的定义. 也可以讨论无限的组合几何, 但这时要求基是有限的.

组合几何的例. 向量空间 V 的一个子集 S 连同对 S 的所有子集定义的关系

$$A\to\overline{A}=\mathrm{sp}(A)\cap S,$$

这里的 $\mathrm{sp}(A)$ 是 A 在 V 中张成的线性子空间.

组合几何的一个基本问题是所谓的临界问题(critical problem). 对于 Galois 域上的 n 维射影空间中一个集合 S 所定义的组合几何来说, 这个问题乃是确定具有下述性质的最小正整数 k(临界指数(critical exponent)): 存在一族区分 S 的超平面 $H_1,\cdots,H_k$. (一族超平面区分集合 S, 是指对每个 $t\in S$ 至少其中有一个超平面不含 t.)

参考文献

[1] Whitney, H., On the abstract properties of linear dependence, *Amer. J. Math.*, 57 (1935), 509 – 533.

[2] Crapo, H. H. and Rota, G. C., On the foundations of combinatorial geometries, M. I. T. 1970.

[3] Tutte, W. T., Introduction to the theory of matroid, American Elsevier, 1971.

[4] Wilson, R., Introduction to graph theory, Oliver & Boyd, 1972.

[5] Рыбников, К. А., Введение в комбинаторный анализ, М., 1972.

[6] Welsh, D. J. A., Matroid theory, Acad. Press, 1976.

[7] Randow, R. von., Introduction to the theory of matroids, Springer, 1975.

[8] White, N. (Ed.), Theory of matroids, Cambridge Univ. Press, 1986.

[9] Rybnikov, K. A. (Ed.), Combinatorial analysis: exercises and problems, Moscow, 1982 (俄文).

А. М. Ревякин 撰 李 乔译 钟 集校

组合数学[combinatorial mathematics; комбинаторная математика]

见组合分析 (combinatorial analysis).

组合拓扑学 [combinatorial topology; комбинаторная топология]

拓扑学的一个分支, 它借助于将几何图形剖分(divition)为许多基本图形(例如三角剖分多面体成单形), 或借助于集合系的覆盖(covering)来研究几何图形的拓扑性质. 对所讨论的图形在最一般的假定下, 这些方法都是适用的.

参考文献

[1] Александров, П. С., Комбинаторная топология, М.-Л., 1947 (英译本: Aleksandrov, P. S., Combinatorial topology, Graylock, Rochester, 1956).

[2] Понтрягин, Л. С., Основы комбинаторной топологии, 2 изд., М., 1976 (中译本: Л. С. 邦德列雅金, 组合拓扑学基础, 科学出版社, 1954).

С. П. Новиков 撰

【补注】 1930 年前后, 组合拓扑因其以相当紧凑的方式包括了一般拓扑, 代数拓扑及分段线性(PL)拓扑的内容而得名. 其典型的课题是: 单纯复形, 它们的基本群和同调群, 曲面, 三维或更高维流形上的拓扑(见基本群 (fundamental group); 同调群(homology group);

流形(manifold);单纯复形(simplical complex);曲面(surface)). 其中大多数课题都已发展成为当今各种不同的专门的数学分支了.

一本经典的教科书(德文)现已翻译成英文;见[A1].

参考文献

[A1] Seifert, H. and Threlfall, W., A textbook of topology, Acad. Press, 1980 (中译本:H. 沙爱福, W. 施雷发, 拓扑学, 人民教育出版社, 1981 重版).

罗嵩龄、许依群、徐定宥 译

组合学 [combinatorics; комбинаторика]

见组合分析 (combinatorial analysis).

组合逻辑 [combinatory logic; комбинаторная логика]

数理逻辑的一个分支,研究和分析诸如变量,函数、代人运算,把对象分类成为一些类型或范畴等概念和方法,以及有关问题.

在组合逻辑中,人们把一元函数和函数对变元的运算(作用(application))选作为基本概念.这里函数被作为原始概念,而不是把集合作为原始概念,而且此概念被推广成一个函数能作用于与它同层次的对象上.特别地,函数 f 可作为一个变元.由于函数既能当作函数本身的变元又可作为函数值,多元函数的概念可化归为一元函数的概念.函数 f 作用于变量 x 的结果记为 (fx).为了简洁,括号常常省略,这样表达式 $fx_1\cdots x_n$ 表示 $(\cdots f(x_1)\cdots x_n)$.一个满足以下方程的函数 f 称为组合子(combinator)

$$fx_1\cdots x_n=\mathfrak{X},$$

这里 $x_1,\cdots,x_n$ $(n\geqslant 1)$ 为任意函数并且 $\mathfrak{X}$ 是从这些函数构作出来的对象(也许用不到全体函数).(组合子的存在性是隐含地假定的).任何组合子可用两个组合子 S 和 K 来表达,S 和 K 满足方程

$$Sxyz=xz(yz),\quad Kxy=x$$

(这里 x, y, z 是任意函数).

组合逻辑中的首要问题之一是把逻辑中原始概念化归为极少数相当简单的概念.引入了个体函数 U, U 是 Sheffer 竖的推广(若 f 和 g 为一元命题函数,则 Ufg 解释为 $(\forall x)\ (f(x)\Rightarrow\neg g(x)))$, 而且已经证明谓词演算的每个公式能被表示成字母 U, S, K (以及括号)的组合;从而得出组合逻辑这一名称(H. B. Curry, 1930年前后).在这样的表示中,变元没有用到;这使得人们可以不把变元作为原始概念(而且,原始概念个体常元、命题和命题函数之间的区别也消失了). 然而,正如组合逻辑后来的发展所显示的,基于这种系统构作逻辑系统会遇到大量的困难.已经证明由 A. Church 和 Curry 作出的这种类型的第一个逻辑演算是不相容的(Kleene - Rosser 悖论 (Kleene - Rosser paradox), 见[4]).为了避免这样的不相容性,组合逻辑不得不构作成或者具有非常弱的推理可能性的逻辑,或者一种其元素被分成不同范畴的逻辑. 组合逻辑的主要发展已经沿着第二条路进行.

组合逻辑中不涉及"逻辑"而仅仅研究组合子性质的部分称为纯组合子理论(pure theory of combinators).已经证明这样的理论是相容的. 它的形式化在一些演算中得到一些结果, 它们都可分成两个分明的不同类: 组合子演算(combinator calculus)与 λ 演算(λ - calculus).

参考文献

[1] Curry, H. B. and Feys, R., Combinatory logic, 1, North - Holland, 1958.

[2] Curry, H. B., Hindley, J. R. and Seldin, J. P., Combinatory logic, 2, North - Holland, 1972.

[3] Church, A., The calculi of lambda conversion, Princeton Univ. Press, 1941.

[4] Kleene, S. C. and Rosser, J, The inconsistency of certain formal logics, *Ann. of Math.*, **36**(1935), 630–636.

[5] Яновская, С. А. Логикакомбинаторная, в. кн., Философская энциклопедия, т. 3, М., 1964, 226–227.

[6] Кузичев, А. С., в сб., История и методология естественных Наук, в. 14, 1973, 131–141.

Л. В. Шабунин 撰

【补注】 U 以及组合逻辑中第一个问题的分析可在 M. Schönfinkel 的文章[A1]中找到, 此文章是这方面的第一篇.

[A3] 是一初等导引; [A4] 是主要的现代参考书.

参考文献

[A1] Schönfinkel, M., Über die Bausteine der mathematischen Logik, *Math. Ann.*, **92** (1924), 305–316.

[A2] Schönfinkel, M., Über die Bausteine der mathematischen Logik, in J. van Heijenoort (ed): From Frege to Gödel, Harvard Univ. Press, 1967, 355–366. Reprint of the previous reference.

[A3] Hindley, J. R. and Seldin, J. P., Introduction to combinators and λ - calculus, Cambridge Univ. Press, 1986.

[A4] Barendrecht, H. P., The lambda-calculus, its syntax and semantics, North - Holland, 1977.

宋方敏 译 莫绍揆 校

燃烧理论 [combustion theory; теория горения]

【补注】 燃烧指燃料通过放热化学反应转变为不反应最终产物的过程. 按照物理化学特性可以区分各种不同的燃烧, 例如, 固/气燃料; 有预混燃料射人的火焰, 扩散流动; 爆裂、爆炸(高 Mach 数(Mach num-

ber)); 不同类型的化学动理学(kinetics); 等等.

燃烧理论的数学模型包括相互耦合的**偏微分方程**(differential equation partial)组. 在混合气体中这些偏微分方程描述组分、能量、动量、质量的守恒及状态方程. 起作用的变量是反应浓度、温度、气体速度分量、压力和密度. 由于热膨胀, 描述反应动力学的对流/扩散方程与流体动力学内在地耦合在一起(亦见**扩散方程**(diffusion equation); **扩散过程**(diffusion process)).

从数学观点看, 燃烧理论是相当新的研究领域. 一个主要问题是反应动理论引起的非线性. 可用数值或解析方法研究描述燃烧的偏微分方程组. 数值方法给出模拟火焰的很好的计算机绘制的图.

借助于小参数或大的参数的渐近展开, 可以建立近似解; 例如取参数为反应的高活化能量(见**小参数法**(small parameter, method of the)). 于是可得到简化的模型, 其中有未知的自由表面, 火焰锋面, 将未燃烧混合物区与终产物区域场分开. 在未燃烧混合物中, 温度上升直至在火焰锋面处达临界值, 这里在很小的区域内燃烧率很高. 这类简化模型有利于在理论上研究各种不同参数, 例如, 热损耗, Lewis 数, 等等的影响. 火焰可以在一些不同的几何情况(板状, 圆柱状, 球面状)下建立起来, 它们的特性, 例如**稳定性**(stability); 或向较复杂外形(小结构, 等等)或振荡状态的**分歧**(bifurcation)都是可以分析的.

参考文献

[A1] Williams, M. M. R., Mathematical methods in particle transport theory, Butterworths, 1971.

[A2] Buckwaster, J. W. and Ludford, G. S. S., Lectures on mathematical combustion, SIAM, 1983.

沈 青、朱治强 译

相伴变换 [**comitant** 或 concomitant; **комитант**], 作用于集合 X 和 Y 上的群 G 的

映射 $\varphi: X \to Y$, 使得对任何 $g \in G$, $x \in X$, 有

$$g(\varphi(x)) = \varphi(g(x)).$$

这时也说 φ 与 G 的作用可交换, 或说 φ 是等价映射(equivariant mapping). 若 G 作用在族 $\{X_i : i \in I\}$ 的每个集合上, 则相伴变换 $\Pi_{i\in I} X_i \to Y$ 称为 G 的联立相伴变换(simultaneous comitant).

相伴变换的概念起源于不变量的经典理论, 见**不变量理论**(invariants, theory of). 然而那里的相伴变换是狭义理解的: G 是某有限维向量空间 U 上的一般线性群, X 和 Y 是 U 上指定(一般是不同的)类型的张量空间, G 按自然的方式作用于其上, 而 φ 是从 X 到 Y 的一个等价的多项式映射. 另外, 若 Y 是共变张量空间, 则相伴变换称为 G 的共变变换 (covariant). 若 Y 是反变向量空间, 则相伴变换称为 G 的反变变换(contravariant).

例 设 f 是量 x 和 y 的二元三次型

$$f = a_0x^3 + 3a_1x^2y + 3a_2xy^2 + a_3y^3.$$

它的系数是共变对称张量的坐标. f 的 Hesse 型, 即型

$$H = \frac{1}{36}\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} =$$

$$= (a_0a_2 - a_1^2)x^2 + (a_0a_3 - a_1a_2)xy + (a_1a_3 - a_2^2)y^2,$$

其系数也是一个共变对称张量的系数, 而对应的张量空间的映射

$$(a_0, a_1, a_2, a_3) \mapsto$$

$$\left(a_0a_2 - a_1^2, \frac{1}{2}(a_0a_3 - a_1a_2), a_1a_3 - a_2^2\right)$$

是相伴变换(称为型 f 的相伴变换). 类似地定义任意型的 Hesse 型; 这也提供了相伴变换的例子, 见**共变变换**(covariant).

在不变量的近代几何理论中, 所谓的相伴变换, 通常是指任意的等价态射 $X \to Y$, 其中 X 和 Y 是赋有代数群 G 的正则作用的代数簇. 如果 X 和 Y 是仿射簇, 则给定一个相伴变换, 等价于在簇 X 和 Y 上的正则函数的 G 模间给定一个同态 $k[Y] \to k[X]$ (其中 k 是基域).

参考文献

[1] Гуревич, Г. Б., Основы теории алгебраических инвариантов, М.-Л., 1948 (英译本: Gurevich, G. B., Foundations of the theory of algebraic invariants, Noordhoff, 1964).

[2] Mumford, D., Geometric invariant theory, Springer, 1965.

[3] Dieudonné J. A., La géométrie des groups classiques, Springer, 1955.

В. Л. Попов 撰 石生明 译 许以超 校

可公度量和不可公度量 [**commensurble and incommensurable magnitudes (quantities)**; **соизмеримые и несоизмеримые величины**]

如果两个同类量(例如两个长度或两个面积)具有或不具有公度(common measure, 即另一个同类量, 所考虑的两个量都是这个量的整数倍), 则相应地称这两个量为可公度量或不可公度量. 正方形的边长和对角

线,或圆的面积和它的半径的平方,都是不可公度量的例子.如果两个量是可公度的,则它们的比是有理数;相反,不可公度量之比是无理数.

摘自 БСЭ-3 中同名条目　张鸿林 译

通信信道 [**communication channel**; **канал связи**]

在信息传递理论中研究的信息传递系统的主要组成部分.它是一个实际的通信信道的数学模型.这个实际的通信信道是能使信息从发送机传递到接收机的技术设备的综合体,信号通过物理的通信线路和介质由发送机传递到接收机.

一个具有一个发送机和一个接收机用于一个方向(从发送机到接收机)传递信息的通信信道由一对可测空间$(\mathscr{Y}, S_{\mathscr{Y}})$、$(\widetilde{\mathscr{Y}}, S_{\widetilde{\mathscr{Y}}})$(分别为由发送机发送的和接收机接收的信号空间),一个转移函数$Q(y, A)$ $(y\in\mathscr{Y}, A\in S_{\widetilde{\mathscr{Y}}})$以及一个在$(\mathscr{Y}, S_{\mathscr{Y}})$上的**概率测度**(probability measure)的子集v(v确定了发送机发送的信号的分布的限制范围)所定义,其中,$Q(y, A)$对于固定的A是σ代数$S_{\widetilde{\mathscr{Y}}}$上的可测函数且对于每个固定的$y$是$(\mathscr{Y}, S_{\mathscr{Y}})$上的概率测度(函数$Q(y, A)$给出接收信号在发送信号$y$已发出的条件下的条件概率分布).称两个定义在某个概率空间$(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$上的随机变量$\eta$与$\tilde{\eta}$由信号$(Q, V)$联系,如果它们分别取值于$(\mathscr{Y}, S_{\mathscr{Y}})$和$(\widetilde{\mathscr{Y}}, S_{\widetilde{\mathscr{Y}}})$,且对于任何$A\in S_{\widetilde{\mathscr{Y}}}$、$\eta$的分布属于$V$,条件概率$\mathsf{P}(\tilde{\eta}\in A|\eta)=Q(\eta, A)$以概率1成立.

在应用中人们常常遇到这样的通信信道,即$(\mathscr{Y}, S_{\mathscr{Y}})$与$(\widetilde{\mathscr{Y}}, S_{\widetilde{\mathscr{Y}}})$是两个定义在区间$[a, b]$上分别在可测空间$(Y, S_Y)$与$(\widetilde{Y}, S_{\widetilde{Y}})$取值的可测函数空间,其$\sigma$代数由可测柱集产生.在此情形下,记$(\mathscr{Y}, S_{\mathscr{Y}})=(Y_a^b, S_{Y_a^b})$, $(\widetilde{\mathscr{Y}}, S_{\widetilde{\mathscr{Y}}})=(\widetilde{Y}_a^b, S_{\widetilde{Y}_a^b})$,且称该信道为在区间$[a, b]$上的连续时间通信信道(continuous-time communication channel),其中$\eta=\{\eta(t): t\in[a, b]\}$与$\tilde{\eta}=\{\tilde{\eta}(t): t\in[a, b]\}$是分别取值于可测空间$(Y, S_Y)$与$(\widetilde{Y}, S_{\widetilde{Y}})$的随机过程,$\eta(t)$和$\tilde{\eta}(t)$的值分别代表发送和接收信号.类似地,在离散时间(discreat-time)情形下,信道的输入与输出的随机向量为$\eta_k^n=(\eta_k, \cdots, \eta_n)$与$\tilde{\eta}_k^n=(\tilde{\eta}_k, \cdots, \tilde{\eta}_n)$,它们的分量分别取值于可测空间$(Y, S_Y)$与$(\widetilde{Y}, S_{\widetilde{Y}})$,这里$\eta_j$与$\tilde{\eta}_j$是在时刻$j\tau$发送与接收的信号,其中常数$\tau$是通过信道的两个信号之间的时间间隔.

也常在半无穷区间或无穷区间上研究连续时间或离散时间信道.例如,一个在半无穷区间$[0, \infty)$上的连续时间信道(Q, V)可理解为一个如上描述的且满足相容性条件的在所有有限区间$[0, T]$上的通常的通信信道族(Q_0^T, V_0^T).在这种情形下,称每一个(Q_0^T, V_0^T)为通信信道(Q, V)的$[0, T]$段(segment of the communication channel).相容性条件的一种可能变化可以描述如下:设A_0^T是$S_{\widetilde{Y}_0^T}$的任一子集,y_0^T是Y_0^T的任一函数,且对于某个s $(0<s<T)$,设$y_0^T=(y_0^T, y_s^T)$,其中$y_0^s\in Y_0^s$, $y_s^T\in Y_s^T$.此时,表达为转移函数$Q_0^T(\cdot, \cdot)$的相容性条件就是对任意的$[0, T]$、任意的s $(0<s<T)$、任意$A_0^s\in S_{\widetilde{Y}_0^s}$,以及函数$y_0^T=(y_0^s, y_s^T)\in Y_0^T$ $(y_0^s\in Y_0^s, y_s^T\in Y_s^T)$,下式成立:

$$Q_0^T((y_0^s, y_s^T), A_0^s\times\bar{Y}_s^T) = Q_0^s(y_0^s, A_0^s),$$

其中$A_0^s\times\widetilde{Y}_s^T$是由$\widetilde{Y}_0^s$内$A_0^T$产生的$\widetilde{Y}_0^T$内柱集.$(Y_0^T, S_0^T)$上概率测度的限制范围$V_0^T(0<T<\infty)$也要求满足相容性条件.

无穷区间$(-\infty, \infty)$上的连续时间信道的概念也可类似定义.定义这种信道所需的相容性条件通常对每一类信道要分别表述.在某些特殊场合,$[0, \infty)$或$(-\infty, \infty)$上的通信信道的概念可通过通信信道的输入信号到输出信号的接收的执行过程的显示表达直接引进(亦即不必考虑这些信道的有限段)(例如,见 **Gauss 信道**(Gaussian channel); **可加噪声**(additive noise)关于在区间$[0, \infty)$或$(-\infty, \infty)$上的连续时间信道(Q, V)的上述性质对离散时间信道也成立.

按条件分布Q和限制范围V,通信信道可划分为各种类别(例如,见**无记忆信道**(memoryless channel),**有限记忆信道**(channel with a finite memory),**有限状态信道**(channel with a finite number of states),**Gauss 信道**(Gaussian channel),**对称信道**(symmetric channel)).通信信道的一个基本刻画是**信道传输速率**(transmission rate of a channel)(容量),它刻画通过这个信道的最大可能的**信息传输速率**(information, transmission rate of).

上述定义的通信信道可能有各种推广,它们对应于更一般更复杂的信息传输系统(例如,见**有反馈信道**(channel with feedback),**多方向信道**(channel with mnltiple directions)).

参考文献

[1] Шеннон, К., Работы по теории информации и кибернетике, пер. с англ., М., 1963, 243-332.

[2] Добрушин, Р. Л., «Успехи матем. наук», 14 (1959), 6, 3-104.

[3] Wolfowitz, J., Coding theorems of information theory, Springer, 1964.

[4] Gallager, R. G., Information theory and reliable communication, Wiley, 1968.

[5] Feinstein, A., Foundation of information theory, McGraw-Hill, 1958.

[6] Fano, R. M., Transmission of information. Statistical theory of communications, M. I. T., 1963.

[7] Csiszar, I. and Körner, J., Information theory. Coding theorems for discrete memoryless systems, Akad. Kiado,

1981.

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов 撰
沈世镒 译

对易和反对易关系的表示 [commutation and anti-commutation relationships, representation of; коммутационных и антикоммутационных соотношений представление]

一个弱连续线性映射 $f\to a_f(f\in L)$ 从一个准 Hilbert 空间 L 映射为作用于某个 Hilbert 空间 H 的一个(一般说,无限的)算子集合,使得或者对易关系

$$a_{f_1}a_{f_2}^*-a_{f_2}^*a_{f_1}=(f_1,f_2)E,\ a_{f_1}a_{f_2}-a_{f_2}a_{f_1}=0 \quad (1)$$

成立,或者反对易关系

$$a_{f_1}a_{f_2}^*+a_{f_2}^*a_{f_1}=(f_1,f_2)E,\ a_{f_1}a_{f_2}+a_{f_2}a_{f_1}=0 \quad (2)$$

成立,其中 $a_f^*(f\in L)$ 是 H 中算子 a_f 的伴随算子, E 是 H 中的恒等算子,而 $(\cdot,\cdot)$ 是 L 中的内积.

当 L 是有限维的情况,关系(1)和(2)的所有不可约表示都是酉等价的.对于无限维空间的情况,有无限多不同的(非酉等价的)(1)和(2)的不可约表示;对于完全可分的 L,[2]—[5]中有关于它们的描述.

满足(1)和(2)的算子 a_f 和 $a_f^*(f\in L)$ 形成所谓二次量子化形式体系的基础(其中 a_f 通常称为态 $f\in L$ 中一个粒子的湮没算子 (annihilation operator),而 a_f^* 是这个粒子的产生算子 (creation operator)),具有大量自由度的量子物理系统的研究中经常使用.然而在二次量子化中,人们主要使用所谓对易和反对易关系的Фок表示;这些是具有可分 Hilbert 空间作为指标空间 L 的不可约表示,而在空间 H 存在一个所谓真空向量,它被所有算子 $a_f(f\in L)$ 所湮没.

参考文献

[1] Березин, Ф. А., Метод вторичного квантования, М., 1965 (英译本: Berezin, F. A., The method of second quantization, Acad. Press, 1966).

[2] Гельфанд, И. М., Виленкин, Н. Я., Обобщенные функции, в. 4, М., 1961 (英译本: Gel'fand, I. M. and Vilenkin, N. Ya., Generalized functions, 4, Acad. Press, 1964).

[3] Голодец, В. Я., 《Успехи матем. наук》, **24** (1969), 4, 3–64.

[4A] Gårding, L. and Wightman, A., Representations of the anti-commutation relations, *Proc. Nat Acad. Sci. USA*, **40** (1954), 7, 617–621.

[4B] Gårding, L. and Wightman, A., Representations of the commutation relations, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **40** (1954), 7, 622–626.

[5] Segal, I. E., Distributions in Hilbert space and canonical systems of operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **88** (1958), 1, 12–41.

Р. А. Минлос 撰

【补注】 在西方文献中,该关系常称为正则对易和反对易关系,并且用缩写符号 CCR (canonical commutation relations) 和 CAR (canonical anti-commutation relations) 来表示它们.

写下 CCR(一个自由度的情况下)的两个标准方式是

$$[p,q]=-i\hbar I \ (\text{和 } [p,I]=[q,I]=0)$$

(其中 $\hbar$ 是 Planck 常数,在理论考虑和数学考虑中通常取为等于 1; Heisenberg 对易关系 (Heisenberg commutation relations))和

$$[a,a^*]=I \ (\text{和 } [a,I]=[a^*,I]=0),$$

其中 a 是湮没算子而其共轭 a^* 是产生算子.两者之间的关系极简单,即

$$a=(2\hbar)^{-1/2}(q+ip),\ a^*=(2\hbar)^{-1/2}(q-ip).$$

对于有限维 L,CCR 的所有(适当的)不可约表示是酉等价的,这个结果是著名的 Stone-von Neumann 定理 (Stone-von Neumann theorem)(也称为 von Neumann 定理 (von Neumann theorem), von Neumann 唯一性定理 (von Neumann uniqueness theorem),或者 Stone-von Neumann 唯一性定理 (Stone-von Neumann uniqueness theorem)).它只在适当的附加正则假设下才成立,例如涉及相伴群的表示的表示的可积性.

因而,更精确地,考虑利用 Hilbert 空间的算子来表示关系 $pq-qp=-iI$ 的问题(或者,更一般地, $p_kq_l-q_lp_k=-iI\delta_{k,l}$, $k,l=1,2,\cdots,n$).抽象地说,这些关系定义 C 上一个 $(2n+1)$ 维 **Lie 代数** (Lie algebra),具有基 $p_1,\cdots,p_n,q_1,\cdots,q_n,I$,称为 Heisenberg Lie 代数 (Heisenberg Lie algebra) 或者 CCR 代数 (CCR algebra).

这些关系的一个特别表示是 Schrödinger 表示 (Schrödinger representation),由 $q_l\mapsto Q_l$, $(Q_lf)(x)=x_lf(x)$ (其中 x 是对 $(x_1,\cdots,x_n)$ 的简写)和 $p_k\mapsto P_k$, $(P_kf)(x)=(-i(\partial/\partial x_k)f)(x)$ 给出.这个特别表示可积成酉表示,具有(在 $n=1$ 的情况) $U_t=e^{itP}$ 由 $(U_tf)(x)=f(x+t)$ 给出,和 $V_S=e^{isQ}$ 由 $(V_sf)(x)=e^{isx}f(x)$ 给出.积分酉算子 U_t 和 V_s 满足 Weyl 对易关系 (Weyl commutation relations)

$$U_tV_s=e^{its}V_sU_t. \quad (*)$$

定义一个 Schrödinger 偶 (Schrödinger couple) 为可数无限维 Hilbert 空间的一对自伴算符 (p,q),使得对某个酉算子 U 有 $p=UPU^*$, $q=UQU^*$.于是 von Neumann 唯一性定理的一种形式认为,若 (p,q) 是 Hi-

lbert 空间的一对自伴算子,使得酉群 $U_t=e^{itP}$ 和 $V_s=e^{isQ}$ 满足 Weyl 对易关系 (*),则 (p, q) 是一个Schrödinger 偶或这类偶的直和.

还有其他保证唯一性的较弱假设,例如 B. Rellich 和 J. Dixmier 提出的下列假定.设 p 和 q 为 Hilbert 空间分别具有定义域 D_p 和 D_q 的闭对称算子,使得 $D_p \cap D_q$ 稠密.此外,假设 $D_p \cap D_q$ 中存在稠密的线性集合 Ω,并使在 Ω 上 $pq-qp=-iI$ 和 $(p^2+q^2)|_\Omega$ 基本上是自伴的.于是 p 和 q 是自伴的,而 (p, q) 是 Schrödinger 偶或这类偶的直和.

因而,虽然下列命题成立:当两个单参数酉群 U_t, V_S 满足 Weyl 对易关系 (*) 时,则这些无穷小生成元满足 Heisenberg 对易关系 (Heisenberg commutation relation) $pq-qp=-iI$,其逆命题不成立.给出一个例子为 Hilbert 空间 $L_2(M)$ 和 $p=-i(\partial/\partial x)$, $q=x+i(\partial/\partial y)$,其中 M 是 $\sqrt{z}$ 的 Riemann 曲面(见 [A2],第 275 页).

有关 CCR 的表示的更多信息,例如,见 [A1], [A2] 的第 Ⅷ.5 节, [A3], 经典著作 [A4], 和 [A5] 的第 3 章.

关于 CCR 和 CAR 的 Фок 表示 (Fock representation) 的更详细情况,见 **Фок 空间** (Fock space).

在无穷自由度的情况下(量子场论,无限维 L),采用 Фок 表示可能完全是错误的.在互作用场的情况下,甚至是典型的错误表示.这是 Haag 定理 (Haag theorem) 的一个基本推论(对于 Haag 定理的陈述和讨论,见 [A5],第 3.c 节,和 [A6]).不严格地说,Haag 定理表明,当量子化场 $B(x)$ 及其在给定时刻的导数可以酉映射到一个自由场及其正则共轭,即是"Фок"表示,则 $B(x)$ 本身是一自由场.详细情况见 **Haag 定理** (Haag theorem).通常 Фок 表示是用作出发点,而适当的非 Фок 表示是作为弱极限构造的(作为特例,见 [A7]).

参考文献

[A1] Bratteli, O. and Robinson, D. W., Operator algebras and quantum statistical mechanics, Ⅱ, Springer, 1979, Chapter 5.2.

[A2] Reed, M. and Simon, B., Methods of Modern mathematical physics, 1. Functional analysis, Acad. Press, 1972.

[A3] Jorgensen, P. E. T. and Moore, R. T., Operator commutator relations, Reidel, 1984.

[A4] Putnam, C. R., Commutation properties of Hilbert space operators and related topics, Springer, 1967.

[A5] Emch, G. E., Algebraic methods in statistical mechanics and quantum field theory, Wiley, 1972.

[A6] Streit, L., A generalization of Haag's theorem, *Nuovo Cimento*, **62A** (1969), 673–680.

[A7] Eckmann, J.-P., Representation of the CCR in the $(\varphi^4)_3$ model: Independence of the space cut-off, *Comm. Math. Phys.*, **25** (1972), 1–61.

徐锡申 译

交换代数 [**commutative algebra**; **коммутативная алгебра**]

代数学的一个分支,研究的内容是交换环及其有关的对象(**理想** (ideal), **模** (module), **赋值** (valuation)).

交换代数是从数论及代数几何的问题中引伸出来的.这些问题通常针对一些特殊类型的环.数论中的基本对象是整数环 **Z**,而整数环上的算术的基本事实是:任何一个整数均可唯一地分解为素数的乘积.在 19 世纪 30 年代, C. F. Gauss 和 E. Kummer 以及其他一些人发现数论中的一些问题(例如二次型和 Fermat 定理)与有理数域 **Q** 的二次扩张及循环扩张上的算术有关(见 [11]).可是,把经典的论证推广到一般的代数数环是行不通的,因为在这些环中不可约因子分解不再是唯一的(见**代数数论** (algebraic number theory)). Kummer 猜测,如果在通常的数中增添某些"理想"数(就像在射影几何中增添无穷远点那样),则因子分解的唯一性将会恢复(见**理想数** (ideal number)).

Kummer 仅对循环域成功地构造了这种理想数,或如现在所称谓的那样:**除子** (divisor).但是,他的结果促使 R. Dedekind 和 L. Kronecker 把除子理论推广到任意的代数数环.在 Dedekind 的理论中 (1882 年) 显露了域的整元素的作用,但是更重要的是在那里出现了**理想** (ideal) 与**素理想** (prime ideal) 的概念.这为一维交换代数奠定了基础.

与此平行的是多维交换代数在代数几何中的形成.当时的代数几何研究平面代数曲线的性质,也研究更一般的代数簇,即一组给定的多项式 $P_1, \cdots, P_k \in \mathbf{C}[x_1, \cdots, x_n]$ 的公共零点的集合 $M \subset \mathbf{C}^n$ 的性质(在这里仿射簇和射影簇的差别并不重要).同一个簇可以用另外一些方程来定义,所以在 M 上取值为零的所有多项式组成的理想 $\mathfrak{A}$ 与 M 有更为确定的关系.这是导出理想这一概念的又一途径.但是在 1890 年以前,代数几何的代数基础始终处于萌芽状态.这一状态的改变出现在 D. Hilbert 的工作发表之后. 1893 年他证明了"零点定理"(见 **Hilbert 定理** (Hilbert theorem)).稍早一些时候他证明了以下事实:基定理 ($\mathbf{C}[x_1, \cdots, x_n]$ 中的理想必可由有限多个多项式生成),合冲定理以及多项式环中齐次理想的 **Hilbert 多项式** (Hilbert polynomial) 的存在性.这些结果在许多方面决定了交换代数在以后的发展方向.

对于许多低维代数簇的研究表明,它们都是由有限多个不可约子簇组成的,这在代数上导致用一些结构简单的理想的交来表示一般的理想的问题.这个问题被 E. Lasker 所解决 ([4]),他引入了**准素理想** (primary ideal) 的概念,用以在多维的情形取代素理想的方幂.他还定义了与准素理想相伴的素理想,并且证明了在多元多项式环中任何理想的准素分解的存在性.这种分

解的唯一性的问题被 F. Macaulay 所考虑(1913),结论是:尽管准素分解本身并不唯一,但与它相伴的素理想集合是唯一确定的,同时"孤立"的准素分支也是唯一确定的.摆脱准素分解的不唯一性的自然趋势使得 B. L. van der Waerden (1931)对理想引入了一种比相等粗略一些的等价关系,于是产生了**除子理想**(divisorial ideal)或除子的理论,这使得把 Kummer - Dedekind 的理论推广到更广泛的一类环上去成为可能(见 **Krull 环**(Krull ring)).

W. Krull 从 Kronecker 和 Lasker 的维数出发,把维数进一步定义为多项式环中某素理想所对应的商环的超越次数,最终给出了维数的现代的组合的定义.如果与某理想 𝔄 相伴的所有素理想具有相同的维数,则称此理想为非混合的.在多项式环中,主序列中的理想都是非混合的,或者用现代术语说,多项式环是 **Cohen - Macaulay 环**(Cohen - Macaulay ring).

最后,Lasker 从代数的观点考察了收敛幂级数环,从而把他的若干结果推广到这种环上.

1900 年前后人们得到了关于代数数环和多项式环的一些结果.值得回顾的是在结构方向上的工作,在此工作中人们试图找到决定一个多项式属于某个理想的精确算法.但是,被考察的对象的具体性掩盖了一般的规律和关系.K. Hensel 的 p 进数的理论成为现代交换代数发展的推动力.把经典的方法应用于这种非传统的对象的可能性使得人们意识到并且看清应用于任意环(满足某种或另外的条件,例如有限性)的一般思想.一个新的阶段——抽象代数的阶段,系统地研究各类交换环的结构——开始了.这种研究在 E. Noether 的工作中已经出现.她把任何理想都与有限基的条件和极大条件,即理想的升链条件(满足此条件的环称为 Noether 环)联系起来,从而得到了 Lasker - Macaulay 准素分解理论的最一般的形式,这种分解在以前一直是需要进行繁复的特殊计算的.她也给出了 Dedekind 环的公理刻画.与此同时,E. Artin 研究了具有极小条件的环,即所谓 Artin 环; H. Grell 引入了整环的局部化的概念,这是由 C. Chevalley 和 A.И. Узков 随后作了推广的一种运算.Krull 证明了有关主理想的一条定理,从而开创了 Noether 环的维数理论.他还证明了 Noether 环中有关理想的幂相交的定理,这成为研究 𝔄 进拓扑的基础.除子理想论(1931)和赋值论推广了 Hensel 和 A. Ostrowski 早期的研究.最后应该提到的是 Noether 正规化定理,它阐明了整性相关的概念在交换环一般理论的大框架中的作用,以及 Krull 的关于素理想在整性扩张中提升的定理.

Krull 关于**局部环**(local ring)的论文([7])开辟了一个新的方向.局部环是具有唯一极大理想的环,例如复流形上的解析函数芽构成的环.在抽象的情形,局部环可以通过局部化和完全化的过程得到,或 Hensel 化(以得到 **Hensel 环**(Hensel ring)).Krull 发展了局部环的维数理论并引入了正则局部环的概念,此概念与簇上的非奇异点这一几何概念相对应.在 20 世纪 40 年代,局部代数和它在代数几何上的应用曾迅速发展.局部环具有自然的拓扑,这使得人们可以对它施行完全化,并把一个环和它的完全化的性质进行比较.已经证明,对于代数几何环(几何环)施行完全化的过程保持某一些重要性质不变.这同整闭包的有限性的研究一起奠定了环论的方向(见**优环**(excellent ring)).1946 年 I. S. Cohen 给出了完全局部环结构的一个刻画.另一个方向则与相交理论的基础相联系.P. Samuel 发展了 Krull 的思想,引入了与局部环相伴的分次环的概念,这使得 Hilbert 特征函数复兴起来,从而导致局部环的维数的又一定义,并且定义了理想的重数.

交换代数思想的下一步发展与同调方法、函子的处理方法以及进一步的几何化相联系.Dedekind 和 Noether 把交换代数的线性化的思想,即把环的理想看作是模的特例,促进了这一趋势的发展.模是线性空间的推广,一族模与几何表述中的一族线性空间的概念相对应.通常线性代数中的构造,如直和、模同态及张量积,都适用于模.这种更一般的观点所带来的巨大效果已在进行**分解**(resolution)的可能性中,也同样在同调代数的应用中显示出来了.同调代数是在 20 世纪 50 年代形成的,它代表了合冲理论的进一步的推广.这引起了人们对于一些特殊类型的模(见**投射模**(projective module);**内射模**(injective module);**平坦模**(flat module))的关注.对任意一类环的研究与对它上面的模的研究是密切相关的(见**环的同调分类**(homological classification of rings)).这在局部代数中已取得切实的进展:J.-P. Serre 把正则环刻画为同调维数有限的环,并建立了关于相交重数的 Tor 公式.M. Auslander 和 D. A. Buchsbaum 证明了正则环是唯一分解环.随后人们开始研究与模的同态及张量积有关的 Ext 和 Tor 函子,同时也研究了 **Gorenstein 环**(Gorenstein ring)和 Cohen - Macaulay 环,它们都有同调的刻画以及局部环的 Betti 数.

现代交换代数的第二个特色是函子的处理方法,即不是研究单个的环或模的性质,而是代之以一系列由态射联系起来的这种对象.基环的变化、下降理论以及对各种函子的构造的研究都是上述思想的反映.例如,在局部化及完备化下许多性质保持不变是与相应扩张的平坦性相联系的.

第三个特色是几何化,即把环中的元素看作某空间上的函数(这在代数几何及泛函分析中是自然的).起初人们把此空间取为环的极大理想的集合,后来又取为具有 **Zariski 拓扑**(Zariski topology)的所有素理想的集

合(即环的素谱)．特别地，应用层论及其上同调的可能性显露出来了．交换代数已成为代数几何的一个基本部分因而极大地扩展了它的应用范围．例如，可以把含有零因子的环甚至有幂零元的环用几何的语言表述出来并应用于几何．反过来，几何的方法也使那些被称为整体交换代数的方向重新活跃起来．与此相关的有不变量理论(invariants，theory of)，代数 K 理论(algebraic K-theory)，上同调的构造(Picard 群(Picard group)；Brauer 群(Brauer group)等)，环的自同构群和各种不变量的研究，奇性化解理论等．在这一点上，交换代数与代数几何的界线消失了．

参考文献

[1] Kummer, E. E., Zur Theorie der komplexen Zahlen, *J. Reine Angew. Math.*, 35 (1847), 319–326.

[2] Dedekind, R., Gesammelte mathematische Werke, 3, Vieweg, 1932.

[3] Hilbert, D., Gesammelte Abhandlungen, 2, Springer, 1933.

[4] Lasker, E., Zur Theorie der Moduln und Ideale, *Math. Ann.*, 60 (1905), 20–116.

[5] Noether, E., Idealtheorie in Ringbereichen, *Math. Ann.*, 83 (1921), 24–66.

[6] Noether, E., Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl-und Funktionenkörpern, *Math. Ann.*, 96 (1926), 26–61.

[7] Krull, W., Dimensionstheorie in Stellenringen, *J. Reine Angew. Math.*, 179 (1938), 204–226.

[8] Serre, J.-P., Algèbre locale. Multiplicités, Lectures Notes in Math., 11, Springer, 1965.

[9] Waerden, B. L. van der, Algebra, 2, Springer, 1971.

[10] Krull, W., Idealtheorie, Springer, 1968.

[11] Боревич, З. И., Шафаревич, И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972 (英译本: Borevich, Z. I. and Shafarevich, I. R., Number theory, Acad. Press, 1966).

[12] Zariski, O. and Samuel, P., Commutative algebra, 1–2, Springer, 1975.

[13] Nagata, M., Local rings, Interscience, 1962.

[14] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Commutative algebra, Addison-Wesley, 1972 (译自法文).

[15] Kaplansky, I., Commutative rings, Allyn & Bacon, 1970.

B. И. Данилов 撰

【译注】

参考文献

[B1] Atiyah, M. F. and MacDonald, I. G., Introduction to commutative algebra, Addison-Wesley, 1969 (中译本: M. G. 阿蒂亚, I. G. 麦克唐纳, 交换代数导引, 科学出版社, 1982).

赵春来 译

交换 Banach 代数 [commutative Banach algebra；**коммутативная Банахова алгебра**]

域 $\mathbf{C}$ 上的有单位元的 Banach 代数 A，且对于所有 $x, y \in A$，有 $xy=yx$.

交换 Banach 代数 A 的每个极大理想是 A 上的某个连续可乘线性泛函 φ(即 A 到复数域的代数同态)的核．反之，在交换 Banach 代数上的每个可乘线性泛函是连续的，其范数为 1，且其核是 A 中的极大理想．设 Φ 是 A 上的所有可乘线性泛函的全体．一个元素 $a \in A$ 是可逆的，当且仅当对于所有 $\varphi \in \Phi$，$\varphi(a) \neq 0$ 成立．同时，谱(spectrum) $\sigma(a)$ 恰好由形式为 $\varphi(a)$ 的数所组成．如果一个 A 上的连续线性泛函 ψ 对所有 $a \in A$ 有 $\psi(a) \in \sigma(a)$，那么 ψ 是可乘的；对于实数域上的代数，一般来说，这是不成立的．

交换 Banach 代数中的极大理想的例子．设 $A=C(X)$ 是紧统 X 上的所有连续函数的代数．如果 x_0 是 X 中的固定点，那么满足 $f(x_0)=0$ 的所有 $f \in A$ 的全体是极大理想(maximal ideal)，且 $C(X)$ 中的所有极大理想都有这种形式．如果 X 是复平面上的紧集，$A=R(X)$ 是所有可用极点在 X 外的有理函数在 X 上一致逼近的函数全体所组成的 $C(X)$ 的闭子代数，那么 $R(X)$ 的极大理想可按同 $C(X)$ 的情况一样的方式来得到．设 $L^1(G)$ 是离散 Abel 群 G 的群代数，且假设每一元素 $f \in L^1(G)$ 有对应于它的 Fourier 变换 $\hat{f}$. 如果 φ 是 $L^1(G)$ 上的可乘线性泛函，那么对于 G 的特征标群 $\hat{G}$ 中的某个 χ_0，$\varphi(f)=\hat{f}(\chi_0)$ 成立；因此，$L^1(G)$ 的极大理想的元素可与 $\hat{G}$ 的元素建立一一对应．应用于整数群 $\mathbf{Z}$，这后一例子导致著名的 Wiener 定理的证明；Wiener 定理说：如果函数 $\hat{f}(t)$ 有绝对收敛的 Fourier 级数，且在 $[0, 2\pi]$ 中不为零，那么 $1/\hat{f}(t)$ 也有绝对收敛的 Fourier 级数．

由于可乘线性泛函具有范数 1，所以每个这样的泛函属于 A 的对偶的单位球面．A 上的所有可乘线性泛函的全体 Φ 在对偶空间中按弱拓扑是闭集．又由于对偶空间中的单位球按弱拓扑是紧的，Φ 按弱拓扑也是紧的；它称为代数 A 的极大理想空间(maximal ideal space)，记作 $\mathfrak{M}$.

如果一个交换 Banach 代数 A 包含非平凡的幂等元，即满足 $f \neq 0$，$f \neq e$ 和 $f^2=f$ 的元素 $f \in A$，那么 A 的极大理想空间是不连通的．反之，如果代数 A 的极大理想空间 X 是两个不相交的闭集 X_0 和 X_1 的并，那么存在元素 $f \in A$ 使得 $\hat{f}|_{X_0}=0$ 以及 $\hat{f}|_{X_1}=1$ (Шилов 定理(Shilov theorem)). 特别是，交换 Banach 代数的极大理想空间是连通的，当且仅当该代数不能表示为它的两个非平凡理想的直和．

设 $\varepsilon_1(A)$ 为代数 A 的可逆元群 $\varepsilon(A)$ 的子群，它由指数元所组成；所谓指数元是指形式为 $\exp a=\sum_0^\infty a^n/n!$ 的元素．于是 $\varepsilon_1(A)$ 是 $\varepsilon(A)$ 中的单位元的连通分支．对于任何紧统 X，群 $H^1(X, \mathbf{Z})$ 和 $\varepsilon(C)/\varepsilon_1(C)$ 之间存在一

个典型同构，这里 $C=C(X)$ 是 X 上的所有连续函数的代数（Бруплинский-Eilenberg 定理（Brushlinskiĭ - Eilenberg theorem））．由此可看出，这一同构可自然导出 $H^1(X,\mathbf{Z})$ 和 $\varepsilon(A)/\varepsilon_1(A)$ 之间的同构，这里 A 是其极大理想空间为 X 的任何交换 Banach 代数（Arens - Royden 定理（Arens - Royden theorem））．在某些情形，对 q 为奇数的群 $H^q(X,\mathbf{Z})$ 有类似的解释．代数 A 在代数 $C(\mathfrak{M})$ 中有下述典型表示．元素 $a\in A$ 的 Гельфанд 变换（Gel'fand transform）是 $\mathfrak{M}$ 上的函数 $\hat{a}$，它在每点上的值由公式 $\hat{a}(x)=\varphi_x(a)$ 来定义，其中 φ_x 是对应于点 $x\in\mathfrak{M}$ 的可乘线性泛函．同态 $a\mapsto\hat{a}$ 的核是所有属于一切极大理想（即属于 A 的根基）的元素 $a\in A$ 的全体．如果 A 是半单代数，即如果 Rad $A=\{0\}$，那么同态 $a\mapsto\hat{a}$ 是 A 到 $C(\mathfrak{M})$ 的（代数）同构．半单交换 Banach 代数通常称为函数代数（function algebras）．

Гельфанд 变换非常适用于半单代数的研究：交换 Banach 代数理论的基本结果之一，就是关于半单代数可同构表示为极大理想空间上的连续函数代数的定理．与半单代数相比，对有根基的一般代数所知极少．次数 $\leqslant m$ 的复多项式代数的所有理想是已知的．这种代数由形式多项式 $\xi=a_0+a_1\lambda+\cdots+a_m\lambda^m$ 所组成，其中运用通常的乘法规则来相乘，但要考虑关系式 $\lambda^{m+1}=0$．这种代数是有限维的，其上所有的范数等价，且其每个理想是闭的．对于 $j\leqslant k$ 满足 $a_j=0$ 的那些 ξ 的全体 I_k 是闭理想；在这个代数中没有其他理想．每个有唯一非平凡理想的代数同构于一次多项式代数．至今（1987）年还不知道对于有唯一非平凡闭理想的代数是否也有同样的结果．

多项式代数的自然无限维类似是无限形式复幂级数 $\xi=a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2+\cdots$ 的代数，其中运算按通常的意义来理解，且范数 $\|\xi\|=\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|\alpha_k$，这里 α_k 是满足 $\alpha_{k+j}\leqslant\alpha_k\alpha_j$ 的正数列．如果当 $k\to\infty$ 时，$\alpha_k^{1/k}\to 0$，那么到复数域的唯一非平凡同态是由 $\xi\to a_0$ 给出的．这样，I_1 是唯一的极大理想，且这个理想重合于根基．与有限维情形类似地定义的理想 I_k 构成各种闭理想的可数集．如果序列 $\{\alpha_{k+1}/\alpha_k\}$ 是单调的，那么这个理想集包含所有闭理想．在一般情形中，一个代数可包含不可数个不同的闭理想．

在所考虑的（没有非平凡幂零元的）代数中适当选择序列 $\{\alpha_k\}$，就可以定义非零微分，即满足 $D(\xi\eta)=(D\xi)\eta+\xi(D\eta)$ 的有界线性算子 D．在半单代数上没有非平凡的连续微分，因为在任何（不一定是交换的）代数中，恒等式

$$(D\xi)^n=\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+n}\binom{n}{k}\xi^{n-k}D^n\xi^k$$

当 ξ 和 $D\xi$ 可交换时成立．特别是，如果 D 是连续的，那么 $D\xi$ 是广义幂零元．

任何有限维代数可分解为根基和半单代数的直和．在无限维情形中，类似的结论一般不成立，甚至对于交换 Banach 代数也一样．此外，还必须区分代数可分解性和强（拓扑）可分解性．

任何只对根基所加的条件，都不能保证即使是代数的可分解性：根基可以是一维的，并且可以零化某个极大理想，但它不一定可表示为直和的被和项，即使是在代数意义下．

另一方面，如果根基是有限维的，而商代数是连续函数代数（或 Hilbert 空间上的算子代数），那么它是强可分解的．如果商代数是连续函数代数，而它的零化子根基 R（即 R 中的每个元素的平方是零）在 A 中有 Banach 余空间，那么 A 是强可分解的．代替 R 的可余性条件，也可要求 A 的极大理想空间在每一点上满足第一可数公理．

当对于根基的商代数是全不连通紧统上的连续函数代数时，这一情形也已完全研究清楚：强可分解性的充分必要条件是原代数的幂等元的一致有界性．

设 V 是 $\mathbf{C}^n$ 中的有界域，A 是代数 $C(\bar{V})$ 中的由在 V 中全纯的函数全体所组成的闭子代数．在对 V 的相当一般的假设下，代数 A 的任何对应点 $z^0=(z_1^0,\cdots,z_n^0)\in V$ 的极大理想是有限生成的；也就是说，它是由函数 $f_i=z_i-z_i^0$ 生成的．这一断言有下述局部逆．设 A 是有极大理想空间 X 的半单交换 Banach 代数．如果对应某个点 $x_0\in X$ 的极大理想是由有限个元素 $f_1,\cdots,f_n\in A$ 生成的，那么在 x_0 的某个邻域中的点的极大理想就由形为 $f_i-\lambda_i e$ 的元素生成；映射 $\psi:x\mapsto(f_1(x),\cdots,f_n(x))$ 是在 x_0 的某个邻域中的一一映射，且对于任何 $g\in A$，函数 $g\circ\psi^{-1}$ 在 $\mathbf{C}^n$ 的原点的某个固定邻域中是全纯的．此外，在 x_0 的某个邻域中，可对 X 引进某种自然的解析结构．

代数 A 的一个元素集 S 称为生成元系（system of generators），如果 A 中包含集合 S 的有单位元的最小闭子代数就是 A 自身．单位元通常不计入生成元系．如果存在有上述性质的有限系 S，那么 A 称为有限生成代数（finitely-generated algebra）．生成元系的最少可能元素个数称为代数的生成元数．

如果 $f_1,\cdots,f_n$ 是某个代数的生成元系，那么映射 $x\mapsto(\hat{f}_1(x),\cdots,\hat{f}_n(x))$ 诱导出一个由这个代数的极大理想空间到 $\mathbf{C}^n$ 中的某个多项式凸的紧集的同态．$\mathbf{C}^n$ 中的每个多项式凸的紧集是某个 Banach 代数（例如，多项式在该紧集上的一致极限的代数）的极大理想空间．

有 n 个生成元的代数的极大理想空间 X 满足条件 $\dim X\leqslant 2n$，且具有一系列其他性质；例如，对于 $i\geqslant n$，$H^i(X,\mathbf{C}^n)=0$ 成立．特别是，由此得知：代数 $C(S^n)$ 中的生成元的个数等于 $n+1$，其中 S^n 是 n 维单

位球面；对于任意 n 维紧流形 X，类似的结果也成立．对于任何有限胞腔的 n 维多面体 X，代数 $C(X)$ 有生成元的个数为 $n+1$ 的生成元系．

设 A 是有极大理想空间 X 的代数．使所有函数 $|\hat{f}|$ 在其上达到最大值的最小闭集 $\Gamma\subset X$ 称为 A 的 Шилов 边界 (Shilov boundary)．对于任何有单位元的交换 Banach 代数，这种集合存在且唯一．

点 $x_0\in X$ 属于 Γ，当且仅当对于 x_0 的任何邻域 U，存在元素 $f\in A$，使得 $\max_X|\hat{f}|=1$，但在 U 外 $|\hat{f}|<1$．特别是，如果 U 是 X 中的开集，且存在闭集 $F\subset U$ 和元素 $g\in A$，使得 $|\hat{g}(x)|<\max_F|\hat{g}|$ 对于点 $x\in U\setminus F$ 成立，那么交 $\Gamma\cap U$ 非空．特别是，如果 $X=[0,1]$，那么 $\Gamma=X$．

任何可乘线性泛函 φ 关于由谱半径定义的范数是连续的；特别是，$|\varphi(f)|\leqslant\max_X|\hat{f}|$，其中 X 是极大理想空间．在这个不等式中，按照 Шилов 边界的定义，可用 Γ 来代替 X；因此，在 Γ 上存在"表示"泛函 φ 的正的正则测度 μ，即使得对于所有 $f\in A$，等式 $\varphi(f)=\int_\Gamma\hat{f}d\mu$ 成立．对于圆盘上的解析函数代数的情形，这个公式归结为经典的 Poisson 公式．在所有表示测度中，存在一个对于所有 $f\in A$ 满足 Jensen 不等式 $\ln|\varphi(f)|\leqslant\int_\Gamma\ln|\hat{f}|d\mu$ 的测度 μ．

设 B 是有单位元的交换 Banach 代数，A 是某个闭子代数．代数 A 称为 B 的极大子代数 (maximal subalgebra)，如果 B 不包含任何真包含 A 的真闭子代数．在每个充分大的代数 B 中，存在有单位元的极大子代数，甚至余维数为 1 的闭子代数．事实上，如果 φ_1 和 φ_2 是代数 B 到复数域的两个同态，$\psi=\varphi_1-\varphi_2$，那么泛函 ψ 的核是 B 的一个闭子代数 A，且 $\dim B/A=1$．类似地，对于"点微分"来说，即对于满足 $\psi(fg)=\psi(f)\varphi(g)+\psi(g)\varphi(f)$（其中 φ 是可乘泛函）的泛函 ψ 来说，其核是余维数为 1 的子代数．在复的情形，这些例子就是所有可能有的余维数为 1 的子代数．特别是，代数 $C(X)$ 的每个这样的子代数不能分离紧统 X 的点，因为在 $C(X)$ 上没有任何微分（即使是不连续的）．对所有有限维的子代数都有类似的描述．

单位圆周上的在单位圆盘中有解析延拓的连续函数的代数 A 是单位圆周上的连续函数代数的极大子代数．这一论断可看作 Stone-Weierstrass 逼近定理的推广，后者断言：包含 A 与函数 $\bar{z}$ 的 $C(\Gamma)$ 的闭子代数与 $C(\Gamma)$ 重合，这里 $\Gamma=\{z:|z|=1\}$．代数 $L_+^1(\mathbf{R})=\{f\in L^1(\mathbf{R})$：当 $t<0$ 时，$f(t)=0\}$ 是 $L^1(\mathbf{R})$ 的闭子代数；这个子代数是极大的．

设 α 是无理数，A_α 是由在二维环面上有下述性质的所有连续函数构成的代数：对于满足 $m+n\alpha<0$ 的 m，n，其 Fourier 系数 $c_{mn}=0$．这个代数是环面上的所有连续函数的代数的极大子代数．环面是代数 A_α 的 Шилов 边界，且 A_α 是 Dirichlet 代数．如果把环面看作 $\mathbf{C}^2$ 中的单位双圆盘的骨架，那么 A_α 的极大理想空间可看作是与双圆盘的由方程 $|z_1|=|z_2|^\alpha$ 来描述的子集恒同的．点 $(0,0)$ 不属于 Шилов 边界，但它是一个单点 Gleason 部分（在一致代数上的两个可乘泛函 φ_1 和 φ_2 属于同一个 Gleason 部分，由定义，是指 $\|\varphi_1-\varphi_2\|<2$）．尽管极大理想空间的实维数等于 3，代数 A_α 在极大理想空间上仍然是解析的（在唯一性意义下：如果 $\hat{f}(\xi)=0$ 对于非空开集中的点都成立，则 $f=0$）．在对应的多圆盘中有解析延拓的 n 维环面上的连续函数代数当 $n>1$ 时不是极大的，但它在关于环面的全纯自同构不变的子代数类中是极大的．

参考文献见 **Banach 代数** (Banach algebra)．

Е. А. Горин 撰　史树中 译

交换群 [commutative group；коммутативная группа]

同 **Abel 群** (Abelian group)．

交换群概形 [commutative group scheme；коммутативная групповая схема]

基概形 S 上的群概形 G，它在任意 S 概形上的值是一个 Abel 群．交换群概形的例子是 **Abel 概形** (Abelian scheme) 以及**代数环面** (algebraic torus)．代数环面在群概形理论范围内的推广是下述概念．一个交换群概形称为乘型群概形 (group scheme of multiplicative type)，如果对任意一点 $s\in S$，存在开邻域 $U\ni s$ 以及一个绝对平坦的拟紧态射 $f: U_1\to U$，使得交换群概形 $G_1=G\times_U U_1$ 在 U_1 上可对角化．这里的可对角化群概形 (diagonalizable group scheme) 是一个形如

$$D_S(M)=\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_S(M))$$

的群概形，其中 M 是一个 Abel 群，$\mathcal{O}_S(M)$ 是 M 的系数取在概形 S 的结构层 $\mathcal{O}_S$ 里的群代数．当 S 是代数闭域的谱时，上述概念归结为一个可对角化群．如果 $M=\mathbf{Z}$ 是整数加群，则 $D_S(M)$ 等同于乘法群概形 (multiplicative group scheme) $G_{m,S}$．

设 G 是 S 上群概型，它在点 $s\in S$ 上的纤维是剩余类域 $k(s)$ 上的乘型群概型．则存在 s 的邻域 U，使得 $G\times_S U$ 是 U 上乘型群概型 (Grothendieck 刚性定理 (Grothendieck rigidity theorem))．

当基概形 S 是域 k 的谱且交换群概形 G 是 k 上有限型时，它的结构已研究过．在这种情形下，交换群概形包含一个极大不变仿射群子概形，与此相应的商是一个 Abel 簇 (Chevalley 结构定理 (Chevalley structure theorem))．这种类型的任意仿射交换群概形 G 都有一个极大不变乘型群子概形 G_m，其相应的商是一个幂幺群．如果域 k 是完全域，则 $G\cong G^m\times G^u$，其中 G^u 是 G 的极大幂幺子群．

参考文献

[1] Serre, J.-P., Groupes algébriques et corps des classes, Hermann, 1959.
[2] Grothendieck, A., Demazure, M., Schémas en groupes II, Lecture Notes in Math., 152, Springer, 1970.
[3] Demazure, M., Gabriel, P., Groupes algébriques, 1, Masson, 1970.
[4] Oort, F., Commutative group schemes, Lecture Notes in Math., 15, Springer, 1966.
[5] Waterhouse, W., Introduction to affine group schemes, Springer, 1979.

И. В. Долгачев 撰

【补注】 概形 S 上的群概形(group scheme)G 是一个 S 概形,使得对于任意一个 S 概形 T, $G(T)$是一个群. 如果对所有这样的 T, $G(T)$是 Abel 群或交换群,则称 G 为交换群概形.

对每个 S 概形 T, 乘法群概形 $G_{m,S}$ 取值为 $\Gamma(T, \mathcal{O}_T)^*$, 即 T 上函数环的可逆元所成的群. 加法群概形 $G_{a,S}$ 则取值 $G_{a,S}(T)=\Gamma(T, \mathcal{O}_T)^+$, 即 $\Gamma(T, \mathcal{O}_T)$的基础加群. S 上群概形可等价地定义为 S 概形范畴中的一个群对象.

参考文献

[A1] Serre, J.-P., Groupes algébriques et corps des classes, Hermann, 1959.

陈志杰 译

交换环 [commutative ring; коммутативное кольцо]

一个环,其中乘法是可交换的(见**交换性**(commutativity)). 有单位元的结合交换环的理论被称为**交换代数**(commutative algebra). 非结合交换环的例子之一是 Jordan 环(见 **Jordan 代数**(Jordan algebra)).

О. А. Иванова 撰 冯绪宁 译

交换性 [commutativity; коммутативность]

代数运算 (algebraic operation) 的性质之一. 对于加法和乘法,交换性由下列公式来表示:

$$a+b=b+a \quad 和 \quad ab=ba.$$

二元运算 $*$ 是交换的(或者,换句话说,满足交换律 (law of commutativity)),如果在给定的代数系中,恒等式 $a*b=b*a$ 成立.

Д. М. Смирнов 撰 张鸿林 译

换位子 [commutator; коммутатор], 具有倍算子的群中两元素 a 和 b 的

元素

$$-a-b+a+b.$$

对于没有倍算子的群(这时运算通常称为乘法),两个元素 a 和 b 的换位子是元素 $a^{-1}b^{-1}ab$. 群 G 中所有换位子的集合生成一个子群,称为 G 的**换位子群** (commutator subgroup).

在结合代数中,元素 $[x,y]=xy-yx$ 称为 x 和 y 的 Lie 积 (Lie product) 或换位子 (commutator).

О. А. Иванова 撰 石生明 译 许以超 校

换位子群 [commutator subgroup; коммутант группы], 导出群 (derived group), 下中心列的第二项

群 G 的元素的全部换位子生成的子群, 见**换位子** (commutator). G 的换位子群通常用 $[G,G]$, G' 或 $\Gamma_2(G)$ 表示. 换位子群是**全特征子群** (fully-characteristic subgroup), 且包含换位子群的任何子群是正规子群. G 对于某正规子群的商群是 Abel 群,当且仅当这个正规子群包含 G 的换位子群.

环 R 的换位子理想 (commutator ideal of a ring) 是由所有乘积 ab $(a, b\in R)$ 生成的理想,它也称为 R 的平方 (square), 用 $[R,R]$ 或 R^2 表示.

以上两个概念都是多算子 Ω 群 (multi-operator Ω-group) G 的换位子群概念的特殊情况,这种群被定义成是由所有换位子及形如

$$-a_1\cdots a_n\omega-b_1\cdots b_n\omega+(a_1+b_1)\cdots(a_n+b_n)\omega \quad (*)$$

的所有元素生成的理想,其中 ω 是 Ω 中的 n 元运算,而

$$a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n\in G.$$

Н. Н. Вильямс, О. А. Иванова 撰

【补注】 在环被考虑成算子 Ω 群的情形, 换位子 (基础交换群的) 全是零, 于是换位子理想是由全体元素 $-a_1a_2-b_1b_2+(a_1+a_2)(b_1+b_2)=a_1b_2+a_2b_1$ 生成的理想.

更一般地,对全部 3 种情况,定义两个 Ω 子群 A, B 的换位子群 (理想) $[A,B]$, 为所有换位子 $[a,b]$ $(a\in A, b\in B)$ 及所有元素 $(*)$ 生成的理想, 其中 $a_1,\cdots,a_n\in A$, $b_1,\cdots,b_n\in B$.

在环 R 的情形,有另一个不同的概念,它也用换位子理想 (commutator ideal) 的名字,这是由所有换位子 $ab-ba$ $(a,b\in R)$ 生成的理想. 这个理想是关于 R 到交换环的同态的泛理想. 即,若 ι 是这个理想, $\pi: R\to R^{ab}=R/\iota$ 是自然投影,则对 R 到交换环 A 的每个同态 $g: R\to A$, 存在唯一同态 $g': R^{ab}\to A$, 使得 $g=g'\circ\pi$ (g 通过 π 唯一地分解). 这类似于下面的性质: 对通常的群, 映射 $G\to G^{ab}=G/[G,G]$ 关于 G 到 Abel 群的映射是泛映射, 见**泛问题** (universal problems).

参考文献

[A1] Cohn, P. M., Algebra, 2, Wiley, 1977.
[A2] Kurosh, A. G., Lectures on general algebra, Chelsea, 1963 (译自俄文).

石生明 译 许以超 校

交换算子 [commuting operators; перестановочные опе-

ратоpы)

线性算子 B 与 T、其中 T 是一般类型的、而 B 是有界的,使得

$$BT \subseteq TB \tag{1}$$

(符号 $T \subseteq T_1$ 意味着 T_1 是 T 的一个扩张,见**算子的扩张**(extension of an operator)).这个交换关系记作 $B \cup T$.它满足下面的规则:

1) 如果 $B \cup T_1$, $B \cup T_2$, 则 $B \cup (T_1+T_2)$, $B \cup T_1T_2$;

2) 如果 $B_1 \cup T$, $B_2 \cup T$, 则 $(B_1+B_2) \cup T$, $B_1B_2 \cup T$;

3) 如果 T^{-1} 存在,那么 $B \cup T$ 蕴涵 $B \cup T^{-1}$;

4) 如果 $B \cup T_n$, $n=1, 2, \cdots$, 则 $B \cup \lim T_n$;

5) 如果 $B_n \cup T$, $n=1, 2, \cdots$, 则 $\lim B_n \cup T$, 这里假定 $\lim B_n$ 是有界的, 而 T 是闭的.

如果两个算子定义于全空间上,则条件(1)化为通常的条件:

$$BT = TB, \tag{2}$$

并且不要求 B 是有界的.即使一个有界算子 B 也不必与其逆 B^{-1} 是交换的,如果后者不定义在全空间上,这一事实说明(2)的推广是恰当的.

参考文献

[1] Люстерник, Л. А., Соболев, В. И., Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965 (中译本: Л. А. 刘斯铁尔尼克, В. И. 索伯列夫, 泛函分析概要(第二版), 科学出版社, 1985).

[2] Riesz, F. and Szökefalvi - Nagy, B., Functional analysis, F. Ungar, 1955(中译本: F. 黎茨, B. 塞克佛尔维 - 纳吉, 泛函分析讲义, 科学出版社, 第一卷, 1963; 第二卷, 1980).

М. И. Войцеховский 撰 李炳仁 译

紧群 [compact group; компактная группа]

一个**拓扑群**(topological group), 作为拓扑空间是紧的. 例如, 所有有限群(在离散拓扑下)为紧群. 对代数群来说, 尽管它是紧拓扑空间(关于 Zariski 拓扑), 但是对此拓扑它不是拓扑群, 所以不是紧群.

下面的群是两类重要的紧群.

1) 局部连通紧群(locally connected compact groups). 这种紧群的例子有: 所有 n 阶复酉方阵构成的群 $U(n, C)$; 所有 n 阶实正交方阵构成的群 $O(n, \mathbf{R})$(它们的拓扑分别由域 $\mathbf{C}$ 及 $\mathbf{R}$ 的通常的模所决定的拓扑诱导而得), 更一般的例子为紧实 Lie 群.

2) 全不连通紧群(totally - disconnected compact groups). 这种紧群的例子有: $GL(n, \mathbf{Z}_p)$, 其中 $\mathbf{Z}_p$ 为 p 进整数构成之环, 而 $GL(n, \mathbf{Z}_p)$ 由所有元素在 $\mathbf{Z}_p$ 中的 n 阶可逆方阵构成之集合(其拓扑由 $\mathbf{Z}_p$ 的 p 进模所决定的拓扑诱导而得; 见**全不连通空间**(totally-disconnected space)).

任一全不连通紧群都是投射有限群(profinite group). 反之, 每一投射有限群都是全不连通紧群. 全不连通的 Hausdroff 群能够用拓扑维数零的紧群所刻画. 另一方面, 若 G 是局部连通紧群, 且为有限维的, 则 G 为实 Lie 群([1]). 一般类型的紧群的结构在某种程度上由上述两类紧群的结构所决定. 对任一有限维紧群 G, 都存在(落在 G 的中心中)零维子群 N, 使得商群 G/N 为实 Lie 群, 而且存在 G 的单位邻域, 它是群 N 和一个实局部 Lie 群的直积(见**局部 Lie 群**(Lie group, local)). 每个连通的有限维紧群可表为 $(P \times C)/Z$, 其中 P 为单连通的实紧半单 Lie 群, C 为有限维的连通交换紧群, Z 为有限的中心正规子群, 它和 C 之交为单位元素. 连通紧实 Lie 群的结构的研究就是它们的完全分类(见**紧 Lie 群**(Lie group, compact)); 交换紧群的结构在 Понтрягин 对偶理论中已经清楚了. 任何紧群(不必有限维)是紧实 Lie 群的射影极限([2]). 上面两类紧群的拓扑结构如下: 每个局部连通的有限维紧群是一个拓扑流形, 而每个具有可数基的无限零维紧群同胚于一个完满 Cantor 集.

紧群结构的研究基于如下事实: 每个紧群 G 具有一组足够多的有限维线性表示(finite - dimensional linear representations). 即对任意元素 $g \in G$, 存在一个有限维的连续线性表示 ρ, 使得 $g \notin \operatorname{Ker} \rho$. 这一事实是紧群的线性表示的发展良好的一般理论的重要结果之一. 这个理论本质上用了如下事实: 每个紧群都有双边不变测度 $\mu(g)$(称为 **Haar 测度**(Haar measure)). 它使我们能在 G 上定义不变积分. 这个理论最重要的事实为: 紧群 G 在准 Hilbert 空间上每个连续表示等价于一个酉表示. 设 $L_2(G)$ 为 G 上关于不变测度 $\mu(g)$ 的平方可积复值函数构成的 Hilbert 空间. 群 G 以左平移与右平移作用在函数上决定了 $L_2(G)$ 的一种左 G 模与右 G 模结构. 对应的表示称为 G 的左正则表示(left regular representation)和右正则表示(right regular representation); 它们是酉表示且互相酉等价. 记 $\{R^\alpha : \alpha \in I\}$ 为紧群 G 的所有互不等价的有限维不可约酉表示的集合, 记 $m_{ij}^\alpha(g)$ $(\forall g \in G)$ 为表示 R^α 在某个标准正交基下的矩阵之第 i 行、第 j 列元素, 则函数 $m_{ij}^\alpha(g)$ 在 $L_2(G)$ 中, 且 $m_{ij}^\alpha(g)$; $i, j=1,2,\cdots,n_\alpha$, $n_\alpha=\dim R^\alpha$, $\alpha \in I$ 构成 $L^2(G)$ 的一组完全正交系, 其中 $m_{ij}^\alpha(g)$ 之模为 $n_\alpha^{-\frac{1}{2}}$. G 上任意复值连续函数能用函数 $m_{ij}^\alpha(g)$ 之有限线性组合一致逼近到所期望的准确程度(**Peter - Weyl 定理**(Peter - Weyl theorem)). 有限维不可约酉表示的特征标互相正交且有模 1. 有限维连续酉表示等价当且仅当它们的特征标相等. 有限维连续酉表示不可约当且仅当它的特征标(在 $L_2(G)$ 中)的模等于 1. 群 G 在 Hilbert 空间上不可约连续酉表示都是有限维的. 群 G 在 Hilbert 空间上的每个连续酉表示是酉表示的正交直和,

此直和以有限维不可约酉表示的倍数为因子，特别，表示 R^α 嵌入到右正则表示中之重数为 $n_\alpha=\dim R^\alpha$；最后，在 G 模 $L_2(G)$ 中所有同构于 R^α 的 G 子模之和恰好由所有 $m_{ij}^\alpha(g)$ $(1\leqslant i, j\leqslant n_\alpha)$ 线性生成.

参考文献

[1] Понтрягин, Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973（中译本：Л. С. 邦德列雅金，连续群，科学出版社，1978）.

[2] Weil, A., L'Intégration dans les groups topologiques et ses applications, Hermann, 1940.

[3] Наймарк, М. А., Теория представлений групп, М., 1976（英译本：Naimark, M. A., Theory of group representations, Springer, 1982）.

[4] Желобенко, Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1970（英译本：Zhelobenko, D. P., Compact Lie groups and their representations, Amer. Math. Soc., 1973）.

B. Л. Попов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hewitt, E. and Ross, K. A., Abstract harmonic analysis, 1–2, Springer, 1970.

[A2] Montgomery, D. and Zippin, L., Topological transformation groups, Interscience, 1955.

[A3] Bourbaki, N., Elements of mathematics, Lie groups and Lie algebras, Addison-Wesley, 1975（译自法文）.

许以超 译　石生明 校

紧格元 [**compact lattice element**; **компактный элемент решетки**]

格 L 的元素 a，由条件

$$a \leqslant \bigvee_{j\in J} x_j,\quad x_j\in L$$

可得

$$a \leqslant x_{j_1} \vee \cdots \vee x_{j_k},$$

其中 $\{j_1, \cdots, j_k\}$ 是 J 的某个有限子集.

T. C. Фофанова 撰　戴执中 译

紧映射 [**compact mapping**; **бикомпактное отображение**]

一个空间到另一空间的映射，使每点的原象都是紧的(见**紧空间**(compact space))．在对映射的各种限制中，紧性的要求是格外有用的．首先要提到开紧映射(见**开映射**(open mapping))，**完满映射**(perfect mapping)，商紧映射(见**商映射**(quotient mapping))．紧映射的一个特别重要的情形是**有限对一映射**(finite-to-one mapping)．关于完满映射，拓扑性质经常是最稳定的，它们是在所有 Hausdorff 空间类中的紧统的连续映射的自然类比．紧映射的积是紧映射．

参考文献

[1] Александров, П. С.,《Успехи матем. наук》, 19 (1964), 6(120), 3–46.

[2] Архангельский, А. В.,《Успехи матем. наук》, 21 (1966), 4(130), 133–184.

А. В. Архангельский 撰

【补注】一些数学家(特别是拓扑学家)用映射这个词表示连续映射．本条目也是这样用的．

参考文献

[A1] Burke, D. K., Closed mappings, in G. M. Reed (ed.): Surveys in general topology, Acad. Press, 1980, 1–32.

[A2] Arkhangel'skiĭ, A. V. and Ponomarev, V. I., Fundamentals of general topology, problems and exercises, Reidel, 1984（译自俄文）.

方嘉琳 译

紧开拓扑 [**compact-open topology**; **бикомпактно открытая топология**]

一个拓扑空间到另一个拓扑空间中的映射集合上的一种拓扑．设 F 是拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的某个映射集合，序对 (X_1, U_1)，…，(X_n, U_n) 的任意有限族，其中 X_i 是 X 的紧 Hausdorff 子集，U_i 是 Y 的开子集 $(i=1, 2, \cdots, n)$，决定映射 $f\in F$ 的子集，使对所有 i，$f(X_i)\subset U_i$；所有这种集族是 F 上紧开拓扑的基．紧开拓扑的重要性是由于它们是局部紧交换群的 Л. С. Понтрягину 对偶理论中的基本成分，并参与斜积的构造．如果 Y 是 Hausdorff 空间，则紧开拓扑也满足 Hausdorff 分离公理．如果所有映射 $f\in F$ 是连续的且 Y 是完全正则空间，则赋予紧开拓扑的 F 是完全正则的．假设所有映射 f 是连续的，X 是局部紧 Hausdorff 空间，则 F 上的紧开拓扑是容许的或者与连续性是相容的，即由公式 $\varphi(f,x)=f(x)$ 定义的映射 $\varphi: F\times X\to Y$ 是连续的，且紧开拓扑是 F 上使 φ 是连续的所有拓扑中的最小(最弱)者．在这方面紧开拓扑比点态收敛拓扑好，因后者通常弱于前者，并且在此情形下不是容许的．此外，Hausdorff 紧统 X 到自身的同胚群赋予紧开拓扑，是连续作用在 X 上(在上述意义下)的拓扑群，这是基本重要的．任何局部紧 Hausdorff 空间到自身的同胚群关于紧开拓扑未必是拓扑群(可以证明关于这个拓扑到逆元的变换是不连续映射)，但如果局部紧 Hausdorff 空间 X 是局部连通的，则紧开拓扑又使 X 到本身的所有同胚的群成为连续作用于 X 上的拓扑群．这是一个重要结果，因为所有流形是局部紧且局部连通的．

参考文献

[1] Kelley, J. L., General topology, Springer, 1975（中译本：J. L. 凯莱，一般拓扑学，科学出版社，1982）.

[2] Понтрягин, Л. С., Непрерывные группы, 2 изд., М., 1954（中译本：Л. С. 邦德列雅金，连续群，科学出版社，1957）.

[3] Steenrod, N. E., The topology of fibre bundles, Princeton Univ. Press, 1951

[4] Arens, R. F., Topologies for homeomorphism groups, *Amer. J. Math.*, **68** (1946), 4, 593－610.

А. В. Архангельский, С. И. Сирота 撰　方嘉琳 译

紧算子 [**compact operator**; **компактный оператор**]

定义于一个拓扑向量空间的某个子集 M 上且取值于一个拓扑向量空间 Y 中的算子 A，它把 M 的每个有界子集映射到 Y 的一个准紧集之中(见**准紧空间** (pre-compact space))．此外，如果算子 A 在 M 上是连续的，则称它在这个集合上是完全连续的 (completely continuous)．如果 X 与 Y 是 Banach 空间，或更一般的有界型空间，且算子 $A:X\to Y$ 是线性的，则紧算子与完全连续算子的概念是相同的．如果 A 是紧的，而 B 是连续算子，那么 $A\circ B$ 与 $B\circ A$ 是紧算子，因此紧算子的集合是所有连续算子构成的环中的一个双侧理想．特别，一个紧算子没有连续逆．在算子的不动点理论与它的谱的研究中，紧性起着本质的作用，这时它有一系列"好的"性质．

紧算子的一些例子是 Fredholm 积分算子(见**积分算子** (integral operator))

$$Ax=\int_a^b K(t,s)x(s)\,ds;$$

Hammerstein 算子

$$Ax=\int_a^b K(t,s)g(s,x(s))\,ds;$$

以及 Урысон 算子

$$Ax=\int_a^b K(t,s,x(s))\,ds,$$

以上算子均在一定的函数空间之中，并且对于函数 $K(t,s)$，$g(t,u)$ 及 $K(t,s,u)$ 要加适当的限制．

参考文献

[1] Люстерник, Л. А., Соболев, В. И., Элементы функционального анализ, 2 изд., М., 1965 (中译本：Л. А. 刘斯铁尔尼克，В. И. 索伯列夫，泛函分析概要(第二版)，科学出版社，1985).

[2] Yosida, K., Functional analysis, Springer, 1980 (中译本：吉田耕作，泛函分析，人民教育出版社，1980).

[3] Rudin, W., Functional analysis, McGraw-Hill, 1973.

[4] Красносельский, М. А. и др. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций, М., 1966 (英译本：Krasnosel'skiĭ, M. A., et al., Integral operators and spaces of summable functions, Noordhoff, 1976).

В. И. Соболев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Taylor, A. E. and Lay, D. C., Introduction to functional analysis, Wiley, 1980.

[A2] Dunford, N. and Schwartz, J. T., Linear operators, General theory, 1, Interscience, 1958.

李炳仁 译

列紧集 [**compact set, countably**; **компактное множество**]

拓扑空间 X 的一个子集 M，它作为该空间的子空间是列紧的(见**列紧空间** (compact space, countable))．列紧性意味着每个序列都有**聚点** (accumulation point)，即它的每个邻域都含有该序列的无限多项．

拓扑空间 X 中的子集 M 称为序列紧的 (sequentially compact)，如果它的每个序列都有收敛子序列，即如果每个序列都有收敛于 X 的某一点的子序列．

拓扑空间 X 的子集 M 称为相对(序列、列)紧的 (relatively (sequentially, countably) compact)，如果它的闭包具有相应的性质．

拓扑空间 X 的子集 M，若每个无穷序列 $\{x_i : i\in\mathbf{Z}, x_i\in M\}$ 都有一个收敛于 X 的某一点 x_0 (相应地有一个聚点)的子序列，则称为条件序列紧的 (conditionally sequentially compact) (相应地条件列紧的 (conditionally countably compact))．

М. И. Войцеховский 撰

【补注】在度量空间及具有弱拓扑的Banach空间中，紧性、序列紧性和列紧性的概念是一致的．

参考文献

[A1] Arkhangel'skiĭ, A. V. and Ponomarev, V. I., Fundamentals of general topology, problems and exercises, Reidel, 1984(译自俄文).

方嘉琳 译

紧空间 [**compact space**; **бикомпактное пространство**]

任一开覆盖均含有有限子覆盖的拓扑空间．下列叙述是等价的：1) X 是非空紧空间；2) X 中闭集的任意有心系统的交是非空的；3) X 中闭集的任意最大有心系统的交是非空的；4) X 中非空闭集的任意基数的任何递减全序序列的交是非空的；5) X 的子集的任一有心系统在 X 中有聚点；6) X 上任一超滤子在 X 中收敛；7) X 的任一无限子集 M 在 X 中存在完全聚点．n 维 Euclid 空间的子空间是紧的，当且仅当它是有界闭的．紧拓扑空间的概念在拓扑学和现代泛函分析中是基本的；紧空间的某些基本性质(有大量应用)在数学分析中早已考虑过，如定义在紧空间上的任一实值连续函数是有界的，且可达到它的最大值和最小值．

紧空间这个术语是 П. С. Александров 给出的．他对紧空间理论的发展作出很大贡献．该理论的基础是 П. С. Александров 和 П. С. Урысон 在《关于紧拓扑空间的备忘录》(Mémoire sur les espaces topologiques

compacts)一文中提出的.

紧空间概念是由 M. Fréchet 引入的紧空间概念的加强:非空拓扑空间是紧的(compact)——在这个词在原始意义下,而现在则称为可数紧的(countably-compact),如果它满足下列等价陈述中的任意一个:1)该空间的子集的任一可数开覆盖含有一个有限子覆盖;2)非空闭集的任一可数有心系统的交是非空的;3)非空闭集的任一可数递减序列的交是非空的;4)它的子集族的成员的任一可数有心系统有一个聚点;和5)它的任一可数子集存在完全聚点.

然而,数学的继续发展和它的应用表明紧性(compactness)(俄文"бикомпакт")的概念比紧性的原始概念更为重要,"紧性"这个术语指的是现代意义,原始意义下的紧空间,现在称为可数紧空间.当应用于度量空间时,两个概念是等价的.

紧空间的闭子空间是紧空间,任意多个紧空间的拓扑积是紧空间(Тихонов 定理(Tikhonov theorem),见 **Тихонов 积**(Tikhonov product)).在连续映射下作为紧空间的象的拓扑空间是紧空间.紧空间的这些性质表明了紧空间类关于一般拓扑的基本运算的稳定性,且紧性概念的应用主要是基于这些运算.满足 Hausdorff 分离公理的紧空间有特殊意义,称为 T_2 紧统(T_2-compacta).任意多个 T_2 紧统的拓扑积是 T_2 紧统;T_2 紧统的闭子空间是 T_2 紧统;在到 Hausdorff 空间的连续映射下,T_2 紧统的象是 T_2 紧统.T_2 紧统的下述性质是一般紧空间不具备的:任一 T_2 紧统是正规的,从而是完全正则空间.T_2 紧统中任意可数多个开的处处稠密子集的交是处处稠密的.等价的叙述是:非空 T_2 紧统不能表示为无处稠密集的可数并.T_2 紧统可刻画为在包含它的任意 Hausdorff 空间中是闭集的正则空间.这是紧空间到 Hausdorff 空间上的任一连续映射是闭的定理的关键.这个定理有一个重要推论:紧空间到 Hausdorff 空间上的任意一一连续映射是同胚.

正如 T_2 紧统类一样,紧空间类关于过渡到闭子集空间(取 Vietoris 拓扑)也是不变的;而且空间的权不增加.Cantor 集 C 的非空闭子集空间同胚于 C.在紧空间理论中,Тихонов 立方体 I^τ 和广义 Cantor 间断集 D^τ 起着特殊作用;它们分别定义为区间[0,1]的拓扑积和离散两点空间(或偶极(doublets))的积,其中 τ 是任意基数.当 $\tau=\aleph_0$ 时,则得到 Hilbert 立方体.所有 I^τ 是 T_2 紧统,且权不超过 τ 的任一 T_2 紧统同胚于立方体 I^τ 的某闭子空间.于是任一 T_2 紧统可由区间仅用两种运算得到:取拓扑积和过渡到闭子空间.T_2 紧统的所有子空间类也可更确切地描述为立方体 I^τ 的所有子空间类.另一方面,这恰是所有完全正则空间类.

拓扑空间的权(weight of a topological space)——许多一般的拓扑不变量之一.它在 T_2 紧统的情形成为特别重要的特征.T_2 紧统是可度量化的,当且仅当它有可数基.同时,若 T_2 紧统 Y 是空间 X 在连续映射下的象,则 Y 的权不大于 X 的权,即在具有可数基的空间的连续象中间没有不可度量化的 T_2 紧统.T_2 紧统 $Y=Y_1\cup Y_2$ 的权不大于 Y_1 和 Y_2 的权的较大者,即不可度量化的 T_2 紧统不能表示为具有可数基的两空间的和.最后提到的两个事实是**网(拓扑空间中集合的)**(net (of sets in a topological space))(或网络(network))概念的基础.当 T_2 紧统有基数 $\leqslant\tau$ 的网时,它也有基数 $\leqslant\tau$ 的基.特别地,任意可数 T_2 紧统有可数基,可度量化甚至同胚于区间的闭子集.可度量化的 T_2 紧统通常称为紧统(compacta).紧统上的任何度量都是完全的且全有界的,所有具有这种性质的可度量化空间都是紧统(F. Hausdorff).

可数个可度量化紧统的拓扑积与可度量化紧统的闭子集都是可度量化紧统.任一零维可度量化紧统都同胚于包含在 Cantor 集中(作为闭子集)的某紧统.任一可度量化紧统都是 Cantor 集的连续象(Александров).任一 T_2 紧统都是某零维 T_2 紧统的连续象.

提出将 T_2 紧统类分解为紧统的积,以及对它的连续象类的研究,应归于立方体 I^τ 在拓扑学中的重要作用.作为间断集 D^τ 的连续象的 T_2 紧统称为二进的(dyadic).二进 T_2 紧统类是十分广泛的:所有紧统,所有立方体 I^τ 和所有紧拓扑群的空间都是二进 T_2 紧统.二进 T_2 紧统类是 Hausdorff 拓扑空间的最小类,它关于拓扑积及连续映射封闭,且包含所有由有限个点组成的 T_2 紧统.

非二进 T_2 紧统的最简单例子是仅具有一个非孤立点的不可数 T_2 紧统.二进 T_2 紧统有一些显著的性质;例如,二进 T_2 紧统的非空开集的任意不相交系统是有限或可数的(Суслин 性质(Suslin property));满足第一可数公理的任意二进 T_2 紧统是可度量化的,即有可数基;二进 T_2 紧统的积是二进 T_2 紧统;是二进 T_2 紧统的连续象的 T_2 紧统也是二进的.

有序 T_2 紧统(ordered T_2-compacta)也具有特殊性质.连通可分有序 T_2 紧统具有可数基.不具有可数基的连通可分(二进)T_2 紧统的例子是立方体 I^τ,其中 $\tau=\mathfrak{c}$(连续统的基数).是有序 T_2 紧统连续象的任一 T_2 紧统有基,它的成员的边界是紧统.二进 T_2 紧统类和所有是有序 T_2 紧统连续象的 T_2 紧统类的交恰由所有紧统组成.

完满正规 T_2 紧统(perfectly normal T_2-compacta)是重要的紧空间.正规空间称为完满正规的(perfectly normal),如果其中任一闭集是可数多个开集的交.任一完满正规 T_2 紧统有 Суслин 性质.具有可数网且是完满正规 T_2 紧统的子空间的任一空间有可数基.二完满正规 T_2 紧统的积未必是完满正规 T_2 紧

统:空间 $X\times X$ 是完满正规 T_2 紧统,当且仅当 X 是紧统.然而,完满正规 T_2 紧统的象及完满正规 T_2 紧统和紧统的积是完满正规的. T_2 紧统是完满正规的、当且仅当它的任一子空间是终紧的.不可分有序完满正规 T_2 紧统的存在性问题等价于 **Суслин 问题** (Suslin problem).

在 T_2 紧统类中,基数值拓扑不变量之间的关联的研究构成许多研究课题.如果 T_2 紧统的基是点状可数的,则它是可数的.满足第一可数公理的任意不可数 T_2 紧统的基数等于连续统的基数.若 T_2 紧统是序列紧的且满足 Суслин 条件,则它的基数不大于连续统的基数.如果齐次 T_2 紧统 X 是序列紧的,则 $|X|\leqslant c_0$ 基数超过 c 的完全可分 T_2 紧统在特殊假定下已被作成.

关于 T_2 紧统有一些与万有性概念有关的定理,(见**万有空间** (universal space)).对每个基数 τ,有权为 τ 的 T_2 紧统,使任一权不超过 τ 的 T_2 紧统都可由同胚嵌入其中.如 I^{τ} 就显示了这个性质.当权及维数 dim 或 Ind 固定时也取得类似结果:任一基数 τ 及自然数 n,存在权为 τ 和维数为 n 的 T_2 紧统 $\Pi^{n\tau}$ 和 $\Psi^{n\tau}$ ($\dim \Pi^{n\tau}$ 和 $\mathrm{Ind}\Psi^{n\tau}$),使任一权不超过 τ 和维数不超过 n 的 T_2 紧统都能同胚嵌入 $\Pi^{n\tau}$(或 $\Psi^{n\tau}$)中. D^{τ} 可用作 $\Pi^{0\tau}$ 和 $\Psi^{0\tau}$.如果承认广义连续统假设有效,则取得对偶结果:对任一基数 τ,存在权为 τ 的零维 T_2 紧统 X 可连续映射到任一权不超过 τ 的 T_2 紧统上.

涉及 T_2 紧统的连续映射的一般拓扑方面,已被格外深入细致的研究且获得许多结果.比如,若 X 和 Y 是 T_2 紧统,且 $\varphi:X\to Y$ 是使 $\varphi(X)=Y$ 的连续映射,则存在 X 的闭子空间 X_1,使 $\varphi(X_1)=Y$,且使限制 $\varphi|_{X_1}:X_1\to Y$ 是**不可约映射** (irreducible mapping).这说明不可约映射起着基本作用.对于任意给定的 T_2 紧统 X,在容许到 X 上的不可约映射的所有 T_2 紧统 Z 的集合 $N(X)$ 中,存在 T_2 紧统 $\dot{X}$,可以不可约映射到 $N(X)$ 中任一 T_2 紧统上.这个 T_2 紧统 $\dot{X}$ 称为 T_2 紧统 X 的绝对形 (见正则拓扑空间的**绝对形** (absolute));它在同胚意义下唯一确定. T_2 紧统同胚于它的绝对形,当且仅当它是极不连通的 (见**极不连通空间** (extremally disconnected space)).有许多不连通 T_2 紧统,每个 T_2 紧统对应的绝对形都是极不连通 T_2 紧统. T_2 紧统的不可约映射由它的绝对形的同胚确定.它们有一个独具特征的结构;特别地,所有极不连通 T_2 紧统是非齐次的.两个 T_2 紧统称为共绝对形,如果它们的绝对形是同胚的.这里主要问题之一是找出拓扑空间的共绝对形的有效内蕴准则.注意,绝对形理论应用的自然范围比 T_2 紧统类大得多.

除了绝对形的概念外不可约映射在前后关联上也是重要的.众所周知,可度量化紧统之间的所有不可约映射都含有一个一对一点的处处稠密集 (A. H. Колмогоров).如果二进 T_2 紧统 X 不可约映射到权为 τ 的 T_2 紧统 Y 上,则 X 的权等于 τ.

T_2 紧统的开映射也是重要的.如果两个无限 T_2 紧统是由开的有限对一的映射联系着,则它们的权相等.然而,存在一个从不可度量化的完全正规 T_2 紧统到可度量化紧统上的开的可数对一映射.对任一这种映射,存在一个处处稠密点集,它的某邻域是由同胚映成的.

在维数论的结构中, T_2 紧统已被广泛地研究过.关系式 $\dim X\leqslant \mathrm{ind}\, X$ 对任一 T_2 紧统 X 成立 (П. С. Александров).存在一个满足第一可数公理的 T_2 紧统 X (因而,其基数不超过连续统的基数),使 $\dim X\neq \mathrm{ind}\, X\neq \mathrm{Ind}\, X$,但对所有完满正规 T_2 紧统 $\mathrm{ind}\, X=\mathrm{Ind}\, X$.对比下列二定理是有趣的: 1) 开的可数对一的映射不增加 T_2 紧统的维数; 2) 表示定理,即任一正维数的 T_2 紧统是某个一维 T_2 紧统在一个开-闭连续映射下的象,其中任一点的原象都是零维的.下述因子分解定理是重要的:设 $f:X\to Y$ 是连续映射, X 和 Y 是 T_2 紧统, $f(X)=Y$, $\dim X\leqslant n$,且 Y 的权最多是 τ;则存在 T_2 紧统 Z 和连续映射 $\varphi:X\to Z$ 及 $\psi:Z\to Y$,使 $f=\psi\varphi$, $\dim Z\leqslant n$ 且 Z 的权小于或等于 τ.

紧空间和任意拓扑空间之间的关系形成紧化理论的主题 (见**紧化** (compactification)).

参考文献

[1] Александров, П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, М., 1948 (中译本: П. С. 亚历山大罗夫,集与函数的泛论初阶,高等教育出版社,1955).

[2] Александров, П. С., Пасынков, Б. А., Введение в теорию размерности, М., 1973.

[3] Engelking, R., Outline of general topology, Amst., 1968 (译自波兰文).

[4] Александров, П. С., Урысон, П. С., 《Тр. Матем. ин-та АН СССР》, **31** (1950), 1-96.

[5] Александров, П. С., 《Матем. сб.》, **5** (1939), 2, 403-424.

[6] Архангельский, А. В., 《Докл. АН. СССР》, **126** (1959), 2, 239-241.

[7] Архангельский, А. В., 《Труды Моск. Матем. об-ва》, **13** (1965), 3-55.

[8] Архангельский, А. В., 《Докл. АН СССР》, **184** (1969), 4, 767-771.

[9] Мищенко, А. С., 《Докл. АН СССР》, **144** (1962), 5, 985-988.

[10] Gleason, A. M., Projective topological spaces, *Illinois J. Math.*, **2** (1958), 4A, 482-489.

[11] Архангельский, А. В., 《Докл. АН СССР》, **187** (1969), 5, 967-970.

[12] Mardešić, S., Images of ordered compacta and locally peripherically metric spaces, *Pacific J. Math.*, **23** (1967), 557-568.

[13] Колмогоров, А. Н., 《Докл. АН СССР》, 30(1941), 6, 477−479.

[14] Архангельский, А. В., 《Докл. АН СССР》, 174(1967), 6, 1243−1246.

[15] Hanf, W., On some fundamental problems concerning isomorphism of Boolean algebras, *Math. Scand.*, 5. (1957), 205−217.

[16] Архангельский, А. В., Пономарев, В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974(英译本: Arkhangel'skiǐ, A. V, and Ponomarev, V. I., Fundamentals of general topology, problems and exercises, Reidel, 1984). А. В. Архангельский 撰

【补注】 有关紧性的术语是混乱的,从一些教科书中可以看到苏联的用法. 特别是,在俄文文献中"компактный"一词常常表示可数紧的.

在西方"compact"一词表示紧的和 T_2 紧的,以前有时称为拟紧的 (quasi compact). 在拓扑学中,多数西方作者将紧的和紧 Hausdorff 的 (T_2 紧的) 同等对待,因后者具有较好的性质;另一方面,例如在代数几何中,紧这个术语通常不包含 T_2.

关于紧性的固有性质,即每个开覆盖有有限子覆盖,也常称为 Heine - Borel 性质,亦见 **Borel - Lebesque 覆盖定理** (Borel - Lebesque covering theorem).

性质"终紧的"在西方通常称为 Lindelöf (或 Lindelöf 紧的 (Lindelöf compact))(见 **Lindelöf 空间** (Lindelöf space)).

集族 $\mathscr{S}$ 是有心的 (centred), 如果 $\mathscr{S}$ 的任意有限个成员的交是非空的; 这时 $\mathscr{S}$ 也称为具有有限交性质 (finite intersection property). 在这方面, 出现了术语有向的 (directed) 和滤过的 (filtered). 更精确和更一般地, 设 $(A, <)$ 是**偏序集** (partially ordered set). 如果对所有 $a,b\in A$, 有 $c\in A$, 使 $a<c$, $b<c$, 则集合 A 称为上有向的 (upper directed); 如果对所有 $a, b\in A$, 有 $c\in A$, 使 $c<a, c<b$, 则集合 A 称为下有向的 (lower directed). 描述这两个概念, 也使用术语右滤过的 (filtered to the right) 和左滤过的 (filtered to the left). 如果集合 $(A,<)$ 是上有向且下有向的, 则称为有向的 (directed). "有向"这个词也用于仅表示上有向(依上下文而定), 同样的用法也适用于"滤过".

拓扑学中有许多概念与紧性有密切关系([16]). 拓扑空间 X 的紧性指数 (index of compactness) 是使 X 的任一开覆盖有基数 $\leqslant\tau$ 的子覆盖的最小基数 τ. 于是, 如果空间的紧性指数是 $\aleph_0$, 则它是 Lindelöf 紧的. 关于序列紧性 (sequential compactness), 局部紧性 (local compactness), 和伪紧性 (pseudo - compactness) 等概念分别见**序列紧空间** (sequentially - compact space); **局部紧空间** (locally compact space); **伪紧空间** (pseudo - compact space). 关于仿紧性 (paracompactness) 以及各种相关概念, 诸如弱和强仿紧性, 遗传仿紧性, 星仿紧性, τ 仿紧性, 可数仿紧性等见**仿紧空间** (paracompact space). 如果空间是紧子空间的可数并, 则称为 σ 紧的 (σ - compact). 设 τ 为基数, 如果任一基数至多为 τ 的开覆盖具有有限子覆盖, 则该空间称为 τ 紧的 (τ - compact). 这当然是可数紧性的推广. 关于 $[a, b]$ 紧性, 初始紧性和终紧性等概念亦见**列紧性** (compactness, countable). 空间 X 的基 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是 π 紧的 (π - compact), 如果对所有 U_α, 边界(boundary 或 frontier) $\partial U_\alpha=F_rU_\alpha=\overline{U}_\alpha\cap(\overline{X\setminus U_\alpha})$ 是紧的. 如果空间 X 有 π 紧基, 则称 X 为 π 紧空间. 这也称为边界紧性 (peripherical compactness). 最后, 关于实紧空间 (real compact space) 的概念, 见 **Hewitt 紧化** (Hewitt compactification).

上述主要内容参看 Александров 和 Урысон 的备忘录 [A3].

参考文献

[A1] Engelking, R., General topology, PWN, 1977(译自波兰文, 校订和扩充[3]的译本).

[A2] Mardešić, S., On covering dimension and inverse limits of compact spaces, *Illinois J. Math.*, 4(1960), 278−291.

[A3] Aleksandrov, P. S. and Urysohn, P., Mémoire sur les espaces topologiques compacts, Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch., Amsterdam, 1929. 方嘉琳 译

列紧空间 [**compact space, countably; компактное пространство**]

具有**列紧性** (compactness, countable) 的拓扑空间. 可度量化的(列)紧空间称为**紧统** (compactum). 术语"可数紧空间"有时意味着满足附加分离性质的列紧空间; 而不具有附加性质的空间称为拟可数紧的 (quasi countably compact). 能表示成可数紧空间的可数并的空间称为 σ 可数紧的 (σ - countably compact). М. И. Войцеховский 撰

【补注】 本条目中所说"附加分离性质"指的是 Hausdorff 性质 (Hausdorff property). 方嘉琳 译

紧化 [**compactification; бикомпактное расширение**], 紧扩张 (compact extention)

扩张为**紧空间** (compact space) 的**拓扑空间的扩张** (extension of a topological space). 任意拓扑空间都存在紧化, 任意 T_1 空间有仍是 T_1 空间的紧化, 但**完全正则空间** (completely - regular space) 的 Hausdorff 紧化是最有趣的. 紧化通常意味着 Hausdorff 紧化, 但也考虑任意紧化. П. С. Александров ([1]) 证

明了所有局部紧 Hausdorff 空间由添加一点可以完成 T_2 紧化(见 **Александров 紧化**(Aleksandrov compactification)). П. С. Урысон([2])证明了具有可数基的所有正规空间可以嵌入 Hilbert 立方体,这意味着它有一个可数权的紧化([2]). 术语"紧化"首先由 А. Н. Тихонов([3])导入,他定义了完全正则空间类,并证明了完全正则空间且仅有这种空间具有 Hausdorff 紧化,权为 τ 的完全正则空间具有权为 τ 的 Hausdorff 紧化.

空间 X 的两个紧化 b_1X 和 b_2X 称为等价的(equivalent)($b_1X \simeq b_2X$),如果存在在 X 上恒等的同胚 $f: b_1X \to b_2X$. 嵌入 $i: X \to bX$ 本身就称为紧化. 如果承认这个定义,两个扩张 $i_1: X \to b_1X$,和 $i_2: X \to b_2X$ 等价,是指存在同胚 $f: b_1X \to b_2X$ 使 $f \circ i_1 = i_2$. 等价的紧化通常不加区分,因而空间 X 的彼此等价的紧化的类看作该空间的紧化. 在这种情形,人们可以说给定的(完全正则)空间 X 的 Hausdorff 紧化的集合 $B(X)$, 因为 X 的任一 Hausdorff 扩张的基数最多是 $2^{2^{|X|}}$, 而给定集合 Y 上的拓扑也形成基数 $\leqslant 2^{2^{|Y|}}$ 的集合.

紧化 b_2X 后继紧化 b_1X($b_1X \leqslant b_2X$), 如果存在在 X 上恒等的连续映射 $f: b_2X \to b_1X$. 此后继关系使 $B(X)$ 成为偏序集. E. Čech([4])和 M. H. Stone([5])指出集合 $B(X)$ 包含一个最大元 βX, **Stone - Čech 紧化**(Stone-Čech compactification)(或**极大紧化**(maximal compactification)).

给定完全正则空间 X 的所有 Hausdorff 紧化的内蕴描述问题,已由构造任意**邻近空间**(proximity space)的紧化解决([6]),于是证明 X 上和拓扑相容的每个邻近 δ 对应一个在 X 上诱导初始邻近 δ 的唯一紧化 $b_\delta X$, 即

$$A\bar{\delta}B \Leftrightarrow [A]_{b_\delta X} \cap [B]_{b_\delta X} = \varnothing.$$

极大紧化 βX 由下列邻近 δ 生成:

$$A\bar{\delta}B \Leftrightarrow A \text{ 和 } B \text{ 是函数可分的}.$$

局部紧 Hausdorff 空间 X 的 Александров 紧化 αX 是由邻近 δ 生成的:

$$A\bar{\delta}B \Leftrightarrow A \text{ 和 } B \text{ 有不相交的闭包,}$$
$$\text{其中至少有一个是紧的}.$$

对应 $\delta \to b_\delta$ 是与其拓扑相容的 X 上邻近的偏序集和集合 $B(X)$ 之间的同构. 对应 $\delta \to b_\delta$ 被扩张为从具有和拓扑相容的邻近的空间,关于邻近连续映射的范畴到 T_2 紧统关于连续映射的范畴的函子.

紧化理论的主要部分涉及构造它们的方法. Тихонов 指出在权为 τ 的任意完全正则空间上存在基数为 τ 的函数 $f_\alpha: X \to I_\alpha$ 的集合,使它们的对角积实现 X 到立方体 $I^\tau = \prod_\alpha I_\alpha$(见 **Тихонов 立方体**(Tikhonov cube))中的嵌入. 于是,权为 τ 的 X 的紧化取作 fX 在 I^τ 中的闭包. Čech 用所有连续函数 $f_\alpha: X \to [0, 1]$ 的对角积构造了空间 X 的极大紧化. Stone 用 Boole 代数和连续函数环构造了极大紧化.

紧化理论的基本方法之一是开集的有心系统的 Александров 方法([7]),它是最初用来构造极大紧化的,且被以后许多数学家广泛利用. 例如,它发现任意 Hausdorff 空间 X 的每个 Hausdorff 扩张都可实现为 X 中开集的有心系统的空间. 利用有心系统方法构造完全正则空间上邻近的集合和所有它的 Hausdorff 紧化的集合之间的同构. 应用这个方法从 X 上给定的从属运算构造 X 的 Hausdorff 紧化.

H. Wallman([9])构造正规空间 X 的极大紧化作为这个空间的闭集的极大有心系统空间. T_1 空间 X 的闭集的极大有心系统空间 ωX 是它的 T_1 紧化,并称为 **Wallman 紧化**(Wallman compactification). 这个紧化,如同 Stone - Čech 紧化,它和由于组合结构和可扩张空间之间的相似性,极大性(在某种意义下)及扩张连续映射的可能性得出的其他紧化不同.

闭集有心系统的方法能推广 Wallman 紧化. 在完全正则空间 X 中,设给定是集环的一个闭集基 $\mathfrak{B}$, 即包含其中任二元素的交和并. 基 $\mathfrak{B}$ 称为正规的,如果: 1)对任一点 $x \in X$ 和不含此点的任意元素 $B \in \mathfrak{B}$, 存在基的元素 B_1 和 B_2, 使 $B_1 \cup B_2 = X$, $x \in X \setminus B_1$, $B \subset X \setminus B_2$; 及 2)对任二元素 $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$, 存在元素 $B_1', B_2' \in \mathfrak{B}$, 使 $X = B_1' \cup B_2'$, $B_1 \subset X \setminus B_1'$, $B_2 \subset X \setminus B_2'$. X 上具有已知的闭集标准基的正规基环的极大有心系统的空间是 X 的 Hausdorff 紧化,称为 **Wallman 型紧化**(compactification of Wallman type); 所有 Hausdorff 紧化都是 Wallman 型的(Ульянов 定理(Ul'yanov theorem)见[22]).

构造紧化的其他方法包括:连续函数环的极大理想方法([11]);准紧一致结构的完全化方法(见[12]和**一致空间的完全化**(completion of a uniform space));以及射影谱方法(见**环的射影谱**(projective spectrum of a ring))([10]). 与此相关,已证明任一 T_1 空间 X 的极大有限谱的上确界是它的 Wallman 紧化 ωX, 而且这个界和极大紧化 βX 一致当且仅当 X 是**拟正规空间**(quasi-normal space).

由于紧空间在拓扑学和泛函分析中的基本作用,说明紧化理论的重要性. 拓扑空间嵌入 T_2 紧统的可能性,说明能借助 T_2 紧统的通常比较简单的性质描述完全正则空间的许多性质. 比如满足第一可数公理的正规空间是同胚的,当且仅当它们的极大紧化是同胚的. 因此,满足第一可数公理的正规空间的研究,原则上可以归结为 T_2 紧统的研究. 可扩张空间的拓扑不变量常常能用空间嵌入它的紧化的简单方法来叙述(见**羽状空间**(feathered space)); **完全性(拓扑学中的)**(completeness (in topology)); **正规嵌入子空间**(normally-im-

bedded subspace). 比如为了空间X是可数型空间,即空间X中任意T_2紧统都含在可数特征的T_2紧统中，当且仅当对某(因之对所有)紧化bX,其剩余$bX\setminus X$是终紧的.可数型空间X也是有趣的，因它们通常接近于它们的所有紧化bX的剩余，它意味着在剩余中任二不相交闭集在bX中有不相交邻域. 关于紧化中的嵌入，它是对偶于可数型空间的终紧空间. 空间X是终紧的，当且仅当它的一个(因而所有的)紧化bX具有下述性质：对任意T_2紧统$\Phi\subset bX\setminus X$，在剩余中存在一个包含它的$T_2$紧统$F$，它在$bX$中有可数特征.

紧化在维数论中是特别重要的. 特别表现在对每个正规空间X,有等式

$$\dim\beta X = \dim X,\quad \operatorname{Ind}\beta X = \operatorname{Ind} X.$$

对每个完全正规空间X，有等式

$$\operatorname{ind}\beta X = \operatorname{ind} X.$$

与紧化的维数性质有关的最重要定理之一，就是具有可数基的n维正规空间有同(可数)权且同维数的Hausdorff紧化的定理([16]). 它证明了([20])在具有可数基的正规空间X中，仅有**边界紧空间**(peripherally-compact space)有具有零维(在维数ind的意义下)剩余$bX\setminus X$的紧化bX(见Freudenthal紧化(Freudenthal compactification)). 在该空间的这类紧化中有最大的. 这两个结果是大量研究的出发点. 于是,证明了([8])对于具有$\dim\beta X\leqslant n$,权为τ的任何完全正则空间X，特别地,对于具有$\dim X\leqslant n$,权为τ的任何正规空间X,存在权为τ且维数$\dim bX\leqslant n$的紧化bX. 另一方面,完全正则空间X是边界紧的，当且仅当X有一个紧化,它的剩余零维嵌入其中([8]). 这个剩余$bX\setminus X$称为零维嵌入于bX(或在bX中相对零维),每当存在bX的基$\mathfrak{B}$使对所有$\Gamma\in\mathfrak{B}$

$$(bX\setminus X)\bigcap \operatorname{fr}_{bX}\Gamma = \varnothing,$$

其中$\operatorname{fr}_{bX}\Gamma=\operatorname{cl}_{bX}(\Gamma)\setminus\Gamma$是$\Gamma$的边界(或界).

在紧化理论中明显重要的是**完满紧化**(perfect compactification)([15]). 空间X的所有完满紧化bX是极大紧化βX的单调象(特别地βX本身也是完满的)，并且象βX一样，组合结构类似于X，而不象βX的情形，$\dim X=\dim bX$并不总成立,甚至对度量空间X亦然. 所以βX是极大完满紧化，仅当X有完全不连通的剩余的紧化(特别地，当X是边界紧的)时存在极小完满紧化.在有完全不连通的剩余时,极小完满紧化是唯一的,并且是有完全不连通剩余的所有扩张的最大者.

紧化的概念在剩余的维数研究中是有用的. 若具有可数基的度量空间X嵌入具有维数$\leqslant n$的剩余$bX\setminus X$的紧统bX中，则在X中存在一个(开)基，使它的任意$n+1$个成员的边界的交是紧的([15]). 这个条件对于空间X有满足$\dim bX=\dim X$及$\dim(bX\setminus X)\leqslant n$的紧化$bX$不是充分的. 并且，若$bX$是$X$的完满紧化，$\dim bX=n$,且对任意紧集$\Phi\subset bX\setminus X$, $\dim\Phi\leqslant n-1$, 则对具有完全不连通剩余的任意紧化νX，有$\dim\nu X\geqslant n$([15]). 完满紧化和极大紧化二者对映射的可能扩张而言是有趣的. 于是,特别地,如果空间X和Y有极小完满扩张μX和μY,则任何完满映射$f: X\to Y$都可扩张为映射$\bar{f}:\mu X\to\mu Y$.

权为τ的拓扑空间X是零维的(即$\operatorname{ind}X=0$),当且仅当它有权为τ的零维紧化bX([16]),因此使$\operatorname{Ind}X=0$的权为τ的空间X有同权同维数的紧化. 对于具有$\operatorname{Ind}\beta X\leqslant n$的完全正则空间$X$，存在一个紧化$bX$，使$wbX=wX$且$\operatorname{Ind}bX\leqslant n$,这个陈述对于$\operatorname{Ind}\beta X$的超限值也是正确的($wY$表示$Y$的权). 它推得强仿紧度量空间$X$,有紧化$bX$使$wbX=wX$, $\dim bX=\operatorname{ind}bX=\dim X$,且存在空间$X$，对$X$的所有紧化有$\operatorname{ind}bX>\operatorname{ind}X$([21]).

涉及无限维空间的紧化有几个定理. 比如正规S弱无限维空间X的极大紧化βX是弱无限维的([16]). 具有弱无限维紧化且权为τ的任意完全正则空间X(特别地,权$\leqslant\tau$的任何正规S弱无限维空间X)有权$\leqslant\tau$的弱无限维紧化. 在这些定理中不容许用A弱无限维替换S弱无限维(见**弱无限维空间**(weakly infinite-dimensional space)). 比如立方体Q^ω(仅由有限个非零坐标的点组成的Hilbert**立方体**(Hilbert cube)Q^ω的子集)的递增和的所有紧化是强无限维空间([15]).

Ю. М. Смирнов([17])研究了涉及邻近空间和完全正则空间的紧化的剩余的维数dim问题. 若邻近空间P是正规邻接于$cP\setminus P$，其中cP是P的(唯一)紧化，则$\dim(cP\setminus P)$等于数k的最小者，这个数是使重数$\leqslant k+1$的加边能够内接于每个广义加边(见**空间的加边**(bordering of a space)). 可数型空间X具有紧化bX，使其剩余的维数$\leqslant n$，当且仅当在X中存在具有基本性质的，重数$\leqslant n+1$的加边结构. 而且在给定空间X中存在使剩余的维数$\leqslant n$的紧化的推论是存在剩余的维数$\leqslant n$、权为$wbX=wX$的紧化bX.

空间X的所有Hausdorff紧化的偏序集$B(X)$是完全**半格**(semi-lattice)(关于取上确界的运算). 集合$B(X)$是完全格,当且仅当X是局部紧空间. 当空间X和Y是局部紧时，格$B(X)$和$B(Y)$同构当且仅当剩余$\beta X\setminus X$和$\beta Y\setminus Y$同胚([18]). 关于格$B(X)$和$B(Y)$同构要求(完满)映射$f: X\to Y$的条件还不知道. 空间X的完满不可约原象的紧化是由空间X上θ邻近(见**邻近**(proximity))描述,且关于自然定义的序形成完全半格([19]). 空间X的完满不可约原象的紧化也与X的H闭扩张有关.

参考文献

[1] Aleksandrov, P. S. and Urysohn, P., Mémoire sur les espaces topologiques compacts, Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch. Amsterdam, 1929.

[2] Урысон, П. С., Труды по топологии и другим областям математики, 1-2, М. - Л., 1951.

[3] Tikhonoff, A. N., Ueber die topologische Erweiterung von Räumen, *Math. Ann.*, **102** (1929), 544-561.

[4] Čech, E., On bicompact spaces, *Ann. of Math.* (2), **38** (1937), 4, 823-844.

[5] Stone, M. H., Applications of the theory of Boolean rings to general topology, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **41** (1937), 375-481.

[6] Смирнов, Ю. М., 《Мат. сб.》, **31** (1952), 543-574.

[7] Александров, П. С., 《Мат. сб.》, **5** (1939), 403-424.

[8] Александров, П. С., 《Успехи матем. науки》, **15** (1960), 2, 25-95.

[9] Wallman, H., Separation spaces, *Ann. of Math*, (2), **42** (1941), 3, 687-697.

[10] Зайцев, В. И., 《Труды Моск. Матем. об-ва》, **27** (1972), 129-193.

[11] Гельфанд, И. М., Райков, Д. А., Шилов Г. Е., 《Успехи матем. наук》, **1** (1946), 2, 48-146.

[12] Samuel, P., Ultrafilters and compactifications of uniform spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **64** (1948), 100-132.

[13] Архангельский, А. В., 《Матем. сб.》, **91** (1973), 1, 78-87.

[14] Малыхин, В., 《Докл. АН СССР》, **206** (1972), 6 1293-1296.

[15A] Александров, П. С., О некоторых основных направлениях в общей топологии, 《Успехи матем. наук》, **19** (1964), 6, 3-46.

[15B] Александров, П. С., 《Успехи матем. наук》, **20** (1965), 1, 253-254.

[16] Александров, П. С., Пасынков Б. А., Введение в теорию размерности, М., 1973.

[17A] Смирнов, Ю. М., 《Матем. сб.》, **69** (1966), 1, 141-160.

[17B] Смирнов, Ю. М., 《Матем. сб.》, **71** (1966), 4, 454-482.

[18] Magill, Jr. K. D., The lattice of compactifications of a locally compact group, *Proc. London Math. Soc.* (3), **18** (1968), 231-244.

[19] Федорчук, В. В., 《Матем. сб.》, **76** (1968), 513-536.

[20] Freudenthal, H., Neuaufbau der Endentheorie, *Ann. of Math.* (2), **43** (1942), 2, 261-279.

[21] Смирнов, Ю. М., 《Докл. АН СССР》, **117** (1957), 6, 939-942.

[22] Ul'yanov, V. M., Solution of a basic problem on compactifications of Wallman type, *Soviet Math. Dokl.*, **18** (1977), 567-571.

В. В. Федорчук 撰

【补注】 空间称为**完全不连通的** (punctiform), 如果它的紧连通子集不多于一点. **有心闭集系** (centred system of closed sets) 是使任意有限交不空的闭集族; 这样的族也称为**滤过集系** (filtered system of sets) 或简称为**滤子** (filter).

参考文献

[A1] Arkhangel'skii, A. V. and Ponomarev, V. I., Fundamentals of general topology, Problems and exercises, Reidel, 1984 (译自俄文).

方嘉琳 译

紧性 [compactness; бикомпактность]

刻画一大类拓扑空间的一种性质, 它要求由一个空间的任何开覆盖中都可取出一个有限子覆盖. 具有紧性的拓扑空间称为**紧空间** (compact spaces).

А. В. Архангельский 撰 方嘉琳 译

列紧性 [compactness, countable; компактность]

拓扑空间的一个性质, 即它的每个无限子集都有聚点. 对度量空间来说, 列紧性和**紧性** (compactness) 两概念相同. 列紧性这个性质可表示为下述形式: 每个可数子集都有聚点, 以致列紧空间自然称为 $\aleph_0$ 紧的.

与此相关, 产生初始紧性和终紧性两个概念, 或更一般地, **基数区间** $[a,b]$ **中的紧性**或 $[a,b]$ **紧性** ($[a,b]$-compactness), 可表示为三个等价形式: 1) 任何基数为 $\mathfrak{m}\in[a,b]$ 的集合 $M\subset X$ 都具有**完全聚点** (complete accumulation point), 即具有点 ξ 使对其任何邻域 O_ξ, 集合 $O_\xi\cap M$ 具有和 M 相同的基数; 2) 任何闭集的序型为 $\omega\in[\omega_a,\omega_b]$ 的全序系统都具有非空交; 3) 任何基数为 $\mathfrak{m}\in[a,b]$ 的开覆盖都含有基数 $<\mathfrak{m}$ 的子覆盖.

如果 a 等于 $\aleph_0$, 则 X 称为达到基数 b 的**初始紧的** (initially compact). 列紧性意味着达到 $\aleph_0$ 的初始紧的. 若 $b\geqslant a$ 是任意的, 则 X 称为从基数 a 开始的**终紧的** (finally compact); 于是, 任何具有可数基的空间都是从 $a=\aleph_1$ 开始的终紧的. 紧空间是到达任何(无限)基数的初始紧的, 同时是从任何基数开始的终紧的. 于是, 任何紧空间是列紧的, 但反之不真: 所有序数 $<\omega_1$ 的空间 $W(\omega_1)$ 都是列紧的, 但不是紧的. 空间 X 的(列)紧性不一定蕴含着序列紧性. 如在(不可度量化)空间 $I^{\mathfrak{c}}$ 中有无穷闭(因而是 Hausdorff 紧的)集不含有不稳定的收敛子序列 (见**列紧集** (compact set, countably)).

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 特别地, 任何无限集都有**聚点** (accumulation point) (或**极限点** (limit point), 它们是同样的) 的性质等价于在**紧空间** (compact space) 条目中定义的"**可数紧的**" (countably compact) 这个性质, 即每个可数覆盖都有有限子覆盖的性质. 一个空间是紧的,

如果它的每个无限子集都有**完全聚点**（complete accumulation point）（见[A1]）．终紧（从 $\aleph_1$）空间在西方称为 Lindelöf 空间（Lindelöf space）．

在本条目中 ω_a 是基数 a 的第一序数，而在西方的标准用法中，ω_a 是第 a 个无限基数．

关于紧性，俄文术语和西方术语不同．在俄文文献中的"紧的"（компактный）是西方术语中的"列紧的"（countably compact），而"双紧的"（бикомпактный）等于西方的"紧 Hausdorff 的"．

本条目也表明俄文"双紧的"（бикомпактный）一词的起源．空间是双紧的，如果它既是初始紧的又是终紧的．

参考文献

[A1] Arkhangel'skiĭ, A. V. and Ponomarev, V. I., Fundamentals of general topology, Reidel. 1984. Chapt. 3, Problem 48 and pp. 165, 166.

【译注】 任何无限子集都有聚点(列紧性)与子集的任何可数覆盖都含有有限子覆盖(可数紧性)这两种性质并不等价．可数紧空间必为列紧空间，T_1 列紧空间必为可数紧空间．一般的列紧空间未必是可数紧空间．

方嘉琳 译

紧性原理 [**compactness principle；компактности принцип**]，复变函数论中的

解析函数族的紧性条件．复平面的区域 D 中全纯函数的无限族 $\Phi=\{f(z)\}$ 称为紧的(compact)，如果从任何序列 $\{f_k(z)\}\subset\Phi$ 中能选出子列收敛于 D 内一解析函数，或(与之等价地)在 D 中内闭一致收敛即在任一紧集 $K\subset D$ 上一致收敛．紧性原理是 P. Montel 在1927年提出的(见[1])：为使族 Φ 是紧的，其充分必要条件是它在区域 D 内闭一致有界，即在任何紧集 $K\subset D$ 上一致有界．

设 H_D 是空间 $\mathbf{C}^n$ $(n\geq1)$ 的区域 D 中全纯函数的复向量空间，具有在紧集 $K\subset D$ 上一致收敛的拓扑，则紧性原理可叙述成更加抽象的形式：闭集 $\Phi\subset H_D$ 是 H_D 中的紧集，当且仅当它在 H_D 内有界．解析函数的紧族概念同**正规族**(normal family)有密切关系．亦见 **Vitali 定理**(Vitali theorem)．

参考文献

[1] Montel, P., Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications, Gauthier-Villars, 1927.

[2] Malgrange, B., Lectures on the theory of functions of several complex variables, Tata Inst. Fundam. Res., 1958.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, т. 1, М., 1968 (中译本：А. И. 马库雪维奇，解析函数论，高等教育出版社，1957)．

杨维奇 译

紧统 [**compactum；компакт**]

可度量化的**紧空间**(compact space)．紧统的例子有：线段、圆、n 维立方体、球或球面、**cantor 集**(cantor set)、**Hilbert 立方体**(Hilbert cube)；n 维 Euclid 空间不是紧统，其子集是紧统，当且仅当它是有界闭的．紧统的闭子集是紧统且每个紧统同胚于 Hilbert 立方体的闭子集（Урысон 定理（Urysohn theorem））．紧统到 Euclid 空间中存在同胚的必要和充分条件是紧统为有限维的（Понтрягин - Nöbeling 定理（Pontryagin - Nöbeling theorem））．紧统的连续象是 T_2 空间时是紧统，且每个紧统都是 Cantor 集的连续象（Александров 定理（Aleksandrov theorem））．有限个或可数个紧统的积是紧统．任何紧统都是可分的；在 Hausdorff 紧空间中，紧统由它们具有有限或可数基的性质刻画．紧统也可由与它的拓扑相容的任何度量全有界这一事实来刻画（Hausdorff 定理（Hausdorff theorem））．

紧统形成拓扑空间的最重要类型之一．可度量化空间 X 是紧统，这个性质等价于下列性质中的任意一个．

1) 由空间 X 的任意可数开覆盖中可选出有限子覆盖（区间覆盖线段的 Heine - Borel - Lebesgue 覆盖定理的类比；亦见 Borel - Lebesgue **覆盖定理**（Borel - Lebesgue covering theorem））．

2) X 的非空闭子集的任何可数系统 F_i，其中 $F_{i+1}\subset F_i$ $(i=1,2,\cdots)$ 必有非空交(Cantor 区间套原理的推广)．

3) X 中任何点列在 X 中有收敛子列（Bolzano-Weierstrass 定理的推广）．

4) X 的任意无限子集在 X 中至少有一个极限点（Bolzano - Weierstrass 定理的推广）．

5) X 上任何连续函数是有界的（Weierstrass 定理的推广）．

6) X 上的任何连续函数在某点上可达到它的最大(小)值（Weierstrass 定理的推广）．

7) X 关于和它的拓扑相容的任意度量是全有界且完全的．

紧统 X 上的任意连续函数，关于和 X 的拓扑相容的任何度量是一致连续的（Heine - Cantor 定理的推广）．

参考文献

[1] Александров, П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, М.-Л., 1948 (中译本：П. С. 亚历山大罗夫，集与函数的泛论初阶，高等教育出版社，1955)．

[2] Колмогоров, А. Н., Фомин, С. В., Элементы теории

функций и функционального анализа, 4 изд., М., 1976 (英译本: Kolmogorov, A. N. and Fomin, S. V., Elements of the theory of functions and functional analysis, Graylock, 1957-1961)

Б. А. Пасынков 撰 方嘉琳 译

紧统, T_2 [compactum, T_2; бикомпакт, T_2]

紧 Hausdorff 空间. 见紧空间 (compact space).

收敛性的比较判别法 [comparison criterion of convergence; сравнения признак сходимости]

1) 正项级数收敛性的比较判别法 (见级数 (series)).

2) 常号函数反常积分收敛性的比较判别法 (见反常积分 (improper integral)). 张鸿林 译

比较函数 [comparison function; сравнения функция]

用来研究整函数 (entire function) $a(z)$ 的模当 $z\to\infty$ 时增长特性的函数; 通常将 $|a(z)|$ 和某个"好的"整函数 $A(z)$ 的性状作比较. 很自然地出现如下的问题: 描述足够广的整函数集 $\mathfrak{A}=\{A(z)\}$ 使得它的元素能用作"比较的标准".

一个整函数 $A(z)=\sum_{k=0}^{\infty}A_k z^k$ 称为比较函数 (comparison function), 或 $A(z)\in\mathfrak{A}$, 如果: 1) $A_k>0$ $(k=0,1,\cdots)$; 2) 当 $k\to\infty$ 时, $A_{k+1}/A_k\downarrow 0$. 整函数 $a(z)$ 称为 A 可比较的 (A-comparable), 如果存在一个常数 $\tau(\tau>0)$, 使得

$$a(z)=O(A(\tau|z|)), \text{当 } z\to\infty \text{ 时}. \qquad (1)$$

满足关系 (1) 的数 $\{\tau\}$ 之下界 σ 称为 A 可比较整函数 $a(z)$ 的 A 型 (A-type). 有下述关于 A 型的定理: 如果整函数 $a(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k$ 与 $A(z)$ 可比较, $A(z)\in\mathfrak{A}$, 则它的 A 型 σ 能通过下式来计算

$$\sigma=\limsup_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{A_k}\right|^{1/k} \qquad (2)$$

给出比较函数类即给出问题一个完全的解答, 因为对任意的不是多项式的整函数 $a(z)$, 存在一比较函数 $A(z)$, $A(z)\in\mathfrak{A}$, 使得 $a(z)$ 与 $A(z)$ 可比较且它的 A 型为 1.

若整函数 $a(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k$ 与 $A(z)$ 可比较, $A(z)\in\mathfrak{A}$, 且它的 A 型等于 σ, 则根据 (2) 函数

$$\gamma_A(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k/A_k}{t^{k+1}}$$

在 $|t|>\sigma$ 时是解析的; 并称它与 $a(z)$ 是 A 相伴的 (A-associated). 在此情形, 对于 $a(z)$ 的广义 Borel 表示 (generalized Borel representation) 成立:

$$a(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=\sigma+\varepsilon}A(zt)\gamma_A(t)\,dt \quad (\forall\varepsilon: \varepsilon>0). \qquad (3)$$

若取 $A(z)=e^z$ 作为比较函数, 则 (3) 便是指数型 σ 整函数的经典 Borel 积分表示.

若 (3) 式对 $A(z)\equiv E_\rho(z)$ 成立, 其中 $E_\rho(z)=\sum_{k=0}^{\infty}z^k/\Gamma(1+k/\rho)(\rho>0)$ 是 Mittag-Leffler 函数 (Mittag-Leffler function), 则 (3) 是任意的阶为 ρ 型为 $\sigma^{1/\rho}$ 的整函数 $a(z)$ 的积分表示 (这里 $\sigma^{1/\rho}$ 是 $a(z)$ 的在经典意义下的型).

对于某些 $A(z)$, (3) 的反变换已被构造出来 (例如见 [1], 文中有关于比较函数的文献). 比较函数与 Borel 表示式 (3) 在许多分析问题中有应用 (例如见 [2], [3]). 若 $[A;\infty)$ 表示与一给定的比较函数 $A(z)$ 可比较的整函数类, 则对任意的比较函数序列 $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$, 常存在一整函数 $a(z)$ 使得 $a(z)\notin\bigcup_{n=0}^{\infty}[A_n;\infty)$.

参考文献

[1] Boas, R. P. and Buck, R. C., Polynomial expansions of analytic functions, Springer & Acad. Press (U.S.A. & Canada), 1958.

[2] Джрбашян, М. М., Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., 1966.

[3] Казьмин, Ю. А., 《Матем. сб.》, 90 (1973), 4, 521-543.

Ю. А. Казьмин 撰 何育赞 译 容尔谦 校

拓扑的比较 [comparison of topologies; сравнение топологий]

在同一集合 X 上所有拓扑的集合的序关系. 拓扑 $\mathcal{T}_1$ 优于 (majorize) 拓扑 $\mathcal{T}_2$ (或 $\mathcal{T}_1$ 不弱于 (not weaker) $\mathcal{T}_2$), 如果恒等映射 $X_1\to X_2$ 是连续的, 其中 X_i 是具有拓扑 $\mathcal{T}_i$ $(i=1,2)$ 的集 X. 此外, 若 $\mathcal{T}_1\neq\mathcal{T}_2$, 则 $\mathcal{T}_1$ 强于 (stronger) $\mathcal{T}_2$ (或 $\mathcal{T}_2$ 弱于 (weaker) $\mathcal{T}_1$).

下列叙述是等价的:

1) $\mathcal{T}_1$ 优于 $\mathcal{T}_2$.

2) 对任何 $x\in X$, 在拓扑 $\mathcal{T}_2$ 下 x 的任何邻域都是在拓扑 $\mathcal{T}_1$ 下 x 的邻域.

3) 对任何 $A\subset X$, A 在 $\mathcal{T}_2$ 下的闭包包含 A 在 $\mathcal{T}_1$ 下的闭包.

4) X 中任何集合在 $\mathcal{T}_2$ 下是闭的, 在 $\mathcal{T}_1$ 下也是闭的.

5) 任何集合在 $\mathcal{T}_2$ 下是开的, 在 $\mathcal{T}_1$ 下也是开的.

在 X 上拓扑的有序集中, 离散拓扑是最强的 (strongest), 仅有 $\varnothing$ 和 X 是闭集的拓扑是最弱的 (weakest). 形象地说, 较强的拓扑在 X 中有较多的开集、闭集和邻域; 较强的拓扑使集合有较小的闭包(较

大的内部)和较少的处处稠密集.

М. И. Войцеховский 撰　方嘉琳 译

比较定理 [**comparison theorem**；**сравнения теорема**]，微分方程论中的

在假定一个辅助方程式或不等式(微分方程组或不等式组)具有某些性质的情况下，判断一个微分方程(或微分方程组)的解有特定性质的一个定理.

比较定理的例子. 1) Sturm 定理 (Sturm theorem): 方程

$$\ddot{y}+p(t)y = 0,\ p(\cdot) \in C[t_0, t_1]$$

的任一非平凡解，在 $[t_0, t_1]$ 线段上最多 m $(m \geqslant 1)$ 次等于零，如果方程

$$\ddot{z}+q(t)z = 0,\ q(\cdot) \in C[t_0, t_1]$$

具有这一性质并且当 $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ 时，$q(t) \geqslant p(t)$ (见[1]).

2) 微分不等式 (differential inequality): 问题

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, \ldots, x_n),\ x_i(t_0) = x_i^0,\ i=1, \ldots, n$$

的解当 $t \geqslant t_0$ 时，按分量是非负的，如果问题

$$\dot{y}_i = g_i(t, y_1, \ldots, y_n),\ y_i(t_0) = y_i^0,\ i=1, \ldots, n$$

的解具有这一性质并且满足不等式

$$f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \geqslant g_i(t, x_1, \ldots, x_n),$$

$$x_i^0 \geqslant y_i^0,\ i=1, \ldots, n,$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \geqslant 0,\ i, j=1, \ldots, n,\ i \neq j$$

(见[2]).

关于比较定理的，包括 Chaplygin 定理的其他例子，见**微分不等式** (differential inequality). 关于偏微分方程的比较定理，例如可见[3].

获取比较定理的一个丰富资源是向量函数的 Ляпунов 比较原理 (comparison principle) (见[4]－[7]). 比较原理的想法如下. 设微分方程组

$$\dot{x} = f(t, x),\ x=(x_1, \ldots, x_n) \tag{1}$$

和向量函数

$$V(t, x) = (V_1(t, x), \ldots, V_m(t, x)),$$

$$W(t, v) = (W_1(t, v), \ldots, W_m(t, v))$$

是给定的，其中 $v=(v_1, \cdots, v_m)$. 对于方程组(1)的任何解 $x(t)$，函数 $v_j(t)=V_j(t, x(t))$，$j=1, \cdots, m$，满足等式

$$\dot{v}_j(t) = \frac{\partial V_j(t, x(t))}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial V_j(t, x(t))}{\partial x_k}f_k(t, x(t))$$

因此，如果不等式

$$\frac{\partial V_j(t, x)}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial V_j(t, x)}{\partial x_k}f_k(t, x) \leqslant W_j(t, V(t, x)), \tag{2}$$

$$j = 1, \ldots, m$$

得到满足，那么在微分不等式

$$\dot{v}_j \leqslant W_j(t, v_1, \ldots, v_m),\ j=1, \ldots, m \tag{3}$$

性质的基础上，就可以说出关于系统(3)的解函数 $V_j(t, x(t))$ 的某些性质. 依次地知道了函数 $V_j(t, x)$ 在方程组(1)的每个解 $x(t)$ 上的性质，就能够对方程组(1)解的性质作出判断.

例如，设向量函数 $V(t, x)$ 和 $W(t, v)$ 满足不等式(2)，且对任意 $t_1 \geqslant t_0$，$\gamma>0$，设数 $M>0$ 存在，使得对所有 $t\in[t_0, t_1]$，$\|x\| \geqslant \gamma$，

$$\sum_{j=1}^{m}|V_j(t, x)| \geqslant M.$$

另外，设不等式系统(3)的每个解在 $[t, \infty)$ 上有定义，那么方程组(1)的每个解也在 $[t, \infty)$ 上有定义.

关于运动稳定性理论中比较原理的基础已有大量有益的陈述(见[4]－[6]). 向量函数的 Ляпунов 比较原理成功地用于抽象微分方程、具有分布自变量的微分方程和微分包含(见**抽象微分方程** (differential equation, abstract)；**具有分布自变量的常微分方程** (differential equation, ordinary, with distributed arguments)；**微分包含** (differential inclusion)). 特别是对于微分包含 $\dot{x} \in F(t, x)$ $(x \in \mathbf{R}^n)$，其中 $F(t, x)$ 是依赖于 $(t, x) \in \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^n$ 的 $\mathbf{R}^n$ 中的一个集合，不等式

$$\frac{\partial V_j(t, x)}{\partial t}+\sup_{y\in F(t, x)}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial V_j(t, x)}{\partial x_k}y_k \leqslant W_j(t, V(t, x))$$

代替了不等式(2)的作用.

文献[8]中给出了大量的比较定理.

参考文献

[1] Sturm, C., *J. Math. Pures Appl.*, 1 (1836), 106－186

[2] Ważewski, T., Systèmes des équations et des inégalités différentielles ordinaires aux deuxième members monotones et leurs applications, *Ann. Soc. Polon. Math.*, 23 (1950), 112－166.

[3] Friedman, A., Partial differential equations of parabolic type, Prentice-Hall, 1964 (中译本: A. 弗里德曼，抛物型偏微分方程，科学出版社，1980).

[4] Bellman, R. E., Vector Lyapunov functions, *J. Soc.*

Industr. Appl. Math. Ser. A Control., 1 (1962), 1, 32 – 34.

[5A] Матросов, В. М., 《Дифференц. уравнения》, 4 (1968), 8, 1374 – 1386.

[5B] Матросов, В. М., 《Дифференц. уравнения》, 4 (1968),10, 1739 – 1752.

[5C] Матросов, В. М., 《Дифференц. уравнения》, 5 (1969), 7, 1171 – 1185.

[5D] Матросов, В. М., 《Дифференц. уравнения》, 5 (1969), 12, 2129 – 2143.

[6] Мартынюк, А. А, Устойчивость движения сложных систем, К., 1975.

[7] Мартынюк, А. А., Гутовски, Р., Интегральные неравенства и устойчивость движения, К., 1979.

[8] Kamke, E., Differentialgleichungen: Lösungen und Lösungsmethoden, 1 – 2, Akad. Verlagsgesell., 1943 – 1944 (中译本: E.卡姆克, 常微分方程手册, 科学出版社, 1977). E. Л. Тонков 撰

【补注】

参考文献

[A1] Swanson, C. A., Comparison and oscillation theory of linear differential equations, Acad. Press, 1968.

[A2] Ladde, G. S. and Lakshmikantham, V., Random differential inequalities, Acad. Press, 1980

周芝英 译

比较定理 [**comparison theorem**; **сравнение теоремы**], 代数几何学中的

域 **C** 上有限型概形在经典拓扑及艾达尔拓扑下同伦不变量之间的关系的定理.

设 X 是 **C** 上有限型概形, F 是 X_{et} 上 Abel 群的可构造挠层, 则 F 诱导了 X 上经典拓扑意义下的层, 并且存在典范同构

$$H^q(X_{et}, F) \cong H^q(X_{class}, F).$$

另一方面, **C** 上有限形光滑概形 X 的一个有限拓扑覆叠有唯一的代数结构 (Riemann 存在性定理 (Riemann existence theorem)). 所以 X_{et} 的艾达尔基本群 (见 [1]) 是通常环路的同伦等价类的群的射影有限完全化:

$$\pi_1(X_{et}) = [\widehat{\pi_1(X_{class})}].$$

此外, 若 X_{class} 单连通, 则 $X_{et} = \hat{X}_{cl}$, 这里的 X_{cl} 和 X_{et} 分别是概形 X 的经典及艾达尔同伦型 (见 [1], [2]).

参考文献

[1] Artin, M., The étale topology of schemes, in Proc. Internat. Congress Mathematicians Moscow, 1966, Moscow, 1968, 44 – 56.

[2] Sullivan, D., Geometric topology, M. I. T., 1971, Notes. C. Г. Танкеев 撰 陈志杰 译

求和法的相容性 [**compatibility of summation methods**; **совместность методов суммирования**]

求和法的一种性质, 它说明应用这些求和法所得结果的一致性. 如果应用两种求和法 A 和 B 求同一序列或级数之和而不会得到不同的极限, 则称 A 和 B 是相容的求和法 (compatible summation methods); 否则, 称 A 和 B 是不相容的求和法 (incompatible summation methods). 更确切地说, 设 A 和 B 是两种序列求和法, A^* 和 B^* 分别是它们的可和性区域. 这时, A 和 B 是相容的, 如果对于任何 $x \in A^* \cap B^*$, 都有

$$\overline{A}(x) = \overline{B}(x) \qquad (*)$$

其中 $\overline{A}(x)$ 和 $\overline{B}(x)$ 是应用 A 和 B 求 x 之和所得到的两个数. 例如, 一切 **Cesàro 求和法** (Cesàro summation methods) (C,k) 当 $k > -1$ 时都是相容的, 而且一切正则的 **Вороной 求和法** (Voronoĭ summation methods) 也是相容的.

如果 U 是某一序列集合, 对于每个 $x \in A^* \cap B^* \cap U$, 都有 $\overline{A}(x) = \overline{B}(x)$, 则称 A 和 B 在 U 上是相容的. 当把应用求和法 A 和 B 求和而得到 $+\infty$ 和 $-\infty$ 的序列也包括在它们的可和性区域内时式 $(*)$ 也成立, 则称 A 和 B (对实序列) 是完全相容的 (completely compatible).

参考文献

[1] Hardy, G. H., Divergent series, Clarendon, 1949.

[2] Cooke, R. G., Infinite matrices and sequence spaces, MacMillan, 1950. И. И. Волков 撰

【补注】 Вороной 求和法在西方称为 Nörlund 求和法 (Nörlund summation methods), 尽管 Г. Ф. Вороной 首先引入了这些方法 (1901). N. E. Nörlund 后来又独立地重新发现了它们 (1920).

参考文献

[A1] Zeller, K. and Beckmann, W., Theorie der Limitierungsverfahren, Springer, 1970. 张鸿林 译

相容分布 [**compatible distributions**; **согласованные распределения**], 概率测度的射影系 (projective system of probability measures), 概率测度的相容系 (consistent system of probability measures), 分布的相容系 (consistent system of distributions).

概率论与测度论的一个概念. 对于最普通和最重要的乘积空间, 见**测度** (measure). 下面是更一般的构造. 设 I 为具有自右滤准序关系 $\leqslant$ 的指标集; 设给定如下的集的投影系: 对每个 $i \in I$, 存在一个集合 X_i 以及对任意一对指标 $i \leqslant j$, 总有将 X_j 映至 X_i 的映射 π_{ij} 使得 $\pi_{ik} = \pi_{ij} \circ \pi_{jk}$ 对 $i \leqslant j \leqslant k$ 成立. 又设对任意 $i \in I$, π_{ii} 为 X_i 上的恒同映射. 此外, 再设对每个 $i \in I$, 存在 X_i 的子集所构成的 σ 代数 S_i, 使得当 $i \leqslant j$ 时, 将 (X_j, S_j) 映至

(X_i, S_i) 的映射 π_{ij} 为可测的. 最后,设对每个 $i \in I$, μ_i 为 S_i 上给定的分布(或一般地,测度). 分布(测度)系 $\{\mu_i\}$ 称为相容的(compatible 或 consistent),或称分布(测度)的射影系(projective system of distributions (measures)). 假如对任意的 $i \leqslant j$, $\mu_i = \mu_j \pi_{ij}^{-1}$. 如果对于投影极限 $X = \lim_{\leftarrow} (X_i, \pi_{ij})$ 加上适当的条件, 那么就有测度 μ (投影系 $\{\mu_i\}$ 的投影极限), 使得 $\mu_i = \mu \pi_i^{-1}$ 对一切 $i \in I$ 成立, 其中 π_i 为 X 至 X_i 的典则投影.

参考文献

[1] Колмогоров, А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974 (中译本: A. H. 柯尔莫哥洛夫, 概率论基本概念, 上海, 商务印书馆, 1952).

[2] Bochner, S., Harmonic analysis and the theory of probability, Univ. of California Press, 1955.

[3] Metivier, M., Limites projectives de measures. Martingales, Applications, *Ann. Mat. Pura. Appl.*, **63** (1963), 225 – 352.

[4] Bourbaki, N., Elements of mathematics, Integrations, Addison - Wesley, 1975, Chapt 6; 8 (译自法文).

В. В. Сазонов 撰

【补注】 I 上的偏序或准序 $\leqslant$ 称为向右滤的, 是指对每对 $i, j \in I$, 存在 $k \in I$ 使得 $i \leqslant k$ 以及 $j \leqslant k$. 投影极限测度是存在的, 例如当 X_i 均为紧空间, 而 π_{ij} 为满射以及范数族 $\|\mu_i\|$ 是有界时, 这里 $\|\mu_i\| = \inf\{M : |\mu_i(f)| \leqslant M\|f\|\}$, 而 $\|f\| = \sup_x |f(x)|$, 其中 f 是具有紧支集的连续函数. 假如所有的 X_i 均紧, 而 π_{ij} 均为满射, μ_i 为正测度, 那么投影极限测度 μ 也存在, 此时 μ 是正的, 并且 $\|\mu\| = \|\mu_i\|$ 对一切 i 成立.

分布(或测度)的相容性概念, 在构造随机过程(见**随机过程**(stochastic process); **联合分布**(joint distribution))中显得特别重要.

王斯雷 译 郑维行 校

补系列 [complementary series; дополнительная серия], 表示的

局部紧群 G 的如下的不可约连续酉表示族: 在 G 的紧子集上一致收敛的拓扑下, 这些表示矩阵的非零元素不能用 G 的正则表示的矩阵元素的线性组合逼近. 群 G 的补系列非空, 当且仅当 G 不是顺从群, 即空间 $L_\infty(G)$ 不含非平凡的左不变平均([2]). 连通 Lie 群 G 有非空的补系列, 当且仅当 G 模它的极大连通可解正规子群的半单商群是非紧的, 见 **Levi - Мальцев 分解**(Levi - Mal'tsev decomposition). 最初是在复典型群的情形发现补系列的([1]). 在本文写作时(1987), 补系列仅对某些局部紧群情形完全地得到了描述. 数论中的某些问题(例如, 见[5])与线性代数群的赋值群的补系列有关的表示论问题等价.

参考文献

[1] Гельфанд, И. М. и Наймарк, М. А., Унитарные представления классических групп, М., 1950.

[2] Greenleaf, F. P., Invariant means on topological groups and their applications, V. Nostrand, 1969.

[3] Наймарк, М. А., Линейные представления группы Лоренца, М., 1958 (英译本: Naimark, M. A., Linear representations of the Lorentz group, Macmillan, 1964).

[4] Kostant, B., On the existence and irreducibility of certain series of representations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **75** (1969), 627 – 642.

[5] Petersson, H., Zur analytische Theorie der Grenzkreisgruppen I, *Math. Ann.*, **115** (1937 – 1938), 23 – 67.

А. И. Штерн 撰

【补注】 在半单 Lie 群理论中, 补系列表示(complementary series representation)概念常常用不同的方式, 即作为广义主系列的(无穷小)酉表示引进, 见**表示的连续系列**(continuous series of representations).

参考文献

[A1] Knapp, A. W., Representation theory of semisimple groups, Princeton Univ. Press, 1986.

石生明 译 许以超 校

取余运算 [complementation; дополнение], 亦称取补运算

对给定的集合 X 的一个子集 M 给出对应的另一个子集 $N \subset X$ 的运算, 使得如果 M 和 N 已知, 那么就有可能用某种方式来重新产生 X. 依赖于对 X 所赋予的结构、就会得到各种不同的取余运算以及各种不同的由 M 和 N 来重构 X 的方法.

在一般的集合论中, 一个子集 M 在集合 X 中的余子集(或补子集)(complement(complementary) subset)是由 X 中所有不属于 M 的元素所组成的子集 $C_X M$ (或 CM, 或 $X \backslash M$); 它的最重要的性质之一是对偶原理:

$$C_X\left\{\bigcup_{\xi} M_\xi\right\} = \bigcap_{\xi} (C_X M_\xi).$$

设 X 具有线性空间的结构, L 为 X 的子空间. 子空间 $N \subset X$ 称为 L 的直接代数余子空间(或直接代数补子空间)(direct algebraic complement)(简称代数余), 如果任何 $x \in X$ 均可唯一地表示为 $x = y + z$ $(y \in L, z \in N)$. 这等价于条件 $X = L + N$; $L \cap N = \{0\}$. X 的任何子空间总有代数余, 但这个余不是唯一确定的.

设 (X, τ) 是线性拓扑空间, X 是它的子空间 L 和 N 的代数直和 $X = L + N$, 且 L 和 N 可对诱导拓扑看作线性拓扑空间. 由 Descartes 积 $L \times N$ 到 X 的一一映射 $(y, z) \to y + z$ 依拓扑 τ 的线性性是连续的, 但一般没有连续逆. 如果这个映射是同胚, 即如果 X 是空间 L 和 N 的拓扑直和, 那么子空间 N 就称为子空间 L 的直接拓扑余(direct topological complement), 而在这种情形中 L 称为可余的. 在任意的线性拓扑空间中, 并非所

有的子空间(即使是有限维子空间)是可余的. 下列对于可余性的充分必要条件成立: 存在空间 X 到子空间 L 的连续射影; 子空间 L 拓扑同构于 X/N, 其中 N 是 L 的代数余. 由这些准则带来下列可余性的充分条件: L 是闭的和有限余维的; X 是局部凸的, 而 L 是有限维的; 等等.

拓扑取余运算的特殊情形是对 Hilbert 空间 H 的子空间 L 求正交余. 后者是集合

$$L^{\perp} = \{x \in H: \langle x, y \rangle = 0, \text{对一切 } y \in L\},$$

它是空间 H 的闭子空间. Hilbert 空间理论中的一个重要事实是 Hilbert 空间 H 的任何闭子空间 L 有正交余, 且 $H = L \oplus L^{\perp}$.

最后, 设 X 是条件序完全向量格(K 空间). 下列形式的元素全体

$$M^d = \{x \in X: |x| \wedge |y| = 0, \text{ 对一切} y \in M\}$$

是 X 的线性子空间, 称为集合 $M \subset X$ 的**不相交余** (disjoint complement). 如果 M 是线性子空间, 那么, 在一般情形下, $X \neq M + M^d$, 但是如果 M 是一个分支(也称为带或序完全理想), 即一个线性子空间, 它满足: $x \in M$ 和 $|y| \leqslant |x|$ 蕴涵 $y \in M$, 且 M 关于最小上界和最大下界的运算是闭的, 那么 $X = M + M^d$ (集合 M^d 对于任何 M 是分支; $M^{dd} = (M^d)^d$ 是包含集合 $M \subset X$ 的最小分支).

参考文献

[1] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Theory of sets, Addison-Wesley, 1968(译自法文).

[2] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Topological vector spaces, Addison-Wesley, 1977 (译自法文).

[3] Birkhoff, G., Lattice theory, Colloq. Publ., 25, Amer. Math. Soc., 1973.

[4] Robertson, A. and Robertson, W., Topological vector spaces, Cambridge Univ. Press, 1964.

[5] Schaefer, H. H., Topological vector spaces, Macmillan, 1966.

[6] Вулих, Б. З., Введение в теорию полуупрядоченных пространств, М., 1961 (英译本: Vulikh, B. Z., Introduction to the theory of partially ordered spaces, Wolters-Noordhoff, 1967).

В. И. Соболев 撰

【补注】 条件(序)完全向量格是同时为**条件完全格** (conditionally-complete lattice) 的**向量格** (vector lattice).

参考文献

[A1] Köthe, G., Topological vector spaces, Springer, 1969.

[A2] Luxemburg, W. A. J. and Zannen, A. C., Riesz spaces, 1, North-Holland, 1971.

史树中 译

完全聚点 [complete accumulation point; полного накопления точка], 拓扑空间 X 中的集合 M 的

一点 $x \in X$, 使得 M 和 x 的任何邻域的交与整个集合 M 有相同基数.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Arkhangel'skii, A. V. and Ponomarev, V. I., Fundamentals of general topology, problems and exercises, Reidel, 1984 (译自俄文).

方嘉琳 译

完全代数簇 [complete algebraic variety; полное алгебраическое многообразие]

紧复代数簇概念的推广. 分离簇 X 称为**完全的** (complete), 如果对任意簇 Y, 射影 $X \times Y \to Y$ 是一个闭态射, 即它把 $X \times Y$ 的(在 Zariski 拓扑意义下的)闭子集映成 Y 的闭子集. 有一个**完全性的赋值准则** (valuative completeness criterion): 对于任意一个具有分式域 K 的离散赋值环 A 以及任何态射 u:Spec $K \to X$, 必存在唯一的态射 v: Spec $A \to X$ 扩张了 u. 这个条件类似于要求 X 里的任意序列有一个极限点.

任何射影簇都是完全的, 但反之不然. 对于任意的完全代数簇 X, 存在一个射影簇 X_1 和一个双有理射影态射 $X_1 \to X$ (**周(炜良)引理** (Chow lemma)). 对于任意的代数簇 X, 存在它到一个完全簇 $\bar{X}$ 内的开嵌入 (**永田定理** (Nagata theorem)). 完全代数簇概念向相对化的推广就是概形的正常态射.

参考文献

[1] Hartshorne, R., Algebraic geometry, Springer, 1977.

[2] Шафаревич, И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972 (英译本: Shafarevich, I. R., Basic algebraic geometry, Springer, 1977).

В. И. Данилов 撰 陈志杰 译

完全解析函数 [complete analytic function; полная аналитическая функция]

由最初在扩充复平面 $\bar{\mathbf{C}}$ 的某个区域 D 内给出的复变量 z 的一个起始解析函数 $f = f(z)$ 的所有**解析开拓** (analytic continuation) 得到的全体解析函数元的集合.

由区域 $D \subset \bar{\mathbf{C}}$ 和定义在 D 上的单值解析, 即全纯的函数 f 所组成的对 (D, f) 称为**解析函数元** (element of an analytic function) 或**解析元** (analytic element), 或者就简称为**元素** (element). 要指定一个解析函数时, 总可以使用 Weierstrass **元** (Weierstrass element), 也称为**正则元** (regular element) $(U(a, R), f_a)$, 当 $a \neq \infty$ 时, Weierstrass 元素由一个幂级数

$$f_a = f_a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k \tag{1}$$

和一个以 a 为中心，$R(>0)$ 为半径的收敛圆盘 $U(a,R)=\{z\in\overline{\mathbf{C}}:|z-a|<R\}$ 组成．当 $a=\infty$ 时，Weierstrass 元素 $(U(\infty,R), f_\infty)$ 由级数

$$f_\infty = f_\infty(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{-k} \qquad (2)$$

和这个级数的一个收敛域 $U(\infty, R)=\{z\in\overline{\mathbf{C}}:|z|>R\}$ 组成，$R\geqslant 0$．

令 E_f 为可由一个起始元素 $(U(a,R), f_a)$ 在 $\overline{\mathbf{C}}$ 内至少一条连接点 a 与 ζ 的路径上解析开拓到 ζ 的全体点 $\zeta\in\overline{\mathbf{C}}$ 所组成的集合．要记住以下情形的可能性：对一点 $\zeta\in E_f$，沿某一类路径 L_1 的解析开拓是可能的，但沿其他任一类路径 L_2 则是不可能的（见**奇点** (singular point)）．集合 E_f 是平面 $\overline{\mathbf{C}}$ 内一个区域．由元素 $(U(a,R), f_a)$ 生成的（Weierstrass 意义下的）完全解析函数 (complete analytic function (in the sense of Weierstrass)) f_W 是指沿所有可能路径 $L\subset\overline{\mathbf{C}}$ 的这种解析开拓得到的全体 Weierstrass 元 $(U(\zeta,R), f_\zeta)$，$\zeta\in E_f$．区域 E_f 称为完全解析函数 f_W 的 (Weierstrass) 存在域 ((Weierstrass) domain of existence)．用任一元素 (D,f) 代替 Weierstrass 元得出的是同一个完全解析函数．f_W 的元素 (D,f) 常称为解析函数 f_W 的分支（见**解析函数的分支** (branch of an analytic function)）．任何被取作解析开拓的起始元素的完全解析函数 f_W 的元素 (D,f) 生成同一个完全解析函数 f_W．完全解析函数 f_W 的每一个元素 $(U(\zeta,R), f_\zeta)$ 可由任何其他元素 $(U(a,R), f_a)$ 沿 $\overline{\mathbf{C}}$ 内某一连接点 a 和点 ζ 的路径的解析开拓得到．

可能发生这样的情况：起始元素 (D,f) 不能被解析开拓到任一点 $\zeta\notin D$．这时，$D=E_f$ 是函数 f 的自然存在域 (natural domain of existence) 或称全纯域 (domain of holomorphy)，而边界 $\Gamma=\partial D$ 是函数 f 的自然边界 (natural boundary)．例如，对于 Weierstrass 元

$$\left[U(0,1), f_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{k!}\right]$$

自然边界是圆周 $\Gamma=\{z\in\overline{\mathbf{C}}:|z|=1\}$，即收敛圆盘 $U(0,1)$ 的边界，因为这个元素不能被解析开拓到满足 $|\zeta|\geqslant 1$ 的任一点 ζ．无论 $D\subset\overline{\mathbf{C}}$ 是怎样的区域，总能够构造一个解析函数 $f_D(z)$，使得 D 是 $f_D(z)$ 的自然存在域而边界 $\Gamma=\partial D$ 是 $f_D(z)$ 的自然边界（例如，可由 **Mittag-Leffler 定理** (Mittag-Leffler theorem) 推知）．

一般说来，完全解析函数 f_W 在其存在域 E_f 内不是通常意义下的点的函数．在解析函数理论中常常遇到的一个情形是，完全解析函数 f_W 是多值函数：对每一点 $\zeta\in E_f$，一般说来，存在一个以这点为中心的元素 $(U(\zeta,R), f_\zeta)$ 的无穷集，但这个集至多是可数集 (Poincaré-Volterra 定理 (Poincaré-Volterra theorem))．从整体来看，完全解析函数 f_W 只在相应的 Riemann 曲面上才可以看作一个单值解析函数，这个 Riemann 曲面是 $\overline{\mathbf{C}}$ 的一个多叶覆盖曲面．例如，完全解析函数 $f(z)=\ln z=\ln|z|+i\arg z$ 在其存在域 $E_f=\{z\in\overline{\mathbf{C}}: 0<|z|<\infty\}$ 内是多值的；在每一点 $\zeta\in E_f$，它取可数个值

$$f_\zeta(\zeta;s)=\ln|\zeta|+i\operatorname{Arg}\zeta+2\pi si,\ s=0,\ \pm1,\ \cdots,$$

而每一点 $\zeta\in E_f$ 对应可数个以 ζ 为中心的元素

$$(U(\zeta,|\zeta|), f_\zeta(z;s)),$$

$$f_\zeta(z;s) = f_\zeta(\zeta;s)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k\zeta^k}(z-\zeta)^k.$$

通常使用这个完全解析函数的一个单值分支，即对数 $\operatorname{Ln} z=\ln|z|+i\operatorname{Arg} z$ 的主值，这是一个在区域 $D=\{z\in\overline{\mathbf{C}}; 0<|z|<\infty, -\pi<\arg z<\pi\}$ 内的全纯函数，且能被"连续地开拓到 $(-\infty, 0)$"，即对 $\zeta\in(-\infty,0)$，极限

$$\lim_{\substack{z\to\zeta\\ \operatorname{Im} z>0}} \operatorname{Ln} z = \operatorname{Ln}_+ z$$

存在．（同样，$\lim_{z\to\zeta, \operatorname{Im} z<0}\operatorname{Ln} z=\operatorname{Ln}_- z$ 存在；这些极限值不重合（它们的差是常数，等于 $2\pi i$）．）

Weierstrass 元 (1) 和 (2) 的反演（见**级数的反演** (inversion of a series)）导出具有更一般性质的元素，它们分别由 Puiseux 级数 (Puiseux series)

$$f_a = \sum_{k=\mu}^{\infty} c_k(z-a)^{k/\nu},\quad f_\infty = \sum_{k=\mu}^{\infty} c_k z^{-k/\nu} \qquad (3)$$

定义，其中 μ 是整数而 ν 是自然数，这些级数的收敛圆盘分别是 $U(a,R)$ 和 $U(\infty,R)$．特别，对于 $\mu\geqslant 0$ 和 $\nu=1$，级数 (3) 与 (1) 或 (2) 一致，它们定义了正则元素．(3) 与 (1) 和 (2) 所不同的是：对于 $\mu<0$ 或 $\nu>1$，由级数 (3) 定义的元素称为奇异的 (singular)，对应于 $\nu=1$ 和 $\nu>1$，(3) 中的级数相应地定义了不分支元 (unbranched element) 和（代数）分支元 ((algebraic) branched element)．

在起始元素 $(U(a,R), f_a)$ 的开拓中，如果允许其级数为形式 (3) 的特殊元素出现，这种级数一般说来是多值的（对 $\nu>1$），有极型奇点（对 $\mu<0$），则得到 Riemann 存在域 (Riemann domain of existence) E_R（它比 Weierstrass 存在域大），而由形式 (3) 的级数所定义的相应较大的元素集则称为**解析形** (analytic image)．解析形与完全解析函数不同之处在于它加上了在一个给定的正则元素的开拓中所得到的全体奇异元．当引进相应的拓扑后，解析形就成了给定函数的 Riemann 曲面．

为了构造完全解析函数 f_W，可以用解析函数芽的

概念来代替元素的概念．这包括把元素的概念局部化和把在这种情况下并不重要的收敛半径抛弃．使得区域 D 和 G 含有一公共点 a 的两个元素 (D,f) 和 (G,h) 称为在点 a 是**等价的** (equivalent)，如果存在 a 的一个邻域，在此邻域内 $f\equiv h$．这个等价关系具有通常的自反性，对称性和传递性．在一个给定点 $a\in\bar{\mathbf{C}}$ 的等价元素类称为在点 a 的一个**解析函数芽** (germ of the analytic function) $\mathbf{f}_a$．芽刻画函数在给定点的局部性质．两个芽 $\mathbf{f}_a$ 和 $\mathbf{g}_a$ 相等，如果这两个等价类的任意两个代表在 a 的某个邻域重合．类似地，可以借助其代表元素来定义在芽上的算术运算和微分法．完全解析函数 f_W 是从一个给定的 $\mathbf{f}_a$ 沿 $\bar{\mathbf{C}}$ 内所有路径的解析开拓所得到的解析函数的全体芽 $\mathbf{f}_\zeta$ 的集合，$\zeta\in E_f$．两个完全解析函数 f_W 和 g_W 的相等和在完全解析函数上的运算由在某点 $a\in E_f\cap E_g$ 的芽 $\mathbf{f}_a$ 与 $\mathbf{g}_a$ 的相等和在芽上的运算来定义．

多复变量 $z=(z_1,\cdots,z_n)$ $(n\geqslant 1)$ 的解析函数元 (D,f)，Weierstrass 元 $(U^n(a,R),f_a)$ 和芽完全和上面一样定义，但要用到复空间 $\mathbf{C}^n$ 内区域 D 或多重幂级数

$$f_a=f_a(z)=$$
$$=\sum_{k_1,\ldots,k_n=0}^{\infty}c_{k_1\cdots k_n}(z_1-a_1)^{k_1}\cdots(z_n-a_n)^{k_n}$$

的收敛多圆盘

$$U^n(a,R)=\{z\in\mathbf{C}^n:|z_j-a_j|<R_j,\ j=1,\ldots,n\};$$
$$R_j>0,\ j=1,\ldots,n;\ a=(a_1,\ldots,a_n);$$
$$R=(R_1,\ldots,R_n).$$

多复变量完全解析函数概念的建立完全类似于单变量的情形．

参考文献

[1] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968 (中译本：А. И. 马库雪维奇，解析函数论，高等教育出版社，1957).

[2] Шабат, Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 1-2., М., 1976.

[3] Springer, G., Introduction to Riemann surfaces, Chelsea, reprint, 1981.

[4] Фукс, Б. А., Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных, М., 1962.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 文中称作**解析形** (analytic image) 的结构在西文著作中有多种名称：analytic configuration, analytic entity, analytische Gebilde 等，可一律译为"解析形"．

补充的参考文献包括 H. Weyl 的重要专著 [A1] ([A2] 为英译本) 以及较现代的著述 [A3]．

参考文献

[A1] Weyl, H., Die Idee der Riemannschen Fläche, Teubner, 1955.

[A2] Weyl, H., The concept of a Riemann surface, Addison - Wesley, 1955.

[A3] Farkas, H. M. and Kra, I., Riemann surfaces, Springer, 1980.

[A4] Foster, O., Riemannsche Flächen, Springer, 1977.

侯纪欣 译 何育赞 校

完全曲率 [complete curvature; полная кривизна]，**全曲率** (total curvature)

1) Euclid 空间 $\mathbf{R}^3$ 中曲面 Φ 上一点的**完全曲率**是一个标量 K，它等于曲面上在该点计算的主 (法) 曲率 k_1 和 k_2 的乘积：$K=k_1k_2$；通常称为曲面的 **Gauss 曲率** (Gaussian curvature) (见**主曲率** (principal curvature))．Gauss 曲率的概念可推广到 Euclid 空间 $\mathbf{R}^{n+1}$ $(n>2)$ 中的超曲面，这时，它是量 $K=k_1\cdots k_n$，其中 k_i 是该超曲面上一点关于主方向 i 的主曲率．

三维 Riemann 空间中二维曲面上一点的 Gauss 曲率等于内曲率 (即二维曲面的截曲率) 与外曲率 (即外围空间关于曲面在该点的切平面方向的截曲率) 之差．

2) Euclid 空间 $\mathbf{R}^3$ 中曲面 Φ 上一个区域 D 的**全曲率**是数量 $\iint_D K d\sigma$，这里 K 是曲面在一点的 Gauss 曲率，$d\sigma$ 是曲面的面积元．类似地定义 Riemann 流形中一个区域的全曲率，那里的 K 理解为流形在其上各点关于切平面方向的截曲率，而积分是对流形中这个区域的面积 (测度) 来求的．

Л. А. Сидоров 撰

【补注】 西方文献中不使用"完全曲率"这个词．$\mathbf{R}^{n+1}$ 中超曲面的 Gauss 曲率通常称为 Lipschitz - Killing **曲率** (Lipschitz - Killing curvature)．在高余维时，对一个指定法方向的上述曲率也有定义．Gauss 曲率也称为 Gauss - Kronecker **曲率** (Gauss - Kronecker curvature)．

参考文献

[A1] Klingenberg, W., Riemannian geometry, W. de Gruyter, 1982.

[A2] Kobayashi, S. and Nomizu, K., Foundations of differential geometry, 1-2. Interscience, 1969, Chapt. 7; Chapt. 5.

潘养廉 译

完全 Dedekind 格 [complete Dedekind lattice; полная Дедекинда решетка]

一个完全格，对其中任何元素 a_i，b_i，$i\in I$，等式

$$\left(\bigwedge_{i\in I}a_i\right)\wedge\left(\bigvee_{i\in I}b_i\right)=\bigvee_{i\in I}(a_i\wedge b_i)$$

成立，此处当 $i\neq j$ 时，有 $a_i\geqslant b_j$．任何完全 Dedekind 格都是模格．一个泛代数若有交换的同余，则它的同余格是完全 Dedekind 格 [1]．

参考文献

[1] Dwinger, Ph., Some theorems on universal algebras Ⅲ, *Indag. Math.*, **20** (1958), 70–76.

О. А. Иванова 撰

【补注】 在英文文献中,"Dedekind 格"这个名称很少使用,取代它的是**模格**(modular lattice, 见[A1]). 然而,完全模格(complete modular lattice)是满足(有限)模律的**完全格**(complete lattice). 本条目所定义的这个概念并无确认的名称,它似可称作完全地模格(completely modular lattice).

参考文献

[A1] Cohn, P. M. Universal algebra, Reidel, 1981.

戴执中 译

全微分 [**complete differential**; **полный дифференциал**], n 元函数在一点 $x_0 \in \mathbf{R}^n$ 的

即函数在该点的**微分**(differential). 使用全微分一词是为了与偏微分一词相对照. n 元函数的全微分概念可以推广到由线性拓扑空间的开集到类似空间的映射的情况(见**Gâteaux 微分**(Gâteaux differential), **Fréchet 微分**(Fréchet differential); **映射的微分法**(differentiation of a mapping)).

Л. Д. Кудрявцев 撰 齐民友 译

完全群 [**complete group**; **совершенная группа**]

中心(见**群的中心**(centre of a group))平凡的群(即所谓无中心群(group without centre)), 且它的所有自同构皆为**内自同构**(inner automorphism). 完全群 G 的自同构群同构于 G 本身(术语"完全"即相应于这个性质). 完全群的例子有**对称群**(symmetric group) $S_n, n \neq 2, 6$. 如群 T 包含一个完全的正规子群, 则 T 可分解为子群 B 及 B 在 T 中的中心化子 K 的直积 $T = B \times K$.

参考文献

[1] Каргаполов, М. И., Мерзляков, Ю. И., Основы теории групп, 3 изд., М., 1982.
[2] Hall, jr., M., Group theory, Chelsea, 1976.

Н. Н. Вильямс 撰 石生明 译 许以超 校

完全不稳定性 [**complete instability**; **полная неустойчивость**]

动力系统(dynamical system)的一个性质. 若一动力系统的一切点都是**游荡点**(wandering point)则称它为完全不稳定的(completely unstable).

$\mathbf{R}^n$ 中的动力系统是整体可直化的(globally straightenable 或 globally rectifiable)(即存在一拓扑嵌入 $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ 将此系统的每一轨道映为一直线 $\{a\} \times \mathbf{R}$, 点 $a \in \mathbf{R}^n$ 依赖于轨道)的充分必要条件是它为完全不稳定的且没有**无穷远鞍点**(saddle at infinity)(**Немыцкий 定理**(Nemytskii's theorem), 见[1]).

参考文献

[1] Немыцкий, В. В., Степанов, В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.-Л., 1949(中译本: B. B. 涅梅茨基, B. B. 斯捷巴诺夫, 微分方程定性理论, 科学出版社, 上册 1956, 下册 1959).

В. М. Миллионщиков 撰

【补注】 Немыцкий 定理的一个略有不同的表述方法(避免用无穷远鞍点概念)见[A2]. [A1] 中给出了一易读的证明. 整体可直化这一性质与整体可平行化(globally parallelizable)这一性质密切相关: 一动力系统称为(整体)可平行化(parallelizable), 若它同构于一形如 $S \times \mathbf{R}$ 的系统, 这里所有的点均沿直线 $\{x\} \times \mathbf{R} (x \in S)$ 以速度 1 运动.

参考文献

[A1] Dugundji, J. and Antosiewicz, H. A., Parallelizable flows and Liapunov's second method, *Ann. of Math.*, **73** (1961), 543–555.
[A2] Nemytskii, V. V., Topological problems in the theory of dynamical systems, *AMS Transl. Series*, **15** (1954), 414–497 (*Uspekhi Mat. Nauk*, **4** (1949), 91–153).

齐民友 译

完全积分 [**complete integral**; **полный интеграл**]

一阶偏微分方程

$$F\left(x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0 \qquad (1)$$

的解 $u(x, a), x = (x_1, \cdots, x_n), a = (a_1, \cdots, a_n)$, 它依赖于 n 个参数 $a_1, \cdots, a_n$, 且在所考虑的域中满足条件

$$\det \| u_{x_i a_i} \| \neq 0.$$

如果将 $u(x, a)$ 看作 n 参数解族, 那么用条件 $a_i = \omega_i(t_1, \cdots, t_{n-1})$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ 区分开的、它的任一$(n-1)$参数子族的包络也是方程(1)的解. 于是由完全积分所给出的曲面和包络的接触线是(1)的特征. 利用完全积分可以描述对应于方程(1)的特征常微分方程组的解, 因此, 可以将方程(1)的求解化为特征方程组的求解的 Cauchy 方法的反转. 这个方法被应用于分析力学, 在那里要求解典则常微分方程组:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n. \qquad (2)$$

这个组是 Jacobi 方程

$$u_t + H\left(x_1, \ldots, x_n, t, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0 \qquad (3)$$

的特征方程组.

如果方程(3)的完全积分 $u=u(x_1,\cdots,x_n,t,a_1,\cdots,a_n)=a_0$ 是已知的,那么典则组(2)的 $2n$ 个积分由等式 $u_{a_i}=b_i$, $u_{x_i}=p_i$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ 给出,其中 a_i, b_i 是任意常数.

А. П. Солдатов 撰

【补注】 Jacobi 方程通常称作(依赖时间的)Hamilton-Jacobi 方程(Hamilton - Jacobi equation)(也见 **Hamilton 系统**(Hamiltonian system)).

参考文献

[A1] Garabedian, P. R., Partial differential equations, Wiley, 1964.

[A2] Dubrovin, B. A., Fomenko, A. T. and Novikov, S. P., Modern geometry - methods and applications, 1, Springer, 1984(译自俄文). 孙和生 译 陆柱家 校

完全格 [complete lattice; полная решетка]

一个**偏序集**(partially ordered set),它的任何一个子集 A 都有最小上界及最大下界. 这两个界通常称为 A 的并(join)和交(meet),记如 $\vee_{a_\alpha\in A}a_\alpha$ 和 $\wedge_{a_\alpha\in A}a_\alpha$,或分别简作 $\vee A$ 和 $\wedge A$. 如果偏序集有最大元,并且它的每个非空子集都有最大下界,则它是个完全格. 格 L 是完全的,当且仅当它的每个映于自身内的保序映射 φ 都有不动点,即元素 $a\in L$,满足 $a\varphi=a$. 若 $P(M)$ 是由 M 的子集按包含关系为序而成的集合,φ 是 $P(M)$ 上的一个闭包运算,则所有的 φ 闭子集所成的集合是一个完全格. 任何偏序集 P 都能同构嵌入到一个完全格内,此时称该完全格为 P 的一个完全化(completion). 由分割所作的完全化(见 **MacNeille 完全化**(completion, MacNeille))乃是在偏序集所有的完全化中之最小者. 在一个泛代数中,所有的子代数组成的集合构成一个完全格,所有同余类组成的集合也是一个完全格;在拓扑空间中,所有闭子集的集合是完全格.

参考文献

[1] Birkhoff, G., Lattice Theory, Colloq. Publ. 25, Amer. Math. Soc., 1973.

[2] Скорняков, Л. А., Элементы теории структур, М., 1970.

Т. С. Фофанова 撰

【补注】 关于闭包算子(closure operation)的论题亦见**闭包关系**(closure relation),与**基**(basis).

戴执中 译

完全测度 [complete measure; полная мера]

σ 代数 Σ 上满足如下性质的测度:若 $A\in\Sigma$ 且 $|\mu|(A)=0$,则对任意子集 $E\subset A$,总有 $E\in\Sigma$. 这里 $|\mu|$ 是 μ 的全变分(μ 为正测度时,$|\mu|=\mu$).

А. П. Терехин 撰

【补注】 完全测度的概念来自下列问题(见[A1]). 设 X 为一集合,Σ 为其子集构成的 σ 代数,并且 μ 是 Σ 上的正测度. 可能会发生这样的情形:存在某个集合 E 满足 $\mu(E)=0$,但有 E 的某子集 N 不属于 Σ. 于是,很自然地,可以对这样的集合 N,定义其测度为 0.

一般地说,可用 Σ^* 表示满足以下条件的集合 N 所成的族:存在 $E,F\in\Sigma$,使 $E\subset N\subset F$,且 $\mu(F-E)=0$. 在此情形,定义 $\mu(N)=0$. 于是 Σ^* 是 σ 代数,并且 μ 成为其上的完全测度(这种过程称为完全化(completion)),而 (X,Σ^*,μ) 称为完全测度空间(complete measure space).

参考文献

[A1] Rudin, W., Real and complex analysis, McGraw-Hill, 1974(中译本:W.卢丁,实分析和复分析,人民教育出版社,1982).

[A2] Hewitt, E. and Strömberg, K., Real and abstract analysis, Springer, 1965.

王斯雷 译

完全度量空间 [complete metric space; полное метрическое пространство]

一个度量空间,其中每个基本序列或 Cauchy 序列都收敛. 完全度量空间是**完全一致空间**(complete uniform space)的特殊情形.

М. И. Войцеховский 撰 方嘉琳 译

完全算子 [complete operator; полный оператор],广义波动算子(generalized wave operator)

由

$$W_+(A_2,A_1)=s-\lim_{t\to\infty}e^{itA_2-itA_1}P_1$$

定义的部分等距算子,其中 A_1 与 A_2 是在一个可分 Hilbert 空间 H 上的自伴算子,P_1 是到 $H_{1,ac}$ 中的正交射影,并使得

$$\{W_+(A_2,A_1)x:\ \|W_+(A_2,A_1)x\|=\|x\|\}=H_{2,ac}.$$

这里 $H_{i,ac}(i=1,2)$ 是所有关于 A_i 为谱绝对连续的元素 x 的集合,即对于它来说,一个集合 M 的谱测度 $\langle E_{A_i}(\mu)x,x\rangle$ 关于 Lebesgue 测度 μ 是绝对连续的.

如果算子 $W_+(A_2,A_1)$ 或类似定义的算子 $W_-(A_2,A_1)$ 存在并且是完全的,那么 $A_{1,ac}$(算子 A_1 在 $H_{1,ac}$ 上的部分)是酉等价的. 如果 A_1 与 A_2 是 H 上的自伴算子,并且 $A_2=A_1+c\langle\cdot,f\rangle f$,这里 $f\in H$,c 是实的,那么 $W_\pm(A_2,A_1)$ 与 $W_\pm(A_1,A_2)$ 存在并且是完全的.

参考文献

[1] Kato, T., Perturbation theory for linear operators, Springer, 1966, Chapt. X Sect. 3.

В. И. Соболев 撰

【补注】 一个算子 $W:H\to H_1$ 是部分等距的(partially isometric),指存在 H 的一个闭线性子空间 M,使得对 $u\in M$ 有 $\|Wu\|=\|u\|$,对 $v\in M^\perp$ 有 $Wv=0$. 这里 M

是 M 的正交补. 这时 M 称为 W 的始集(initial set), $M_1=W(M)$ 称为 W 的终集(final set). 李炳仁 译

全概率公式 [**complete probability formula**, **полной вероятности формула**], 亦有完全概率公式

通过一事件对于组成一互斥完全集的诸事件的条件概率计算该事件的无条件概率的一个关系式.

更清楚些, 设 $(\Omega, \mathscr{A}, \mathsf{P})$ 为一概率空间, $A, A_1, \cdots, A_n \in \mathscr{A}$ 为事件, $A_i \cap A_j = \phi (i \neq j, i, j = 1, \cdots, n)$,

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \Omega,$$

且对所有 k, $\mathsf{P}(A_k) > 0$. 则有全概率公式

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(A \mid A_k)\mathsf{P}(A_k).$$

当事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的个数为无穷时, 全概率公式仍成立.

全概率公式对数学期望也成立, 设 $X(\omega)(\omega \in \Omega)$ 为 $(\Omega, \mathscr{A}, \mathsf{P})$ 上的随机变量, $\mathsf{E}X$ 是它的期望, $\mathsf{E}(X|A_k)$ 是它对于组成一互斥完全集的诸事件 A_k 的条件期望, 则

$$\mathsf{E}X = \sum_{k} \mathsf{E}(X \mid A_k)\mathsf{P}(A_k).$$

Н. Г. Ушаков 撰

【补注】 互斥完全集(complete set of the alternatives)又称为样本空间的划分(partition of the sample space). 一些事件 A_k 构成一个划分, 如果这些事件是不交的, 有正概率, 且它们的并是样本空间. 潘一民 译

本特值的完全问题 [**complete problem of eigen values**; **полная проблема собственных значений**]

计算通常为实或复方阵的所有本征值的问题(区别于**本征值的部分问题**(partial problem of eigen values)). 不仅需要计算本征值, 而且经常要造出由矩阵的本征向量或根(主)向量组成的一组基.

矩阵 A 的本征值完全问题的解决从理论上说等同于造出该矩阵的本征多项式 φ_A, 并求出它的所有实或复根(这个事实使得用有限计算过程求所有本征值成为不可能). 对每个本征值 λ, 从齐次线性方程组: $(A-\lambda E)x=0$ (E 为单位矩阵)可以确定出对应的本征向量. 在复数域上的计算中, 存在由本征向量组成的基的一个充分条件是谱的单纯性, 而一个必要与充分条件是每个本征值 λ 的代数重数(即作为本征多项式 φ_A 根的重数)重合于它的几何重数(即矩阵 $A-\lambda E$ 的亏量). 如果要去计算重数(阶)超过 1 的根(主)向量, 那么必须考虑如下形式的齐次方程组

$$(A-\lambda E)^k x = 0, \quad k \in \mathbf{N}, \quad k > 1.$$

按这个方案, 一直到 20 世纪 40 年代末才构造出求解本征值完全问题的一些数值方法. 在 20 世纪 30 年代, 依系数计算矩阵的本征多项式的高效率(关于算法运算量)的算法业已产生. 例如, 在 Данилевский 方法中, n 阶矩阵的本征多项式的计算包含有量级大约为 n^3 的乘法运算(见[1], [2]).

在这一组中的方法已被命名为直接法或精确法, 这是因为如果执行精确的算术运算, 那么它们将给出本征多项式诸系数的准确值. 一直到数字计算机诞生之后, 对任意相当大阶数的问题, 才能测试带有舍入误差的真实计算的具体情况. 这样的试验已在 20 世纪 50 年代进行, 结果表明, 某些直接法完全偏离了数值的实际情况. 用这些方法计算本征值时, 存在有导致灾难的不稳定性, 其主要原因有两个. 首先, 在大多数的精确法中, 本征多项式的诸系数直接或间接地由一个线性方程组解的分量来确定, 而方程组的系数矩阵的各列是由向量 $v, Av, \cdots, A^{n-1}v$ 逐步建立的, 这里, v 是方法中的初始向量. 这样的矩阵通常处于很差的状态, 这可从如下事实特别明显地看出: 这些列向量的长度通常是很不同的, 且 n 越大, 差异也越大. 因此, 本征多项式的系数计算一般伴有很大的误差. 其次, 多项式根的计算常是数值不稳定的. 关于这方面问题, 如下例子值得注意(见[3]): 如果在多项式

$$p(x) = (x-1)(x-2)\cdots(x-20) =$$
$$= x^{20} - 210x^{19} + \cdots$$

中变更 x^{19} 的系数 -210 到 $-210+2^{-23}$, 那么, 扰动后多项式 $\tilde{p}(x)$ 获得五对复共轭根, 其中一对根的虚部为 $\pm i \cdot 2.81 \cdots$.

关于矩阵元素本身的可比较的灵敏度通常不伴有本征值对本征多项式系数扰动的灵敏度. 例如, 如果这个多项式 $p(x)$ 为某对称矩阵 A 的本征多项式, 则矩阵中任意元素的只有 2^{-23} 量级的扰动导致本征值至多同一量级的变化.

求解本征值完全问题的现代数值方法不用计算本征多项式而直接得到它们的结果(见**迭代法**(iteration methods)). 在这类最好方法中只包含 $O(kn^3)$ 次乘法运算, 这里 n 为矩阵的阶数, 而 k 为与 n 无关的常数, 其意义为计算一个本征值所需的平均迭代次数. 在 QR 算法中, k 的数值通常介于 1.5 与 2 之间.

应用基于正交变换的方法 M 计算 $n \times n$ 矩阵 A 的近似本征值(向量)可以转换为扰动后矩阵或若干矩阵 $A+F_M$ 的精确的本征值(向量)(QR 算法用于一般形式的矩阵, Jacobi 方法或基于分裂谱的诸方法用于对称或 Hermite 矩阵). 这里, F_M 为对方法 M 的等价扰动矩阵, 它满足以下形式的界限:

$$\| F_M \|_E \leqslant f(n) \| A \|_E \varepsilon, \qquad (1)$$

式中，ε 是机器算术的相对准确度，$\|A\|_E=(\sum|A_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}}$ 为 Euclid 矩阵范数，而 $f(n)$ 为具有形式 Ckn^α 的函数．数值 k 已在前面说明，而常数 C 与指数 α 的准确值依赖于计算的具体情况，如舍入的方法，内积累加的应用等．α 的通常值等于 2．

先验的界限(1)可用于估计应用方法 M 计算本征值(向量)的准确度．这个准确度有赖于所有单个本征值(本征子空间)的状态．

设 λ 为矩阵 A 的单重本征值，x 为对应的规范化本征向量，又设 y 为转置矩阵 A^T 的对应于同一本征值的规范化本征向量．当矩阵 A 受矩阵 F 扰动时，本征值 λ 中的扰动可表达为如下准确到第二阶项的近似值：

$$\Delta\lambda \approx \frac{(y^T F x)}{(y^T x)} \tag{2}$$

且有估计

$$|\Delta\lambda| \lesssim \frac{\|F\|_2}{|y^T x|} \tag{3}$$

($\|\cdot\|_2$ 表示谱范数)．这时，λ 对矩阵 A 的扰动的灵敏度可用实数 $s(\lambda)=|y^Tx|^{-1}$ 来表征，此数称为该本征值的(单个)条件数 (condition number)．当 x 与 y 二者均为实向量时，数 $s^{-1}(\lambda)$ 有一个简单的几何意义：它是 x 与 y 之间夹角的余弦，这也解释了 $s(\lambda)$ 的另一种名称，即对应于 λ 的畸变系数 (distortion coefficient) 的来由．

如果矩阵 A 为可对角化的(即有由本征向量组成的一组基)，则可以完全刻画它的所有本征值 λ_i 的状态．设 P 是以各本征值 λ_i 的本征向量为列组成的矩阵，且在所有这样的矩阵中它具有最小的条件数．这时，下面的定理可用([4])：扰动后矩阵 $A+F$ 的所有本征值被围在复平面一个区域，即圆盘

$$|z-\lambda_i| \leqslant \mathrm{cond}_2 P\,\|F\|,\quad i=1,\ldots,n \tag{4}$$

的并集内．如果这个区域分裂为若干连通的分支，那么每个分支包含有扰动后矩阵的本征值个数等于组成该分支的圆盘个数((4)中的范数可取为谱范数，而 cond P 可理解为谱条件数)．

数量 cond P 称为矩阵 A 的关于本征值完全问题的条件数(condition number)．当按谱范数表达时，它与畸变系数的关系如下：

$$s(\lambda_i) \leqslant \mathrm{cond}\,P \leqslant \sum_{i=1}^{n} s(\lambda_i).$$

对应于单重特征值 λ 的本征向量 x 的扰动按一种更复杂的方式依赖于矩阵的扰动．一般地说，它不仅由对应于 λ 的畸变系数，而且也由其他本征值的畸变系数确定．如果存在接近于 λ 的本征值，则 x 的灵敏度亦增加．在 λ 变为多重本征值的极限情况下，考虑单个本征向量的灵敏度变为无意义的，这时，需要论及一个本征(或不变)子空间的灵敏度．

从定性观点，估计式(3)与(4)意味着可对角化矩阵 A 的诸本征值的扰动都正比于扰动 F 的大小，而比例因子都可由单个的或整体的条件数来表示．如果 A 的 Jordan 法式是非对角矩阵，且本征值 λ 对应于初等因子 $(z-\lambda)^m$，则在一般情况下 λ 的扰动不再正比于 $\|F\|$，而正比于 $\|F\|^{\frac{1}{m}}$．

本征值完全问题的最重要的特殊情形是要计算实对称或复 Hermite 矩阵 A 的所有本征值(本征向量)．这样矩阵的所有畸变系数均等于 1，并且，这时近似估计式(3)变为一个准确的不等式：

$$|\Delta\lambda| \leqslant \|F\|_2.$$

(4)中的矩阵 P 这时可取为正交或酉矩阵，因而该整体条件数在谱范数下等于 1．不管 A 的谱中诸点的重数如何，总存在矩阵 $A+F$ 诸本征值 $\tilde{\lambda}_i$ 的一种排列使得对所有 i 均有

$$|\tilde{\lambda}_i-\lambda_i| \leqslant \|F\|_2.$$

如果不仅矩阵 A 本身是对称(Hermite)的，而且相同的条件也适用于扰动 F，则有可能得到更加苛刻的界限([5])．

另外，存在一些对计算本征值与本征向量的准确度的后验估计．它们对于对称与 Hermite 矩阵 A 非常有效．

设 $\tilde{x}_i$ 为矩阵 A 对应于单重本征值 λ_i 的近似本征向量，x_i 为其准确本征向量．假定这两个向量已规范化．这时，借助于向量 $\tilde{x}_i$ 得到的 λ_i 的最好估计能由如下的 Rayleigh 泛函

$$\varphi(A,z)=\frac{(Az,z)}{(z,z)}$$

对应于 $\tilde{x}_i$ 的值，即数值 $\mu_i=\varphi(A,\tilde{x}_i)$ 给出(这适用于任意矩阵 A，不仅限于 Hermite 矩阵)．向量 $r_i=A\tilde{x}_i-\mu_i\tilde{x}_i$ 称为脱节向量(discrepancy vector) (或残差 (residual))．设

$$\varepsilon=\|r_i\|_2,\quad a=\min_{j\neq i}|\lambda_j-\mu_i|.$$

这时，a 的一个上界可容易从算出的本征值 $\tilde{\lambda}_j$ 推得．如下两个不等式均成立：

$$|\lambda_i-\mu_i| \leqslant \frac{\varepsilon^2}{a},\quad |\sin\angle(x_i,\tilde{x}_i)| \leqslant \frac{\varepsilon}{a}.$$

如果 λ_i 为多重本征值或如果在 λ_i 邻近有一组本征值，则需要估计对全组本征值的全面扰动以及对相应的不变子空间的扰动([5])．

跟这个寻常的本征值完全问题一起，经常也需要求

解所谓的广义本征值问题(generalized eigen value problem):

$$Ax = \lambda Bx. \qquad (5)$$

在最重要的情形里,矩阵 A 与 B 都是对称(Hermite)的,且其一为正定的. 数值求解问题(5)的理论与方法平行于寻常的对称(Hermite)本征值问题的情形.

如果矩阵 A 与 B 两者都不是定的或者如果至少有一个不是对称的,则可应用QZ算法([6]),它是QR算法的一种推广. 在这里可以出现一些在寻常本征值完全问题中未曾见到的崭新的概念:无限本征值与连续谱.

更加复杂的性质出现在一些非线性本征值问题中:

$$(A_n\lambda^n + A_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + A_0)x = 0.$$

此类问题通常用将它们简化为高阶线性方程组的方法来求解([7]).

参考文献

[1] Данилевский, А. М., 《Матем. сб.》, 2 (1937), 1, 169—171.

[2] Фаддеев, Д. К., Фаддеева, В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, 2 изд., М., 1963 (中译本:Д. К. 法捷也夫、В. Н. 法捷也娃,线性代数计算方法,上海科学技术出版社,1965).

[3] Wilkinson, J. H., Rounding errors in algebraic processes, Prentice Hall, 1963 (中译本:J. H. 威尔金森,代数过程的舍入误差,人民教育出版社,1982).

[4] Wilkinson, J. H., The algebraic eigenvalue problem, Oxford Univ. Press, 1969 (中译本:J. H. 威尔金森,代数特征值问题,科学出版社,1987).

[5] Parlett, B., The symmetric eigenvalue problem, Prentice Hall, 1980.

[6] Moler, C. B. and Stewart, G. W., An algorithm for generalized matrix eigenvalue problem, *Siam J. Numer. Anal.*, **10** (1973), 241—256.

[7] Кублановская, В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, Новосиб., 1980, 37—53.

Х. Д. Икрамов 撰

【补注】 近年来对**稀疏矩阵**(sparse matrix)的本征值问题做了大量的研究. 由于一些存储问题,这里面临的挑战更严峻. 但对对称(Hermite)的情形,Lanczos算法(Lanczos algorithm)已被证明是十分成功的.

对QR算法以及计算本征值的其他迭代算法的详细描述见**迭代法**(iteration methods).

参考文献

[A1] Golub, G. H. and Loan, C. F. van, Matrix computations, North Oxford Acad., 1983.

陈公宁 译

完全 Riemann 空间 [complete Riemannian space; полное Риманово пространство]

内部距离函数为 ρ 的 Riemann 空间,它作为具有度量 ρ 的度量空间是完全的.

设 M 是一个连通 Riemann 空间,它具有 Levi-Civita 联络(Levi-Civita connection),那么下面三个结论等价:a) M 是完全的;b) 对每一点 $p \in M$,**指数映射**(exponential mapping)$\exp_p$ 是定义在整个 M_p 上的(这里 M_p 是 M 在 p 的切空间);c) 每一个关于距离 ρ 有界的闭集 $A \subset M$ 是紧的(Hopf-Rinow 定理(Hopf-Rinow theorem)). 结论是:完全 Riemann 空间 M 中的任何两点 p, q 都能在 M 中用一条长度为 $\rho(p,q)$ 的测地线连接;任何测地线可无限延伸.

对具有非对称距离函数的空间,这个定理有一个推广([2]).

参考文献

[1] Gromoll, D., Klingenberg, W. and Meyer, W., Riemannsche Geometrie in Grossen, Springer, 1968.

[2] Cohn-Vossen, S. E., Existenz kürzester Wege, *Compos. Math.*, 3(1936), 441—452.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 设 p 是 Riemann 流形 M 的一个点. 如果 $\exp_p$ 在整个 T_pM 上有定义,那么 M 称为在 p 是测地完全的(geodesically complete),如果 M 在所有的点 p 都是测地完全的,那么 M 称为测地完全的(geodesically complete). 为了 M 是完全的(或等价地,测地完全的),M 在一个点是测地完全的就足够了.

参考文献

[A1] Klingenberg, W., Riemannian geometry, W. de Gruyter, 1982.

潘养廉 译

完全集 [complete set; полное множество], 域 K 上的拓扑向量空间 X 中的

一个具有下列性质的集合 A: A 中的元素的线性组合集在 X 中(处处)稠密,也就是说,由集合 A 生成的闭子空间,即 A 的闭线性包,与 X 重合. 例如,$[0,1]$ 上的在 C 中取值的连续函数赋范空间 C 中,集合 $\{x^n\}$ 就是完全集. 如果 K 是非离散赋范域,那么每个吸收集(特别是 X 中的每个零邻域)是完全集.

为了使 $A=\{a_t\}(t \in T)$ 是按空间 X 的弱拓扑 $\sigma(X, X^*)$ 的完全集,其充要条件为对于每个 $\xi \in X^*$,存在指标 t,使得 $\langle a_t, \xi \rangle \neq 0$;这意味着没有一个闭超平面可包含所有 a_t,即 A 是全集(total set). 此外,如果 X 是**局部凸空间**(local convex space),那么按弱拓扑的完全集也是按原拓扑的完全集.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 当然,拓扑向量空间中的完全集也可以理解为 A 中的每个 **Cauchy 序列**(Cauchy sequence)在 A 中收敛的集合 A,并且目前这是对该词用得最多的意义. 关于吸收集的概念见**拓扑向量空间**(topological vector space).

【译注】 【补注】中所说的"完全集",通常译为"完备

集"以示区别. 同时作为完备集的定义,【补注】中说得不够确切;它仅适合于度量向量空间,而不适合于一般的拓扑向量空间. 正确的定义应把"Cauchy 序列"换为"广义 Cauchy 序列"(generalized Cauchy sequence)、"Cauchy 网"(Cauchy net)或"Cauchy 滤子"(Cauchy filter).

史树中 译

泛函的完全集 [complete (或 total) set of functionals; достаточное (或 тотальное) множество функционалов]

定义在线性拓扑空间 X 上的连续线性泛函 $f(x)$ 的集合 Γ,对于它来说,不存在元素 $x \in X (x \neq 0)$,使得对于所有 $f \in \Gamma$ 等式 $f(x)=0$ 成立. 每个局部凸空间都有泛函的完全集.

M. И. Кадец 撰 史树中 译

完全空间 [complete space; полное пространство]

与**度量空间** (metric space)、**一致空间** (uniform space)、**拓扑空间** (topological space)、**邻近空间** (proximity space)、**拓扑群** (topological group) 空间、具有**对称性** (symmetry) 的空间以及**伪度量空间** (pseudo-metric space) 等有关的一个术语;这个术语也可用于其它场合. 完全性的所有定义都是基于一个一般观念. 它的具体表现依赖于空间的特殊类型. 完全性的各种定义的一般特征体现在足够广泛的一类序列、定向系列或有心系统的收敛性的要求中.

度量空间称为完全的 (complete),如果其中每个**基本序列** (fundamental sequence) 都收敛. 伪度量空间和具有对称性的空间的完全性也按同样的意义来理解. 一致空间称为完全的 (complete),如果对于每个有心集系(它关于给定一致结构的覆盖包含任意小的集合),其元素的交是非空的. 在拓扑群上有自然的右一致结构和左一致结构. 如果群的空间在这些结构之一中是完全的,则它在另一个中也是完全的,并且这个拓扑群称为 Weyl 完全的 (Weyl complete). Райков 完全性 (Raĭkov completeness) 用在关于右一致结构和左一致结构的并得到的群上双边一致结构上. 度量空间的完全性和 Райков 完全性可理解为关于给定空间作为同类型空间的子空间的任意表现的绝对闭包. 特别地,度量空间是完全的,当且仅当它在包含它的任意度量空间中是闭的. 拓扑群是 Райков 完全的,当且仅当它在包含它作为拓扑子群的任意拓扑群中是闭的. 关于完全性的基本结构是:每个度量空间可用标准方法实现与之相应的完全化,是包含原空间作为处处稠密子空间的完全度量空间. 类似地,每个拓扑群是 Райков 可完全化的,但不是任一拓扑群都是 Weyl 可完全化的.

对于拓扑空间,绝对闭包 (absolute closure)(即在包含它的任意空间中的闭包)的要求,如果限于完全正则 Hausdorff 空间类上,则导致紧空间;这些空间且仅有这些空间有这个性质. 然而,还有另一种有用的且自然的手段定义拓扑空间的完全性. 完全正则 Hausdorff 空间称为 Čech 完全的 (Čech complete),如果它在确定的 Hausdorff 紧化中能表示为可数开集族的交. 所有这种空间有 Baire 性质 (Baire property):非空开处处稠密集的可数族的交必为非空的. 度量空间是 Čech 完全的,当且仅当它是由完全度量而可度量化的 (Александров - Hausdorff 定理 (Aleksandrov - Hausdorff theorem)). 在许多重要方面,Čech 完全性提供拓扑空间的确切特性. 例如,可数 Čech 完全空间具有可数基且可度量化. 若空间是 Čech 完全的,则在积运算下保持仿紧性. 在**完满映射** (perfect mapping) 下 Čech 完全性也是保持的,且在可度量化空间类中,在开连续映射的变换下也是保持的.

在完全正则 Hausdorff 空间中,另一种有用的手段定义完全性与在其上考虑的极大一致结构有关:如果这个一致空间是完全的,则拓扑空间称为 Dieudonné 完全的 (Dieudonné complete). Dieudonné 完全性恰适用于与可度量化空间的拓扑积的闭子空间同胚的那些空间. 在 Dieudonné 完全性情况下这个性质描述仿紧性,可数紧性及紧性. 所有仿紧空间是 Dieudonné 完全的,且特别地适用于所有度量空间. 这表明在此空间中 Dieudonné 完全性不意味 Baire 性质成立. Dieudonné 完全性的特殊情形是拓扑空间的 Hewitt 完全性 (Hewitt completeness),它意味着空间与实直线的确定族的拓扑积的闭子空间同胚.

参考文献

[1] Архангельский, А. В., Пономарев, В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974 (英译本: Arkhangel'skiĭ, A. V. and Ponomarev, V. I., Fundamentals of general topology, Problems and exercises, Reidel 1984).

A. B. Архангельский 撰

【补注】 Hewitt 完全空间也称为实紧空间 (real-compact space). 有心集系是使有限交不空的集族.

方嘉琳 译

完全系统 [complete system; полная система],闭系统 (closed system),微分方程的

一阶偏微分方程组

$$F_i(x, u, p) = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \tag{1}$$

$$x = (x_1, \ldots, x_n), \quad u = u(x_1, \ldots, x_n),$$

$$p = (p_1, \ldots, p_n) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right),$$

它具有下列性质:对满足方程(1)的数组 (x, u, p) 的任意选择,存在等式

$$F_{ij}(x, u, p) = 0, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant m,$$

其中 $F_{ij}=[F_i, F_j]$ 是 **Jacobi 括号** (Jacobi brackets)．

对于线性齐次系统，完全性条件可以有不同的提法．在此情形的 Jacobi 括号关于变量 $p=(p_1,\cdots,p_n)$ 是线性的，而且如果系统写成

$$P_i(u) = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant m$$

(其中 P_i 是一阶线性微分算子)，那么这个括号对应于交换子 $[P_i, P_j]=P_iP_j-P_jP_i$．系统的完全性表现为所有的交换子 $[P_i, P_j]$ 均可表成系数仅依赖于 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 的 P_k 的线性组合．

如果 $u=u(x)$ 是两个方程

$$F_i(x, u, p) = 0, \quad F_j(x, u, p) = 0$$

的公共解，那么 u 也是方程

$$[F_i, F_j](x, u, p) = 0 \tag{2}$$

的解．

形如(1)的任意系统通常是用附加新的独立方程扩充为完全系，这些方程是由原先的方程通过构造 Jacobi 括号的运算而得到的．由于(2)，因此在这扩充中不会失去过渡系统的任何解，只要它一般是可解的．

系统是完全的这一性质关于变量 (x,u,p,P) 的那些非奇异变换是不变的，对这些变换微分方程的意义被保留．这样的变换例如有自变量的代换：$x=g(y)$, $y=(y_1,\cdots,y_n)$；还有下面形式的变换．设 $A: \mathbf{R}^{2n+1+m} \to \mathbf{R}^m$ 是光滑映射，使得

$$y = x, \quad q = p,$$

$$v = u, \quad t = H(x, u, p, s),$$

$$s = (s_1, \ldots, s_m), \quad t = (t_1, \ldots, t_m)$$

是一微分同胚 $\mathbf{R}^{2n+1+m} \to \mathbf{R}^{2n+1+m}$．于是，所考虑的变换就将系统(1)变为系统

$$G_i(x, u, p) = H_i(x, u, p, F) = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant m.$$

参考文献

[1] Kamke, E., Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen, 2, Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, Akad. Verlagsgesell, 1944 (中译本：E. 卡姆克，一阶偏微分方程手册，科学出版社，1983)．

[2] Гюнтер, Н. М., Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных, Л. - М., 1934．

[3] Carathéodory, C., Calculus of variations and partial differential equations of the first order, 1, Holden-Day, 1965 (译自德文)．

[4] Goursat, E., Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, Hermann, 1891．

А. П. Солдатов 撰

【补注】 系统(1)可以写成下面的形式

$$\widetilde{F}_i(\widetilde{x}, \widetilde{p})=0, \quad i=1, \cdots, m, \tag{A1}$$

$$\widetilde{x} \in \mathbf{R}^{n+1}, \quad \widetilde{p}=\left[\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_{n+1}}\right] \in \mathbf{R}^{n+1},$$

其中 $\widetilde{u}$ 隐式地定义 u：

$$\widetilde{u}(x_1, \cdots, x_n, u)=0,$$

且 $u=x_{n+1}$．(系统(1)可以容许有不用(A1)来表达的奇异解，见[1]．) 这样，Jacobi 括号 $[\widetilde{F}_i, \widetilde{F}_j]$ 就化为 **Poisson 括号** (Poisson brackets) $\{\widetilde{F}_i, \widetilde{F}_j\}$．

系统(A1)定义了诸函数 $\widetilde{F}_i (i=1,\cdots,m)$ 在余切丛 $T^*(\mathbf{R}^{n+1})$ 上的水平集．(A1)是完全的，如果 Poisson 括号 $\{\widetilde{F}_i, \widetilde{F}_j\}_{i,j=1}^m$ 在交集 $M=\bigcap_i\{(\widetilde{x},\widetilde{p}):\widetilde{F}_i(\widetilde{x},\widetilde{p})=0\} \subset T^*(\mathbf{R}^{n+1})$ 上等于零．(A1)在 $(x, p) \in T^*(\mathbf{R}^{n+1})$ 的一邻域 U 中成为对合(involution)的，如果 Poisson 括号在 U 上恒等于零，而且 $\{d\widetilde{F}_i\}_1^m$ 在 U 上是线性无关的．

(A1)在 M 的一邻域中成为对合的，如果它是完全的且在 M 上线性无关性条件成立．成为对合是系统(1)(或(A1))存在解的一个必要条件，见 **Darboux 定理** (Darboux theorem) 和 [A1] 21.1 节．正如在主要条款中所提示的，这些考虑可推广到定义在一般可微流形上的系统．

参考文献

[A1] Hörmander, L., The analysis of linear partial differential operators, 3, Springer, 1985．

孙和生 译 陆柱家 校

完全函数系 [complete system of functions; полная система функций]

某一 Hilbert 空间 H 中的函数的规范正交系 (orthonormal system) $\{\varphi(x)\}$，使得在 H 中不存在与这个函数系的一切函数都正交的其他函数．一个函数系在某一空间中是完全的，在另一空间可能不是完全的．例如，函数系

$$\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nx\right\}, \quad n=0, 1, \ldots$$

在空间 $L[0,\pi]$ 中构成完全函数系，而在空间 $L[-\pi,\pi]$ 中则不构成完全函数系．

Е. Д. Соломенцев 撰 张鸿林 译

完全剩余系 [complete system of residues; полная система вычетов]，模 m 的

任意一个由对模 m 两两不同余的 m 个整数所组成的集合．通常取为模 m 的完全剩余系的有：最小非负剩余 $0,\cdots,m-1$，或绝对最小剩余 —— 当 m 是奇数

时,由 0, ±1,…,±$(m-1)/2$ 组成;当m是偶数时,由0, ±1, …, ±$(m-2)/2$, $m/2$ 组成. C. A. Степанов 撰

【补注】 也见**既约剩余系** (reduced system of residues). 潘承彪 译 戚鸣皋 校

完全拓扑空间 [complete topological space; полное топологическое пространство]

见**完全空间** (complete space).

完全一致空间 [complete uniform space; полное равномерное пространство]

任何 **Cauchy 滤子** (Cauchy filter) 都收敛的**一致空间** (uniform space). 一个重要的例子是**完全度量空间** (complete metric space). 完全一致空间的闭子空间是完全的;可分一致空间的完全子空间是闭的. 完全一致空间的积是完全的;反之,如果非空一致空间的积是完全的,则所有空间都是完全的. 任意一致空间 X 可一致地且连续地映射到完全一致空间 $\hat{X}$ 的某稠子空间上(见**一致空间的完全化** (completion of a uniform space)).

参考文献

[1] Bourbaki, N., Elements of mathematics, General topology, Addison - Wesley, 1966 (译自法文).

[2] Kelley, J. L., General topology, Springer, 1975 (中译本: J. L. 凯莱, 一般拓扑学,科学出版社, 1982).

M. И. Войцеховский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Isbell, J. R., Uniform spaces, Amer. Math. Soc., 1964.

方嘉琳 译

函数的完全变差 [complete variation of a function; полная вариация]

同**函数的变差** (variation of a function).

完全连续算子 [completely - continuous operator; вполне непрерывный оператор], 完全连续映射 (completely - continuous mapping)

从一个 **Banach 空间** (Banach space) X 到另一个空间 Y 中的连续算子 f, 它将 X 中的弱收敛序列变换成 Y 中按范数收敛的序列. 假设空间 X 是可分的(对于 Y, 这不是一个必要的条件;不过一个完全连续算子的象通常是可分的). 换言之,一个算子 f 是完全连续的,如果它把 X 的任意有界子集映到 Y 的一个紧子集之中. 完全连续算子类是**紧算子** (compact operator) 集合中的最重要的类,特别,它包含所有的紧可加算子.

D. Hilbert ([1]) 于 1904 - 1906 年对于空间 l_2 和 L_2 (见 **Hilbert 空间** (Hilbert space))定义了(线性)完全连续算子; F. Riesz 在 [2] 中用紧性的术语来定义; 而对一般的情形, S. S. Banach 在 [3] 中用序列的术语来定义; 他们确立了完全连续算子的最简单的性质. 由于应用于比 Banach 空间更一般的拓扑向量空间, 所以近来更经常地使用"紧算子"这一术语.

参考文献

[1] Hilbert, D., Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Chelsea, reprint, 1953.

[2] Riesz, F., Sur les opérations fonctionelles linéaires, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **149** (1909), 974 - 977.

[3] Banach, S. S., Théorie des opérations linéaires, Hafner, 1932.

M. И. Войцеховский 撰

【补注】 事实上在西方的文献中,不再使用术语"完全连续算子",而代之以术语"紧算子".

参考文献

[A1] Dunford, N. and Schwartz, J. T., Linear operators, General theory, 1, Interscience, 1958.

[A2] Taylor, A. E. and Lay, D. C., Introduction to functional analysis, Wiley, 1980.

李炳仁 译

完全分配格 [completely distributive lattice; вполне дистрибутивная структура]

【补注】 **完全格** (complete lattice), 其中等式 (称为完全分配律 (complete distributive law))

$$\inf_{i\in I}\sup_{j\in J_i} a_{i,j}=\sup_{f\in F}\inf_{i\in I} a_{i,f(i)}$$

对所有双标号的元素族 $\{a_{ij}: i\in I, j\in J\}$ 都成立, 这里 F 是由集族 $\{J_i: i\in I\}$ 上所有的选择函数所成的集合. 与有限分配律 (见**分配格** (distributive lattice))一样,完全分配律也与它的对偶等价,这就是说,一个格 A, 当且仅当它的反向格 A^{op} 是完全分配格时,才是完全分配的. 完全分配格还可以刻画成一种完全格,使 A 的每个元素 a 都能表作下述元素 b 的上确界: 对于 A 的任一子集 S, 只要有 $\sup S\geqslant a$, 就存在一个 $s\in S$ 满足 $s\geqslant b$ [A1]. 任何完全**全序集** (totally ordered set) 都是完全分配的;完全 **Boole 代数** (Boolean algebra), 当且仅当同构于某个集合的全幂集时,才是完全分配的. 一般地说,完全格成为完全分配格,当且仅当它可由一个保持上确界和下确界的映射嵌入于一个全幂集之内.

参考文献

[1] Raney, G. N., Completely distributive complete lattices, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **3** (1952), 677 - 680.

[2] Birkhoff, G., Lattice theory, Amer. Math. Soc., 1967.

戴执中 译

完全可积微分方程 [completely - integrable differential equation; вполне интегрируемое дифференциальное

уравнение]

下列形式的方程

$$\omega \equiv \sum_{i=1}^{n} P_i(x)\,dx^i = 0,\quad P_i \in C^1, \qquad (*)$$

它的 $(n-1)$ 维积分流型通过空间 $\mathbf{R}^n$ 中的某个区域的每一点. 使得微分方程(*)完全可积的必要和充分条件是 Frobenius 条件 (Frobenius condition) $\omega\wedge d\omega=0$, 其中 $\wedge$ 是**外积**(exterior product)的符号([1]). 如果 $n=3$, 这个条件具有下列形式:

$$P_1\left[\frac{\partial P_3}{\partial x^2}-\frac{\partial P_2}{\partial x^3}\right]+P_2\left[\frac{\partial P_1}{\partial x^3}-\frac{\partial P_3}{\partial x^1}\right]+$$

$$+P_3\left[\frac{\partial P_2}{\partial x^1}-\frac{\partial P_1}{\partial x^2}\right] = 0.$$

代替方程(*), 有时考虑下列方程组([2]):

$$dx^i = \sum_{j=1}^{n-1} a_j^i(x,t)\,dt^j,\quad i=1,\ldots,n.$$

在这种情况下, 完全可积条件具有下列形式:

$$\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial a_j^i}{\partial x^l}(x,t)a_k^l(x,t)+\frac{\partial a_j^i}{\partial t^k}(x,t) =$$

$$=\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial a_k^i}{\partial x^l}(x,t)a_j^l(x,t)+\frac{\partial a_k^i}{\partial t^j}(x,t),$$

$$i=1,\ldots,n;\ j,k=1,\ldots,n.$$

完全可积微分方程的积分流形族是**叶状结构**(foliation)([3]).

参考文献

[1] Frobenius, G., Ueber das Pfaffache Problem, *J. Reine Angew. Math.*, **82** (1877), 230-315.

[2] Немыцкий, В. В., 《Матем. сб.》, 1948, т. 23 (65), 161-186.

[3] Новиков, С. П., 《Тр. Моск. матем. об-ва》, **14** (1965), 248-278 (Novikov, S. P., Topology of foliations, *Trans. Moscow Math. Soc.*, **14** (1965), 268-306).

Л. . Рейзинь 撰

【补注】 $\mathbf{R}^n$ 的 $(n-1)$ 维子流形 M 是(*)的积分流形(integral manifold), 如果 ω 对 M 的限制为零; 亦见 **Pfaff 方程**(Pfaffian equation). 表达这一事实的另一(对偶)方式如下所述: 设 U 是使得 $\omega\neq 0$ 的一个开子集. 对于每一点 $x\in U$, 设 D_x 是在 $x\in R^n$ 上使得 $\omega(\xi)=0$ 的一切(切)向量 ξ 的集合. 于是, $D_x\subset T_x(R^n)$ 是 $(n-1)$ 维子空间, $D_x\in U$ 定义了 U 上的一个分布(distribution). 这时, D(或方程 $\omega=0$)的积分流形 M 是对于一切 $x\in M$ 使得 $T_xM=D_x$ 的 U 的 $(n-1)$ 维子流形. U 上的分布 D 称为对合的(involutive), 如果对于一切 x 使得 $\xi(x),\eta(x)\in D_x$ 的 U 上的一切向量场 ξ,η, 对于一切 x, 也使得 $[\xi,\eta](x)\in D_x$. 使用这些术语, Frobenius 可积条件(Frobenius integrability condition) $\omega\wedge d\omega=0$ 等价于下述条件: 由 D 定义的分布是对合的. 上述一切均推广到方程组 $\omega^i=0$, $i=1,\cdots,r$, 见**可积方程组**(integrable system).

完全可积方程组 (completely-integrable system) (完全可积 Hamilton 方程组(completely-integrable Hamiltonian system)), n 维流形上的完全可积 Hamilton 方程 (completely-integrable Hamiltonian eqution)的情况, 则具有相当不同的性质, 即存在 n 个对合积分(包括 Hamilton 函数本身), 见 **Hamilton 系统组**(Hamiltonian system).

参考文献

[A1] Cartan, E., Les systèmes différentielles extérieurs et leurs applications géometriques, Hermann, 1945.

[A2] Kobayashi, S. and Nomizu, K., Foundations of differential geometry, 1-2, Wiley, 1963-1969.

张鸿林 译

完全可约矩阵群 [**completely-reducible matrix group; вполне приводимая матричная группа**]

任意给定的域 P 上的矩阵群, 它的全部元素可用 P 上某矩阵按相似同时约化为分块对角型 (block-diagonal form), 即化为

$$x=\left\|\begin{matrix} d_1(x) & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ & & & & d_m(x)\end{matrix}\right\|,$$

其中 $d_i(x)$ $(i=1,\cdots,m)$ 是方阵, 其余地方用零填补, 且每个矩阵群 $d_i(G)$ 是不可约的, 见**不可约矩阵群**(irreducible matrix group). 用变换的语言来说, 某域上有限维向量空间 V 上线性变换群 G 称为完全可约的, 如果适合下列条件之一: 1) V 的任何子空间如果是 G 不变的, 则有 G 不变的直补, 见**不变子空间**(invariant subspace); 2) V 可分解为极小 G 不变子空间的直和; 或 3) V 可由极小 G 不变子空间生成. 特征除不尽 G 的阶的域上的每个有限矩阵群必完全可约. 完全可约矩阵群的每个正规子群本身是完全可约的.

参考文献

[1] Мерзляков, Ю. И., Рациональные группы, Москва, 1987.

[2] Hall, M., The theory of groups, Macmillan, 1959 (中译本: M. 赫尔, 群论, 科学出版社, 1981).

Ю. И. Мерзляков 撰

【补注】

参考文献

[A1] Feit, W., The representation theory of finite groups, North-Holland, 1982.

[A2] Curtis, C. W. and Reiner, I., Representation theory of finite groups and associative algebras, Interscience, 1962.

石生明 译 许以超 校

完全可约模 [**completely reducible module ; вполне приводимый модуль**]

结合环 R 上的可以表示为其不可约 R 子模之和的模 A (见**不可约模** (irreducible module)). 其等价的定义有: 1) A 是它的极小子模之和; 2) A 同构于不可约模的直和; 3) A 与它的**基座** (socle) 相同. 完全可约模的子模及商模仍然是完全可约模. 模 M 的子模构成的格是有补格,当且仅当 M 是完全可约模.

如果环 R 上的所有右 R 模都是完全可约的,则其所有左 R 模也都是完全可约的,反之亦然;此时称 R 为完全可约环(completely reducible ring)或**经典半单环** (classical semi-simple ring). 一个环 R 是完全可约的充分条件是它作为自身上的左(右)模是完全可约的.

参考文献

[1] Lambek, J., Lectures on rings and modules, Blaisdell, 1966.

[2] Jacobson, N., Structure of rings, Amer. Math. Soc., 1956.

О. А. Иванова 撰 赵春来 译

完全可约集 [**completely reducible set ; вполне приводимое множество**]

拓扑向量空间 E 上线性算子集 M, 它具有下面性质: E 中任一在 M 下不变的闭子空间在 E 中有补空间, 它在 M 下仍不变. Hilbert 空间 E 中任何关于 Hermite 共轭的对称算子集 M 是完全可约的. 特别, 酉算子构成的任一群也是完全可约集. 代数(群、环等) A 的表示 φ 称为完全可约的(completely reducible), 如果集合 $M=\{\varphi(a): a\in A\}$ 为完全可约的. 若 A 为紧群或为半单连通 Lie 群(李代数), 则 A 在有限维向量空间上的表示是完全可约的 (完全可约性原理(principle of complete reducibility)).

参考文献

[1] Желобенко, Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1970(英译本: Zhelobenko, D. P., Compact Lie groups and their representations, Amer. Math. Soc., 1973).

Д. П. Желобенко 撰

【补注】 完全可约性原理通常称为 Weyl 定理 (Weyl theorem), 见[A1], 第 2 章, 第 6 节.

参考文献

[A1] Humphreys, J. E., Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer, 1972.

许以超 译 石生明 校

完全正则半群 [**completely-regular semi-group; вполне регулярная полугруппа**]

同 **Clifford 半群** (Clifford semi-group).

完全正则空间 [**completely-regular space ; вполне регулярное пространство**]

一个拓扑空间,其中任何一个集合和一个单点集都能够函数分离(见**分离公理** (separation axioms)). 所有单点集都是闭集的完全正则空间 (即完全正则 T_1 空间) 称为 Тихонов 空间 (Tikhonov spaces). 它们形成了拓扑空间的最重要类型之一,它可用各种特殊性质加以区别,而且应用拓扑于其它数学分支中最常遇到. 例如,任意拓扑群的空间都是完全正则空间,但未必是正规空间. 所有 Тихонов 空间都是 Hausdorff 空间,且可定义为有 (Hausdorff) 紧化的空间,即为紧统的 (甚至处处稠密) 子空间. 在已给空间的紧化中,存在唯一(直至同胚) 极大或 Stone-Čech **紧化** (Stone-Čech compactification), 它可连续映射到已给空间的任意(Hausdorff) 紧化上,使已给空间的每一点都映到自身.

Тихонов 空间不依靠实数和函数的直接定义 ([3]) 基于空间的两个共轭基 —— 开基 $\mathfrak{B}$ 和闭基 $\mathfrak{A}$; 这些基是共轭的, 意味着每个基是由另一个基的集合的补组成的. 这种共轭基的对 $\{\mathfrak{B}, \mathfrak{A}\}$ 称为正则的 (regular), 如果它满足下列条件: 1) $\mathfrak{A}$ 的任二不相交闭集都有属于 $\mathfrak{B}$ 的不相交邻域; 2) $\mathfrak{A}$ 是**网** (拓扑空间中集合的) (net (of sets in a topological spaces)), 即对任一点 $x\in X$ 和 $\mathfrak{B}$ 中的任一邻域 O_x, 存在 $\mathfrak{B}$ 中的元素 B, 使 $X\setminus\{x\}\supset B\supset X\setminus O_x$. T_1 空间是完全正则的, 当且仅当至少有一对正则的共轭基 (Зайцев 定理 (Zaĭtsev theorem)).

参考文献

[1] Александров, П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, М.-Л. 1948 (中译本: П. С. 亚历山大罗夫, 集与函数的泛论初阶, 高等教育出版社, 1955).

[2] Понтрягин, Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1970 (中译本: Л. С. 邦德列雅金, 连续群, 科学出版社, 1978).

[3] Kelley, J. L., General topology, Springer, 1975 (中译本: J. L. 凯莱, 一般拓扑学, 科学出版社, 1982).

[4] Александров, П. С., Пасынков, Б. А., Введение в теорию размерности. Введение в теорию топологических пространств и общую теорию размерности, М., 1973.

[5] Зайцев, В. И., К теории тихоновских пространств. 《Вестн. Моск. Ун-та. Сер. матем.》, 1967, 3, 48—57.

П. С. Александров 撰

【补注】 上述条件 2) 也可描述为: 2′) $\mathfrak{A}$ 是网, 即对任何点 $x\in X$ 和 $\mathfrak{B}$ 中任何邻域 O_x, 存在 $\mathfrak{A}$ 的一个元素 A,

使 $x \in A \subset O_x$.

完全正则性的内部特征已由许多作者得到．都很像上面引证的 Зайцев 的结果．[3] 中有一个结果与 Зайцев 的结果相同；亦见 [A6] 中练习 1.5.G.

参考文献

[A1] Kerstan, J., Eine Charakterisierung der vollständig regulären Räume, *Math. Nachr.*, **17** (1958), 27－46.

[A2] Frink, O., Compactifications and semi - normal spaces, *Amer. J. Math.*, **86** (1964), 602－607.

[A3] Steiner, E. F., Normal families and completely regular spaces, *Duke Math. J.*, **33** (1966), 743－745.

[A4] Groot, J. de and Aarts, J. M., Complete regularity as a separation axiom, *Canad. J. Math.*, **21** (1969), 96－105.

[A5] Brandenburg, H. and Mysior, A., A short proof of an internal characterization of complete regularity, *Canad. Math. Bull.*, **27** (1984), 461－462.

[A6] Engelking, R., General topology, PWN, 1977.

方嘉琳 译

完全单半群 [completely - simple semi - group ; вполне простая полугруппа]

单半群中最重要的一种类型．半群 S 称为完全单的 (完全 0 单的)，如果它是单的 (0 单的) 且包含一个本原幂等元 (primitive idempotent)，即非零的幂等元，但它对 S 的任何别的非零幂等元都不是单位元．如添加零到一个完全单半群中，则它成为完全 0 单半群．因此完全单半群的很多性质可从完全 0 单半群的相应性质得到．

半群 S 是完全 0 单的，当且仅当它是 0 单的且满足下列条件之一：1) S 有非零的极小左理想和右理想；2) S 的每个元素的某个方幂属于 S 的子群．特别地，任何周期的 (有限时更是) 0 单半群是完全 0 单半群．任何完全 0 单半群是 0 双单**正则半群** (regular semi - group) 且是它的 0 极小左 (右) 理想的并．半群 S 是完全单半群，当且仅当它满足下列条件之一：1) S 是一些同构的群的矩形带 (见**半群的带** (band of semi - groups))；2) S 是正则的且它的全部幂等元都是本原的．矩形群 (rectangular group) 是一类特殊的完全单本群，它是群和矩形带的直积 (见**幂等元的半群** (idempotents, semi-group of))．右群 (right group) (左群 (left group)) 是矩形半群的特殊情况．Rees 定理 (Rees theorem) 给出完全 0 单半群的重要表示：半群是完全 0 单半群，当且仅当它同构于具有零的群上的**矩阵型 Rees 半群** (Rees semi - group of matrix type)．

有限完全单半群的研究形成了半群理论发展的起点，见**半群** (semi - group)．完全 0 单和完全单半群频繁地出现在半群的各种理论研究中，它们是最透彻地研究过的一类半群．

参考文献

[1] Clifford, A. H. and Preston, G. B., The algebraic theory of semigroups, 1－2, Amer. Math. Soc., 1961－1967.

[2] Ляпин, Е. С., Полугруппы, М., 1960 (英译本: Lyapin, E. S., Semigroups, Amer. Math. Soc., 1974).

[3] Kapp, K. and Schneider, H., Completely 0 - simple semigroups: an abstract treatment of the lattice of congruences, Benjamin, 1969.

Л. Н. Шеврин 撰

【补注】 半群 S 称为单的 (simple) (0 单的 (0 - simple))，如果它没有真理想 (分别地，如果它仅有的真理想是 $\{0\}$ 且 $S^2 \neq \{0\}$)，见**单半群** (simple semi - group)．更精确地，本原幂等元是非零幂等元 $e \in S$，使得对任何非零幂等元 $f \in S$，若 $fe = ef = f$，就有 $f = e$ (对任何 $f \neq e$，e 不是单位元)．

矩阵型的 Rees 半群通常称为 Rees 矩阵半群 (Rees matrix semi - group)．

参考文献

[A1] Suschkewitsch, A. K., Ueber die endlichen Gruppen ohne das Gesetz der eindeutigen Umkehrbarkeit, *Math. Ann.*, **99** (1928), 30－50.

[A2] Rees, D., On semi - groups, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **36** (1940), 387－400.

石生明 译 许以超 校

完全性 (逻辑中的) [completeness (in logic) ; полнота (в математической логике)]

与在偏序集中的极大元概念密切相关的一种性质．在数理逻辑中，完全性这个术语有下列一些用法：完全演算，完全理论 (或完全公理集)，ω 完全理论，在 Post 意义下的完全公理系统，一个模型到另一个模型的完全嵌入，一个完全理论的完全公式，等等．

在认识论的意义下，一个最重要的概念是一个演算对于一个给定的语义来说的完全性．一个演算称为完全的 (complete) 是指任何在语义下为真的公式都能在该演算中推出．这里可推出性的概念应该是能行的 (effective)，即有一个法则集合及一个运用这些法则的指令集合，使得可以构造出推导过程，并且有一个辨认哪些是推导过程而哪些又不是推导过程的算法．另一方面，语义永真公式 (semanntically correct formula) 的概念通常要用到不能行的概念来表述，因为其中使用到关于无穷集甚至是不可数集上的全称量词．在经典和直觉主义演算的完全性定理中，完全性就是在这种意义下理解的．在经典演算的情形，纯 (狭义) 谓词演算的语言中，所谓语义地永真的 (semantically correct) 公式就是指在这种语言的所有模型中都真的公式．在直觉主义情形，语义地真的公式取为在所有 **Kripke 模型** (Kripke model) 中都真的所有公式．不管是经典

还是直觉主义情形．一个公式在给定的模型中为真的概念也要用到无穷域上的量词(如果该模型是无穷的)．有时，也考虑那些并不满足能行性要求的演算．

在一个演算中的完全性概念是同一个完全理论的完全性密切相关的．一个理论(theory)（更精确地，一个初等理论(elementary theory))是指纯谓词演算语言中任何一个闭公式的集合 T．一个相容的理论 T 称为完全的(complete)是指在经典谓词演算中 T 的所有推论组成的集合是一个极大相容集，即只要把任何不能由 T 推出的闭公式加到 T 中后便可推出任何公式.在这个定义中，并不假定 T 是能行给出的．所以，推导这个概念也变得不能行．理论 T 的完全性等价于下面的条件：对任何闭公式 φ，下列两断言中刚好有一个成立：φ 从 T 可推出，或者 $\neg\varphi$ 从 T 中可推出．

如果给定一个纯谓词演算语言的模型 M，便可得到一个公式在模型 M 中为真的语义概念．一个理论 T 称为关于模型 M 是完全的,是指由经典谓词演算加上 T 中的公式后恰好可以推出全体在 M 中为真的公式．一个理论的完全性和关于 M 的完全性概念之间有下列关系：理论 T 为完全的当且仅当存在一个模型 M 使得 T 关于 M 是完全的．模型 M 称为理论 T 的模型(model for the theory)是指 T 中所有公式都在 M 中真．理论的完全性的一个充分性的条件是：对某个无穷的基数，如果理论 T 的所有模型都互相同构并且 T 没有有穷模型，则 T 是完全的．其逆不一定成立．

理论的完全性概念能被应用到理论的可解性问题中，这是由于完全理论具有下列性质：如果理论 T 是完全的并且集合 T 是有穷或者甚至是递归可枚举的，则存在一个算法来辨认任何公式 φ 是否是可推出的．如果不要求集合 T 能行确定，则任何理论可以完全化，即可以加入一些新公理而扩张成完全理论．如果要求能行性，则情况便不同，正如 Gödel 关于算术的不完全性定理所表明的那样．理论 T' 称为理论 T 的扩张(extension of a theory)是指由 T 可推出的任何公式皆由 T' 可推出．假定 T 为递归可枚举的相容理论，称理论 T 为能行不可完全化的(effectively incompletable)是指在 T 的任何一个递归可枚举的相容扩张 T'，总可能行地找到一个公式 φ，使得 φ 在 T' 中是形式地不可解的，即 φ 和 $\neg\varphi$ 都不是 T' 可推出的．Gödel 的不完全性定理断言，有一个具有有穷多条公理的特定的算术系统 Q 是能行不可完全的．由这个定理可推得任何一个满足能行性要求的算术系统关于自然数的标准模型都具有不完全性．

一个算术理论 T 称为 ω 完全的(ω-complete)是指对任何一个带一个自由变元 x 的公式 $\varphi(x)$，如果 T 可推出所有下列形式的公式

$$\varphi(0),\ \varphi(1),\ \ldots, \tag{$*$}$$

则公式 $\forall x\,\varphi(x)$ 也在 T 中可推出．从 Gödel 不完全性定理的证明可以推得存在非 ω 完全的理论，甚至存在这样的理论，在其中，无穷公式序列(*)和 $\exists x\neg\varphi(x)$ 都是可推出的，然而在该理论中推不出矛盾来．这样的理论称为 ω 不相容的(ω-inconsistent)．

一个相容的公理系统称为在 Post 意义下是完全的(complete in the sense of Post)指把任何公理模式加到这个理论上之后，或者并没有扩大可推出公式集合或者系统已经变成是不相容的．例如，经典的命题演算是在 Post 意义下完全的，而直觉主义命题演算则不然．

参考文献

[1] Kleene, S. C., Introduction to metamathematics, North-Holland 1951（中译本：S. C. 克林，元数学导论，科学出版社，1984, 1985）.

[2] Keisler, H. J. and Chang, C. C., Model theory, North-Holland, 1973.

[3] Shoenfield, J. R., Mathematical logic, Addison-Wesley, 1967.

[4] Rogers, Jr. H., Theory of recursive functions and effective computability, McGraw-Hill, 1967.

[5] Kripke, S., Semantical analysis of intuitionistic logic, in Formal systems and recursive functions, North-Holland, 965, 22–130.

В. Н. Гришин 撰　郑锡忠 译　莫绍揆 校

完全性（拓扑学中的）[completeness (in topology); полнота (в топологии)]

空间的一种性质，要求满足 Cauchy 条件或其推广的序列、定向列或集族是收敛的(见**完全空间**(complete space))．　　А. В. Архангельский 撰　方嘉琳 译

完全化 [completion; пополнение]，拓扑向量空间 X 的

一个完全拓扑向量空间 $\hat{X}$，使 X 为其中的稠密子空间．由 X 到 $\hat{X}$ 的转换也称为完全化；它的标准实现是用广义序列来进行的(特别是 Cauchy 序列，见**广义序列**(generalized sequence))．　　М. И. Войцеховский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Köthe, G., Topological vector spaces, I, Springer, 1969.

史树中 译

MacNeille 完全化 [completion, MacNeille; пополнение сечениями]，分割完全化(completion by sections)，偏序集的

偏序集 M 依下述方式得到的**完全格**(complete lattice) L．设 $P(M)$ 是 M 的所有子集的集合，以包含关系为序．对于任一 $X\in P(M)$，令

$X^{\Delta}=\{a\in M: a\geqslant x$ 对所有的 $x\in X\}$,

$X^{\nabla}=\{a\in M: a\leqslant x$ 对所有的 $x\in X\}$.

条件 $\varphi(X)=(X^{\Delta})^{\nabla}$ 定义了 $P(M)$ 上一个闭包运算 φ(见**闭包关系**(closure relation)). $P(M)$ 中所有 φ 闭子集所成的格 L 是完全的. 对任何 $x\in M$, 集 $(x^{\Delta})^{\nabla}$ 是由 x 生成的主理想. 对每个 $x\in M$, 令 $i(x)=(x^{\Delta})^{\nabla}$. 于是 i 是从 M 到完全格 L 内的一个同构嵌人,它保持 M 中的所有最小上界和最大下界不变. 用到有理数所成的序集上来,上述的构造给出了有理数集按 Dedekind 分割所得到的完全化.

参考文献

[1] MacNeille, H. M., Partially ordered sets, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 42 (1937), 416–460.

T. C. Фофанова 撰

【补注】 Boole 代数的 MacNeille 完全化是个(完全的) Boole 代数,但**分配格**(distributive lattice)的 MacNeille 完全化不一定是分配的(见[A1]). 在 Boole 代数的情形下,由 Stone 对偶性 (见 **Stone 空间** (Stone space)), MacNeille 完全化与**紧零维空间**(zero-dimensional space, 见[A2], p.109)的**绝对形**(absolute)的构造(或 Gleason 覆盖构造 (Gleason cover construction))相对应.

参考文献

[A1] Crawley, S. P., Regular embeddings which preserve lattice structure, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 13 (1962), 748–752.

[A2] Johnstone, P. T., Stone spaces, Cambridge Univ. Press, 1982.

戴执中 译

完全化方法 [completion method; пополнения метод]

基于用递归过程计算矩阵逆的一种方法,该过程涉及到用公式

$$(C+uv)^{-1}=C^{-1}-\frac{1}{\gamma}C^{-1}uvC^{-1},$$

$$\gamma=1+vC^{-1}u.$$

计算矩阵 $(C+uv)^{-1}$,这里 u 为列向量, v 为行向量.

这个方法的计算格式说明如下. 设 $A=\|a_{ij}\|$ 为给定的 n 阶矩阵. 考虑序列 $A_0=E, A_1, \cdots, A_n$, 这里 $A_k=A_{k-1}+e_k a_k$, e_k 是单位矩阵 E 的第 k 列, $a_k=(a_{k1},\cdots,a_{k,k-1},a_{k,k}-1,a_{k,k+1},\cdots,a_{kn})$. 这时 $A_n=A$, 并且应用上述步骤 n 次即可求得矩阵 A^{-1}. 在这种情况下,计算公式罗列如下: 如果 $a_j^{(k)}$ 是 A_k^{-1} 的第 j 列,则对 $k=1,\cdots,n$,

$$a_j^{(k)}=a_j^{(k-1)}-\frac{a_k a_j^{(k-1)}}{1+a_k a_k^{(k-1)}}a_k^{(k-1)},\quad j=1,\ldots,n. \tag{*}$$

这里只需要计算矩阵 A_k^{-1} 的前 k 行元素,因后面所有行与单位矩阵的相应行相同.

在完全化方法里还知道重新安排计算顺序的另一些可能的方法,它们都是基于对公式(*)的某些修正,例如有所谓的 Ершов 法(Ershov method) (见[1]).

参考文献

[1] Фаддеев, Д. К., Фаддеева, В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, 2 изд., М.-Л., 1963 (中译本: Д. К. 法捷也夫、В. Н. 法捷也娃, 线性代数计算方法, 上海科学技术出版社, 1965).

Г. Д. Ким 撰

【补注】 这个方法也称为**加边法**(bordering method) (见[1]).

陈公宁 译 王伯英 校

完全化(一致空间 X 的) [completion (of a uniform space X); пополнение (равномерного пространства X)]

分离完全一致空间 (complete uniform space) $\hat{X}$, 存在一致连续映射 $i: X\to\hat{X}$, 使得对任何从 X 到分离完全一致空间 Y 的一致连续映射 f, 存在唯一的一致连续映射 $g:\hat{X}\to Y$, 使得 $f=g\circ i$. 子空间 $i(X)$ 在 $\hat{X}$ 中稠密,且 X 中近域在 $i\times i$ 下的象是 $i(X)$ 中的近域;它们在 $\hat{X}\times\hat{X}$ 中的闭包组成 $\hat{X}$ 中近域的基本系. 如果 X 是可分离的,则 i 是单射(容许 X 和 $i(X)$ 等同). 子空间 $A\subset X$ 的分离完全化同构于 $i(A)\subset\hat{X}$ 的闭包. 一致空间的积的分离完全化同构于在积中作为因子的空间的分离完全化的积.

$\hat{X}$ 存在性的证明实际上推广了从有理数集到实数集的 Cantor 构造.

参考文献

[1] Bourbaki, N., Elements of mathematics, General topology, Addison-Wesley, 1966 (译自法文).

М. И. Войцеховский 撰 方嘉琳 译

复形 [complex; комплекс]

元素 t 的偏序集 $K=\{t\}$,它具有自反正则可递关系 $<$, 同时具有一个称为**元素 t 的维数**(dimension of the element)的整数值函数 $\dim t$, 数 $[t:t']$ 称为元素 t 和 t' 的**关联系数**(incidence coefficient),它满足条件: 1)由 $t'<t$ 意味着 $\dim t'<\dim t$; 2) $[t:t']=[t':t]$; 3) $[t:t']\neq 0$ 意味着或者 $t'<t$, 或者 $t<t'$, 且 $|\dim t-\dim t'|=1$; 4) 对 K 中任何一对维数差为 2 的元素 t 和 t'', 至多存在 K 中有限多个元素 t', 使得

$$[t:t'][t':t'']\neq 0,$$

并且

$$\sum_{t'}[t:t'][t':t'']=0.$$

用 $\alpha(t)\alpha(t')[t:t']$ 代替 $[t:t']$,我们得到一个与 K 等

同的复形，这里$\alpha(t)$是取值为 ±1 的函数；换句话说，关联系数 $[t:t']$ 在不计因子 $\alpha(t)\alpha(t')$ 时是确定的；由一个值到另一个值的转变称为复形 K 定向的变换(change of orientation)；元素 t 分别依据 $\alpha(t)=+1$ 或 -1 而保持或变换其定向.

如果 n 是 K 中元素的最大维数，则复形 K 称为有限维的(finite dimensional)，更精确地说，n 维的；如果不存在具有最大维数 k 的元素，则 K 称为无穷维的(infinite dimensional). 复形 K 中元素 t 的星形(star of an element)是 K 中使得 $t'>t$ 的所有 t' 的集合. K 中元素 t 的闭包(closure of an element t)是 K 中使得 $t'<t$ 的所有元素 t' 的集合. K 中元素 t 的边界(boundary of an element)是 K 中使得 $t'<t$ 且 $t'\neq t$ 的所有元素 t' 的集合. 在 K 中如果 $t'<t$，则元素 t' 称为元素 t 的面(face of an element)；如果 $t'\neq t$，则 t 的面 t' 称为真面(proper face). K 中的两元素 t 和 t' 是关联的(incident)，如果或者 $t'<t$，或者 $t<t'$. 复形 K 称为有限的(finite)，如果其元素的集合是有限的. 复形 K 称为星形有限的(star-finite)（或闭包有限的(closure-finite)），如果其每一元素的星形(或闭包)由有限多个元素组成. 复形称为局部有限的(locally finite)，如果它是星形有限的且闭包有限的.

复形 K 的子复形(subcomplex)是 K 中沿用 K 的相同维数和关联系数的任意子集，它也是一个复形. 如果一个子复形包含其每一个元素的闭包，则称它是闭的(closed)，如果它包含其每一元素的星形，则称为开的(open). 闭复形的余是开复形，反之亦然. 任何复形中每一元素的星形是开子复形，闭包和边界是闭子复形. 复形 K 的 r 维骨架(r-dimensional skeleton)或 r 骨架(r-skeleton)K^r，是 K 中所有使得 $\dim t\leqslant r$ 的元素 t 的集合；这是个闭子复形.

两个复形 $K=\{t\}$ 和 L 称为同构的(isomorphic)，如果有一个集合 K 到集合 L 的一一映射 f，使得 $\dim f(t)=\dim t$ 且 $[t:t']=[f(t):f(t')]$.

复形的最重要的一种类型是单纯复形，它有两类：抽象复形与几何复形.

抽象单纯复形(abstract simplicial complex)K 以维数可不相同的抽象单形为元素. r 维单形 t^r 是 $r+1$ 个对象 $a^0,\cdots,a^r$ 的集合. 这些对象，即零维单形，称为复形 K 的顶点(vertex). 一个单形称为定向的(oriented)，如果它的顶点集是有序的；而且，相差一个偶置换的不同有序集决定同一个定向. 单形 t^r 的 s 维面(s-dimensional face)，是顶点包含在 t^r 的顶点集合中的 s 维单形. 单纯复形 K 包含其每一单形的所有面. 关系 $t^s<t^r$ 意指 t^s 是 t^r 的面. 面 $(a^0,\cdots,a^s)$ 和面 $(a^{s+1},\cdots,a^r)$ 称为单形 t^r 的对面(opposite faces). 如果 t^{r-1} 是 t^r 的相对于顶点 a^i 的面，则根据 t^r 与 a^it^{r-1} 是否有相同定向而有

$$[t^{r-1}:t^r]=[t^r:t^{r-1}]=\pm 1.$$

如果 t^{r-1} 不是 t^r 的面，则

$$[t^{r-1}:t^r]=[t^r:t^{r-1}]=0.$$

对单纯复形的每个单形都给出一个定向，并且要求每个单形的定向与它的任何一个面的定向相容，就可以得到一个定向复形 K.（见[B1]第 67 页定义 8.7.）

如果给定顶点集和顶点集中那些取作单形的所有有限子集的系统(称为概形(scheme))，那么就定义了一个抽象单纯复形；这里要求每个顶点至少属于系统的一个成员，且属于此系统的一个成员的每一子集也属于此系统. 维数、定向等定义如前.

n 维 Euclid 空间 E^n 的多面体(胞腔)复形(polyhedral (cellular) complex)是可数局部有限复形 K，其元素为 r 维胞腔 t^r，即 E^n 中某个 E^r 的有界凸开子集 $(0\leqslant r\leqslant n)$，这里的胞腔两两不交，属于元素 t^r 闭包的胞腔的并集是 E^r 中 t^r 的拓扑闭包 $\bar{t}^r$，不属于 t^r 的星形的胞腔并集的拓扑闭包与 t^r 不相交. 这时 $t^r<t^s$ 意味着或者 $t^r=t^s$ 或者 $t^r\subset\bar{t}^s\setminus t^s$，且 $[t^{r-1}:t^r]$ 由关联系数 $[E_1^{r-1}:E^r]=-[E_2^{r-1}:E^r]$ 来定义，其中 E_1^{r-1} 和 E_2^{r-1} 是包含 t^{r-1} 的空间 E^{r-1} 划分 E^r 而得到的两个区域. 这就得到了赋予由 E^n 诱导的拓扑的多面体复形 K 的胞腔的并集，称为一个多面体(polyhedron)，通常记作 $|K|$. 多面体复形的一个特殊形式是 Euclid 几何单纯复形(geometric simplicial complex)，其元素为 E^n 中的 Euclid 单形. 一个 r 维 Euclid 单形(r-dimensional Euclidean simplex)t^r 由点 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in E^n$ 组成，由下述关系定义：

$$x_k=\sum_{i=0}^{r}\lambda^i a_k^i,\quad k=1,\ldots,n,$$

其中 $a^i=(a_1^i,\cdots,a_n^i)$ $(i=0,\cdots,r)$ 是 E^n 中的独立点(即它们不包含在 E^n 的任何一个 E^{r-1} 中)，$0<\lambda^i<1$，并且

$$\sum_{i=0}^{r}\lambda^i=1\quad(若 r=0,\ x=a^0),$$

a^i 称为 t^r 的顶点(vertices)，λ^i 是点 x 的重心坐标(barycentric coordinate)，t^r 称为由抽象单形 $(a^0,\cdots,a^r)$ 所界定的几何单形(geometric simplex).

设 K 为顶点在 E^n 中的可数局部有限抽象单纯复形，其中任何组成单形的顶点都是独立的，K 的任何两个没有公共顶点的单形生成不交几何复形，由 K 的单形生成的不属于某个生成单形的几何单形的并集的闭包，与后者不相交. 维数、序、关联等概念均可由 K 转移到生成几何单形的集合；这就把此集合变成一个多面体复形，称为 K 的一个 Euclid 实现(Euclidean realization).

对任何抽象单纯复形也可以有几何实现，不一定为 Euclid 的．设$\{a^i\}$是一个任意抽象单纯复形 K的顶点族，由全良序集 I 为指标 i 标号，设$|K|$为所有非负实数λ_i的组$\{\lambda_i\}$ $(i\in I)$的集合，且$\sum_i\lambda_i=1$，这些数使对应于组$\{\lambda_i\}$中非零坐标$\lambda_{i_0},\cdots,\lambda_{i_r}$的顶点$a^{i_0},\cdots,a^{i_r}$组成 K 中一个单形$(a^{i_0},\cdots,a^{i_r})$(这种坐标的个数有限)；设 K中单形$t^r=(a^{i_0},\cdots,a^{i_r})$与集合$|t^r|$对应，这里$|t^r|$是所有组$\{\lambda_i\}$的集合，其中$\lambda_i\neq0$当且仅当 i 是 $i_0,\cdots,i_r$ 之一，则$|K|$是集合$|t^r|$的并集．将$|t^r|$同胚地嵌入E^{r+1}中：$|t^r|$中的点$\{\lambda_i\}$与E^{r+1}中的点$\{\lambda_{i_0},\cdots,\lambda_{i_r}\}$对应．这便在$|t^r|$和$|K|$中引入了一个拓扑：$|K|$中的一个集合被取作开集，如果它与每一个$|t^r|$的交集是$|t^r|$中的开集．多面体$|K|$称为复形 K 的几何实现(geometric realization of the complex)，而 K称为多面体$|K|$的三角剖分(triangulation of the polyhedron)．单纯复形 K是有限的(或局部有限的)当且仅当$|K|$是紧(或局部紧)空间．单纯复形 K的局部有限性也是$|K|$可度量化的充分必要条件，其中度量由下式给出：

$$\rho(\{\lambda_i\},\{\mu_i\}) = \sqrt{\sum_i(\lambda_i-\mu_i)^2}.$$

如果 K是可数局部有限 n 维复形，那么它可以在 $2n+1$ 维 Euclid 空间 E^{2n+1} 中实现．一个复形 K在 Hilbert 空间中可实现，如果$|K|$可同胚嵌入这个空间中，使$|K|$的任何闭单形都有Euclid 实现；当且仅当 K是可数局部有限单纯复形时，这种实现才是可能的．

有限几何复形(finite geometric complex)是开几何单形的一个有限集合，它包含了每一个单形的所有面，且使得不同单形的交为空集．当研究闭单形时，用两个闭单形的交是空集或者是这些单形的闭面这个要求来代替第二个条件．

复形的概念在同调论中找到了其最大量的应用．由于对多面体做三角剖分时可能要用到许多单形，计算多面体的拓扑不变量就很麻烦．在这方面 **CW 复形**(CW - complex)是优越的：CW复形的胞腔数比多面体的任意一个单纯剖分中的单形数都要明显地少．另一方面，单纯复形和三角剖分也有其优点．例如在对连续映射进行单纯逼近时，在对关联矩阵进行复合与应用时，在对一般拓扑空间利用复形进行同调论的研究时等等．

复形 K到复形 L 的单纯映射(simplicial mapping)是一个函数 $f: K\to L$，它在 K的每个顶点 a 与 L 的顶点 $f(a)$之间建立一种对应，使得每当 K的某些顶点 $a^{i_0},\cdots,a^{i_r}$ 组成 K 中的单形时，顶点 $f(a^{i_0}),\cdots,f(a^{i_r})$(其中一些可以相同)也一定组成 L 中的单形．函数f把 K的每个单形 t^r 与 L 的单形 $t^s=f(t^r)$联系起来．一个对(K,L)到对(K',L')的单纯映射(simplicial mapping) $f:(K,L)\to(K',L')$是一个单纯映射 $f:K\to K'$，使得 $f(L)\subset L'$；这里 L 和 L'分别为 K和 K'的闭子复形．所有单纯复形以及它们的单纯映射的集合构成一个范畴，所有单纯复形偶对以及它们的单纯映射的集合也如此．

复形的同调开始时是用数值不变量来表达的，后来逐渐使用诸如群、模、层等代数手段来表达．其构造的方案如下，设 K为任意复形，G 为 Abel 群；系数群 G上的 r 维链复形(r - dimensional chain complex)(一般为无限的)K，是以 K的所有 r 维元素的集合为定义域，以 G 为值域的函数 c_r．复形 K的所有 r 维链 c_r 的总体关于加法运算

$$(c_r+c_r')(t^r) = c_r(t^r)+c_r'(t^r),\quad c_r, c_r'\in C_r(K;G),\quad t\in K$$

成群，记作 $C_r(K;G)$．它称为系数在 G 中(或在 G上)的 K的 r 维链(r - dimensional chain)群．在 K为星形有限复形的假定下，借助公式

$$\partial c_r = \sum_j\left\{\sum_i c_r(t_i^r)[t_i^r:t_j^{r-1}]\right\}t_j^{r-1},$$

可引入 $C_r(K;G)$上的边缘算子(boundary operator)∂_r，它定义了一个同态

$$\partial_r: C_r(K;G)\to C_{r-1}(K;G).$$

由于等式 $\partial_{r-1}\partial_r=0$ 成立，我们得到一个链复形(chain complex)$\{C_r(K;G),\ \partial_r\}$，其同调群 $H_r(K;G)$（即 $\mathrm{Ker}\,\partial_r$除以子群 $\mathrm{Im}\,\partial_{r+1}$ 的商群）称为系数在 G 中的复形 K的 r 维同调群(r - dimensional homology group of the complex)．(群 $\mathrm{Ker}\,\partial_r$ 常记作 $Z_r(K;G)$，且称为系数在 G 中的复形 K的 r 维闭链(r - dimensional cycles of the complex)群，而群 $\mathrm{Im}\,\partial_{r+1}$ 记作 $B_r(K;G)$且称为系数在 G 中的复形 K的 r 维边缘(r - dimensional boundaries of the complex)群)．

对于一个复形，就象对同调群那样，也可以定义上同调群，为给出其定义，仍从链群出发，这时称之为上链群，并记作 $C^r(K;G)$．这里已假定复形 K是闭包有限的，而上边缘算子(coboundary operator)δ^r 由下列公式定义：

$$\delta^r c^r = \sum_j\left\{\sum_i c^r(t_i^r)[t_i^r:t_j^{r+1}]\right\}t_j^{r+1},$$

它定义了一个同态

$$\delta^r: C^r(K;G)\to C^{r+1}(K;G).$$

对这个上链复形$\{C^r(K;G),\ \delta^r\}$，$\delta^{r+1}\delta^r=0$，上同调群 $H^r(K;G)$，即 $\mathrm{Ker}\,\delta^r$ 除以子群 $\mathrm{Im}\,\delta^{r-1}$ 的商群，称为系数在 G中的复形 K的 r 维上同调群(r - dimensional cohomology group of the complex)．(群 $\mathrm{Ker}\,\delta^r$ 通常记作

$Z^r(K;G)$ 且称为系数在 G 中的复形 K 的 r 维上闭链 (r-dimensional cocycles of the complex) 群，群 $\mathrm{Im}\,\delta^{r-1}$ 记作 $B^r(K;G)$，且称为系数在 G 中的复形 K 的 r 维上边缘 (r-dimensional coboundaries of the complex) 群).

为了使边缘(或上边缘)算子定义中的求和为有限的，需要复形的星形(或闭包)有限性. 在星形有限复形的情形，可以定义任意(无限)闭链的同调群和有限上闭链的上同调群. 在闭包有限复形的情形，可以定义无限上闭链的同调群和有限闭链的同调群. 在局部有限复形的情形，可以定义有限和无限的同调群和上同调群. 如果复形是任意的，则其同调(或上同调)群用给定复形按大小递增排序的所有局部有限子复形的同调(或上同调)群谱的顺向(或逆向)极限来定义.

研究复形的同调群和上同调群时，可以考虑单纯复形偶对 (K,L) 及其之间单纯映射 $f:(K,L)\to(K',L')$ 的范畴，以及 G 上的 K 模 L 的 r 维有限链群 $C_r(K,L;G)$，这是系数在 G 中的 K 的 r 维链群 $C_r(K;G)$ 除以系数在 G 中的 L 的 r 维链子群 $C_r(L;G)$ 的商群. 链复形 $\{C_r(K,L;G),\partial_r\}$ 的同调群 $H_r(K,L;G)$ 称为系数群为 G 的复形 K 模 L 的 r 维相对同调群 (r-dimensional relative homology group).

单纯映射 f 根据公式

$$(f_1c_r)(t_K^r)=\sum(\pm c_r(t_K^r)),$$

诱导出群 $C_r(K;G)$ 到群 $C_r(K';G)$ 内的一个同态 f_1，公式中 $c_r\in C_r(K;G)$，且求和已扩充到 K 中所有单形 t_K^r，它们映上 K' 中给定的单形 $t_{K'}^r$，其中符号 $+$ 或 $-$ 的选择，取决于 t_K^r 与 $f(t_K^r)$ 的定向是否一致. 已扩充到商群的同态 f_1 诱导 $C_r(K,L;G)$ 到 $C_r(K',L';G)$ 内的群同态；后一同态与边缘算子 ∂_r 可交换，从而得到相对同调群的一个同态

$$f_{*r}:H_r(K,L;G)\to H_r(K',L';G),$$

称为单纯映射 f 诱导的同态 (homomorphism induced by the simplicial mapping). 偶对 (H_r,f_{*r}) 是从单纯偶对及单纯映射的范畴到 Abel 群范畴中的共变函子.

包含映射 $L\overset{\varphi}{\subset}K\overset{\psi}{\subset}(K,L)$ 诱导了正合序列

$$0\to C_r(L;G)\xrightarrow{\phi}C_r(K;G)\xrightarrow{\psi}C_r(K,L;G)\to 0.$$

其中 L 和 K 是偶对 (L,φ) 和 (K,φ'). 设 z_r 为复形 K 模 L 的任意一个闭链，代表群 $H_r(K,L;G)$ 的元素 h_r；那么存在 K 的一个链 c_r，使得 $\psi(c_r)=z_r$ (ψ 是满射)，复形 K 的链 $\psi(\partial_rc_r)=\partial_r\psi(c_r)=\partial_rz_r$ 处在 L 中(即在 $K\setminus L$ 的单形上为零)且属于 $\mathrm{Ker}\,\psi$；这个链等于同态 φ 下的原象 $\varphi^{-1}(\partial_rz_r)$，它是复形 L 的一个闭链. 把后一闭链的同调类 $h_{r-1}\in H_{r-1}(L;G)$ 与给定元素 h_r 联系起来，就得到了一个同态

$$\partial_{*r}:H_r(K,L;G)\to H_{r-1}(L;G),$$

称为连接同态 (connecting homomorphism). 它与函子 $\{H_r,f_{*r}\}$ 是相容的，即等式 $\partial_{*r}f_{*r}=(f\,|\,L)_{*r}\partial_{*r}$ 成立，其中 $f|_L$ 是 f 在 L 上的限制. 包含映射 $\varphi:L\subset K$, $\psi:K\subset(K,L)$ 诱导了群的正合序列

$$\cdots\xleftarrow{\phi_{*(r-1)}}H_{r-1}(L;G)\xleftarrow{\partial_{*r}}H_r(K,L;G)\xleftarrow{\psi_{*r}}$$
$$\xleftarrow{\psi_{*r}}H_r(K;G)\xleftarrow{\phi_{*r}}H_r(L;G)\xleftarrow{\partial_{*(r+1)}}\cdots,$$

称为复形对 (K,L) 的同调序列 (homology sequence of pairs of complexes).

两个单纯映射 $f,g:(K,L)\to(K',L')$ 称为邻接的 (contiguous)，如果对于 K 中每个单形 t^r，单形 $f(t^r)$ 和 $g(t^r)$ 是 K' 中同一单形的面. 在单纯偶对及其单纯映射的范畴里，这一关系起着同伦的那种作用：对任何邻接的映射 $f,g:(K,L)\to(K',L')$ 和任何 r，由群 $H_r(K,L;G)$ 到群 $H_r(K',L';G)$ 中的诱导同态 f_{*r}，g_{*r} 相同.

嵌入 $i:(K_1,L_1)\subset(K,L)$ 称为切除映射 (excision mapping)，如果 K_1-L_1 等于 $K-L$. 切除性质 (excision property) 是说，对任何 r，单纯偶对的每一个切除映射 i 都诱导同构 $i_{*r}:H_r(K_1,L_1;G)\to H_r(K,L;G)$. 由单点组成的复形 K，其系数群为 G 的 r 维同调群，对所有 $r\neq 0$ 都是零群，而对 $r=0$，同构于 G.

这样，三元组 $(H_r,f_{*r},\partial_{*r})$ 在 Steenrod - Eilenberg 意义下成为一个同调论 (见 **Steenrod - Eilenberg 公理** (Steenrod - Eilenberg axioms)).

上同调论可用类似的方式构造. 以 G 为系数群的、复形 K 模子复形 L 的 r 维无限上链的群 $C^r(K,L;G)$，是在 L 的单形 t^r 上为零的 K 的所有 r 维上链 c^r 的集合，而以 G 为系数群的、复形 K 模 L 的 r 维相对上同调群 (r-dimensional relative cohomology group) $H^r(K,L;G)$ 是上链复形 $\{C^r(K,L;G),\delta^r\}$ 的上同调群.

单纯映射 f 诱导群 $C^r(K';G)$ 到群 $C^r(K;G)$ 内的一个同态 f^1：

$$(f^1c^r)(t_K^r)=c^r(f(t_K^r)),\ t_K^r\in K,\ c_r\in C^r(K';G).$$

同态 f^1 也诱导了群 $C^r(K',L';G)$ 到群 $C^r(K,L;G)$ 内的一个同态；后一同态与上边缘算子 δ^r 可交换，由此得到相对同调群的一个同态 f^{*r}：

$$f^{*r}:H^r(K',L';G)\to H^r(K,L;G),$$

称为单纯映射 f 诱导的同态. 对 (H^r,f^{*r}) 是从单纯对及单纯映射的范畴到 Abel 群范畴中的反变函子.

存在一个由包含 $\varphi:L\subset K$, $\psi:K\subset(K,L)$ 诱导

的正合序列

$$0 \leftarrow C^r(L;G) \overset{\phi}{\leftarrow} C^r(K;G) \overset{\psi}{\leftarrow} C^r(K,L;G) \leftarrow 0,$$

当 t^r 不属于 K 的子复形 L 时，上同调类 $h^r \in H^r(L;G)$ 中任何上闭链 $z^r \in Z^r(L;G)$ 都能够以任意方式扩张成上链 $z_1^r \in C^r(K;G)$. 这样得到的上链的上边缘 $\delta^r z_1^r$ 在 L 上为零，且属于群 $Z^{r+1}(K, L; G)$. 这个上闭链的上同调类 $\delta^r h^r \in H^{r+1}(K, L; G)$. 对应于所选定的类 h^r. 这种对应 $h^r \to \delta^r h^r$ 定义一个同态

$$\delta^{*r}: H^r(L;G) \to H^{r+1}(K,L;G).$$

称为连接同态(connecting homomorphism). 同态 δ^{*r} 与函子 $\{H^r, f^{*r}\}$ 相容；换句话说，等式 $\delta^{*r}(f|_L)^{*r} = f^{*r}\delta^{*r}$ 成立.

群与同态的序列

$$\cdots \overset{\phi^{*r}}{\to} H^r(L;G) \overset{\delta^{*r}}{\to} H^{r+1}(K,L;G) \overset{\psi^{*(r+1)}}{\to}$$
$$\overset{\psi^{*(r+1)}}{\to} H^{r+1}(K;G) \overset{\phi^{*(r+1)}}{\to} H^{r+1}(L;G) \overset{\delta^{*(r+1)}}{\to} \cdots$$

是一个正合序列，且称为复形对 (K, L) 的上同调序列(cohomology sequence of the pair of complexes)其中 φ: $L \subset K$ 和 ψ: $K \subset (K, L)$ 是包含映射.

对任何邻接单纯映射 $f, g: (K, L) \to (K', L')$ 和任何 r，由 $H^r(K', L'; G)$ 到 $H^r(K, L; G)$ 内的诱导群同态 f^{*r}, g^{*r} 相等；单纯偶对的每一个切除映射 $i:(K_1, L_1) \subset (K, L)$ 诱导一个同构 i^{*r}: $H^r(K, L; G) \to H^r(K_1, L_1; G)$. 对任何由一个单点组成的复形 K 及所有 $r \neq 0$, $H^r(K; G) = 0$，而 $H^0(K; G)$ 同构于 G. 这样，三元组 $(H^r, f^{*r}, \delta^{*r})$ 是(在 Steenrod - Eilenberg 意义上的)一个上同调论.

参考文献

[1] Александров, П. С., Комбинаторная топология, М. - Л., 1947 (英译本: Aleksandrov, P. S., Combinatorial topology, Graylock, Rochester, 1956).

[2] Александров, П. С., Введение в гомологическую теорию размерности и общую комбинаторную топологию, М., 1975.

[3] Lefschetz, S., Algebraic Topology, Amer. Math. Soc., 1955.

[4] Hilton, P. J. and Wylie, S., Homology theory. An introduction to algebraic topology, Cambridge Univ. Press, 1960 (中译本: P. J. 希尔顿、S. 瓦理, 同调论, 上海科学技术出版社, 1963).

[5] Понтрягин, Л. С., Основы комбинаторной топологии, 2 изд., М., 1976 (中译本: 邦德列雅金, 组合拓扑学基础, 科学出版社, 1954).

Д. О. Баладзе 撰

【补注】

参考文献

[A1] Spanier, E. H., Algebraic topology, McGraw - Hill, 1966 (中译本: E. H. 斯潘尼尔, 代数拓扑学, 上海科学技术出版社, 1987).

[A2] Switzer, R., Algebraic topology - homotopy and homology, Springer, 1975.

【译注】

参考文献

[B1] Eilenberg, S. and Steenrod, N., Foundations of algebraic topology, Princeton Univ. Press, 1952.

张 平译 沈信耀校

复形(同调代数中的)[complex in homological algebra; комплекс гомологической алгебры]

同调代数的基本概念之一. 设 A 为一个 Abel 范畴. 一个分次对象(graded object)是 A 中的对象 K_n 的一个序列 $K = (K_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. 态射 $a_n: K'_n \to K_n$ 的序列 $\alpha = (a_n)$ 称为分次对象的态射 $a: K' \to K$ (morphism of graded objects). 定义对象 $K(h)$，使 $K(h)_n = K_{n+h}$. 分次对象的一个态射 $K' \to K(h)$ 称为自 K' 到 K 的一个次数为 h 的态射. 一个分次对象称为正的(positive)，如果对所有的 $n<0$ 都有 $K_n = 0$；称为下有界的(bounded from below)，如果对某 h 来说，$K(h)$ 是正的；称为有限的(finite)或有界的(bounded)，如果除了有限个整数 n 以外，所有的 K_n 都 $=0$. 在一个范畴 A 中，一个链复形(chain complex)是由一个分次对象 K 与一个次数为 -1 的态射 $\alpha: K \to K$ 所组成的，这里 $d^2 = 0$. 更准确地：$d = (d_n)$，这里 $d_n: K_n \to K_{n-1}$ 且对所有的 n 有 $d_{n-1}d_n = 0$. 一个链复形的态射(morphism of chain complexes)

$$(K', d') \to (K, d)$$

是分次对象的一个态射 $a: K' \to K$, 使 $ad' = da$. 一个上链复形(cochain complex)是用对偶方法来定义的(作为具有一个次数 $+1$ 的态射 d 的分次对象).

最常考虑的复形是 Abel 群范畴、模范畴，或拓扑空间上 Abel 群的层的范畴中的复形. 因此，Abel 群的一个复形是一个分次的微分群，其微分有次数 -1 或 $+1$.

与每一个复形 K 相联系的有三个分次对象:

边界(boundaries) $B = B(K)$，其中 $B_n = \mathrm{Im}(K_{n+1} \overset{d_{n+1}}{\to} K_n)$;

闭链(cycles) $Z = Z(K)$，其中 $Z_n = \mathrm{Ker}(K_n \overset{d_n}{\to} K_{n-1})$;

n 维同调对象(homology objects)(类) $H = H(K)$，其中 $H_n = Z_n / B_n$ (见**复形的同调**(homology of a complex)).

对于一个上链复形，类似的对象称为上边缘(coboundaries)，上闭链(cocycles)与上同调对象(cohomology objects)(依次用记号 B^n, Z^n 与 H^n 来表示).

如果 $H(K) = 0$，则复形 K 称为零调的(acyclic).

复形的一个态射 $a: K' \to K$ 引导出态射

$$Z(K') \to Z(K),\ B(K') \to B(K),$$

因此得到同调或上同调态射

$$H(a): H(K') \to H(K).$$

两个态射 $a, b: K' \to K$ 称为同伦的(homotopic)(记成 $a \simeq b$),如果存在分次对象的一个态射 $s: K' \to K(1)$ (或者,对于上链复形,存在 $s: K' \to K'(-1)$)(称为一个同伦(homotopy)),使得

$$a-b = ds+sd'$$

(这蕴含着 $H(a)=H(b)$). 一个复形 K 称为可缩的(contractible)如果 $I_K \simeq 0$, 在这种情况下,复形 K 是零调的.

如果 $0 \to K' \to K \to K'' \to 0$ 是复形的一个正合序列,那么就有一个连接态射(connecting morphism) ∂: $H(K') \to H(K)$,其次数为 $-1(+1)$,且对正合序列的态射是自然的,使得下列长同调序列(long homology sequence)即对于链复形,序列

$$\cdots \to H_n(K') \to H_n(K) \to H_n(K'') \xrightarrow{\partial}$$
$$\xrightarrow{\partial} H_{n-1}(K') \to H_{n-1}(K) \to H_{n-1}(K'') \to \cdots$$

而对上链复形,序列

$$\cdots \to H^n(K') \to H^n(K) \to H^n(K'') \xrightarrow{\partial}$$
$$\xrightarrow{\partial} H^{n+1}(K') \to H^{n+1}(K) \to H^{n+1}(K'') \to \cdots$$

都是正合的.

链复形的一个态射 $a: K' \to K$ 之锥(cone)是一个复形 $MC(a)$,其定义如下:

$$MC(A)_n = K_n \oplus K'_{n-1},$$

其中

$$d(a)_{n+1} = \begin{pmatrix} d_{n+1} & a_n \\ 0 & -d'_n \end{pmatrix}: MC(a)_{n+1} \to MC(a)_n.$$

复形 $MC(a)$ 的直和分解引出复形的一个正合序列

$$0 \to K \to MC(a) \to K'(-1) \to 0,$$

其相应的长同调序列同构于序列

$$\cdots \to H_n(K) \to H_n(MC(a)) \to H_{n-1}(K') \xrightarrow{H_{n-1}(a)}$$
$$\xrightarrow{H_{n-1}(a)} H_{n-1}(K) \to H_{n-1}(MC(a)) \to \cdots.$$

因此链复形 $MC(a)$ 是零调的,当且仅当 $H(a)$ 是一个同构. 类似的概念与事实对上链复形也真.

参考文献

[1] Bass, H., Algebraic K-theory, Benjamin, 1968.

[2] Cartan, H. and Eilenberg, S., Homological algebra, Princeton Univ. Press, 1956.

[3] Hilton, P. J. and Stammbach, U., A course in homological algebra, Springer, 1971.

[4] MacLane, S., Homology, Springer, 1963.

A. B. Михалев 撰 周伯埙 译

复积分法 [**complex integration, method of; комплексного интегрирования метод**], 围道积分法(method of contour integration)

在 **ζ 函数**(zeta - function), **L 函数**(L - function)以及更一般地由 Dirichlet 级数定义的函数的研究和应用中普遍适用的方法之一.

复积分法是首先由 B. Riemann([1])于 1876 年联系 ζ 函数性质的研究引进到数论中的. 复积分法熟知的现代应用(它们用到关于残数的 Cauchy 定理和关于 Dirichlet 级数的 **Phragmén - Lindelöf 定理**(Phragmén - Lindelöf theorem),以及**鞍点法**(saddlepoint method)等等),就其形式和内容而言,是多种多样的. 复积分法已被应用于下列方面:关于 Dirichlet 函数的函数方程的解析开拓和导出; 关于 Dirichlet 函数的近似函数方程的导出;这些函数的非平凡零点数目的估计以及这些零点在临界带的某个部分中分布密度的估计; 获得各种最重要的算术函数的渐近公式和估计. 复积分法的经典例子可用关于 Riemann ζ 函数的函数方程的解析开拓和导出的证明(见[2],[3])来加以说明. 对于 $s=\sigma+it\,(\sigma>0)$, 有

$$n^{-s}\Gamma(s) = n^{-s}\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \int_0^\infty e^{-nx}x^{s-1}\,dx.$$

对最初由级数 $\zeta(s)=\sum_{n=1}^\infty n^{-s}\,(\sigma>1)$ 定义的函数,经求和后发现此函数也可由公式

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x-1}\,dx \tag{1}$$

表达. 考虑积分

$$J(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z^{s-1}}{e^{-z}-1}\,dz,$$

其积分路径为(无穷)围道 $C=\alpha+\beta+\gamma$, 其中 α, γ 沿 z 平面负实轴的上边缘和下边缘(负实轴被剪开), β 是以原点为中心,半径为 $r<2\pi$ 的圆周. 积分 $J(s)$ 对一切 s 收敛且在任何圆盘 $|s|<\Delta$ 内一致收敛,这是因为在 α 和 γ 上对所有 $|x|>z_0(\Delta)$, 被积函数小于 $e^{-0.5|z|}$. 由Cauchy 积分定理,此积分不依赖于 r, 从而是 s 的整函数. 假

定在 α, β, γ 上分别有 $z=\delta e^{-i\pi}$, $z=re^{i\theta}$, $z=\delta e^{i\pi}$, 且假定 $f(z)=1/(e^z-1)$, 则易于把 $J(s)$ 写成关于实变量的积分之和:

$$\pi J(s) = \sin\pi s\int_r^\infty \delta^{s-1}f(-\delta)d\delta+\frac{r^s}{2}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\theta s}f(re^{i\theta})d\theta.$$

在圆盘 $|z|<\pi$ 内有 $|zf(z)|<A$, 因此上式右边第二项小于 $2\pi Ar^{\sigma-1}e^{\pi|t|}$, 它当 $r\to 0$ 时对固定的 s (其实部 $\sigma>1$) 收敛于零. 于是由公式(1), $\pi J(s)=\Gamma(s)\zeta(s)\sin\pi s$, 从而

$$\zeta(s) = \frac{\pi J(s)}{\Gamma(s)\sin\pi s} = \Gamma(1-s)J(s). \qquad (2)$$

在 $\sigma>1$ 的假定下证明的上述公式提供了 $\zeta(s)$ 到全平面的开拓. 由此显见 $\zeta(s)$ 是全平面上的单值解析函数, 在点 $s=1$ 处有唯一的奇点, 它是单极点, 残数为 1.

为导出关于 $\zeta(s)$ 的函数方程, 假定 $\sigma<0$, N 是大于 4 的整数. 令

$$J_N(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(N)}\frac{z^{s-1}}{e^{-z}-1}dz,$$

其中 $C(N)$ 是类似于 C 的围道, 其差别是以半径为 $R=2N+1$, 圆心为原点的圆弧连接 α 与 γ. 沿围道 $C(N)$ 的外弧的积分可估计为形式 $AR^\sigma e^{\pi|t|}$, 对于 $\sigma<0$, 这一项当 $N\to\infty$ 时收敛于零. 因之, 当 $N\to\infty$ 时, $J_N(s)\to J(s)$. 另一方面, 由残数定理,

$$J_N(s) = \sum_{n=1}^{N}\{(2\pi ni)^{s-1}+(-2\pi ni)^{s-1}\} =$$
$$= 2(2\pi)^{s-1}\sin\frac{\pi s}{2}\sum_{n=1}^{N}n^{s-1}.$$

于是当 $\sigma<0$ 时,

$$J(s) = \lim J_N(s) = 2(2\pi)^{s-1}\zeta(1-s)\sin\frac{\pi s}{2}.$$

结合这个方程与公式(2), 就得到关系式

$$\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\zeta(s)\cos\frac{\pi s}{2}.$$

基于解析开拓理论, 这个关系式在全 s 平面上成立. 该式称为 Riemann ζ 函数的函数方程.

在基于 Dirichlet 函数的现代估计得到近似函数方程中, 复积分法起着重要作用(见[4], [5]).

复积分法在研究函数 $\zeta(s)$, $L(s,\chi)$ 等的零点分布中具有基本意义. 直到最近, 它还被应用于熟知的关于对 $\sigma>0$ 为正则的函数 $F(s)$ 在一个矩形中的零点数目的 Littlewood 定理, 关于 $\arg F(s)$ 的 Bäcklund 定理, 以及关于解析函数的平均值的凸性定理(见[2]). 1969 年, H. Montgomery ([6]) 发现了把复积分法应用于这些结果的一个新的、直接的、更加有力的途径.

与 Dirichlet 级数的系数求和公式相联系, 复积分法也被自然地应用于数论中(见[2], [7]).

参考文献

[1] Riemann, G. F. B., Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass, R. Dedekind 与 H. Weber 编, Teubner, 1892.

[2] Titchmarsh, E. C., The theory of the Riemann zeta function, Clarendon, 1951.

[3] Prachar, K., Primzahlverteilung, Springer, 1957.

[4] Лаврик, А. Ф., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **31** (1967), 2, 431–442.

[5] Лаврик, А. Ф., 《Изв. АН СССР Сер. матем.》, **32** (1968), 1, 134–185

[6] Davenport, H., Multiplicative number theory, Springer, 1980.

[7] Карацуба, А. А., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **36** (1972), 3, 475–483.

А. Ф. Лаврик 撰

【补注】 在[2](特别是 2.4 节)中可找到如何导出关于 $\zeta(s)$ 的函数方程; 还给出许多别的函数方程的推导.

本条给出了"围道积分法"的一个很好的说明. 这个方法的基本原理如下: 假定要计算沿一(光滑或可求长)围道的积分. (一条围道 (contour) 是一条由参数方程 $z(t)=x(t)+iy(t)$ 给定的曲线, 其中 $t\in[a,b]\subset\mathbf{R}$, $x(t)$ 和 $y(t)$ 在 $[a,b]$ 的有限划分 $a=x_1<x_2<\cdots<x_n=b$ 的每个区间 $[x_k,x_{k+1}]$ 上连续可微. 此围道称为光滑的, 如果除有限个点外 $x'(t)$ 与 $y'(t)$ 不同时为零, 亦见**可求长曲线** (rectifiable curve).) 围道积分法在于改变所给围道(或如条文中所说, 拓展所给围道), 使得在新的围道上很易算出欲求的积分(在绝大多数情形应用残数定理计算, 见 **Cauchy 积分** (Cauchy integral)), 然后估计沿改变后围道的积分与沿原先围道的积分的差别(如果被积函数为解析, 则有时可应用 **Cauchy 积分定理** (Cauchy integral theorem); 如果所给围道被拓展, 则结果可由被积函数的精致估计得到). 在几乎所有关于复分析的教科书, 例如[A2], [A3], [A4]中, 都有复积分法对于计算某些类型积分(例如形如 $\int_{-\infty}^{\infty}(P(x)/Q(x))\,dx$, $\int_0^\infty(P(x)/Q(x))dx$, $\int_{-\infty}^{\infty}(P(x)/Q(x))\sin x\,dx$ 等)以及证明复分析中许多重要定理的应用. 参考文献[A5]中有大量由围道积分法导出的公式.

[A1]中给出了应用围道积分法证明素数定理的新途径.

参考文献

[A1] Newman, D. J., Simple analytic proof of the prime number theorem, *Amer. Math. Monthly*, **11** (1980), 693–696.

[A2] Bak, J., Newman, D. J., Complex analysis, Springer, 1982.

[A3] Ahlfors, L. V., Complex analysis, McGraw-Hill, 1979 (中译本: 阿尔福斯, 复分析, 上海科学技术出版社, 1984).

[A4] Евграфов, М. А., Аналитические функций, 2 изд., М., 1968 (英译本: Evgrafov, M. A., Analytic functions, Dover, reprint, 1978).
[A5] Mitrinović, D. S., Kečkic, J. D., The Cauchy method of residues, Reidel, 1984.

【译注】

参考文献
[B1] 潘承洞,潘承彪,素数定理的初等证明,上海科学技术出版社,1988.

沈永欢 译

复流形 [**complex manifold; комплексное многообразие**], 复解析流形 (complex-analytic manifold)

复数域上的**解析流形** (analytic manifold).

【补注】 亦见**复结构**(complex structure). 齐民友 译

复数 [**complex number; комплексное число**]

形式为 $z=x+iy$ 的数,其中 x 和 y 是**实数** (real number), $i=\sqrt{-1}$ 是所谓虚数单位 (imaginary unit),即其平方等于 -1 的数(在工程文献中也常用记号 $j=\sqrt{-1}$); x 称为复数 z 的实部(real part), y 称为 z 的虚部 (imaginary part) (记为 $x=\mathrm{Re}\,z$, $y=\mathrm{Im}\,z$). 可以把实数看成特殊的复数, 即 $y=0$ 的复数. 不是实数的复数,即 $y\neq 0$ 的复数,有时称为虚数 (imaginary numbers). 上述术语的主要传统来源反映出复数概念的复杂的历史发展过程.

从代数的观点来说,复数是对实数域 $\mathbf{R}$ 增添多项式 x^2+1 的根 i 而得到的实数域 $\mathbf{R}$ 的(代数)扩张 $\mathbf{C}$ 的元素. 这样得到的域 $\mathbf{C}$ 称为复数域 (field of complex numbers 或 complex number field). 域 $\mathbf{C}$ 的最重要的性质是,它在代数上是闭的,也就是说,以 $\mathbf{C}$ 中的元素为系数的任何多项式都能分解成线性因子. 在代数上是闭的这个性质也可表述如下: 任何以 $\mathbf{C}$ 中的元素为系数的 n $(n\geqslant 1)$ 次多项式在 $\mathbf{C}$ 中至少有一个根 (d'Alembert-Gauss 定理 (d'Alembert-Gauss theorem) 或代数学基本定理 (fundamental theorem of algebra)).

域 $\mathbf{C}$ 可以构造如下: 把元素 $z=(x,y)$, $z'=(x',y')$, …, 即复数 (complex number), 取为平面 $\mathbf{R}^2$ 上具有 Descartes 直角坐标 x 和 y, x' 和 y', …的点 (x,y), (x',y'),…. 这里,两个复数 $z=(x,y)$ 与 $z'=(x',y')$ 的和 (sum of two complex numbers) 是复数 $(x+x',y+y')$, 即

$$z+z'=(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y'), \quad (1)$$

这两个复数的积 (product of two complex numbers) 是复数 $(xx'-yy',xy'+x'y)$, 即

$$zz'=(x,y)(x',y')=(xx'-yy',xy'+x'y). \quad (2)$$

零元素 $0=(0,0)$ 与坐标原点重合,复数 $(1,0)$ 是域 $\mathbf{C}$ 的单位元.

当把平面 $\mathbf{R}^2$ 上的点等同于域 $\mathbf{C}$ 的元素时,这个平面称为复平面 (complex plane). 这里,实数 x, x',… 等同于 x 轴上的点 $(x,0)$, $(x',0)$,…,对于复平面来说, x 轴称为实轴 (real axis). 点 $(0,y)=iy$, $(0,y')=iy'$,…处于 y 轴上, y 轴(除去原点 O)称为复平面 $\mathbf{C}$ 的虚轴 (imaginary axis); 形式为 iy, iy',… 的数称为纯虚数 (pure imaginary number). 把域 $\mathbf{C}$ 的元素 z, z',…即复数表示为复平面上服从运算法则 (1) 和 (2) 的点,这同上述更广泛采用的复数表示形式是等价的:

$$z=(x,y)=x+iy,\ z'=(x',y')=x'+iy',\ \ldots.$$

后者亦称为复数表示的代数形式 (algebraic form) 或 Descartes 形式 (Cartesian form). 关于代数形式,运算法则 (1) 和 (2) 化为下述简单条件: 复数的一切运算都可作为多项式来进行,这里要利用虚数单位的性质: $i\cdot i=i^2=-1$.

在平面 $\mathbf{C}$ 上,复数 $z=(x,y)=x+iy$ 和 $\bar{z}=(x,-y)=x-iy$ 称为共轭的 (conjugate) 或复共轭数 (complex conjugates); 它们的位置关于实轴是对称的. 两个共轭复数的和与积都是实数:

$$z+\bar{z}=2\,\mathrm{Re}\,z,\quad z\bar{z}=|z|^2.$$

其中 $|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}$ 称为 z 的模 (modulus) 或绝对值 (absolute value).

下列不等式总成立:

$$|z|-|z'|\leqslant|z+z'|\leqslant|z|+|z'|.$$

复数 z 不等于零,当且仅当 $|z|>0$. 映射 $z\to\bar{z}$ 是复平面的二阶自同构(即 $\bar{z}\to\bar{\bar{z}}=z$),它使得实轴上的一切点保持不动. 并且, $\overline{z+z'}=\bar{z}+\bar{z}'$, $\overline{zz'}=\bar{z}\bar{z}'$.

加法和乘法是交换的和结合的,在它们之间存在分配律. 加法和乘法分别具有逆运算——减法 (subtraction) 和除法 (division) (用零除除外), 可用代数形式表示如下:

$$z-z'=(x+iy)-(x'+iy')=(x-x')+i(y-y'), \quad (3)$$

$$\frac{z'}{z}=\frac{x'+iy'}{x+iy}=\frac{z'\bar{z}}{|z|^2}=\frac{xx'+yy'}{x^2+y^2}+i\frac{y'x-x'y}{x^2+y^2},\quad z\neq 0.$$

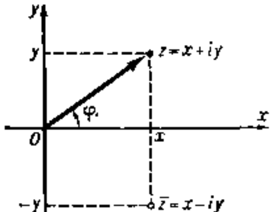
因此,复数 z' 除以复数 $z\neq 0$, 化为 z' 乘以

$$\frac{\bar{z}}{|z|^2}=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}.$$

需要考虑的一个重要问题是: 上面构造的实数域的

具有运算法则(1)和(2)的扩张C是否是唯一可能的？或者说，是否存在实质上不同的其他扩张？下述唯一性定理(uniqueness theorem)给出答案：由域R增添方程$X^2+1=0$的根i而得到的R的一切(代数)扩张都与C是同构的，也就是说，只有上面指出的复数运算法则才与按代数方式增添根i的要求是相容的．但是，这一事实同存在复数的其他解释，即不作为复平面上的点的解释并不矛盾．在应用中往往采用下述两种解释．

向量解释．复数$z=x+iy$可以等同于从原点出发的、具有坐标x和y的向量(x, y)(见图)．在这种解释中，复数的加法和减法可以根据向量加法和减法的规则来进行．但是，复数的乘法和除法则必须根据公式(2)和(3)来进行，在向量代数中并无直接的类似运算(见[4]，[5])．复数的向量解释可以直接应用于电气工程，以描述交变正弦电流和电压．



矩阵解释．复数$w=u+iv$可以等同于特殊类型的(2×2)矩阵：

$$w=\left\|\begin{matrix}u & v\\ -v & u\end{matrix}\right\|,$$

这里，加法、减法和乘法可以根据通常矩阵代数中的运算法则来进行．

如果采用复平面C上的极坐标，即向径$r=|z|$和极角$\varphi=\arg z$——这里称为z的辐角(argument，有时也称为z的相(phase))，则得到复数的三角形式(trigonometric form)或极形式(polar form)：

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),\qquad(4)$$
$$r\cos\varphi=\operatorname{Re}z,\ r\sin\varphi=\operatorname{Im}z.$$

辐角$\varphi=\arg z$是复数$z\neq0$的多值实值函数，对于给定的z，它的各值相差2π的整数倍；复数$z=0$的辐角没有定义．通常取辐角的主值(principal value of the argument)$\varphi=\operatorname{Arg}z$，它由附加条件$-\pi<\operatorname{Arg}z\leqslant\pi$来确定．**Euler公式**(Euler formulas)$e^{\pm i\varphi}=\cos\varphi\pm i\sin\varphi$把复数的三角形式(4)变换为指数形式(exponential form)：

$$z=re^{i\varphi}.\qquad(5)$$

形式(4)和(5)特别适宜于复数的乘法和除法运算：

$$zz'=rr'[\cos(\varphi+\varphi')+i\sin(\varphi+\varphi')]=rr'e^{i(\varphi+\varphi')},$$

$$\frac{z'}{z}=\frac{r'}{r}[\cos(\varphi'-\varphi)+i\sin(\varphi'-\varphi)]=\frac{r'}{r}e^{i(\varphi'-\varphi)},\ r>0.$$

在进行复数的乘法(或除法)时，其模相乘(或相除)，其辐角相加(或相减)．复数的乘方或开方可以根据所谓de Moivre公式(de Moivre formulas)进行：

$$z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)=r^ne^{n\varphi},$$

$$z^{1/n}=r^{1/n}\left[\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right]$$
$$=r^{1/n}e^{(\varphi+2k\pi)/n},\ k=0,\cdots,n-1,$$

其中第一个公式也适用于负整指数n，在几何上，复数z乘以复数$z'=r'e^{i\varphi'}$相当于把向量z旋转角φ'(如果$\varphi'>0$，则按反时针方向)，然后把它的长度乘以$|z'|=r'$；特别是，乘以模为1的复数$z'=e^{i\varphi'}$，只是单纯旋转角φ'．因此，可以把复数解释为一些特殊类型的算子(**仿射量**(affinor))．在这方面，复数乘法的混合向量-矩阵解释有时是有用的：

$$(x, y)\cdot\left\|\begin{matrix}u & v\\ -v & u\end{matrix}\right\|=(xu-yv,\ xv+yu),$$

其中把被乘数看作矩阵向量，把乘数看作矩阵算子．

双射$(x, y)\to x+iy$在域C上诱导出二维实向量空间$\mathbf{R}^2$的拓扑；这个拓扑与C的域结构是相容的，因而域C是一个拓扑域．模$|z|$是复数$z=(x, y)$的Euclid范数，被赋予这个范数的域C是复一维的Euclid空间，也称为复z平面(complex z-plane)．拓扑积$\mathbf{C}_n=\mathbf{C}\times\cdots\times\mathbf{C}$($n$个C，$n\geqslant1$)是一个复$n$维的Euclid空间．为了对函数作圆满的分析，通常需要考虑它们在复域上的性质，这是由于C在代数上是闭的、甚至象z^n，$\cos z$，$\sin z$，e^z这样一些初等函数的性质，也只有当把它们看作复变函数时，才能够很好地理解(见**解析函数**(analytic function))．

看来，虚量最早出现在G. Cardano (1545)的名著《大衍术》(The great art)即《代数法则》(The rules of algebra)一书中，但是他把虚量看成是无价值的、不合用的．R. Bombelli(1572)是第一个认识到虚量应用价值的人，特别是用来求解所谓不可约情况下的**三次方程**(cubic equation)(当利用虚量的立方根来表示实根时，见**Cardano公式**(Cardano formula))．他曾给出一些最简单的复数运算法则．一般地说，当求解二次方程和三次方程时出现的形如$a+b\sqrt{-1}$的表达式，在16和17世纪时称为"虚量"．但是，即使17世纪的一些大数学家，对于虚量的代数性质和几何性质也都不甚清楚，甚至认为是不可思议的．例如，大家知道，I. Newton就曾把虚量排除在数的概念之外，而G. Leibniz则说："复数是精神世界的一个奇妙的避难所，好象是存在又

不存在的两栖物."

表示一个给定数的 n 次方根的问题,主要是在A.de Moivre(1704,1724) 和 R. Cotes(1722) 的文章中解决的.符号 $i=\sqrt{-1}$ 是 L. Euler 提出的(1777,1794 出版). 也正是他在 1751 年断言域C 在代数上是闭的;J. d'Alembert (1747)也得出同样的结论. 但是,对这个事实的第一个严格的证明则应归功于 C. F. Gauss (1799),他于 1831 年引入"复数"一词. 对于复数及其运算的全面的几何解释,是在 C. Wessel (1799) 的工作中首先出现的. 复数的几何表示有时称为"Argand 图",因为在J.R.Argand 的文章于 1806 年和 1814 年发表以后,这种表示才被采用,他在很大程度上独立地重新发现了 Wessel 的结果.

把复数当作一对实数的纯算术理论,是 W. Hamilton (1837) 引入的. 他发现了复数的一个重要的推广,即**四元数**(quaternion),它形成了一个非交换代数. 更一般地,在 19 世纪末已经证明,对数的概念作超出复数的任何扩充,都需要牺牲通常运算的某些性质(首先是交换性). 亦见**超复数**(hypercomplex number);**二重数和对偶数** (double and dual numbers); **Cayley 数**(Cayley numbers).

参考文献

[1] Курош, А. Г., Курс высшей алгебры, 9 изд., М., 1968 (中译本: А.Г.库洛什,高等代数教程,人民教育出版社,1962).

[2] Кострикин, А. И., Введение в алгебру. М., 1977 (英译本: Kostrikin, A. I., Introduction to algebra, Springer, 1982).

[3] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, т. 1, 2 изд., М., 1967 (英译本: Markushevich, A. I., Theory of functions of a complex variable, 1–2, Chelsea, 1977).

[4] Шабат, Б. В., Введение в комплексный анализ, ч. 1, 2 изд., М., 1976.

[5] Лаврентьев, М. А., Шабат, Б. В., Проблемы гидродинамики и их математические модели, 2 изд., М., 1976.

[6] Hurwitz, A. and Courant, R., Vorlesungen über allgemeine Functionentheorie und elliptische Funktionen, Springer, 1968.

[7] Hardy, G. H., A course of pure mathematics, Cambridge Univ. Press, 1955.

[8] Bourbaki, N., Elements of mathematics. General topology, Addison-Wesley, 1966(译自法文).

E. Д. Соломенцев 撰 张鸿林 译 蒋正新 校

直线丛 [complex of lines; комплекс прямых]

三维(射影,仿射或 Euclid)空间中依赖三个参数的直线集 K.直线 $l\in K$ 称为线丛的射线(ray of a complex),过外围空间的每点 M,有线丛中一个单参数射线族通过,称为 M 的锥面,记为 K_M.直线丛确定了线丛中射线上点与通过这条射线的平面之间的对应:射线 l 的每一点 M 对应于锥面 K_M 在 M 的切平面 Π.这种对应称为正规对射(normal correlation).空间的每个平面含有线丛中一个单参数射线族,它们的包络线是平面曲线 s. 射线 $l\in K$的一个拐心(centre of inflection),是指点 $M\in l$ 使得 M 在正规对射中对应于点 M 的平面 Π 上曲线 s,有一个尖点. 线丛中每条射线一般有四个拐心.线丛的直纹面的一个相切点(point of tangency),是其母线上的点 M,它在曲面的切平面就是正规对射时对应于点 M 的平面 Π.在线丛的每个直纹面上一般恰有两个相切点.由这些点描出的曲线称为直纹面的相切线(lines of tangency).相切线是其渐近线的直纹面称为线丛的主曲面(principal surfaces of a complex).可以利用线丛中射线拐心的重数,对线丛作射影分类.

在 Euclid 空间中,每条射线 l 上有一个不变点 C (射线的中心(centre of a ray)),在 C 点正规对射时与点 C 对应的平面 Π 的法向量与对应于 l 的理想点的平面 Π 正交.线丛的例子有:特殊线丛,即给定曲面的全体切线集;线性线丛,它由线丛中射线的 Grassmann 坐标的一个线性齐次方程定义;特殊线性线丛,即三维空间中与一条定直线相交的直线的集合.

除直线丛外,还可以研究平面,锥面,二次曲面和其他图形的(三参数族的)线丛(见**图形的流形**(manifold of figures)).

参考文献

[1] Фиников С. П., Теория конгруэнций, М.-Л., 1950.

[2] Кованцов, Н. И., Теория комплексов, К., 1963.

B. C. Малаховский 撰 潘养廉 译

复空间 [complex space; комплексное пространство], 复解析空间(complex-analytic space)

复数域C上的一解析空间. 最简单和最广泛使用的复空间是复数空间 $\mathbf{C}^n$. 它的点或元素是复数 $z_\nu=x_\nu+iy_\nu$, $\nu=1,\cdots,n$ 的所有可能的 n 元数组 $(z_1,\cdots,z_n)$. 复数空间 $\mathbf{C}^n$ 是具有加法运算

$$z+z' = (z_1+z_1',\ldots,z_n+z_n')$$

和对标量 $\lambda\in\mathbf{C}$ 的乘法运算

$$\lambda z = (\lambda z_1,\ldots,\lambda z_n)$$

的 C 上的向量空间,并且也是具有 Euclid 度量

$$\rho(z,z') = |z-z'| = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n}|z_\nu-z_\nu'|^2} =$$

$$= \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n}(x_\nu-x_\nu')^2+(y_\nu-y_\nu')^2}.$$

的距离空间．换言之，复数空间 $\mathbf{C}^n$ 是由复化实数空间 $\mathbf{R}^{2n}$ 得到的．复数空间 $\mathbf{C}^n$ 也是 n 个复平面 $\mathbf{C}^1=\mathbf{C}$ 的拓扑积 $\mathbf{C}^n=\mathbf{C}\times\cdots\times\mathbf{C}$．

参考文献

[1] Шабат, Б.В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., М., 1976.

[2] Bourbaki, N., Elements of mathematics. General topology, Addison-Wesley, 1966（译自法文）.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 复空间的一个较一般的概念包含在 [A1] 中．对此简述如下．命 X 为一装备局部 $\mathbf{C}$ 代数的一个层 $\mathcal{O}_X$ 的 **Hausdorff 空间** (Hausdorff space)（一个所谓 $\mathbf{C}$ 代数化空间（C-algebraized space））．两个这样的空间 $(X,\mathcal{O}_X)$ 和 $(Y,\mathcal{O}_Y)$ 称为同构的 (isomorphic)，是指存在一个同态 $f:X\to Y$ 和层同构 $\tilde{f}:\mathcal{O}_X\to\mathcal{O}_Y$（见[A1]）．现在，一 $\mathbf{C}$ 代数化空间 $(X,\mathcal{O}_X)$ 称为一复流形 (complex manifold)，如果它局部同构于一标准空间 $(D,\mathcal{O}_D)$，此处 $D\subset\mathbf{C}^m$ 是一区域，$\mathcal{O}_D$ 是它的全纯函数的芽层，即如果对每一 $x\in X$ 存在 x 在 X 中的邻域 U 和一区域 $D\subset\mathbf{C}^m$，对某个 m，使得 $\mathbf{C}$ 代数化空间 $(U,\mathcal{O}_U)$ 和 $(D,\mathcal{O}_D)$ 是同构的．命 $D\subset\mathbf{C}^m$ 为一区域，$J\subset\mathcal{O}_D$ 为一凝聚理想．（凝聚）商层 $\mathcal{O}_D/J$ 的支集 A 是 D 中的闭集，而且层 $\mathcal{O}_A=\mathcal{O}_D/J|_A$ 是局部 $\mathbf{C}$ 代数的一（凝聚）层．$\mathbf{C}$ 代数化空间 $(A,\mathcal{O}_A)$ 称为 $(D,\mathcal{O}_D)$ 的一（闭）复子空间(complex subspace)（它通过商层映射自然地嵌入在 $(D,\mathcal{O}_D)$ 中）．一复空间(complex space) $(X,\mathcal{O}_Z)$ 是一 $\mathbf{C}$ 代数化空间，也就是局部同构于一复子空间，即每一点 $x\in X$ 都有邻域 U 使得 $(U,\mathcal{O}_U)$ 同构于某 $\mathbf{C}^m$ 中的一区域的复子空间（亦见**层论** (sheaf theory)；**凝聚层** (coherent sheaf)）．关于复空间的更多内容，特别是它们在多复变函数论和代数几何中的应用，可以在 [A1] 中找到．亦见 **Stein 空间** (Stein space)；**解析空间** (analytic space)．

参考文献

[A1] Grauert, H. and Remmert, R., Theory of Stein spaces, Springer, 1979（译自德文）.

钟同德 译

复结构 [**complex structure；комплексная структура**]

1) 实向量空间 V 上的复结构 (complex structure on a real vector space) 是指 V 上与原有的实结构相容的复向量空间的结构．V 上的复结构完全由用 i 数乘的算子所确定，这个算子可用满足 $I^2=-E$ 的任意线性变换 $I:V\to V$ 来代替，这里 E 为恒等变换．因此，这种类型的变换通常称为 V 上的一个复结构．如果 V 赋有复结构，且 $v_1,\cdots,v_n$ 为这个空间在域 $\mathbf{C}$ 上的一组基，则 $v_1,\cdots,v_n,Iv_1,\cdots,Iv_n$ 组成这个空间在域 $\mathbf{R}$ 上的一组基，于是 $\dim_{\mathbf{R}}V=2\dim_{\mathbf{C}}V$．如果 I 是 V 上的复结构，则 V 的复化 $V^{\mathbf{C}}$ 分解为直和 $V^{\mathbf{C}}=V_+\dotplus V_-$，这里，$V_\pm$ 是变换 I 对应于特征值 $\pm i$ 开拓到 $V^{\mathbf{C}}$ 的特征空间，并且，$V_-=\overline{V}_+$．反过来，每一个满足 $V^{\mathbf{C}}=S\dotplus\overline{S}$ 的复子空间 $S\subset V^{\mathbf{C}}$ 决定 V 上的一个复结构使 $V_+=S$．

$2n$ 维实空间 V 上的任意两个复结构，均能通过 V 的某自同构映射互换．因此，V 上的所有复结构的集合为群 $\mathrm{GL}(2n,\mathbf{R})$ 的一个齐性空间，且重合于商空间 $\mathrm{GL}(2n,\mathbf{R})/H$，这里 $H\cong\mathrm{GL}(n,\mathbf{C})$ 是形如

$$\left\|\begin{matrix}A & B\\ -B & A\end{matrix}\right\|$$

的非奇异矩阵组成的子群．

2) 微分流形上的复结构是指复解析流形（见**解析流形** (analytic manifold)）的结构．如果 M 为微分流形，则 M 上的复结构就是同定义在 M 上的实可微图册相容的 M 上的复解析图册．这里，$\dim_{\mathbf{R}}M=2\dim_{\mathbf{C}}M$．$M$ 上的一个复结构在每一个切空间 $T_x(M)$ 上导出一个复结构，因而在 M 上导出一个能完全确定它的**殆复结构** (almost-complex structure)．

参考文献

[1] Lichnerowicz, A., Global theory of connections and holonomy groups, Noordhoff, 1976（译自法文）.

[2] Wells, Jr., R.O., Differential analysis on complex manifords, Springer, 1980.

А. Л. Онищик 撰　陈公宁 译　沈信耀 校

复杂系统 [**complex system；сложная система**]

包含大量相互联系的元素的系统的通称．必须强调，这是一个非正规的概念，因为迄今还没有一个关于复杂系统的严格数学定义，能囊括所有现实的复杂系统的直觉观念．复杂系统的典型例子有：神经系统，大脑，计算机，人类社会中的控制系统，等等．

在 20 世纪，由于研究越来越复杂的对象的需要，科学的很多分支，如生物学，技术，经济学，社会学等，都引进了复杂系统的概念．特别是，**控制论** (cybernetics) 也已作为一个独立的学科诞生．复杂的**控制系统** (control system) 就是它研究的基本对象．结果是产生了一系列专门学科，在它们的名称中都含有"系统"一词，例如系统分析，系统技术，以及一般系统理论，等等．

已有各种不同的数学方法，来表述和研究复杂系统．可以特别指出复杂系统的两种类型的数学模型：离散的和连续的．前者主要是在数学控制论（控制系统理论）中研究的模型且以离散数学为研究工具，后者是**动力系统** (dynamical system) 及自动控制理论中研究的模型，以微分方程理论为其数学基础．在复杂系统的研究中得到广泛应用的还有概率统计的方法和模型，如大规模服务理论，随机规划和随机仿真．尽管

在形式上和所用数学工具上的不同，表述复杂系统的所有不同方法，可以统一成一个共同方法和一个共同研究对象．

在给复杂系统一个数学描述的种种努力中，最困难问题中的一个是复杂性(complexity)概念的建立．"复杂性"的很多特征都是实际复杂系统所固有的，如组成系统的元件数目巨大，它们之间联系形式的多样性，复杂的运行，结构的递阶性，等等．应当注意，"复杂系统"与"大(规模)系统"并非同义的术语，因为后者所概括的系统只有复杂性的一个特征：元件数目巨大．

在复杂系统的数学研究中，为建立复杂性概念，在最近(1983)对相当简单类型(模型)的控制系统取得了重要进展，诸如**Turing 机**(Turing machine)，**功能元图**(diagram of functional elements)，**有限自动机**(automaton, finite)等等．当今的研究兴趣集中在研究越来越复杂的数学模型上，以期更完全地反映实际复杂系统的结构与功能．简单模型的很多规律性都可以扩展到更复杂的模型上去．

参考文献

[1] Ляпунов, А. А., Яблонский, С. В., 《Проблемы кибернетики》, 9 (1963), 5－22.

[2] Бусленко, Н. П., Калашников, В. В., Коваленко, И. Н., Лекции по теории сложных систем, М., 1973.

[3] Энциклопедия кибернетики т. 2, К. 1975, 373－375.

Н. Н. Кузюрин 撰　高为炳 译

复环面[complex torus; комплексный тор]

复交换 Lie 群，是 $\mathbf{C}^n$ 关于子群 Γ 的商群，其中 C^n 为 n 维复数空间，Γ 为 C^n 中秩为 $2n$ 的格．连通紧复 Lie 群必为复环面(见[1])．$\mathbf{C}^n$ 上每个 Hermite 内积定义了 $T=\mathbf{C}^n/\Gamma$ 上一个平移不变 Kähler 度量．复环面也能刻画为唯一的紧可平行化的 Kähler 流形(见[2])．复流形 T 的自同构群和 T 作为复 Lie 群的全形相同，见**群的全形**(holomorph of a group)．

复环面 T 上全纯 p 形式可表为

$$\sum_{i_1<\cdots<i_p} a_{i_1\cdots i_p}\, dz_{i_1}\wedge\cdots\wedge dz_{i_p},$$

其中 $a_{i_1\cdots i_p}\in \mathbf{C}$，$z_1,\cdots,z_n$ 为 $\mathbf{C}^n$ 之坐标，而 Dolbeault 上同调环 $\sum_{p,q=0}^{n} H^{p,q}(T)$ 自然地同构于 $\wedge\ \mathbf{C}^{n*}\otimes\wedge\overline{\mathbf{C}^{n*}}$ (见[1])．

和实 Lie 群一样，n 维复环面是 $2n$ 维实环面，且相同维数复环面互相同构．从复结构的观点来考察，它们的性能是非常复杂的．由于 $\mathbf{C}^n$ 中格 Γ 的基能用一个 $n\times 2n$ 矩阵 Ω 给出，这里 Ω 称为环面 $T=\mathbf{C}^n/\Gamma$ 的周期矩阵(period matrix)，具有周期矩阵 Ω_i 的环面 $T_i=\mathbf{C}^n/\Gamma_i(i=1,2)$ 互相同构(作为复 Lie 群或作为复流形)，当且仅当存在矩阵 $C\in\mathrm{GL}(n,\mathbf{C})$ 和 $Z\in\mathrm{GL}(2n,\mathbf{Z})$ 使得 $\Omega_2=C\Omega_1 Z$．

n 维环面的周期矩阵能化为矩阵 (E, A)，其中 E 为 n 阶单位矩阵，A 为 n 阶复方阵，$\operatorname{Im}|A|>0$．具有这种形式的周期矩阵的环面生成一个全纯族，它给出依赖于 n^2 个参数的任意 n 维复环面的有效参数化通用形变(见[3])．特别在 $n=1$ 的情形，参数空间为上半平面 $\operatorname{Im}(a)>0$，而一维复环面的同构类集恒同于商 $\{\operatorname{Im}(a)>0\}/\Delta$，其中 Δ 为模群(modular group)．

复环面如果是代数簇，它称为 **Abel 簇**(Abelian variety)．复环面 $\mathbf{C}^n/\Gamma$ 是 Abel 簇当且仅当在 $\mathbf{C}^n$ 中存在 Hermite 内积，其虚部在 $\Gamma\times\Gamma$ 上取整数值(见[1])．用周期矩阵写出，这是 Riemann - Frobenius 条件(Riemann - Frobenius condition)：存在斜对称方阵 $Q\in\mathrm{GL}(2n,\mathbf{Z})$ 使得 $\Omega Q\Omega'=0$，且 $-i\Omega Q\overline{\Omega}'$ 正定．当 $n=1$ 时，这个条件总是成立的；对应的代数曲线是椭圆的(见**椭圆曲线**(elliptic curve))．周期矩阵

$$\Omega=\begin{Vmatrix}1 & 0 & i\sqrt{2} & i\sqrt{5}\\ 0 & 1 & i\sqrt{3} & i\sqrt{7}\end{Vmatrix}$$

提供了 2 维复环面不是代数簇的例子．在这个环面上甚至没有非常数的亚纯函数(见[5])，要使 n 维复环面是代数的，其必要且充分条件为，在它上面存在 n 个代数无关的亚纯函数．

在 19 世纪，对复环面的兴趣起源于研究 **Abel 函数**(Abelian function)和代数曲线的 **Jacobi 簇**(Jacobi variety)间的关系．对任意 n 维紧 Kähler 流形 M 相应存在它的中间 Jacobi 簇，即一族 n 复环面(见[7])．

参考文献

[1] Mumford, D., Abelian varieties, Oxford Univ. Press, 1974.

[2] Wang, H. C., Complex parallisable manifolds, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **5** (1954), 771－776.

[3A] Kodaira, K. and Spencer, D. C., On deformations of complex analytic structures I, *Ann. of Math.*, 67(1958), 328－400.

[3B] Kodaira, K. and Spencer, D. C., On deformations of complex analytic structures II, *Ann. of Math.*, 67 (1958), 403－466.

[4] Weil, A., Introduction à l'étude des variétés kählériennes, Hermann, 1958.

[5] Siegel, C. L., Automorphe Funktionen in mehrerer, Variablen, Math. Inst. Göttingen, 1955.

[6] Wells, jr. R. Q., Differential analysis on complex manifolds, Springer, 1980.

[7] Chern, S. S., Complex manifolds without potential theory, Springer, 1979.

А. Л. Онищик 撰　许以超 译　石生明 校

Lie 代数的复化 [**complexification of a Lie algebra; комплексификация алгебры Ли**], Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 在 $\mathbf{R}$ 上的

复 Lie 代数 $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$, 它是 $\mathfrak{g}$ 与复数域 $\mathbf{C}$ 在实数域 $\mathbf{R}$ 上的张量积(tensor product):

$$\mathfrak{g}_{\mathbf{C}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}.$$

因此, Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的复化是由 $\mathfrak{g}$ 通过把纯量域由 $\mathbf{R}$ 扩张到 $\mathbf{C}$ 而得到的. 代数 $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ 的元素可以看成元素对 (u, v), $u, v \in \mathfrak{g}$; 在 $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ 中的运算由以下公式定义:

$$(u_1, v_1)+(u_2, v_2)=(u_1+u_2,\ v_1+v_2),$$

$$(\alpha+i\beta)(u, v)=(\alpha u-\beta v,\ \alpha v+\beta u),\ \text{对任何}\ \alpha,\ \beta \in \mathbf{R},$$

$$[(u_1, v_1),\ (u_2, v_2)]=([u_1, u_2]-[v_1, v_2],$$

代数 $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ 也称为 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的复包(complex hull of a Lie algebra).

一个代数的某些重要性质在复化之下仍然被保留: $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ 是幂零的, 可解的或半单的当且仅当 $\mathfrak{g}$ 也具有这个性质. 然而, 一般来说, $\mathfrak{g}$ 的单性并不能得出 $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ 也是单的.

一个 Lie 代数的复化的概念与一个复 Lie 代数的实型(见(代数)结构的型(form of an (algebraic) structure))的概念是紧密关联的. 一个复 Lie 代数 $\mathfrak{h}$ 的一个实 Lie 子代数 $\mathfrak{f}$ 称为 $\mathfrak{h}$ 的一个实型(real form), 如果每一个元素 $x \in \mathfrak{h}$ 唯一地被表示成 $x=u+iv$ 的形式, 其中 $u, v \in \mathfrak{f}$. $\mathfrak{f}$ 的复化自然与 $\mathfrak{h}$ 同构. 并非每一个复 Lie 代数都有实型. 另一方面, 一个给定的复 Lie 代数一般可能会有若干互不同构的实型. 例如, 一切 n 阶实矩阵所组成的 Lie 代数和一切 n 阶反 Hermite 矩阵所组成的 Lie 代数是一切 n 阶复矩阵所组成的 Lie 代数的互不同构的实型(还有其他实型).

参考文献

[1] Наймарк, М. А., Теория представлений групп, М., 1976 (英译本: Naimark, M. A., Theory of group representations, Springer, 1982).

[2] Желобенко, Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1970 (英译本: Zhelobenko, D. P., Compact Lie groups and their representations, Amer. Math. Soc., 1973).

[3] Гантмахер, Ф., 《Мат. сб.》, 5(1939), 2, 217-250.

В. Л. Попов 撰 郝钢新 译

Lie 群的复化 [**complexification of a Lie group; комплексификация группы Ли G**], 在 $\mathbf{R}$ 上的 Li 群 G

复 Lie 群 $G_{\mathbf{C}}$, 它含 G 为实 Lie 子群, 且使得 G 的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 为 $G_{\mathbf{C}}$ 的 Lie 代数 $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ 的实形式(见 **Lie 代数的复化**(complexification of a Lie algebra)). 于是称群 G 为 Lie 群 $G_{\mathbf{C}}$ 的实形式(real form of the Lie group). 例如, n 阶酉方阵全体构成的群 $U(n)$ 为 n 阶复非异方阵全体构成的群 $GL(n, \mathbf{C})$ 的实形式.

在连通且单连通复 Lie 群 $G_{\mathbf{C}}$ 的复解析线性表示和它的连通实形式 G 的实解析线性表示间存在着一一对应, 它使不可约表示互相对应. 这对应可以用下面办法给出: 若 ρ 为 $G_{\mathbf{C}}$ 的一个(不可约)有限维复解析表示, 则 ρ 在 G 上的限制是 G 的一个(不可约)有限维实解析表示.

并不是每个实 Lie 群都有复化, 特别是, 连通实半单 Lie 群有一个复化的必要且充分条件为 G 是线性 Lie 群, 即同构于某个群 $G(n, \mathbf{C})$ 的子群. 例如, 行列式为 1 的实二阶矩阵构成的群的通用覆叠群没有复化. 另一方面, 紧 Lie 群都有复化.

某些实 Lie 群不存在复化, 激励人们引出一个较一般的概念: 实 Lie 群 G 的通用复化(universal complexification) $(\widetilde{G}, \tau)$. 这里 $\widetilde{G}$ 为复 Lie 群, $\tau: G \to \widetilde{G}$ 为一个实解析同态, 使得对每个复 Lie 群 H, 每个实解析同态 $\alpha: G \to H$, 存在一个唯一的复解析同态 $\beta: \widetilde{G} \to H$, 满足 $\alpha=\beta \circ \tau$. Lie 群的通用复化总是存在, 且是唯一确定的([3]). 唯一性意味着如果 $(\widetilde{G}', \tau')$ 为 G 的另一通用复化, 则存在自然同构 $\lambda: \widetilde{G} \to \widetilde{G}'$ 使得 $\lambda \circ \tau=\tau'$. 一般地, $\dim_{\mathbf{C}} \widetilde{G} \leqslant \dim_{\mathbf{R}} G$, 但是, 如果 G 是单连通的, 则 $\dim_{\mathbf{C}} \widetilde{G}=\dim_{\mathbf{R}} G$, 且 τ 的核是离散的.

亦见**代数群的型**(form of an algebraic group).

参考文献

[1] Наймарк, М. А., Теория представлений групп, М., 1976 (英译本: Naimark, M. A., Theory of group representations, Springer, 1982).

[2] Желобенко, Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1979 (英译本: Zhelobenko, D. P., Compact Lie groups and their representations, Amer. Math. Soc., 1973).

[3] Bourbaki, N., Elements of mathematics, Lie groups and Lie algebras, Addison-Wesley, 1975 (译自法文).

В. Л. Попов 撰 许以超 译 石生明 校

向量空间的复化 [**complexification of a vector space; комплексификация векторного пространства**]

由实向量空间 V 通过数域的扩张而得到的复向量空间 $V^{\mathbf{C}}$. 空间 $V^{\mathbf{C}}$ 定义为张量积 $V \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$. 它也可以定义为形式表达式 $x+iy$ 的集合, 其中 $x, y \in V$, 并有按通常意义定义的加法及关于复数的数乘运算. 空间 V 包含在 $V^{\mathbf{C}}$ 中作为一个实子空间, 称为 $V^{\mathbf{C}}$ 的实形式(real form). V 的每一组基都是 $V^{\mathbf{C}}$ (在 $\mathbf{C}$ 上)的基. 特别地, $\dim_{\mathbf{C}} V^{\mathbf{C}} = \dim_{\mathbf{R}} V$. 运算 $V \mapsto V^{\mathbf{C}}$ 是从 $\mathbf{R}$ 上向量空间的范畴到 $\mathbf{C}$ 上向量空间的范畴的函子.

А. Л. Онищик 撰 龚明鹏 译

复杂性理论 [complexity theory; сложности теория]

【补注】 把数学问题分为可判定的和不可判定的，这是最基本的分类．这种分类对于劝阻设计太广泛的系统，例如判定程序等价性或程序停机的系统的企图，也具有一定的实践意义．

但在许多方面这种分类太粗糙．下面讨论用可判定问题的复杂性来对它们分类．两个都是可判定的问题，一个可以比另一个计算起来难得多，实际上可以认为这问题是不可判定的．例如，合理的问题也许几秒可以算出，而另一些问题(即使用最好的机器)可能要算几百万年．显然，同前者比较，后者是难处理的，因此，在知道特定问题的可判定性后，还必须研究它的复杂性(complexity)，即问题的特定例子处理起来很困难．复杂性的考虑有决定性的重要性，例如在**密码学**(cryptography)中，如果不能在一定时间内破译一个情报可能会耽误整个事情，因为时间一过情况会整个改变．有关材料也在**算法的计算复杂性**(algorithm, computational complexity of an)中讨论．

计算复杂性理论中典型的问题是：(对同一问题)**算法**(algorithm) A_1 在用更少的资源(例如时间或存储空间)的意义下是否比算法 A_2 更好？问题 P 是否有最好的算法？问题 P 是否比问题 P_1 在如下意义下更困难：解 P 的一切算法比解 P_1 的某个固定的合理的算法都更复杂？

通过考虑 **Turing 机**(Turing machine)可得到自然的复杂性度量：(就输入长度而言)计算要求多少步？这是时间资源观念的自然描述．同样，在计算过程中访问的方格数目形成自然的空间度量．(见**形式语言**(formal languages)；**自动机**(automata)和**可计算函数**(computable function)．)

这种面向机器的复杂性将在本条下半部分考虑．讨论将限于基本 Turing 机模型．像有多带多读头机器或随机读写机器这些变型在更详细的和特定的计算复杂性考虑中是重要的．但从最基本的结果来看，特殊的 Turing 机模型的选择是无关紧要的．

本条前半部分要研究公理化复杂性理论．不定义特殊的复杂性度量，例如时间或存储空间，而代之以算法使用的"抽象资源"．所用的公理很自然．在不涉及很多东西的意义上它是很弱的．但在这些公理的基础上可以建立卓越的理论．这理论始于[A1]．

计算复杂性理论的第三个主要方面：低层次复杂性，或某些特殊的实践中重要的算法的复杂性，则完全不讨论．这些主题以及复杂性理论更广及更高深发展的详细内容可以参阅[A5]－[A7]．

考虑所有的 Turing 机的一个**枚举**(enumeration)

$$TM_1,\ \cdots,\ TM_i,\ \cdots \qquad (A1)$$

枚举(A1)决定所有的单变元**部分递归函数**(partial recursive function)的枚举

$$\bar{f}_1,\ \cdots,\ \bar{f}_i,\ \cdots \qquad (A2)$$

所有的单变元部分递归函数的一个枚举

$$f_1,\ \cdots,\ f_i,\ \cdots \qquad (A3)$$

称为可接受的(acceptable)，当且仅当可以由(A2)能行地转入(A3)，反之亦然．换言之，给定(A2)中一函数的下标，可以找到同一函数在(A3)中的下标，反之亦然．

一个复杂性度量(complexity measure)是一个对 $CM=(F,\Phi)$，其中 F 是部分递归函数的一个可接受枚举(A3)，而 Φ 是部分递归函数的一个无穷枚举

$$\varphi_1,\ \cdots,\ \varphi_i,\ \cdots \qquad (A4)$$

使得(A3)和(A4)满足 Blum 公理(Blum axioms) B1 及 B2．

B1．对每个 $i\geqslant 1$，f_i 和 φ_i 定义域相重合．

B2．如下定义的函数 $g(i,n,m)$ 是递归函数：

$$g(i,n,m)=\begin{cases}1, & \text{如果 } \varphi_i(n)=m, \\ 0, & \text{如果 } \varphi_i(n)\neq m,\end{cases}$$

函数 φ_i 称为 f_i 的复杂性函数(complexity function)或费用函数(cost function)．

例如：若选择 $\varphi_i(n)$ 是 f_i 的 Turing 机对输入 n 的计算步数，显然可得一复杂性度量．仿之如果令 $\varphi_i(n)$ 是同一 Turing 机对输入 n 的计算中访问方格的个数，也得一复杂性度量，只要这种异形的 Turing 机在机器循环时不只用有穷量的带方格．

另一方面，选择 $\varphi_i=f_i$ 不产生复杂性度量：公理 B2 不满足．对一切 i 和 n，选择 $\varphi_i(n)=1$ 也不产生复杂性度量，因为公理 B1 不满足．这些例子还说明这两个公理是独立的．

显然，在序列(A3)中每个部分递归函数无穷次出现．若 $f:f_i$，那么代价函数 φ_i 是与计算 f 的某算法(例如 Turing 机)关联而不是和 f 本身关联．若也有 $f=f_j$，那么代价函数 φ_j 可以有比 φ_i 本质上小的值，表明对应于 f_j 的算法本质上更好．这种加速何时且如何成为可能呢？加速(speedup)问题是复杂性理论中最有趣的问题之一．

无论考虑什么样的复杂性度量和加速的程度，总存在递归函数 f，使得对 f 的任意算法可加速到所指定的程度．设 $f=f_i$ 且认为 f_i 决定的算法(例如，Turing 机 TM_i)是特别有效的．这意味着 φ_i 定义的资源量按函数 f 的复杂性观点是很小的．另外设 $h(x)$ 是增长非常快的函数，例如

$$h(x)=2^{2^{2^{x}}},$$

那么有 f 的另一个算法所用的资源如 h 所示的那么小．换言之，也有 $f=f_j$ 且

$$\varphi_i(x)\geqslant 2^{2^{2^{\varphi_j(x)}}},$$

但这并不必须对一切 x 成立，只是几乎处处成立．当然同样过程可对 f_j 重复．这就产生了另一个加速，但这次 f_j 是使用“很多”资源的算法．对新得到的函数又可重复加速，直至无穷次．

因此，加速定理(speedup theorem)说明，有些函数 f 无最佳算法，对每个人所喜欢的算法加速是可能的．但这只是对某些可能被认为是不自然的函数才是真的．

现在，考虑转向机器的复杂性理论．考虑对一切输入 w 都停机的 Turing 机 TM．TM 的时间复杂性函数(time - complexity function)可定义为

$$t_{TM}(n)=\max\{m: TM \text{ 对 } |w|=n \text{ 的输入 } w \text{ 在 } m \text{ 步以后停止}\}.$$

所以，$t_{TM}(n)$ 把非负整数集映入自身．称 TM 是多项式有界的(polynomially - bounded)，当且仅当存在一多项式 $P(n)$，使得对一切 n，$t_{TM}(n)\leqslant P(n)$ 成立．多项式有界的 Turing 机可接受的语言族记为 $\mathscr{P}$．(到目前为止只讨论了确定性 Turing 机，以后介绍非确定性 Turing 机．)

虽然 $\mathscr{P}$ 定义为语言族，但是它可以看成存在运行在多项式时间内的算法的问题集．人们总可以把判定问题(decision problem)看成是“肯定例”语言的归属问题．

由数学观点看，族 $\mathscr{P}$ 是非常自然的．这由它关于下面的计算模型的高度不变性可以看出．例如，有几个带子的 Turing 机 TM_1 比通常的 Turing 机快，即它们的时间 - 复杂性函数取较小的值．但是，如果这个 TM_1 的时间复杂性函数以一个多项式 $P_1(n)$ 为上界，那么可以(能行地)构造一个以多项式 $P(n)$ 为界的通常 Turing 机 TM，它接受的语言同 TM_1 接受的语言一样．(一般说来，$P(n)$ 值要大于 $P_1(n)$ 的，但仍是多项式．)仿之，每个关于任何合理的计算模型是多项式有界的语言属于上面用普通 Turing 机定义的族 $\mathscr{P}$．

族 $\mathscr{P}$ 也是极端重要的，因为 $\mathscr{P}$ 以外的语言可以认为是不能计算的．实际上，人们称不属于 $\mathscr{P}$ 的递归语言是难驾驭的(intractable)．

显然，$\mathscr{P}$ 以外语言难驾驭是从实用的观点来说的．当 $\mathscr{P}$ 中语言的多项式界很大时也可以这样认为．但是在 $\mathscr{P}$ 内划一条易驾驭和难驾驭的界线是不自然的．这样的定义也是因时而异的：计算机的迅猛发展后会改变这界线．另一方面，族 $\mathscr{P}$ 给出了易驾驭的非常自然的刻画．

现在考虑非确定性 Turing 机(non - deterministic Turing machine)：当在特定状态注视特定记号时，机器可以有几个可能的动作．否则，非确定性机器定义就同确定性机器一样．字 w 被接受当且仅当它引起一个可接受的计算，而不管它也可能引出失败的计算．所以对非确定性机器，若有一个可以成功的路程，那么就不管一切失败的路程．

非确定性机器 TM 接受字 $w\in L(TM)$ 所需的时间被定义为 TM 接受 w 的最短计算的步数．TM 的时间复杂性函数定义为

$$t_{TM}(n)=\max\{1, m: TM \text{ 在时间 } m \text{ 内接受某个 } |w|=n \text{ 的 } w\}.$$

所以，$t_{TM}(n)$ 的定义中只有接受计算．若无长度为 n 的字被接受时 $t_{TM}(n)=1$．

非确定性 Turing 机定义的进一步细节就不再讨论．定义了时间复杂性函数后，多项式有界非确定性 Turing 机(polynomially - bounded non - deterministic Turing machine)概念的定义同以前一样．被非确定性多项式有界 Turing 机可接受的语言族记为 $\mathscr{NP}$．

$\mathscr{P}$ 中的问题是易驾驭的，而在 $\mathscr{NP}$ 中的问题有这样的性质，它易于验证问题的解的一个好的猜测是否是正确的．非确定性 Turing 机可以看成是验证猜测是否正确的装置：它在计算的某步作一个(或多个)猜测，只当这个(或这些)猜测正确时，最后的结果才被接受．所以非确定性 Turing 机时间界实际上是检验解的猜测是否正确的时间界．

显然，$\mathscr{P}$ 被包含在 $\mathscr{NP}$ 之中．但不知是否真包含．$\mathscr{P}$ 是否等于 $\mathscr{NP}$ ($\mathscr{P}=\mathscr{NP}$?)的问题有理由称为计算理论中最为有名的未解决问题．这个问题的重要性在于已经知道许多实践里很重要的问题属于 $\mathscr{NP}$，而不知它们是否属于 $\mathscr{P}$．实际上这些问题的一切已知算法要用指数时间．所以 $\mathscr{P}=\mathscr{NP}$ 的证明可使这些问题易于驾驭．

非确定性 Turing 机及猜测不是要用来定义计算．非确定性只是一个辅助概念，而且将会看到是一个非常有用的概念．实际上，为了弄清楚 $\mathscr{P}$ 是否等于 $\mathscr{NP}$ 的问题，如下的定义和结果表明，只要考虑一种特殊语言(可以是一种最受人欢迎的语言)并决定它是否在 $\mathscr{P}$ 之中即可．存在大量的这种所谓 $\mathscr{NP}$ 完全语言(见下面)，它们来自数学各分支．

一个语言 $L_1\subseteq\Sigma_1$ 是可多项式归约到 $L_2\subseteq\Sigma_2$ 的(polynomially reducible)，记为 $L_1\leqslant_p L_2$，当且仅当存在一个确定性多项式有界的 Turing 机 TM 把 Σ_1 中的字 w_1 翻译为 Σ_2 中的字 w_2，使得 w_1 属于 L_1 等价于 w_2

属于 L_2.

应该指出，按前面定义引进的Turing机 *TM* 必须对一切输入停机，这是 *TM* 为确定的和多项式有界的推论.

显然，若$L_1 \leqslant_p L_2$且L_2在$\mathscr{P}$内，则L_1也在$\mathscr{P}$内.

语言 L 称为$\mathscr{NP}$ 艰难的($\mathscr{NP}$-hard)，若对一切$\mathscr{NP}$中语言L'有$L' \leqslant_p L$. L称为$\mathscr{NP}$ 完全的($\mathscr{NP}$-complete)，若它是$\mathscr{NP}$艰难的，且属于$\mathscr{NP}$.

可以把$\mathscr{NP}$完全语言看成$\mathscr{NP}$中最困难的问题. 另外，要证明$\mathscr{P}=\mathscr{NP}$是否成立，只要证明任意一个$\mathscr{NP}$完全语言是否属于$\mathscr{P}$. 实际上，考虑某个这样的语言L. 若L不在$\mathscr{P}$中，则显然$\mathscr{P} \neq \mathscr{NP}$. 若$L$在$\mathscr{P}$中，则由$\mathscr{NP}$完全性定义可知，每个$\mathscr{NP}$中的语言也在$\mathscr{P}$中，但是，这意味着$\mathscr{P}=\mathscr{NP}$.

$\mathscr{NP}$完全性的研究开始于[A2]和[A4]，而总体上[A3]是复杂性理论的先驱文章. $\mathscr{NP}$完全问题的目录可参阅[A6]. 典型的问题有：巡回的推销员问题，命题演算的可满足性问题，图的Hamilton线路问题，背袋问题，编时间表问题，及TOL语言(见L系统(L-systems))的归属问题.

虽然问题是可判定的，但由于解它的任意算法必用了难处理的计算资源量，它仍然是难驾驭的. 难驾驭性是由不属于$\mathscr{P}$的条件正式定义的.

已注意到，有许多重要问题的一切已知算法执行时都要用指数时间，但也不能证明这些问题确是难驾驭的. 一切$\mathscr{NP}$完全的问题属于此类问题. 实际上，在复杂性理论中建立下界一般说来是困难的任务. 一个具体的算法的复杂性通常可以被估计，但对一个具体问题的一切算法很难讲出一般的规律，例如给出它们复杂性的下界. 像加速定理这样的结果，甚至表明在某些情况下这是不可能的，按照抽象复杂性度量的理论，不能期望去证明任何特定问题在一切度量下本质上是困难的. 但是仍有大量问题已知是难驾驭的.

类似于时间界，可以定义Turing机的空间界(space bounds). 分别以$\mathscr{P}$空间和$\mathscr{NP}$空间表示用多项式空间的确定性和非确定性Turing机接受的语言. 下列关系成立:

$$\mathscr{P} \subseteq \mathscr{NP} \subseteq \mathscr{P}\text{-SPACE} = \mathscr{NP}\text{-SPACE}$$

以上包含关系是否是真包含，仍是一个著名的未解决问题.

参考文献

[A1] Blum, M., A machine-independent theory of the complexity of recursive functions, *J. ACM*, **14** (1967), 322 – 336.

[A2] Cook, S. A., The complexity of theorem-proving procedures, in *Proc. 3rd Annual ACM Symp. Theory of Computing*, ACM, 1971, 151 – 158.

[A3] Hartmanis, J. and Stearns, R. E., On the computational complexity of algorithms, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **117** (1965), 285 – 306.

[A4] Karp, R. M., Reducibility among combinatorial problems, in R. E. Miller and J. W. Thatcher (eds.): Complexity of computer computations, Plenum Press, 1972, 85 – 103.

[A5] Aho, A., Hopcroft, J. and Ullman, J., The design and analysis of computer algorithms, Addison-Wesley, 1974.

[A6] Garey, M. R. and Johnson, D. S., Computers and intractability, W. H. Freeman, 1979.

[A7] Machtey, M. and Young, P., An introduction to the general theory of algorithms, North-Holland, 1978.

[A8] Salomaa, A., Computation and automata, Cambridge Univ. Press, 1986.

G. Rozenberg, A. Salomaa 撰　杨东屏 译

空间的连通分支 [component of a space; компонента]

拓扑空间 X 具有下述性质的连通子集 C：如果 $C_1 \subset X$ 是连通子集，使 $C \subset C_1$，则 $C=C_1$. 空间的各连通分支是不相交的. 任何非空连通子集恰好被包含在一个连通分支中. 如果 C 是空间 X 的连通分支且 $C \subset Y \subset X$，则 C 也是 Y 的连通分支. 若 $f: X \to Y$ 是到上的单调连续映射，则 C 是 Y 的连通分支，当且仅当 $f^{-1}(C)$ 是 X 的连通分支.

参考文献

[1] Kuratowski, K., Topology, 2, Acad. Press, 1968 (译自法文).

Б. А. Ефимов 撰　方嘉琳 译

向量的分量 [component of a vector; компонента вектора]，沿一个轴的

把一个向量的端点向这个轴投影而得到的向量.

张鸿林 译

复合函数 [composite function; сложная функция]

由几个函数复合而得的函数. 若函数 f_i 的值域 Y_i 含于函数 f_{i+1} 的定义域 X_{i+1} 内，即若

$$f_i: X_i \to Y_i \subset X_{i+1},\ i=1, \ldots, n-1,$$

则函数

$$f_n \circ \cdots \circ f_1,\ n \geqslant 2,$$

由

$$(f_n \circ \cdots \circ f_1)(x) = f_n(\cdots(f_1(x))\cdots),\ x \in X_1,$$

定义，称为 $f_1, \cdots, f_n$ 的复合函数(composite function)或 $f_1, \cdots, f_n$ 的$(n-1)$重复合($(n-1)$-*fold com-*

posite) (或叠加(superposition)). 例如,任意多个变量的有理函数,都是四种算术运算,即函数 $x+y, x-y, xy$ 与 x/y 的复合.

复合函数继承了被复合的函数的许多性质. 例如,连续函数的复合函数是连续函数. 这意味着,若函数 $f_1: X \to Y$ 在点 $x_0 \in X$ 连续,而函数 $f_2: Y \to Z$ 在点 $f_1(x_0) \in Y$ 连续,则复合 $f_2 \circ f_1$ 在 x_0 也连续(这里,X, Y 和 Z,例如,都是拓扑空间). 类似地,n 重(连续)可微函数的复合仍为(连续)可微函数,$n=1, 2, \cdots$. 递增(递减)函数的复合也是递增(递减)函数. 在函数的复合过程中,某些定量的性质可能会改变:满足某些阶数的 Lipschitz 函数 f_1 与 f_2 的复合也满足 Lipschitz 条件,但其阶等于 f_1 的阶与 f_2 的阶的乘积. 函数的某些性质在复合过程中消失. 例如 Riemann 或 Lebesgue 可积函数的复合,一般不再依次为 Riemann 或 Lebesgue 可积函数. 两个绝对连续函数的复合可以成为非绝对连续函数. 然而,根据 N. K. Bari 与 D. E. Men'shov 的结果([1]),在一个区间上三个绝对连续函数的复合不会产生出比两个函数复合更广的函数类. Bari([2])证明了,闭区间上的任意连续函数都能写成一些由三个绝对连续函数复合成的复合函数之和,而且存在连续函数,它不能表成两个绝对连续函数的复合之和. 此外,闭区间上的连续函数都可以表达为两个有界变差函数复合之和. 最后,对于 $n=1, 2, \cdots$, n 重有界变差函数之复合将产生实质上是新的函数类,也存在着连续函数,它不能表达为1重有界变差函数的复合([3]).

函数的复合概念,为理解"函数的公式表示"一词,提供了最广泛的途径. 函数用复合来表示的问题的提出,是同代数方程求根公式的发现有关的. 四次或四次以下的方程的每个根都可以表达为关于方程系数的四种算术运算和开方运算的复合. 通过某种变换(称为 Tschirnhausen 变换),所有 $n \geq 5$ 的方程都可以化为如下的形式:

$$x^n + a_1 x^{n-4} + \cdots + a_{n-4} x + 1 = 0.$$

因此,次数 $n \geq 5$ 的方程的每一个根是 $n-4$ 个参数的函数. 现在的问题是,可否将这些函数表达为一些较少变量的代数函数的复合. D. Hilbert 1900 年在巴黎举行的国际数学家大会上提出的 23 个问题之一,就是与此相关的. 即第十三问题是这样的(见[4]):方程

$$f^7 + xf^3 + yf^2 + zf + 1 = 0 \qquad (*)$$

的根 f 是否可以表示为一些含两个变量的连续函数的复合,其中两个变量是指方程系数 x, y, z 中的某两个?(注意,任意的有限个变量的函数都是两个变量的不连续函数的复合.) Hilbert 证明了,用二元解析函数,不可能复合出所有的三元解析函数. 他还证明([5]),九次代数方程的根可以写成四元代数函数的复合(代替五个变量,后者可从 Tschirnhauser 变换直接推出). 许多数学家对此作了研究(见[6]-[19]).

1954 年,А. Г. Витушкин 证明([10]),若自然数 m, n, m_1 以及 n_1 满足不等式 $(m/n) > (m_1/n_1)$,那么可以找到 m 元可微函数的 n 重复合,它不能写成 m_1 元可微函数的 n_1 重复合. 特别地,对每个 n,可以找到具有预先指定的光滑度的 n 元函数,它不可能是较少个自变量且具有同样光滑度的函数的复合. 从这个意义说,在任意个自变量的光滑函数中,存在着与所有自变量均实质依赖的函数.

А. Н. Колмогоров 于 1956 年证明([11])了,定义在 n 维方体($n \geq 4$)上的任意连续函数,都是三元连续函数的复合. 之后,V. I. Arnol'd 将自变量的个数三降至二. 事实上,他证明([12])了,方体上的三元连续函数均可写成二元连续函数的复合(更精确地,甚至可写成九个函数之和,其中每一个都是二元连续函数的复合). 因此,n 维($n \geq 3$)方体上的连续函数都可以表示为二元连续函数的复合. 这就是对 Hilbert 关于方程(*)的根不能用二元连续函数的复合来表示这一猜想的最后的否定. Колмогоров 和 Arnol'd 的论文,特别地,给出了关于任意次方程的根,用至多两个变量的连续函数的复合的表示问题的正面答案. 对于解析函数以及代数函数的复合,相应问题尚未解决. 现在(1987)尚不清楚,方程(*)的根是否为解析函数的复合.

上述一系列论文可用以下的 Колмогоров 定理(Kolmogorov theorem)([13])作为最后的总结:n 元连续函数都可以通过若干一元连续函数以及一个二元函数 $g(x, y) = x + y$ 的复合而得到. 事实上,他证明了在 n 维方体上连续的函数 f 可以写成形式

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{2n+1} h_i \left[\sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(x_j) \right],$$

其中函数 h_i 和 φ_{ij} 都是连续函数,而且 φ_{ij} 都是标准函数,即它们与 f 无关.

Витушкин([14])证明,对任意有限个 n 元连续函数 p_k 以及连续可微函数 q_k ($k=1, \cdots, m$; $n=1, 2, \cdots$),甚至存在 n 元解析函数,它们不能表示为以下形式的复合:

$$\sum_{k=1}^{m} p_k \circ (f_k \circ q_k),$$

其中 f_k 为任意的一元连续函数.

参考文献

[1] Bari, N. K., and Men'shov, D. E., Sur l'intégrale de Lebesgue - Stieltjes et les fonctions absolument continues de fonctions absolument continues, *Ann. di Math.*, 5(1928), 19-54.

[2A] Bary, N. [N. K. Bari], Mémoire sur la répresentation des fonctions continues Ⅰ, *Math. Ann*., **103** (1930), 185–248.

[2B] Bary, N. [N. K. Bari], Mémoire sur la répresentation des fonctions continues Ⅱ, *Math. Ann*., **103** (1930), 598–653.

[3] Бари, Н. К., 《Матем. сб.》, **40** (1933), 326–372.

[4] Hilbert problems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **8** (1902), 437–479 (译自德文).

[5] Hilbert, D., Ueber die Gleichung neunten Grades, *Math. Ann.*, **97** (1927), 243–251.

[6] Bieberbach, L., Bemerkungen zum dreizehnten Hilbertschen Problem, *J. Reine Angew. Math.*, **165** (1931), 89–92.

[7] Чеботарев, Н. Г., Собр. соч., 1, М. - Л., 1949, 255–340.

[8] Чеботарев, Н. Г., 《Уч. зап. Казанск, ун - та》, **114** (1954), кн. 2, 189–193.

[9] Морозов, В. В., 《Уч. зап. Казанск, ун - та》, **114** (1954), кн, 2, 173–187.

[10] Витушкин, А. Г., О многомерных вариациях, М., 1955.

[11] Колмогоров, А. Н., 《Докл. АН СССР》, **108** (1956), 2, 179–182.

[12] Арнольд, В. И., 《Докл. АН СССР》, **114** (1957), 4, 679–681.

[13] Колмогоров, А. Н., 《Докл. АН СССР》, **114** (1957), 5, 953–956.

[14] Витушкин, А. Г., 《Докл. АН СССР》, **156** (1964), 6, 1258–1261.

[15] Lorentz, G. G., Approximation of functions, Holt, Rinehart & Winston, 1966 (中译本: G. 洛伦茨, 函数逼近论, 上海科学技术出版社, 1981).

[16] Sprecher, D. A., A survey of solved and unsolved problems on superpositions of functions, *J. Approx. Theory*, **6** (1972), 2, 123–134.

[17] Kahane, J. P., Sur le théorème de superposition de Kolmogorov, *J. Approx, Theory*, **13** (1975), 229–234.

[18] Лин, В. Я., 《Функц. анализ и его прилож.》, **10** (1976), 1, 37–45.

[19] Vitushkin, A. G., On representation of functions by means of superpositions and related topics, *l'Enseignment Math.*, **23** (1977), 255–320.

Л. Д. Кудрявцев 撰 王斯雷 译 郑维行 校

复合假设 [**composite hypothesis**; **сложная гипотеза**]

关于一随机变量的分布函数(概率密度)是某分布函数集合的成员的陈述(假定), 该分布集合包含多于一个元素. 参见**统计假设的验证**(statistical hypothesis, verification of); **简单假设**(simple hypothesis).

参考文献

[1] Cramér, H; Mathematical methods of statistics, Princeton Univ. Press, 1946.

М. С. Никулин 撰 陈希孺 译

复合理想 [**composite ideal**; **составной идеал**]

环或代数中不是**素理想**(prime ideal)的理想.

冯绪宁 译

合成 [**composition**; **композиция**]

二元**代数运算**(algebraic operation). 例如, 两个函数 f 和 g 的合成是函数 $h=f\circ g$, $h(x)=f(g(x))$. 关于概率论中的合成, 见**函数的卷积**(convolution of functions).

张鸿林 译

合成序列 [**composition sequence**; **композиционный ряд**], 合成列 (composition series)

有最小元 0, 最大元 1 的偏序集的有限子集 $\{a_0, \cdots, a_n\}$, 满足

$$0=a_0<a_1<\cdots<a_n=1,$$

并且所有区间 $[a_i, a_{i+1}]$ 都是简单的(基本的) (见**基本区间** (elementary interval)). 对于偏序集中任何区间 $[a, b]$, 也可同样谈论它的合成列. 当然, 合成列并不总存在.

泛代数的合成列由同余来定义. 由于群中的同余是由正规子群来规定的, 群的合成列 (composition series of a group) 可定义为没有真加细的(无重复的)正规列 (见**子群列** (subgroup series)). 群 G 的一个列

$$E=G_0\subset\cdots\subset G_{k-1}\subset G_k=G$$

是合成列, 当且仅当每个 G_{i-1} 都是 G_i 中的极大正规子群.

合成列中所有的商 G_i/G_{i-1} 都是单群. 每个同构于一个合成列的正规列, 它本身就是合成列. 群的合成列有 **Jordan - Hölder 定理** (Jordan - Hölder theorem) 成立. 环, 以及更一般的 Ω 群, 其合成列都可由类似的方式来定义, 并且具有类似的性质(见[2]).

参考文献

[1] Cohn, P. M., Universal algebra, Reidel, 1981.

[2] Курош, А. Г., Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973 (中译本: 库洛什, 一般代数学, 科学出版社, 1964).

О. А. Иванова, Л. А. Скорняков 撰

【补注】 对于**泛代数** (universal algebra), 合成列的概念可以更精确地规定如下([1]). 设 A 是个 Ω 代数, E 是个子代数. 从 E 到 A 的一个正规链是指由 A 的子代数所成的有限链

$$E=A_0\subset A_1\subset\cdots\subset A_m=A,$$

其中 A_i 上有同余 $\mathfrak{U}_i$ $(i=1,\cdots,m)$, 使得 A_{i-1} 恰好是 $\mathfrak{U}_i$ 类. 加细与正规链间的同构, 有自然的规定: 从 E 到 A

的二正规链是同构的，当且仅当它们有相同的长度，且有 1, …, m 的一个置换 σ，使得 $A_i/\mathfrak{A}_i \simeq A_{\sigma(i)}/\mathfrak{A}_{\sigma(i)}$. 于是有 Schreier 加细定理 (Schreier refinement theorem)，其大意是：设 A 是个 Ω 代数，E 是它的子代数．若在 A 的任何子代数上，所有的同余都是可换的，则由 E 到 A 的任何正规链都有同构的加细；以及 Jordan - Hölder 定理 (Jordan - Hölder theorem)：在这种代数上，由 E 到 A 的任何两个合成列都是同构的．

群 G 的一个子群 H，若存在一个子群链：$H=H_0\subset H_1\subset\cdots\subset H_m=G$，使得 H_i 在 H_{i+1} 中是正规的 ($i=0,\cdots,m-1$)，就称它是次正规的 (subnormal)．考虑 G 中次正规子群所成的格 L．于是，偏序集 L 的一个合成列可定义 G 的一个合成列，反之亦然．对于泛代数尚有其他的类似结论 (这些结论，对于由正规子群所成的格和同余格自然是不成立的)．

参考文献

[A1] Huppert, B., Endliche Gruppen, 1, Springer, 1967.

戴执中 译

复合域 [**compositum**; **композит**]，域扩张的

域 k 的扩张 Ω 中包含二个给定的子扩张 $A\subset\Omega$ 和 $B\subset\Omega$ 的最小的子扩张 $A\cdot B$．它也就是同态 φ: $A\otimes_k B\to\Omega$ 的像，该同态将张量积 $a\otimes b$ 映射为 $ab\in\Omega$.

裴定一 译

可计算函数 [**computable function**; **вычислимая функция**]

一个函数，其值可用一事先给定的能行过程或算法 (algorithm) 来计算．计算过程的特征性质是事实：问题的未知量可被一确定的事先给的规则和指令由给定初始值逐步计算出来．许多数学里的计算过程的有用例子给出计算过程的直观概念．在 20 世纪从事的数学基础的一般计划的范围里，要求出现和直观的算法概念不同的精确的算法概念．可计算函数，能行过程和算法的精确定义被 D. Hilbert, K. Gödel, A. Church, S. C. Kleene, E. L. Post, A. M. Turing 及 A. A. Марков 以不同的形式给出．

建立严格的数学定义的不同道路的一般想法可陈述如下．对已知的或可想到的计算过程作了仔细的分析，揭露了这些过程的重要特征，发现了这些过程和它们的特性的适当的数学相似物．这概念的不同方向的实现不是模糊的，且得到数学算法概念的不同形式．算法概念的基本模型是 Turing 机，部分递归函数，Марков 的正规算法及其他形式．

Turing 机 (Turing machine)．数学中用的算法类似于在分开的行上工作的机器，经过几行后机器可作出回应．Turing 和 Post 刻画了抽象机器的概念 (见**抽象计算机** (computer, abstract))，在其上可模拟计算过程．一个 Turing 机 (或 Turing - Post 机) M 由下列东西组成：

a) 一个有限字母表 (finite alphabet) $\alpha=\{a_0,\cdots,a_n\}$，其中 a_i 是任意符号；字母表 α 的符号的有穷有序的序列称为字母表 α 上的字；字母表 α 上的字作为初始问题，中间计算及得到的结果的编码．

b) 由机器 M 可能出现的基本状态 (elementary states) 的有限表 (finite list) $Q=\{q_0,\cdots,q_m\}$；q_1 被认为是 M 的初始状态，M 开始工作时处于此状态；q_0 是终止状态：若 M 进入状态 q_0，则停止运算．

c) 程序 (programs)，它由若干个单个指令 T_{ij} 组成，其中 T_{ij} 具有形式 $a_iq_j\to a_kDq_l$ 之一，其中 $0\leq i, k\leq n, 0<j, l\leq m$ 且 D 是动作符号 —— L, R, S.

在给定时刻机器 M 的瞬时描述被编码为形式 Aa_iq_jB 的字，其中 A 及 B 是字母表 α 上的字 (空字记为 a_0)．在其后的时刻 (计算进行一步后) 机器 M 的瞬时描述也被编码为一个依赖于指令 T_{ij} 的字：

若 $D=L$，则得到的字是 Aq_la_kB；

若 $D=S$，则得到的字是 Aa_kq_lB；

若 $D=R$ 且 $B=a_pB'$，则得到的字是 $Aa_ka_pq_lB'$；

若 $D=R$ 且 B 是空字，得到的字是 $Aa_ka_0q_lB$.

机器 M 运算方式可如下描述．借助于某初始瞬时描述 (这里是 $q_j=q_1$) 来编码输入．按照 M 的程序得到下一个的瞬时描述：若在某时刻所得的瞬时描述含终止状态 q_0，计算停止．最后瞬时描述被解码且给出答案．若机器永不停止，问题答案被认为是不确定的．

任何以被归约为一适当的 Turing 机的运算的计算过程是直观能行的．其逆命题是所谓 Turing 论题 (Turing thesis)：任何能行计算过程可以在一个适当的机器 M 上实现．该论题不能被证明，因为它含两个概念 —— Turing 机的严格的数学定义和能行过程的模糊的直观概念．如果 Turing 机用以模拟其定义域及值域为自然数集的函数值的计算，那么可得到 (在一个 Turing 机上) 可计算函数 (computable function) 的概念，亦见 **Turing 机** (Turing machine)．

部分递归函数 (partial recursive function)．一切已知算法的例子可以归约为计算适当的函数的值的问题．把这个特点作为基本性质，Herbrand, Gödel, Kleene 定义了一个很广的函数类，它们称为部分递归函数类．令 F 为部分函数类，这些函数的定义域及值域皆为自然数集．如下算子在集合 F 上被定义：

a) 函数的叠加 (复合) (superposition (composition) of functions)：若 $f, \alpha_1,\cdots,\alpha_m\in F$，则称函数

$$\varphi(x_1,\ldots,x_n)=f(\alpha_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,\alpha_n(x_1,\ldots,x_n))$$

是由 $f, \alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 经复合而得到的．

b) μ算子(μ-operator)：令$f_1, f_2 \in F$，称函数ψ是由f_1及f_2借助于μ算子而得到的，记为

$$\psi(x_1,\ldots,x_n) = \mu y[f_1 f_2(x_1,\ldots,x_n,y)],$$

若$f_1(x_1,\cdots,x_n z)$及$f_2(x_1,\cdots,x_n z)$当$z<y$时都有定义且其值不相等，且若

$$f_1(x_1,\ldots,x_n,y) = f_2(x_1,\ldots,x_n,y)$$

且

$$\psi(x_1,\ldots,x_n) = y.$$

显然，若这些算子用于其值可计算的函数，则存在计算函数φ和ψ值的算法．如下函数被认为是最简单的：+，×，$I_i^n(x_1,\cdots,x_n)=x_i$及

$$k(x,y)=\begin{cases}0, 若\ x<y,\\ 1, 若\ x\geqslant y.\end{cases}$$

存在简单的算法以计算这些最简单的函数．

一个函数f称为部分递归的(partial recursive)，若它可由最简单函数有穷次使用复合和μ算子而得到．处处有定义的部分递归函数称为一般递归(general recursive)函数．任何部分递归函数的值都是直观意义下能行的计算的．这命题之逆称为 Church 论题(Church thesis)：任何其值可以能行计算的函数都是部分递归函数．因此根据 Church 论题，可计算函数是部分递归函数．

Марков 正规算法 (Markov normal algorithm)．任何给定算法都涉及某一确定的字母表，且一个给定问题的解法可以归约为按照事先给定的一定规则对这字母表上字的处理．算法理论的途径是由 Марков 发展的，他把正规算法的概念作为计算过程概念的数学模型．

一正规算法φ由一取定的字母表$\alpha=\{a_0,\cdots,a_n\}$及形为$A\to B$的规则的一有穷有序表组成，其中$A$及$B$为字母表$\alpha$上的字．某些规则被指定为最终的．一个规则$A\to B$被如下地用于一个字$P$:$P$表示形式$QAR$的字，其中$Q$及$R$为字母表$\alpha$上的字，也可以是空字；在一切如此表示之中取$Q$为最短的那个表示，且称$QBR$是此规则用于$P$的结果．一正规算法$\varphi$如下地用于一字$P$：应用第一个可用于字$P$的规则，由此得字$P_1$；应用第一个可用于字$P_1$的规则，由此得字$P_2$，如此进行．其结果是当应用了某最终规则后终止的字序列．

若信息被适当地编码，则正规算法可用于各种算法问题的解．任何用正规算法模拟的计算过程在直观意义下是能行的．这个命题之逆被称为 Марков 论题(Markov thesis)：任何能行计算过程可用适当的正规算法实现，若类F中函数值的计算用正规算法模拟实现，则可得到另一个可计算函数的概念．算法概念的其他更精确定义也已提出(见**算法**(algorithm)；**正规算法**(normal algorithm))．

已证明了关于由不同定义形式给出的算法概念的等价性：Turing 机上可计算函数类，部分递归函数类，Марков 正规算法可计算函数类(或算法概念的其他定义所定义的函数类)是相同的．目前绝大部分数学家认为这类函数可作为直观可计算类，且和直观可计算函数类相同．有了这种认为它们相同的看法，就可以把算法问题处理为数学问题．

参考文献

[1] Мальцев, А. И., Алгоритмы и рекурсивные функции. М., 1965 (英译本：Mal'tsev, A. I., Algorithms and recursive functions, Wolters - Nordhoff, 1970).

[2] Rogers, jr., H., Theory of recursive functions and effective computability, McGraw - Hill, 1967.

[3] Turing, A. M., On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem, *Proc. London Math. Soc.* (2), **42** (1937), 230 – 265.

[4] Kleene, S. C., Introduction to metamathematics, North - Holland, 1951 (中译本：S. C. 克林，元数学导论，科学出版社，上册 1984，下册 1985).

[5] Марков, А. А., Теория алгорифмов, М., 1954 (中译本：А. А. 马尔科夫，算法论，科学出版社，上册 1959，下册 1960).

И. А. Лавров, А. Д. Тайманов 撰

【补注】"动作符号"L, R, S分别表示"左移"，"右移"，"不动"("立定")．

在**计算的数学理论**(mathematical theory of computation)一条中可以找到可计算函数的更多的信息．

杨东屏 译

可计算不变量 [**computable invariant**；**вычислимый инвариант**]，给定类型的字之间的二元关系的

可运用于所有该类型的字的且将任意两个相关字处理为一个相同字的**算法**(algorithm)(在其精确意义下；例如，像在[1]，[2]中所使用的**正规算法**(normal algorithm))．

根据 А. А. Марков 的定义，两个字是由给定关系的不变量不可分的(inseparable)，如果用这个关系的所有可计算不变量处理这些字将产生相同的结果．可以注意到，如果某二元关系是可判定的(见**可判定集**(decidable set))，则可以构造它的计算不变量使得不相关的两个字上有不同的值．另一方面，若能成功地构造出不相关且由不变量不可分的字，则所讨论的关系是不可判定的．

代数、拓扑中的许多著名**算法问题**(algorit mic problem)都可表述为研究某些等价关系类的可判定性的问题，且这样一些问题的否定解往往是通过证明在一

定类型的等价关系之间存在不可判定关系而得的．Марков找到一个程序加强(如上所述)许多算法问题的否定解(群论中的字相等问题，同胚问题，结合演算和群演算不变性质的可认性问题)．在[3]中构造了一个可枚举(见**可枚举集**(enumerable set))但不可判定的字的等价关系，然而任意两不相关字是由二元关系不变量可分的．现仍未解决(1987)是否类似结果对Марков所研究的关系类也成立．

参考文献

[1] Марков, А. А.,《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, 27 (1963), 4, 907－936.

[2] Нагорный, Н. М., в сб.: Исследования по теории алгорифмов и математической логик, т. 1, М., 1973, 205－210 (英译本: Markov, A. A. and Nagornyi, N. M., Theory of algorithms, Reidel, To appear).

[3] Нагорный, Н. М., в сб.: Исследования по теории алгорифмов и математической логик, т. 1, М., 1973, 205－210.

Н. М. Нагорный 撰　眭跃飞 译

可计算实数 [**computable real number**；**вычислимое действительное число**]

一个实数，存在一种**算法**(algorithm)以给出对于它的任意精确的有理逼近．"构造实数"一词与其有相同的意义，通常在某些构造数学系统的框架中考虑可计算实数时使用(见**构造分析**(constructive analysis))．

Б. А. Кушнер 撰　眭跃飞 译

计算算法 [**computational algorithm**；**вычислительный алгоритм**]

确切定义的对数据进行运算的指令，借助这些指令可以由进行离散运算的数字计算机执行有限次运算将一批数据(输入数据)变为另一批数据(输出数据)．计算算法以计算过程，即实际计算机按时间离散分布的有限的状态序列的形式实现．实际的计算机不同于抽象的计算机，它有有限的运算速度，有限的数字位数及有限的存储能力．

如果给定了计算算法和计算机，计算过程也就严格地确定了，即对于给定的输入数据以完全确定的方式，对应计算机运算序列、计算机状态序列、输出数据．如果计算机的运算序列不依赖于输入数据，则称计算算法是线性的，否则称为非线性的．

计算机的运算对象是机器字形式的数据．这些机器字可理解为机器数，机器指令等．机器数通常构成一个有限的有界数集 M，分布在机器区间 $[-A, A]$ 中，并按机器的数制记录下来，基数 a 是给定的，这里 $a \geqslant 2$ 是自然数，A 是最大机器数(机器无穷大)．因此机器数的有效数字的位数和绝对值大小都受到限制．对应于不同的基数，不同的数制和不同的机器区间，一台给定的计算机可以对不同的数集 M 工作．

机器指令是包含关于运算(如算术运算)和操作数(运算对象和运算结果)信息的计算机字．作用在两个机器数上的算术运算由于以下两个原因可能产生位于数集 M 之外的结果，即有效数字的位数大于允许位数或数值本身大于机器数的允许值．在前一种情况中，结果会被舍入，这虽然可使结果回到 M 中，但会使运算不准确，损失精度．后一种情况会造成计算机停机(机器中断)．

两个机器数的算术运算同其后的舍入运算合起来称为一个伪运算(quasi-operation)．集合 M 同其上定义的伪运算集合形成一个封闭系统 N，但不同于实数域的情形，N 不是域．系统 N 依赖于计算机的选择．

一个实际的计算算法包含两部分：

1) 一个可用于数学对象(有限维向量空间、域、代数系统、函数空间等的元素)的抽象的(适当的)计算算法，它不仅不依赖于所用的具体计算机，而且能用常规的数学术语或某种算法语言写出来．

2) 程序，即描述计算算法并在指定计算机上组织该计算过程实现的机器指令的总合．

计算算法的第一部分是初始部分，它借助于各种编程序方法进入第二部分．计算算法中包含一些控制参数，它们在第一部分中不确定而在程序中指定，它们完全确定了计算过程，并保证第一部分适用于指定的计算机．

计算算法处理数值和符号信息常常免不了信息和精度的损失．精度的损失是由计算的不同阶段中出现的几种误差引起的：模型误差，逼近误差，输入数据误差和舍入运算误差．模型误差是现实过程的数学描述的近似性的结果．输入数据的误差可以来自观察与测量等的误差，也可以来自输入信息的舍入误差．所有来自模型及输入数据的误差有时被称为不可避免的误差．逼近误差起因于将抽象的计算算法看成是某一离散模型，它通常逼近一个连续模型．在某些情况下，抽象的计算算法本身就是一个独立的离散模型，它不同任何其他模型对照，此时谈论逼近误差是无意义的．舍入误差只在实际计算过程中碰到，并依赖于计算机的选择．如果给定了输入数据和抽象的计算算法，则计算机产生的中间数据和输出数据依赖于计算机的选择和它的运算方式(单精度运算还是双精度运算)．抽象的计算算法允许等价变换，对给定的输入数据，用等价变换可以替换中间结果，并使最终结果不变．对应于同一个抽象计算算法的两种不同的等价表示的计算算法对于给定的计算机和输入数据可以产生不同的最终结果．

除了精度以外，计算算法还必须具有稳定性．计算算法的稳定性定义为计算算法的整体计算误差积累速度的可控制性．根据以不同范数测定的初始舍入误差和整体计算误差，有各种不同等级的稳定性(或不稳定

性).如果计算算法只包含线性递推关系序列,则它的稳定性根据在有限维向量空间上的有限维矩阵的范数来确定.稳定性既由抽象计算算法的结构,又由舍入误差的影响来决定.因而迭代过程 $\mathbf{x}^{n+1}=A_n\mathbf{x}^n+\mathbf{b}$ 的稳定性依赖于系数矩阵的舍入误差对它的范数的影响,这里矩阵 A_n 也是计算得出的.包含在各种方程和算子的系数中的舍入误差扰动了抽象计算算法的数学模型,在这种意义下,它也可以认为是模型误差.给定的抽象计算算法的稳定性越好,计算结果对计算机的选择及算法的等价表示的依赖性就越小.

另一个性质是计算算法的经济性,它在大规模计算中是特别重要的.计算算法经济性的度量是在计算中得到预定精度所必须花费的计算机时间.经济的计算算法已广泛用于数学物理问题(例如见**分步法** (fractional steps, methods of)).计算算法理论的一个重要任务是计算算法的最优化.

精度的控制是计算算法构造的典型特征.这种控制可以通过以下方法间接地实现:提高稳定性和算法逼近的阶,改变算法的参数(内收敛性),比较两个计算算法对同一问题得到的不同的数值解,运用试验手段等.如果能够得到计算结果的**双边估计** (two sided estimate)或至少单边估计,那么精度的直接控制就实现了.这种理论的估计并不总是可能和有效的,因为这种估计提供的数值解偏离真解的界限不总是充分精确的.广为流传的方法是区间分析法,这种方法可以在计算过程中得到计算值的置信界限.

抽象的和实际的计算算法得到的结果之间的差异是由于它们的参数之间有相当复杂的关系.在抽象的计算算法中一个收敛的迭代过程的精度 ε 通常随着迭代次数 n 的增加而提高.在实际的计算算法中,这种情况会由于舍入误差的影响而改变,从某一时刻起,第 n 步迭代同准确解的差可以不再减小.

一般而言,构造抽象的计算算法不考虑具体的计算机的选择,只是通过算法本身的收敛性与稳定性间接地考虑计算机的配置.若机器的速度快而存储能力低,则在求解偏微分方程时,适宜采用经济的、绝对稳定的、高精度的方案.有并行处理器的计算机的出现导致并行算法和并行程序设计的发展.在并行程序设计中,被处理的数据被剖分为几部分(子块),这些部分由相应的处理器独立地处理.在子块之间有信息交换,这种交换损失的时间远少于采用并行计算所得到的时间收益.并行计算机的应用之所以吸引人,是因为计算速度大大地提高了,特别是对于大规模计算问题.

多种多样计算机导致实现同一抽象计算算法的多种多样的程序.这些程序的编写是很麻烦的,因此改写问题具有特殊的意义,即快速地,如果可能,自动地将一个给定的抽象计算算法的程序从一台计算机翻译到另一台计算机(见**程序设计** (programming)).

Н. Н. Яненко 撰 金保侠 译

计算数学 [**computational mathematics**; **вычислительная математика**]

数学的一个分支,它研究的问题和计算机的应用有关系.这个术语的含义至今还不能认为是确定的,因为这一数学领域随着计算机应用范围的不断扩大,目前正在蓬勃发展之中.术语"计算数学"常常被理解为求解典型的数学问题的数值方法及算法的理论.这种解释在最初阶段被广泛接受,当时电子计算机的应用对数值方法提出了新的要求.那时主要问题就是发展新的,适用于计算机的方法.在下文中,术语"计算数学"将在更广的意义下使用.

计算数学可以认为是由三个主要领域组成的,第一个领域同电子计算机在科学研究和日常活动中各方面的应用有关,可以描述为数学模型的分析.第二个领域是同研究数学模型时所遇到的典型数学问题的求解方法和算法的制定有关.第三个领域同研究人和计算机相互关系的简化问题有关,包括计算机**程序设计** (programming)及计算机**自动程序设计** (automatic programming)的理论与实践.

数学模型的分析包括问题提法的研究,模型的选取,输入信息的分析和处理,在模型研究中提出的数学问题的数值解法,计算结果的分析,最后是所得结果的实现问题.

模型的选取应该考虑以下要求.根据模型分析的结果来研究一个或一类现象的可靠程度应同初始信息的精度一致.这意味着如果随着时间的发展得到了更精确的信息,那么模型的构造也要相应地改进,甚至采用完全不同的模型.对这些问题,初始信息处理方法具有本质的重要性,应用得最多的是数理统计的方法.

数学模型在科学的进步中起了重要作用.目前数学模型已普遍应用于人类活动的广阔领域(包括设计,控制,预报等).

在人造模型分析的基础上对实际现象的研究通常要求发展数值方法和使用电子计算机.因此计算数学的一个重要部分就是得到所提出的数学问题的数值解,首先是典型的数学问题的数值解(狭义的计算数学).

作为在应用中经常遇见的典型的数学问题的例子,人们可以想到代数中的问题,其中较重要的有线性代数方程组(尤其是大型方程组)的数值解法,**矩阵求逆** (inversion of a matrix),求矩阵的本征值(包括求前若干个本征值——**部分本征值问题** (partial problem of eigen values)及求全部特征值——**完全本征值问题** (complete problem of eigen values)).其他的例子有:单变量及多变量函数的**数值微分法** (numerical differenti-

ation)和**数值积分法**(numerical integration)、求解**常微分方程**(differential equation, ordinary) 和**积分方程**(integral equation)的数值方法,以及各种数值方法的研究和比较分析,如**Adams 法**(Adams method)和**Runge - Kutta 法**(Runge -Kutta met od).许多研究同求解偏微分方程的数值方法有关(见**双曲型偏微分方程,数值方法**(hyperbolic partial differential equation, numerical methods),**椭圆型偏微分方程,数值方法**(elliptic partial differential equation, numerical methods),**抛物型偏微分方程,数值方法**(parabolic partial differential equation, numerical methods)). 这里的主要课题是所谓的经济算法, 即通过相对少量的运算得到结果的方法.

数值最优化方法是计算数学中一个迅速发展的课题.最优化问题涉及泛函在一个结构通常很复杂的集合上的极值(极大或极小)问题的研究(见**极值问题,数值方法**(extremal problem, numerical methods)).首先要提到的是**数学规划**(mathematical programming)问题(包括线性规划和动态规划),经济学中的许多问题可归结为这类问题.类似的还有**运筹学**(operations research) 和**对策论**(games, theory of)中提出的极小极大问题及相应的计算方法. 在多步对策(动态进程)的求解中涉及特别复杂的极小极大 - 极小极大型问题.在这种情况下,如果没有强有力的计算机帮助,对博弈者的各种对策过程进行数学实验是不可能的.

计算机在复杂问题(特别是大型问题)求解中的应用提出了数值方法理论中的一个主要课题——方法或算法对各种误差(包括舍入误差)敏感性的研究(见**计算算法的稳定性**(stability of a computational algorithm)及**计算过程的稳定性**(stability of a computational process)).

反问题经常被证明是不稳定(不适定)的,例如通过算子 A 及元素 b 的已知信息来定出 $Ax=b$ 的 x,在输人数据中的小误差可能给 x 带来很大的误差.更有甚者,反问题经常不是对所有的 b 值都有解. 因此当 b 的近似值给定时,应想到问题的正常解不一定存在.对不稳定的问题必须给近似解以特殊的定义,并需要发展寻找这种解的特殊方法. 在实验结果的自动处理中包含大量的这样问题 (见**不适定问题**(illposed problem)).

问题求解方法的优化问题在计算数学的大多数领域中占重要地位,它们在大型问题(例如涉及很多变量的问题)的求解中尤其重要.

由于电子计算机的广泛应用, 用户的范围不断扩大,同时也产生某种自动化的趋势, 即允许一些用户对数值方法在一定程度上是无知的.这意味着算法、算法的分类及求解典型问题的标准程序面临新的要求.

如果没有计算机的应用和数值方法的发展,一些应用科学目前的科技发展速度是不可想象的(见**气体动力学的数值方法**(gas dynamics, numerical methods of)).

程序设计理论的基本任务是使人机联系更为方便,尽管随着计算机技术的发展,这种观点和具体的研究方向会有根本的改变. 几代计算机的更替也形成了程序设计的不同发展阶段.

用机器语言编程序很快就让位于为典型问题求解编**标准程序**(standard program)及这些程序的合成.因为这些程序可以用来求解一大类问题,所以这时就不再需要为解法编程序,只要提供输入信息就够了.然而这些信息的输人和非标准块的编写仍需要大量机器语言的程序设计(见**面向机器的语言**(machine - oriented language)).

随着新一代更快速的计算机的出现,需要解决的问题也相应地增加了.结果人机联系中出现了障碍,即程序设计的速度.这引起程序设计新阶段的诞生——带编译程序的**算法语言**(algorithm language)的创立,编译程序将算法语言翻译成机器语言. 由于算法语言同人类的日常语言很相近,它们的使用大大地简化了程序设计,同时也扩大了用户的范围.

与通用的算法语言(**Algol 语言**(Algol);**Fortran 语言**(Fortran))的创立平行,一些**面向问题的语言**(problem - oriented language)也为各个独特类型的用户,例如进行经济信息处理的用户,而发展起来(**Cobol 语言**(Cobol)).发展专业化语言是基于下述原因: 通用语言及其编译程序是为求解广泛类型问题而设计的,而对个别重要类型问题的特征反映较少,因此机器的潜力没有得到充分利用.

随着计算机速度的进一步提高,信息的输入输出设备成为人机交流的主要障碍、这些设备的缓慢运行使高效率的中心处理器变得完全没用. 为了克服这一矛盾, 有必要建立能在一台机器上同时解决几个问题的系统. 建立这样的系统另外一个原因是,大量的用户需要同时使用一台机器(在自动控制系统中应用计算机时,这是特别重要的).所有这些及一些其他原因导致一种新的程序设计的出现,即**系统程序设计**(system programming).它的基本任务是产生一个控制机器运行的操作系统,这种系统能通过程序设计扩大计算机的潜力并提供给用户原设备没准备提供的额外服务: 在问题求解过程中可同时输入和输出,输出的自动编辑,图形记录,可见显示,同计算机对话,由计算机同时求解几个问题(分时).

计算机同多种不同的机器,如输入装置,机器与使用者(往往是与物理装置)之间的通信渠道,联合起来组成合成的工作系统,可以扩大计算机的用途. 这种高效率的系统适用于解决如经济学和物理实验结果处理中涉及的大量信息的输入和处理的问题.

计算系统,尤其是信息系统及自动控制系统的发展

是当代科学中最迫切的问题之一. A. H. Тихонов 撰

【补注】 目前,计算机上的计算机代数学(computer algebra)或符号公式操作(symbolic formula manipulation)正很快地变得重要起来.这里代数工具用来进行公式操作. 利用这些工具可以得到积分和 Jacobi 行列式的准确值,这同舍入误差起重要作用的数值数学形成鲜明对比.强有力的计算装置的有效性及其系统地使用导致了若干新的数学研究领域的出现,并促进或复兴了其他的领域.

这方面的资料及例子见**复杂性理论**(complexity theory),**密码学**(cryptography),**形式语言与自动机**(formal languages and automata),**L系统**(L-system),特别是**计算的数学理论**(mathematical theory of computation). 金保侠 译

抽象计算机[computer, abstract; вычислительная машина абстрактная],抽象机(abstract machine)

描述计算机模型的数学概念,而忽略存储寄存器的限界容量和电子计算机的其他技术参数. 和实际计算机不同,抽象计算机能计算在无限的可构造个体域上定义的函数(例如,整数,有限字母表上的字,有限图,无限树,等等,见**构造对象**(constructive object)). 抽象机用作严格地定义**算法**(algorithm)的直觉思想的概念. 这种概念用于研究算法存在的问题(即**算法问题**(algorithmic problem)的可解性),或算法质量的研究(即估计算法的复杂性). 抽象机也用于**算法语言**(algorithmic language)语义学的形式化, 通过一类抽象机来建立另一类抽象计算机的模型(例如,用串行算法模拟并行算法).

抽象计算机可按其结构复杂性和算法处理信息的类型来分类. 其主要类型如下:

1) 处理有限字母表上字的抽象计算机. 这种计算机结构的复杂性最简单,以便适应理论的具体需要. 典型代表是 **Turing 机**(Turing machine), Minsky 机, Марков 的**正规算法**(normal algorithm)和 **Post 典范系统**(Post canonical system). 抽象计算机往往用于论证算法问题的不可解性和估计算法的复杂性,见**算法的计算复杂性**(algorithm, computational complexity of an).

2) 具有与 1)类机有相同结构复杂性的抽象计算机,可是它处理矩阵,有限图和任意复形. 典型的代表包括 Колмогоров 算法, von Neumann 细胞自动机和生长自动机. 如果说 Колмогоров 算法的信息处理是局部的,那么在 von Neumann 细胞和生长自动机中则是并行进行的. 通用抽象计算机已经制成;它们具有令人满意的特性,能够模拟任意同类抽象计算机. 在有些抽象计算机上进行了最高速(实时)计算的研究.

3) 通常处理字或整数,并具有按实际要求确定的完善结构的抽象计算机,它与实际计算机有许多共同之处. 典型代表是所谓算子算法(operator algorithms)(见[3])和向存储器随机存取的机器. 这种抽象计算机用于估计实用算法的复杂性和模拟抽象计算机.

4) 具有与 3)类机有相同结构复杂性的抽象计算机,但它处理任意图(往往是无限树). 它们是 3)类抽象计算机发展的结果, 是为适应算法语言的专门特性而设计的. 这种抽象计算机用于算法语言语义学的形式化,并论证程序的正确性. 典型代表包括 Algol-68 语言(Algol-68)和 **PL/I 语言**(PL/I)语义规范中使用的抽象计算机.

参考文献

[1] Барздинь, Я. М., 《Докл. АН СССР》, 157 (1964), 3, 542-545.

[2] Wyngaarden, A. van, et al., Revised report on the algorithmic language ALGOL 68, *Acta Inform.*, 5 (1975), no. 1-3.

[3] Ершов, А. П., 《Проблемы кибернетики》, 3 (1960), 5-48.

[4] Колмогоров, А. Н., Успенский В. А., 《Успехи матем. наук》, 13 (1958), 4, 3-28.

[5] Minsky, M. L., Computation: finite and infinite machine, Prentice-Hall, 1967.

[6] Трахтенброт, Б. А., Алгоритмы и вычислительные автоматы, М., 1974.

[7] Hartmanis, J., Computational complexity of random access stored program machines, *Math. Systems Theory*, 5 (1971), 232-245.

[8] Wegner, P., The Vienna definition langnage, *Comput. Surveys*, 4 (1972), 1, 5-63.

В. А. Непомнящий 撰

【补注】 以上描述的抽象计算机概念不仅包括现今使用的基于机器的模型,而且包括更多面向演算的形式体系. 例如,执行**λ演算**(λ-calculus)中项的归约的"媒体"是上述概念意义上的一个抽象算法.

存在一些重要的分类特点, 上文未作叙述, 现在来加以讨论.

一致性与非一致性比较: 在研究公式复杂性或网络复杂性中, 一个是研究给定函数对长度 k (k 为给定整数)输入的限制,另一个是研究计算这种限制的公式或网络的规模或深度. 可以想象,不存在有效步骤,能对任意长度 k 产生这一限制的最低复杂性的公式或网络的描述,因此,这些极小设备表示原始函数的非一致设备. 另一方面,给定的 Turing 机算法提供了整个函数的一致性描述.

并行与非并行计算比较: 在抽象串行计算机中,存在着单个处理器,它在单一转换过程中对被认为是在原子构形的有限部分上运算(可是,正如上文作者所注意到的,这仍能表示像一个字符那样的真原子对象,或像

一个数,一个字或一个图那样的结构化对象). 在并行处理器中,存在潜在无界批量处理器可同时对可能的不相交数据进行运算. 在并行模型的范围内,还可以对同步并行与异步并行之间作进一步区分,取决于处理器是同步运算还是在其专用时标内分别运算. 另一个区别涉及不同处理器执行的指令. 如果所有处理器在单一运算周期中对不同数据执行相同运算,那么,这种机器称为单指令多数据 (SIMD) 机. 如果不同的处理器能对不同的数据执行任意指令,那么,这是多指令多数据 (MIMD) 机. 并行处理器能在公用存储器上运算,或者用另一种方法,每个处理器有私用存储器,且不同的处理器借助于在连接具体处理器的通道上发送和接收的消息来交换信息.

参考文献

[A1] Hockney, R. W. and Jesshope, C. R., Parallel computers, A. Hilger, Bristol, 1981.

[A2] *Comm. of the ACM. Special issue on parallelism*, 29 (1986), 12, 1168 – 1239.

[A3] Savage, J. E., The complexity of computing, Wiley, 1976.

[A4] Bjorner, D. and Jones, C. B., Formal specification and software development, Prentice-Hall, 1982.

[A5] Hopcroft, J. E. and Ullman, J. D., Introduction to automata theory, languages, and computation, Addison-Wesley, 1979.

[A6] Plotkin, G. D., A structural approach to operational semantics, TR Aarhus Univ. Dept. Computer Science FN-19 (1981).

钱宝峰 译　陶仁骥,仲萃豪 校

凹算子与凸算子 [concave and convex operators; вогнутый и выпуклый операторы]

半序空间中的非线性算子,类似于一个实变量的凹函数与凸函数.

一个 Banach 空间中的在某个锥 K 上是正的非线性算子 A,称为凹的 (concave) (更确切地,在 K 上 u_0 凹的),如果

1) 对任何的非零元 $x \in K$,下面的不等式成立:

$$\alpha(x)u_0 \leqslant Ax \leqslant \beta(x)u_0,$$

这里 u_0 是 K 的某个固定的非零元,$\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是正的纯量函数;

2) 对每个使得

$$\alpha_1(x)u_0 \leqslant x \leqslant \beta_1(x)u_0,\quad \alpha_1, \beta_1 > 0,$$

成立的 $x \in K$,下面的关系成立:

$$A(tx) \geqslant (1+\eta(x,t))tA(x),\quad 0<t<1, \qquad (*)$$

这里 $\eta(x,t)>0$.

类似地,一个算子 A 称为凸的 (convex) (更确切地,在 K 上 u_0 凸的),如果条件 1) 与 2) 满足,但不等式 (*) 用反向不等号代替,并且函数 $\eta(x,t)<0$.

一个典型的例子是 Урысон 积分算子

$$A[x(t)] = \int_G k(t, s, x(s))\,ds,$$

它的凹性与凸性分别由纯量函数 $k(t,s,u)$ 关于变量 u 的凹性与凸性所确定. 一个算子的凹性意味着它仅仅包含"弱"的非线性 —— 随着锥中的元素的范数增加,算子的值"慢慢地"增加. 一般说来,一个算子的凸性意味着,它包含"强"的非线性. 由于这个理由,包含凹算子的方程在许多方面不同于包含凸算子的方程;前者的性质类似于相应的纯量方程,而不同于后者,后者关于正解的唯一性定理是不成立的.

参考文献

[1] Красносельский, М. А., Геометрические методы нелинейного анализа, М., 1975 (英译本: Krasnosel'skil, M. A. and Zabreiko, P. P., Geometric methods of nonlinear analysis, Springer, 1983).

М. И. Войцеховский 撰　李炳仁 译　王声望 校

凹函数 [concave function; вогнутая функция]

与凸函数 (实变量的) (convex function (of a real variable)) 符号相反的函数.

集中函数 [concentration function; концентрации функция], 随机变量 X 的

对所有非负实数 l 和随机变量 X 依下述公式定义的函数 $Q(l, X)$:

$$Q(l,X) = \sup_{-\infty<x<\infty} \mathsf{P}\{x \leqslant X \leqslant x+l\}.$$

集中函数 $Q(l,X)$ 是非负、半加性、且对 $l \geqslant 0$ 单增的函数,它是右连续的,且使

$$\lim_{l\to\infty} Q(l,X) = 1.$$

反之,任一具备这些性质的函数都可作为某个随机变量的集中函数.

集中函数是随机变量值的散布程度的一个方便的刻画,尤其在独立随机变量求和的情形,可作为散布度增加的数量表示. 在给定分项的集中度的情况下,其和的集中度的第一个绝对的 (即只包含绝对常数的) 估计,由 А. Н. Колмогоров ([4]) 发展 P. Lévy ([2]) 的方法而得到. 这个结果随后又有所加强 (见 [5]),得到如下的结论,它包含所有以前的结果作为特例:

$$Q(l,S) \leqslant Cl\left\{\sum_{i=1}^{n} l_i^2[1-Q(l_i,X_i)]\right\}^{-1/2},$$

其中

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

$X_1, \cdots, X_n$ 是一族独立的随机变量，$l \geqslant l_i\ (i=1, \cdots, n)$，$C$ 是一绝对常数．有两种类型的估计特别受到重视：$Q(l, S)$ 的局部型估计（见[6]），及 $Q(l, S)$ 的积分型估计（见[7]）．

与集中函数关系密切的散布度的一个对偶刻画，是随机变量 X 的散布函数（scattering function）：

$$D(q, X) = \inf\{l: Q(l, X) \geqslant q\},$$

其中 $0 \leqslant q \leqslant 1$．联系着随机变量 X 的集中函数与特征函数 $f(t)$，有如下的不等式（见[8]）：

$$Q(l, X) \leqslant \left(\frac{96}{95}\right)^2 \max\left(l, \frac{1}{a}\right) \int_{|t|<a} |f(t)|\, dt.$$

还存在不等式

$$Q(l, X_1 + X_2) \leqslant Q(l, X_i), \quad i = 1, 2,$$

其中 X_1 与 X_2 是独立随机变量．已经尝试将有关集中函数的某些结果推广到独立随机向量求和的情形（见[9]）．

参考文献

[1] Doeblin, W. and Lévy, P., Calcul des probabilités. Sur les sommes de variables aléatoires indépendantes à dispersions bornées inférieurement, *C. R. Acad. Sci.*, **202** (1936), 2027－2029.

[2] Lévy, P., Théorie de l'addition des variables aléatoires, Gauthier - Villars, 1937.

[3] Doeblin, W., Sur les sommes d'un grand nombre de variables aléatoires indépendantes, *Bull. Sci. Math.*, **63** (1939), 23－64.

[4] Kolmogorov, A., Sur les propriétés des fonctions de concentration de M. P. Lévy, *Ann. Inst. H. Poincaré*, **16** (1958－1960), 27－34.

[5] Рогозин, Б. А.,《Теория вероят. и ее примен.》, **6** (1961), 1, 103－108.

[6] Kesten, H., A sharper form of the Doeblin - Lévy-Kolmogorov - Rogozin inequality for concentration functions, *Math. Scand.*, **25** (1969), 133－144.

[7] Рогозин, Б. А.,《Докл. АН СССР》, **211** (1973), 1067－1070.

[8] Петров, В. В., Суммы независимых случайных величин, М., 1972（英译本：Petrov, V. V., Sums of independent random variables, Springer, 1975）.

[9] Esseen, C. G., On the concentration function of a sum of independent random variables, *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und Verw. Geb.*, **9** (1968), 290－308.

Б. А. Рогозин 撰　潘一民 译

蚌线 [conchoid; конхоида]，曲线的

使给定的平面曲线的每一点的位置向量增加或减少一个长度为 l（常量）的线段而得到的平面曲线．如果给定的曲线在极坐标中的方程是 $\rho = f(\varphi)$，则其蚌线的方程的形式为 $\rho = f(\varphi) \pm l$．例如，直线的蚌线称为 **Nicomedes 蚌线**（Nicomedes conchoid）；圆的蚌线称为 **Pascal 蜗线**（Pascal limaçon）．

Д. Д. Соколов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Lawrence, J. D., A catalog of special plane curves, Dover, reprint, 1972.

张鸿林 译

集合的凝聚点 [condensation point of a set; сгущения точка]

见**集合的凝聚点**（condensation point of a set）；**集合的极限点**（limit point of a set）；**聚点**（accumulation point）．

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 上面提到的三个概念有明显的区别．如果 A 是拓扑空间 X 的子集，x 是 X 的点，那么 x 为 A 的聚点（accumulation point），当且仅当 x 的每个邻域都与 $A \setminus \{x\}$ 相交；它是 A 的凝聚点（condensation point），当且仅当它的每个邻域包含 A 的不可数个点．

极限点这个术语其意义有点含糊．如果 x 的每个邻域都包含 A 的无穷多个点，可以称 x 为 A 的极限点（limit point），但这不是标准的说法．有时人们称 x 为网的极限点（见**网（拓扑空间中集合的）**（net (of sets in a topological space)）），如果该网的某个子集收敛于 x．但是，在这种情况下，大多数人还是称 x 为聚点（cluster point）．

当 X 为 T_1 空间时，集合 $A \subset X$ 的极限点的概念和 A 的聚点的概念一致，因此人们就用"聚点"这个词．

许依群、徐定宥、罗嵩龄 译

凝聚点 [condensation point; конденсации точка]，Euclid 空间 E^n 中的集合 M 的

空间 E^n 中的一点，它的任意邻域都含有集合 M 的不可数多个点．由一个集合的凝聚点所组成的集合必定是闭的；如果它是非空的，则它必定是完全的，且具有连续统基数．凝聚点的概念可以推广到任意拓扑空间．

Б. А. Ефимов 撰

【补注】 直接推广到任意空间：点 x 是拓扑空间中的（集合 M 的）凝聚点，如果 x 的每个邻域（和 M 的交）都是不可数集（亦见[A1]）．

参考文献

[A1] Arkhangel'skii, A. V. and Ponomarev, V. I., Fundamentals of general topology, problems and exercises, Reidel, 1984（译自俄文）.

方嘉琳 译

凝聚算子 [condensing operator; уплотняющий оператор]

一个算子 U，一般是非线性的，定义于赋范向量空间 X 中的一个集合 M 的所有子集组成的集合 $\mathfrak{M}$ 上，取值于赋范向量空间 Y 中，使得对于任何的非紧集 $A\in\mathfrak{M}$，$\psi_Y[U(A)]$——集合 $U(A)(\subset Y)$ 的非紧性测度——小于非紧性测度 $\psi_X(A)$. 这里，非紧性测度在两种情形中可能是相同的或不同的. 例如，作为 ψ_X 与 ψ_Y，我们可取非紧性的 Kuratowski 测度：$\alpha(A)=\inf\{d>0: A$ 可以分解为有限多个直径小于 d 的子集$\}$.

对于连续的凝聚算子，全连续算子理论的许多构造与事实能够保留下来，例如，压缩向量场的旋转，压缩算子的不动点原理，等等.

参考文献

[1] Садовский, Б. Н.,《Успехи матем. наук》, **27** (1972), 1, 81－146.

[2] Kuratowski, C., Sur les espaces complets, *Fund. Math.*, **15** (1930), 301－309.

В. И. Соболев 撰　李炳仁 译

条件收敛性 [conditional convergence; условная сходимость]，级数的

级数的下述性质：当把给定的级数的各项按一定方式重新排列以后所得到的级数是收敛的. 数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (*)$$

是无条件收敛的(unconditionally convergent)，如果级数(*)本身以及把它的各项重新排列后所得到的级数都是收敛的，并且这些级数之和都相同；换句话说，无条件收敛的级数之和与其各项的次序无关. 如果级数(*)收敛，但不是无条件收敛，则称为条件收敛的(conditionally convergent). 为使级数(*)是条件收敛的，其必要和充分条件为：它是收敛的，但不是绝对收敛的，即 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|=+\infty$.

如果级数(*)的项是实数，用 $u_1^+, u_2^+, \cdots, u_n^+, \cdots$ 表示它的非负项，用 $-u_1^-, -u_2^-, \cdots, -u_n^-, \cdots$ 表示它的负项，则级数(*)是条件收敛的，当且仅当两个级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^+$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^-$ 是发散的(这里，级数中各项的次序无关紧要).

如果实数项级数(*)是条件收敛的，并且设 $-\infty\leqslant\alpha<\beta\leqslant+\infty$，则存在由级数(*)的各项重新排列而得到的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^*$，使得其部分和序列 $\{s_n^*\}$ 具有如下性质：

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} s_n^* = \alpha, \quad \overline{\lim}_{n\to\infty} s_n^* = \beta$$

(这是 **Riemann 定理**(Riemann theorem)的推广).

两个条件收敛的级数之积，与对这两个级数逐项相乘的结果进行求和的次序有关.

级数的条件收敛和无条件收敛的概念可以推广到某个赋范向量空间 X 中的级数的情况. 如果 X 是有限维空间，则同数项级数的情况类似，收敛的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(u_n\in X, n=1,2,\cdots)$ 是条件收敛的，当且仅当级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\|u_n\|_x$ 是发散的. 然而，如果 X 是无限维空间，则存在无条件收敛的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，使得 $\sum_{n=1}^{\infty}\|u_n\|_x=+\infty$.

Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】 关于由抽象空间的元素构成的级数的收敛性和发散性，一种很有价值的参考文献是 [A1].

参考文献

[A1] Lindenstrauss, J. and Tafarazzi, L., Classical Banach spaces, 1, Sequence spaces, Springer, 1977.

[A2] Rudin, W., Principles of mathematical analysis, McGraw-Hill, 1976 (中译本：W. 卢丁，数学分析原理，人民教育出版社，1979).

张鸿林 译　蒋正新 校

条件密度 [conditional density; условная плотность]

条件分布(conditional distribution)的密度. 设 $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ 是一个概率空间，$\mathfrak{B}$ 是实轴上 Borel 集的 σ 代数，$\mathfrak{F}$ 是 $\mathscr{A}$ 的一个子 σ 代数，再设

$$Q(\omega, B) = \mathrm{P}\{X\in B \mid \mathfrak{F}\}, \quad \omega\in\Omega, \quad B\in\mathfrak{B},$$

是 X 关于 $\mathfrak{F}$ 的条件分布，以及

$$F_X(x \mid \mathfrak{F}) = Q(\omega, (-\infty, x))$$

是 X 关于 $\mathfrak{F}$ 的条件分布函数. 如果

$$F_X(x \mid \mathfrak{F}) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t \mid \mathfrak{F})\,dt,$$

那么 $f_X(x \mid \mathfrak{F})$ 称为 X 的分布关于 σ 代数 $\mathfrak{F}$ 的条件密度.

如果 X 和 Y 是随机变量，$f_Y(y)$ 是 Y 的分布的密度，且 $f_{X,Y}(x, y)$ 是 X 和 Y 的联合分布密度，那么

$$f_X(x \mid Y=y) = \frac{1}{f_Y(y)} f_{X,Y}(x,y)$$

定义了随机变量 X 的分布对 Y 的使得 $f_Y(y)\neq 0$ 的固定值 y 的条件密度.

参考文献

[1] Прохоров, Ю. В., Розанов, Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1973 (英译本：Prohorov, Yu. V. and Rozanov, Yu. A., Probability theory, Springer, 1969).

В. Г. Ушаков 撰　陈培德 译

条件分布 [conditional distribution; условное распределение]

基本事件和 Borel 集的函数，对每一个固定的基本事件，它是一个**概率分布**(probability distribution)，而对每一个固定的 Borel 集，它是**条件概率**(conditional probability).

设 $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ 是一个概率空间，$\mathfrak{B}$ 是实轴上 Borel 集的 σ 代数，X 是定义在 $(\Omega, \mathscr{A})$ 上的一个随机变量，而 $\mathfrak{F}$ 是 $\mathscr{A}$ 的一个子 σ 代数．一个定义在 $\Omega\times\mathfrak{B}$ 上的函数 $Q(\omega, B)$ 称为随机变量 X 关于 σ 代数 $\mathfrak{F}$ 的一个（正则）条件分布（(regular) conditional distribution），如果下述条件成立：

a) 对固定的 $B\in\mathfrak{B}$，函数 $Q(\omega, B)$ 是 $\mathfrak{F}$ 可测的；

b) 函数 $Q(\omega, B)$ 以概率 1 对固定的 ω 是 $\mathfrak{B}$ 上的一个概率测度；

c) 对任意的 $F\in\mathfrak{F}$

$$\int_F Q(\omega, B)\mathrm{P}(d\omega) = \mathrm{P}\{(X\in B)\cap F\}.$$

类似地可以定义在一个任意的可测空间 $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$ 中取值的随机元 $\mathfrak{S}$ 的条件分布．如果 $\mathfrak{X}$ 是一个完全的可分距离空间，而 $\mathfrak{B}$ 是 Borel 集的 σ 代数，那么随机元 $\mathfrak{S}$ 关于任何 σ 代数 $\mathfrak{F}(\mathfrak{F}\subset\mathscr{A})$ 的条件分布存在．

函数 $F_X(x\,|\,\mathfrak{F}) = Q(\omega, (-\infty, x])$ 称为随机变量 X 关于 σ 代数 $\mathfrak{F}$ 的条件分布函数（conditional distribution function）．

一个随机变量 X 关于另一个随机变量 Y 的条件分布（条件分布函数）定义为 X 关于 Y 生成 σ 代数的条件分布（条件分布函数）．

随机变量 X 关于 Y 的条件分布函数 $F_X(x\,|\,Y)$ 是 Y 的一个 Borel 函数；对 $Y=y$，它的值 $F_X(x\,|\,Y=y)$ 称为 X 对 Y 的一个固定值的条件分布函数．如果 Y 有密度 $f_Y(y)$，那么

$$F_X(x\,|\,Y=y) = \frac{1}{f_Y(y)}\frac{\partial}{\partial y}F_{X,Y}(x, y),$$

其中 $F_{X,Y}(x, y)$ 是 X 和 Y 的联合分布函数．

参考文献

[1] Прохоров, Ю. В., Розанов, Ю. А., Теория вероятностей, изд., М., 1973 (英译本：Prohorov, Yu. V. and Rozanov, Yu. A., Probability theory, Springer, 1969).

[2] Loève, M., Probability theory, Princton Univ. Press, 1963.

[3] Гихман, И. И., Скороход, А. В., Теория случайных процессов, т. 1, М., 1971 (中译本：И. И. 基赫曼，А. В. 斯科罗霍德，随机过程论，第一卷，科学出版社，1986).

В. Г. Ушаков 撰

【补注】 条件分布的另一定义是正则事件（regular event）和 **Borel 集**（Borel set）的函数 $f(\omega, B)$ 满足下述条件：对固定的 ω，$f(\omega, \cdot)$ 是一个**概率测度**（probability measure），而对固定的 B，$f(\cdot, B)$ 是一个**可测函数**（measurable function）．

参考文献

[A1] Breiman, L., Probability, Addison-Wesley, 1968.

陈培德 译

条件极值［**conditional extremum；условный экстремум**］

一个给定函数（或泛函），在其他一些确定函数（泛函）取值于给定的容许集的条件下所达到的极小或极大值．如果不存在上述关于独立变量（函数）范围的限制，则称为无条件极值（unconditional extremum）．

条件极值的经典问题是，求多元函数

$$f(x_1, \dots, x_n) \tag{1}$$

在假定其他函数取给定值

$$g_i(x_1, \dots, x_n) = c_i,\quad i=1, \dots, m,\quad m<n \tag{2}$$

的条件下的极小值．在这个问题中，附加条件（2）中向量函数 $g=(g_1, \cdots, g_m)$ 的函数值所成的集合 G，仅含有 m 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^m$ 的一个点 $c=(c_1, \cdots, c_m)$．

假如在条件（2）中，除了等式以外，还有若干不等式，例如

$$\left.\begin{aligned}
&g_i(x_1, \dots, x_n) = c_i, && i=1, \dots, m_1,\ m_1<n,\\
&g_i(x_1, \dots, x_n) \leqslant c_i, && i=m_1+1, \dots, m_2,\\
&g_i(x_1, \dots, x_n) \geqslant c_i, && i=m_2+1, \dots, m,
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

那么这个经典问题便化为**非线性规划**（non-linear programming）中的一个问题．在问题（1），（3）中，向量函数 g 的容许值所成之集合 G 由一个曲边多面体组成，（一般）含在由（3）的前面 m_1 个等式所定义的某 $(n-m_1)$ 维超曲面内（$m_1<n$）．而这个曲边多面体的边界面，由（3）中的 $n-m_1$ 个不等式所定义．

上述条件极限值问题（1），（3）的一个特殊情形是**线性规划**（linear programming）问题，此时函数 f 以及 g_i 均关于 $x_1, \cdots, x_n$ 为线性的．对于线性规划问题，限制独立变量范围的向量函数 g 的容许值所成的集合 G，定义了一个凸多面体，它含在由（3）中 m_1 个等式条件所定义的 $(n-m_1)$ 维的某个超曲面内．

类似地，应用上有意义的关于优化泛函的大量问题都与条件极值有关（见**等周问题**（isoperimetric problem）；**Bolza 问题**（Bolza problem）；**Lagrange 问题**（Lagrange problem）；**Mayer 问题**（Mayer problem））．这样，如同数学规划一样，变分学以及最优控制中的基本问题都是条件极值问题．

为了解条件极值问题，特别是考虑某些涉及条件极值的理论问题时，应用未定的 **Lagrange 乘子**（Lagrange multipliers）是有益的，它把问题化为无条件极值问题，从而简化了寻求优化必要条件的工作．使用 Lagrange 乘子是解条件极值问题的许多经典方法的基础．

参考文献

[1] Hadley, G., Nonlinear and dynamic programming, Addison-Wesley, 1964.

[2] Bliss, G. A., Lectures on the calculus of variations,

Chicago Univ. Press, 1947.
[3] Понтрягин, Л. С. [и др.], Математическая теория оптимальных процессов, 2 изд., М., 1969.

И. Б. Вапнярский 撰 王斯雷 译

条件数学期望 [conditional mathematical expectation; условное математическое ожидание]，条件期望 (conditional expectation)

对于某个 σ 代数，用来刻画随机变量的基本事件函数．设 $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ 是一个概率空间，X 是定义在这个空间上，具有有限期望的一个实值随机变量，再设 $\mathfrak{B}$ 是一个 σ 代数，$\mathfrak{B} \subseteq \mathscr{A}$．$X$ 关于 $\mathfrak{B}$ 的条件期望理解为关于 $\mathfrak{B}$ 可测的一个随机变量 $\mathrm{E}(X|\mathfrak{B})$，且对每一个 $B \in \mathfrak{B}$，

$$\int_B X \mathrm{P}(d\omega) = \int_B \mathrm{E}(X|\mathfrak{B}) \mathrm{P}(d\omega) \qquad (*)$$

成立．如果 X 的期望是无穷的(但有定义)，即数 $\mathrm{E}X^+ = \mathrm{E}\max(0, x)$ 和 $\mathrm{E}X^- = -\mathrm{E}\min(0, X)$ 中只有一个是有限的，那么由 $(*)$ 所定义的条件期望仍有意义，但 $\mathrm{E}(X|\mathfrak{B})$ 可以取无穷值．

条件期望唯一确定到等价性．**数学期望** (mathematical expectation) 是一个数，与此相反，条件期望表现为一个函数(随机变量)．

条件期望的性质与数学期望的性质相似：

1) $\mathrm{E}(X_1|\mathfrak{B}) \leqslant \mathrm{E}(X_2|\mathfrak{B})$，如果 $X_1(\omega) \leqslant X_2(\omega)$ 几乎必然成立；

2) $\mathrm{E}(c|\mathfrak{B}) = c$ 对每一个实数 c 成立；

3) $\mathrm{E}(\alpha X_1 + \beta X_2|\mathfrak{B}) = \alpha\mathrm{E}(X_1|\mathfrak{B}) + \beta\mathrm{E}(X_2|\mathfrak{B})$ 对任意的实数 α 和 β 成立；

4) $|\mathrm{E}(X|\mathfrak{B})| \leqslant \mathrm{E}(|X||\mathfrak{B})$；

5) $g(\mathrm{E}(X|\mathfrak{B})) \leqslant \mathrm{E}(g(X)|\mathfrak{B})$ 对每一个凸函数 g 成立．

进一步，下列性质是条件期望特有的：

6) 如果 $\mathfrak{B} = \{\phi, \Omega\}$ 是平凡 σ 代数，那么 $\mathrm{E}(X|\mathfrak{B}) = \mathrm{E}X$；

7) $\mathrm{E}(X|\mathscr{A}) = X$；

8) $\mathrm{E}(\mathrm{E}(X|\mathfrak{B})) = \mathrm{E}X$；

9) 如果 X 独立于 $\mathfrak{B}$，那么 $\mathrm{E}(X|\mathfrak{B}) = \mathrm{E}X$；

10) 如果 Y 关于 $\mathfrak{B}$ 可测，那么 $\mathrm{E}(XY|\mathfrak{B}) = Y\mathrm{E}(X|\mathfrak{B})$．

在条件数学期望符号下的收敛性有一条定理：如果 $X_1, X_2, \cdots$ 是一个随机变量序列，$|X_n| \leqslant Y (n = 1, 2, \cdots)$，$\mathrm{E}Y < \infty$ 且 $X_n \to X$ 几乎必然成立，那么几乎必然地，$\mathrm{E}(X_n|\mathfrak{B}) \to \mathrm{E}(X|\mathfrak{B})$．

随机变量 X 关于随机变量 Y 的条件期望定义为 X 关于 Y 生成的 σ 代数的条件期望．

条件期望的一个特例是**条件概率** (conditional probability)．

参考文献

[1] Колмогоров, А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974 (中译本：A. H. 柯尔莫哥洛夫，概率论基本概念，商务印书馆，1952).
[2] Прохоров, Ю. В., Розанов, Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1973 (英译本：Prohorov, Yu. V. and Rozanov, Yu. A., Probability theory, Springer, 1969).
[3] Neveu, J. Bases mathématiques du calcul des probabilités, Masson, 1970.
[4] Loève, M., Probability theory, Princton Univ. Press, 1963 (中译本：M. 洛易甫，概率论(上册)，科学出版社，1966).

Н. Г. Ушаков 撰

参考文献

[A1] Ash, R. B., Real analysis and Probability, Acad. Press, 1972.
[A2] Neveu, J., Discrete-parameter martingales, North-Holland, 1975 (译自法文).

陈培德 译

条件概率 [conditional probability; условная вероятность]

1) 一事件对另一事件的条件概率是联系这两事件的一特征，若 A 和 B 都是事件而 $\mathrm{P}(B) > 0$，则事件 A 对 B (或在 B 的条件下，或关于 B) 的条件概率 $\mathrm{P}(A|B)$ 由等式

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$$

定义．条件概率 $\mathrm{P}(A|B)$ 可视为在 B 发生的条件下，事件 A 实现的概率．对独立事件 A 和 B，条件概率 $\mathrm{P}(A|B)$ 等于其无条件概率 $\mathrm{P}(A)$．

关于事件的条件和无条件概率的联系，见 **Bayes 公式** (Bayes formula) 和**完全概率公式** (complete probability formula)．

2) 一事件 A 对一 σ 代数 $\mathfrak{B}$ 的条件概率为一随机变量 $\mathrm{P}(A|\mathfrak{B})$，它对 $\mathfrak{B}$ 可测，且对任何 $B \in \mathfrak{B}$ 有

$$\int_B \mathrm{P}(A|\mathfrak{B}) \mathrm{P}(d\omega) = \mathrm{P}(A \cap B)$$

对一 σ 代数的条件概率确定到等价类．

如果 σ 代数由可数个正概率互斥事件 $B_1, B_2, \cdots$ 所生成，且 $B_1, B_2, \cdots$ 的并为全空间 Ω，则

$$\mathrm{P}(A|\mathfrak{B}) = \mathrm{P}(A|B_k)\text{，对 } \omega \in B_k,\ k = 1, 2, \ldots.$$

一事件 A 对一 σ 代数 $\mathfrak{B}$ 的条件概率可定义为 A 的指示函数的**条件数学期望** (conditional mathematical expectation) $\mathrm{E}(I_A|\mathfrak{B})$．

设 $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ 为概率空间，$\mathfrak{B}$ 为 $\mathscr{A}$ 的子 σ 代数．条件概率 $\mathrm{P}(A|\mathfrak{B})$ 称为是正则的 (regular)，如果存在函数 $p(\omega, A)$，$\omega \in \Omega$，$A \in \mathscr{A}$，使

a) 对固定的 ω，$p(\omega, A)$ 为 σ 代数 $\mathscr{A}$ 上的概率测度．

b) $P(A|\mathfrak{B})=p(\omega, A)$以概率1成立.

对正则条件概率来说，条件数学期望可表为积分，其中条件概率起着测度的作用.对随机变量X的条件概率定义为对由X生成的σ代数的条件概率。

参考文献

[1] Колмогоров, А.Н.,Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974.

[2] Прохоров, Ю. В., Розанов, Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1973.

[3] Loève, M., Probability theory, Princeton Univ. Press. 1963.

В. Г. Ушаков 撰 陈希孺 译

条件稳定性 [conditional stability；условная устойчивость]

一个点关于映射族

$$\{f_t\}_{f\in G^+}: E \to E \quad (1)$$

的条件稳定性是：映射族$\{f_t|_V\}_{t\in G^+}$在这一点的同等连续性;这里f_t是限于嵌入E(具有在V上的诱导度量)中某流形V的映射，G^+是非负实数或整数的集合：$G=\mathbf{R}$或$G=\mathbf{Z}$.

一个点关于映射的条件稳定性定义为关于这一映射非负幂族的条件稳定性.一个点关于一个动力系统f^t的条件稳定性是这一点关于映射族$\{f^t\}_{t\in G^+}$的条件稳定性. 在$t_0+\mathbf{Z}^+$上给出的方程

$$x(t+1) = g_t x(t)$$

解的条件稳定性，是点$x_0(t_0)$关于映射族

$$\left\{f_t \overset{\text{def}}{=} g_{t_0+t}\cdots g_{t_0+1}\, g_{t_0}\right\}_{t\in\mathbf{Z}^+}$$

的条件稳定性.

在$t_0+\mathbf{R}^+$上给定的微分方程

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (2)$$

解$x_0(\cdot)$的条件稳定性，是点$x_0(t_0)$关于映射族$\{X(t_0+t, t_0)\}_{t\in\mathbf{R}^+}$的条件稳定性，其中$X(\theta, \tau)$是这一方程的**Cauchy算子** (Cauchy operator). 在$t_0+\mathbf{R}^+$上给定的m阶微分方程

$$y^{(m)} = g(y, \dot{y}, \ldots, y^{(m-1)}, t)$$

解$y(\cdot)$的条件稳定性，是形如(2)的相应的一阶微分方程，在$t_0+\mathbf{R}^+$上给定的解$x(\cdot)=(y(\cdot), \dot{y}(\cdot), \cdots, y^{(m-1)}(\cdot))$的条件稳定性，其中

$$x = (x_1, \ldots, x_m),$$

$$f(x, t) = (x_2, \ldots, x_m, g(x_1, \ldots, x_m, t)).$$

下面的定义1)－5)是这些具体例子及有关记号.

1. 给定一个微分方程(2)，其中E是一个赋范n维向量空间，且$x\in E$. 这个方程的解$x_0(\cdot)$: $t_0+\mathbf{R}^+\to E$称为指数为$k\in\{0, \cdots, n\}$的条件稳定的(conditionally stable)，如果有一个嵌入E(考虑为C^m类的流形)的k维圆盘D^k，它含点$x_0(t_0)$，并且有以下性质：对于每一个$\varepsilon>0$，都有一个$\delta>0$使得对每个满足不等式$|x-x_0(t_0)|<\delta$的$x\in D^k$，满足初始条件$x(t_0)=x$的同一方程的解$x(\cdot)$，在$t_0+\mathbf{R}^+$上是唯一确定的，并且对每个$t\in t_0+\mathbf{R}^+$满足不等式$|x(t)-x_0(t)|<\varepsilon$.如果具有给定性质的圆盘$D^k$可这样选择，使得对于从这个圆盘中出发的(即$x(t_0)\in D^k$)同一方程的每个解

$$\lim_{t\to+\infty} |x(t)-x_0(t)| = 0$$

(相应地，

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln |x(t)-x_0(t)| < 0;$$

这里及别处都约定$\ln 0=-\infty$)，那么解$x_0(t)$称为(指数为k的)渐近(相应地，指数)条件稳定的(asymptotically (exponentially) conditionally stable).

如果在$\mathbf{R}^n$(或$\mathbf{C}^n$)中选取适当的模，那么方程(2)($x\in\mathbf{R}^n$或$x\in\mathbf{C}^n$)的解称为指数为k的条件(渐近，指数条件)稳定的(conditionally (asymptotically, exponentially conditionally) stable). 解的这一性质不依赖于模的选择.

2. 给定n维Riemann流形V^n(在它上面的距离函数写成$d(\cdot, \cdot)$)，点$x_0\in V^n$称为(指数为$k\in\{0, \cdots, n\}$)关于映射$f: V^n\to V^n$条件稳定的(conditionally stable)，如果存在一个嵌在V^n中的(通常是光滑的)k维圆盘D^k，它含点x_0并具有以下性质：对于每个$\varepsilon>0$，都存在一个$\delta>0$使得对每个满足不等式$d(x, x_0)<\delta$的$x\in D^k$，不等式$d(f^t x, f^t x_0)<\varepsilon$对所有的$t\in N$成立. 如果具有上述性质的圆盘$D^k$可以这样选择，使得对每个$x\in D^k$

$$d(f^t x, f^t x_0)\to 0, \text{当} t\to+\infty \text{时}$$

(相应地，

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln d(f^t x, f^t x_0) < 0)$$

那么点x_0称为(指数为k)关于映射f的渐近(相应地，指数)条件稳定的(asymptotically (exponentially) conditionally stable).

设V^n为一紧可微流形. 如果在V^n上选用适当的Riemann矩阵，那么一个点$x_0\in V^n$称为指数为k关于映射$f: V^n\to V^n$条件稳定的(渐近，指数条件稳定的)(conditionally stable (asymptotically, exponentially conditionally stable)). x_0的这一性质不依赖于在V^n上对Riemann矩阵的选择.

3. 考虑在一个n维Riemann(或Finsler,见**Finsler 几何学**(Finsler geometry))流形上的微分方程(2),它上面的距离函数用$d(\cdot,\cdot)$表示.这一方程的解$x_0(\cdot)$: $t_0+R^+\to V^n$称为(指数为k)条件稳定的(conditionally stable),如果有一个嵌入V^n(考虑为一个C^m类的流形,这里通常$m\geqslant 1$)中的k维圆盘D^k,它含点$x_0(t_0)$并具有以下性质:对于每个$\varepsilon>0$,存在一个$\delta>0$,使得对于每个满足不等式$d(x,x_0(t_0))<\delta$的$x\in D^k$,满足初始条件$x(t_0)=x$的同一方程的解$x(\cdot)$,在t_0+R^+上是唯一确定的,并且对每个$t\in t_0+\mathbf{R}^+$满足不等式$d(x(t),x_0(t))<\varepsilon$.如果具有以上性质的圆盘$D^k$可以这样取,使得对于从这个圆盘中出发的(即$x(t_0)\in D^k$)同一方程的每个解

$$d(x(t),x_0(t))\to 0,\text{当 } t\to+\infty \text{ 时}$$

(相应地,

$$\left.\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln d(x(t),x_0(t))<0\right)$$

那么解$x_0(\cdot)$就称为(指数为k)渐近(相应地,指数)条件稳定的(asymptotically (exponentially) conditionally stable).

4. 设V^n为C^m类的n维流形,U为它的开子集.假设点$x_0\in U$在C^m类的一个映射族$f_t:U\to V^n$下不变($t\in G^+$,其中G是$\mathbf{R}$或$\mathbf{Z}$).这个不动点x_0称为(指数为k)关于映射族$\{f_t\}_{t\in G^+}$条件稳定的(conditionally stable),如果有一个光滑嵌入(用C^m类嵌入)在V^n中的k维圆盘D^k,使得对于x_0的每个邻域$V\subset V^n$,有同一点的邻域W,对每个$t\in G^+$都有$f_t(D^k\cap W)\subset V$.如果具有这一性质的圆盘D^k可以这样取,使得对每个$x\in D^k$, $\lim_{t\to+\infty}f_tx=x_0$,那么这个不动点$x_0$称为(指数为$k$)关于映射族$\{f_t\}_{t\in G^+}$渐近条件稳定的(asymptotically conditionally stable).

5. 一个任意阶方程$y^{(m)}=g(y,\dot y,\cdots,y^{(m-1)},t)$,其解$y_0(\cdot)$的(指数为$k$)条件(条件渐近,条件指数)稳定性定义为相应的一阶方程(2)的解$x_0(\cdot)=(y_0(\cdot),\dot y_0(\cdot),\cdots,y_0^{(m-1)}(\cdot))$(指数为$k$)条件(渐近,条件指数)稳定性,其中

$$x=(x_1,\ldots,x_m),$$

$$f(x,t)=(x_2,\ldots,x_m,g(x_1,\ldots,x_m,t)).$$

有时(例如见[3])在定义条件稳定性时要求指数k为非零:具有零指数的条件稳定性总是成立的.指数为n(相空间的维数)的条件稳定性(条件渐近,条件指数稳定性)与**Ляпунов 稳定性**(Lyapunov stability)(相应地,渐近,指数稳定性)相同.

对条件稳定性下的平衡位置已进行了研究.假定在点$x_0\in\mathbf{R}^n$的一个邻域内给定自治微分方程

$$\dot x=f(x),\tag{3}$$

其右边是连续可微的,且在点x_0为零.如果在复平面的左半开平面上,导数df_{x_0}有k个本征值,那么方程(3)的这一不动点是指数为k条件指数稳定的(Ляпунов 条件稳定性定理(Lyapunov's theorem on conditional stability)).例如,摆振动方程$\ddot y+\omega^2\sin y=0$的上平衡位置$y=\pi$, $\dot y=0$是指数为1的指数条件稳定的,因为**变分方程**(variational equations) $\ddot y-\omega^2 y=0$的特征方程$\lambda^2-\omega^2=0$的一个根是负的.

如果导数df_{x_0}的k个本征值落在开单位圆盘内,那么可微映射$f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$的不动点$x_0$是指数为$k$关于$f$指数条件稳定的.周期为$m$的微分映射$f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$的周期点$x_0$是指数为$k$关于$f$条件(渐近条件,指数条件)稳定的,当且仅当它关于$f^m$具有这一特性.

右边$f(x)$光滑,周期为T的自治微分方程(3)的周期解是指数为k(渐近,指数)条件稳定的,当且仅当它在点$t=0$的值是指数为k关于映射$X(T,0)$(相应地,渐近,指数)条件稳定的,这里$X(\theta,\tau)$是方程(3)的Cauchy算子.

O. Perron 的例子(见**Ляпунов 稳定性**(Lyapunov stability))表明,沿着方程(3)的解的变分方程,其Ляпунов 指数k的负值性并不意味着这个解具有指数为k的条件稳定性.但是有以下的定理,它指出作为Perron的例子描述的情况并不是一般的.

1) 设S为Euclide空间E^n的所有微分同胚f的集合,它具有一致连续的导数并满足不等式

$$\sup_{x\in E^n}\max\{\|df_x\|,\|(df_x)^{-1}\|\}<+\infty.$$

对每个微分同胚$j\in S$,用S_j表示满足不等式

$$\sup_{x\in E^n}|fx-jx|<+\infty$$

的微分同胚$f\in S$的集合;在集合S_j上距离函数

$$d(f,g)=\sup_{x\in E^n}(|fx-gx|+\|df_x-dg_x\|)$$

是给定的.

对每一个$j\in S$,有具有以下性质并在$S_j\times E^n$内处处稠密的G_δ型集合D_j:对每个$(f,x)\in D_j$,点x是关于微分同胚f指数条件稳定的,并具有指数

$$\dim\left\{\mathrm{r}\in T_xE^n:\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m}\ln|df^m\mathrm{r}|<0\right\},$$

即具有与变分方程负Ляпунов特征指数相等的指数(见**Ляпунов 特征指数**(Lyapunov characteristic exponent)).

2) 对于在封闭可微流形上给定的动力系统,可用从微分拓扑的观点来看较简单和不变的方法来建立相

似定理．设 V^n 是一封闭可微流形．在 V^n 到 V^n 上的 C^1 类映射的所有微分同胚 f 的集合 S 是用 C^1 拓扑配备的．在空间 $S\times V^n$ 内，存在一个处处稠密的 G_δ 型集合 D，它具有以下特性：对每个 $(f,x)\in D$，点 x 是指数为

$$k(x)=\dim\left\{r\in T_xV^n:\ \overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m}\ln|df^m r|<0\right\}.\quad(4)$$

关于微分同胚 f 指数条件稳定的．

3）对于封闭可微流形 V^n 的每一微分同胚 $f: V^n\to V^n$ 和 V^n 上关于 f 不变的每个概率分布（它的 σ 代数包含所有的 Borel 集合），点 $x\in V^n$ 的集合——它们是指数为(4)关于 f 指数条件稳定的——具有概率 1.

参考文献

[1] Ляпунов, А. М., Собр. соч., т. 2, М.-Л., 1956.

[2] Былов, Б. Ф., Виноград, Р. Э., Гробман, Д. М., Немыцкий, В. В., Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости, М., 1966.

[3] Демидович, Б. П., Лекции по математической теории устойчивости, М., 1967.

[4] Изобов, Н. А., в кн., Итоги науки и техники Математический анализ, т. 12, М., 1974, 71-146.

[5] Песин, Я. Б., 《Успехи матем. наук》, 32 (1977), 4, 55-112.

В. М. Миллионщиков 撰 周芝英 译

条件完全格 [conditionally-complete lattice; условно полная решетка]

每个非空有界子集都有极小上界和极大下界的格．作为条件完全格的一个例子，可取所有实数按通常的序所成的格．　Т. С. Фофанова 撰　戴执中 译

条件周期函数 [conditionally-periodic function; условно периодическая функция]

函数 A 与函数 φ 复合而成的函数 $A\circ\varphi$，其中，$A:T^n\to\mathbf{C}$ 是以 2π 为周期的函数，T^n 是 n 维圆环面；而 $\varphi:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^n$ 是使得 $\dot\varphi=\omega$ 的函数，这里 $\omega=(\omega_1,\cdots,\omega_n)$ 是一个常值向量，其分量关于有理数是线性无关的．由 Fourier 级数的部分和

$$\sum_{i=1}^{n}[A_i\sin(\omega_it+\psi_i)+B_i\cos(\omega_it+\psi_i)],$$

可给出条件周期函数的例子，此时

$$A=A(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)=\sum_{i=1}^{n}[A_i\sin\varphi_i+B_i\cos\varphi_i],$$

$$\varphi=(\varphi_1(t),\ldots,\varphi_n(t))=(\omega_1t+\psi_1,\ldots,\omega_nt+\psi_n).$$

如果一个条件周期函数连续，则它与一个带有周期 $\omega_1,\cdots,\omega_n$ 的**拟周期函数**(quasi-periodic function)相重合．

参考文献

[1] Arnol'd, V. I., Chapitres supplémentaires de la théorie des equations différentielles, MIR, 1980 (译自俄文).

Ю. В. Комленко 撰

【补注】 条件周期函数是殆周期的，见**殆周期函数**(almost-periodic function)．　朱学贤 译　潘文杰 校

条件周期运动 [conditionally-periodic motion; условно периодическое движение]

质点的直线运动，其规律由实际的**条件周期函数**(conditionally-periodic function)所表示．　朱治强 译

特征标的导子 [conductor of a character; кондуктор характера]

与局部域有限扩张的 Galois 群表示的特征标有关的一个整数．设 K 是相对于离散赋值为完备的域，它的剩余类域 k 的特征 $p\geqslant 0$．设 L/K 为 n 次 Galois 扩张，Galois 群为 G，并设它的剩余类域扩张是可分的．设 χ 为 G 的一个有限维复表示的特征标，它的导子 $f(\chi)$ 定义为

$$f(\chi)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{n_i}{n_0}(\chi(1)-\chi(G_i)),$$

其中

$$G_i=\{g\in G: \text{对所有适合 } v_L(x)\geqslant 0 \text{ 的 } x\in L,\ \text{有 } v_L(g(x)-x)\geqslant i+1\},$$

$$n_i=|G_i|,\ \chi(G_i)=n_i^{-1}\sum_{g\in G_i}\chi(g),$$

v_L 为 L 相应的赋值．若 p 不整除 n，则当 $i>0$ 时有 $G_i=\{1\}$，这时 $f(\chi)=\chi(1)-\chi(G_0)$．若 χ 是有理表示 M 的特征标，则 $\chi(G_0)=\dim M^{G_0}$．导子 $f(\chi)$ 是非负整数．

参考文献

[1] Cassels, J. W. S. and Fröhlich, A. (eds.), Algebraic number theory, Acad. Press, 1967.

[2] Artin, E. and Tate, J., Class field theory, Benjamin, 1967.

[3] Serre, J.-P., Local fields, Springer, 1979 (译自法文).

И. В. Долгачев 撰

【补注】 设 $f(\chi)$ 为局部域扩张的 Galois 群的特征标 χ 的导子，理想 $\mathfrak{p}_K^{f(\chi)}$ 也称为 χ 的 Artin 导子(Artin conductor)．对于整体域的扩张也有相应的概念，它是一个所有有限素数的适当的积，见[A1] p.126．在 Artin L 函数(L-function)理论中它有重要的作用．

参考文献

[A1] Neukirch, J., Class field theory, Springer, 1986.
裴定一 译

Abel扩张的导子 [conductor of an Abelian extension]

【补注】 设L/K是Abel扩张，$N_{L/K}C_L$是伊代尔类群C_K中相应的子群(见类域论(class field theory))．Abel扩张的导子(conductor of an Abelian extension)是使束类域$K^{(n)}$能包含L的所有正除子n的最大公因子．

局部域的Abel扩张L/K的导子为$\mathfrak{p}_K^n$，这里$\mathfrak{p}_K$为K(的整数环A_K)的极大理想，n是使$N_{L/K}L^*\subset U_K^n$成立的最小整数，其中$U_K^n=\{x\in A_K: x\equiv 1 \bmod \mathfrak{p}_K^n\}$，$U_K^0=U_K=A_K^*$(这样，当且仅当导子是$A_K^*$时，该Abel扩张是非分歧的)．下述定理给出了Abel扩张导子的局部和整体概念之间的联系：数域的Abel扩张的导子$\mathfrak{f}$等于$\prod_{\mathfrak{p}}\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}$，其中$\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}$是对应的局部扩张$L_{\mathfrak{p}}/K_{\mathfrak{p}}$的导子，当$\mathfrak{p}$为无限素除子时，$\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}=\mathfrak{p}$或1，视$L_{\mathfrak{p}}\neq K_{\mathfrak{p}}$或$L_{\mathfrak{p}}=K_{\mathfrak{p}}$而定．

类域论(class field theory)的导子分歧定理(conductor ramification theorem)说，若$\mathfrak{f}$是类域L/K的导子，则$\mathfrak{f}$不能被在L/K中非分歧的任何素除子整除，而能被在L/K中分歧的任何素除子整除．

若L/K为局部域K的循环扩张，且具有由$\mathrm{Gal}(K^s/K)$的一次特征标χ所定义的有限或代数闭的剩余域，则L/K的导子就是$\mathfrak{p}_K^{f(\chi)}$，其中$f(\chi)$是特征标χ的Artin导子(见特征标的导子(conductor of a character))．这里，K^s是K的可分代数闭包．对于高次特征标尚不知是否也有类似的结论．

参考文献

[A1] Serre, J.-P., Local fields, Springer, 1979 (译自法文).

[A2] Neukirch, J., Class field theory, Springer, 1986
裴定一 译

整闭包的导子 [conductor of an integral closure; кондуктор целого замыкания]

交换整环A的理想，A模$\bar{A}/A$的零化子．这里$\bar{A}$是A在它商域中的整闭包．有时导子被看作$\bar{A}$中的一个理想．如果$\bar{A}$是有限型A模(即，如果A是**几何环**(geometric ring))，A的一个素理想$\mathfrak{P}$包含有导子，当且仅当局部化$A_{\mathfrak{P}}$不是一个整闭局部环．用几何语言说，这就意味着导子确定出由非正规点组成的仿射概形Spec A中的一个闭子概形．

参考文献

[1] Bourbaki, N., Elements of mathematics, Commutative algebra, Addison-Wesley, 1972 (译自法文).

[2] Zariski, O. and Samuel, P., Commutative algebra, I. Springer, 1975.　И. В. Долгачев 撰　冯绪宁 译

锥 [cone; конус]

1) Euclid空间中的锥是一个集合K，它由从某点0，即锥顶(vertex of the cone)发出的半直线组成．K的边界∂K(由称为锥的母线(generators of the cone)的半直线组成)是**锥面**(conical surface)部分，有时也称为锥．最后，K与包含0且被一个不通过0的平面界定的半空间的交常称为锥．在这种情况下，该平面位于锥面内的部分称为锥底(base of the cone)，底和顶点之间的锥面部分称为锥的侧面(lateral surface of the cone)．

如果锥底是圆盘，那么该锥称为是圆的(circular)．如果圆锥的顶点在底面上的正投影是底的中心，则称此圆锥是直的(straight)．通过锥顶且垂直于底的直线称为锥轴(axis of the cone)．它在顶点与底之间的线段是锥的高(height of the cone)．直圆锥的体积等于$\pi R^2h/3$，其中h为高，R为底的半径；其侧面积等于πRl，其中l是一母线在顶点与底之间线段的长度．锥包含于两平行平面之间的部分称为截锥(truncated cone)或圆锥平截头台(conical frustum)．直圆锥在平行于底的两平面之间的平截头台，其体积为$\pi(R^2+r^2+Rr)h/3$，其中R，r是两底的半径，h是高(两底之间的距离)；其侧面积是$\pi(R+r)l$，其中l是一母线线段的长度．

А. Б. Иванов 撰

【补注】 直圆锥也称为回转锥(cone of revolution)．有时也会遇上圆锥平台(frustum of a cone)这个术语以代替截锥或圆锥平截头台．

2) 拓扑空间X(锥底)上的锥是由子空间$X\times\{0\}$收缩于一点W(锥顶(vertex of the cone))而从积$X\times[0,1]$获得的空间CX：

$$CX = (X\times[0,1])/(X\times\{0\}).$$

换言之，CX是常映射$X\to W$的柱(见**柱结构**(cylindrical construction))或恒等映射$\mathrm{id}: X\to X$的锥(见**映射锥结构**(mapping-cone construction))．空间X是可缩的，当且仅当它是X上的每一锥的收缩核(见**拓扑空间的收缩核**(retract of a topological space))．

拓扑空间上锥的概念可推广到范畴论的构架中：具有共同始对象A的任何范畴$\mathfrak{A}$的态射$\alpha_i: A\to A_i$ $(i\in I)$的集合称为一个以A为顶点的态射锥(morphism cone)．对偶地，可以定义态射余锥为具有共同终对象A的态射$\beta_i: A_i\to A$ $(i\in I)$的集合．见[4]，[5]，[6]．

М. И. Войцеховский 撰

3) 映射锥(mapping cone)是通过**映射锥结构**(mapping-cone construction)而与拓扑空间的一连续映射$f: X\to Y$相联系的一拓扑空间．设C_1是嵌入$Y\subset C_f$的锥，C_2是嵌入$C_f\subset C_1$的锥，等等，这里C_f是f的映射锥．于是这样得到的序列

$$X\xrightarrow{f} Y\subset C_f\subset C_1\subset C_2\subset\cdots$$

称为 Puppe 序列(Puppe sequence)，其中 $C_1 \sim SX$，$X_2 \sim SY$，等等，这里 SX(分别地，SY)是 X上(分别地，Y上)的纬垂(suspension).

可以用一个类似的方法定义有点空间的映射的约化映射锥 $\widetilde{C}_f$. 这里，正如对于一个上纤维化，对于任一有点空间 A，Puppe 序列所诱导的同伦类序列

$$[X,A] \leftarrow [Y,A] \leftarrow [C_1,A] \leftarrow [C_2,A] \leftarrow \cdots$$

是正合；其中，从第四项开始所有项都是群，且从第七项开始，都是 Abel 群. 见[4]，[5].

А. Ф. Харшиладзе 撰

4) 实向量空间 E 中的锥是使得对任何 $\lambda>0$，$\lambda K \subset K$ 的集合 $K \subset E$. 若 $0 \in K$，则锥 K 称为尖的(pointed)，且若 K 不包含一维子空间，则称尖锥 K 为突出的(salient). 非突出锥有时称为楔(wedge).

如果一个锥是 E 的一个凸子集，则称此锥为凸的(convex). 因此，E 的一个子集 K 是凸锥，当且仅当对任一 $\lambda>0$，$\lambda K \subset K$，且 $K+K \subset K$. 此时，E 的由凸锥 K 生成的向量子空间与集合 $K-K$ 相同；如果 K 是尖的，那么 $K \cap (-K)$ 是包含于 K 的最大向量子空间，一个尖的凸锥是突出的，当且仅当 $K \cap (-K)=0$.

如果 E 是一有(偏)序向量空间，则正锥(positive cone) $P=\{x: x\in E,\ x\geqslant 0\}$ 是一个突出的尖凸锥. 反之，任何一个这样的凸锥 K 诱导 E 中的一个序关系：$x_1 \geqslant x_2$，如果 $x_1-x_2 \in K$.

一个锥 K 称为是再生的，如果任一元素 $x \in E$ 可表示为 K 中元素的差. 例如，区间[0,1]上的非负连续(或可和)函数的锥是再生的；作用在 Hilbert 空间上的有界自伴算子空间中的正算子的集合也是再生的. 但是，非负非减连续函数的锥则不是再生的.

E 中一个拓扑的存在提供了具有较丰富内容的锥的概念使能获得非平凡的结果. 例如，假若 E 是一个可分的局部凸空间，且 K 是 E 中一个内部非空的突出的尖凸锥(这样的锥称为立体的(solid))，则 E 上的每个在 K 上正的线性型 f 是连续的(如果对于 $x \in K$，$f(x) \geqslant 0$，则称 f 在 K 上是正的)；若 M 是 E 的一个向量子空间，它与 K 的内部有非空的交，且 f 是 M 上的在 $K \cap M$ 上正的线性型，则 E 上存在一个在 K 上正的 f 的延拓线性型 $\widetilde{f}$. 见[1]，[2]，[3].

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 再生锥也称为母锥(generating cone).

5) Banach 空间(Banach spaces)中锥的理论得到了更充分的发展. 设 K 是 Banach 空间 E 中的一个锥，它在 E 中诱导了一个序关系 $\geqslant$. 如果锥是闭的，则对于 E，Archimedes 原理(Archimedea principle)成立：如果 $x \in E$，而数 $\lambda_n>0$ 且 $\lambda_n \to \infty$，又如果存在一点 y 使得对所有的 n，$\lambda_n x \leqslant y$，那么 $x \leqslant 0$. 对于一个立体锥其逆也成立：如果 E 有 Archimed 性质，那么 K 是闭的.

设 K' 是 K 的对偶楔，即 E 上所有正线性连续函数的类(若对任何 $x \in K$，$f(x) \geqslant 0$，则称 f 是正的)，则 K' 是一个锥，当且仅当 K 是空间的，即，如果闭包 $\overline{K-K}=E$. 如果 K 是闭的，那么对任一点 $x_0>0$(分别地，$x_0 \notin K$)，存在一个 $f \in K'$ 使得 $f(x_0)>0$ (分别地，$f(x_0)<0$).

锥 K 称为不平坦的(unflattened)，指对任意 $x \in E$ 存在元素 $u, v \in K$ 使得

$$x=u-v,\quad \|u\|, \|v\| \leqslant M\|x\|,$$

其中 M 是常数.

如果一个锥是闭的和再生的，那么它是不平坦的(Крейн - Smulyan 定理(Kreĭn - Smulyan theorem)).

一个锥 K 称为是正规的(normal)，指

$$\inf\{\|x+y\|: x, y \in K,\ \|x\|=\|y\|=1\}>0.$$

锥的正规性等价于范数的半单调性(semi - monotonicity of the norm)：$0 \leqslant y \leqslant x$ 蕴含 $\|y\| \leqslant M\|x\|$，其中 M 是一常数. 楔 K' 在对偶空间是再生的，其充要条件是锥是正规的((Крейн 定理) Kreĭn theorem). 对偶地：如果 K' 是对应于闭锥 K 的正规锥，那么 K 是再生的. 存在一个一一线性连续映射，它把具有一正规锥 K 的空间 E 映射成某个紧统 Q 上连续函数空间 $C(Q)$ 的一个子空间，并且在此映射下，K 的元素且只有这些元素被映成非负函数.

一个锥 K 称为正则的(regular)或完全正则的(completely regular)，指 K 的元素的每一递增且有序有界(范数有界)的序列收敛. 若 K 是闭的和正则的，则它是正规的；每一完全正则锥是正规的和正则的. 其实如果 K 是正则的和立体的，那么它就是完全正则的. 锥的正则性与范数的有序连续性(order continuity of the norm)相关：如果 $x_\alpha \downarrow 0$，即如果族 $\{x_\alpha\}$ 是递减有向集，且 $\inf x_\alpha=0$，那么 $\|x_\alpha\| \to 0$. 闭锥 K 的正则性等价于如下性质，即空间 E 是 Dedekind 完全的且 E 中的范数是有序连续的. 立体锥 K 的正则性蕴含 E 中范数的有序连续性.

锥 K 称为可塑的(plasterable)，如果存在锥 $K_1 \subset X$ 和数 $\delta>0$，使得对任一 $x \in K$，球 $S(x; \delta\|x\|) \subset K_1$. K 的可塑性等价于 E 中在 K 上为加性的等价范数的存在性. 可塑锥是完全正则的.

锥的理论也已发展到任意赋范空间，但是，在一般情况下，上面提到的某些结果不再保持. 例如，Kreĭn - Smulyan 定理不再成立，闭锥的正则性也不再蕴含其正规性. 见[1]，[7]，[8]，[9]，[10].

Б. З. Вулих 撰

【补注】 空间锥(或楔)也称为生成锥(spanning cone

或生成楔(spanning wedge)).

有序连续性有时也称为单调连续性(monotone continuity).

Banach空间中的锥被用于最优化理论中. 它们可被用来定义非光滑映射的多值导数.

参考文献

[A1] Hiriart-Urruty, J. B., Tangent cones, generalized gradients and mathematical programming in Banach spaces, *Mathematics of operations Research*, 4 (1979), 79-97.

[A2] Holmes, R. B., Geometric functional analysis and its applications, Springer, 1975.

[A3] Peressini, A. L., Ordered topological vector spaces, Harper and Row, 1967.

[A4] Barbu, V., Convexity and optimization in Banach spaces, Reidel, 1986.

参考文献

[1] Функциональный анализ, Справочная матем. библиотека, М., 1972, гл. 8.

[2] Edwards, R. E., Functional analysis: theory and applications., Holt, Rinehardt, Winston, 1965.

[3] Schaefer, H. H., Topological vector spaces, Macmillan, 1966.

[4] Dold, A., Lectures on algebraic topology, Springer, 1980.

[5] Spanier, E. H., Algebraic topology, McGraw-Hill, 1966.

[6] Цаленко, М. Ш., Шульгейфер, Е. Г., Основы теории категорий, М., 1974.

[7] Красносельский, М. А., Положительные решения операторных уравнений, М., 1962 (英译本: *Krasnosel'skii*, M. A., Positive solutions of operator equations, Wolters-Noordhoff, 1964).

[8] Вулих, Б. З., Введение в теорию конусов в нормированных пространствах, Калинин, 1977.

[9] Вулих, Б. З., Специальные вопросы геометрии конусов в нормированных пространствах, Калинин, 1977.

[10] Крейн, М. Г., Рутман, М. А., 《Успехи матем. наук》, 3 (1948), 3-95.

杨 路、张景中、侯晓荣 译

锥条件 [cone condition; конуса условие]

对Euclid空间的一个区域所加的条件, 它以某种形式反映该区域的不平坦性质. 一个开集 $G\subset E^n$ 满足弱锥条件(weak cone condition), 是指对于所有 $x\in G$, $x+V(e(x),H)\subset G$ 成立, 其中 $V(e(x),H)$ 是顶点在坐标原点的有固定开度 ε 和高度 $H\ (0\leqslant H\leqslant\infty)$ 的正圆锥, 且其轴向量 $e(x)$ 依赖于 x. 一个开集 G 满足强锥条件(strong cone condition), 如果存在一组开集 G_k 对闭包 $\bar{G}$ 的覆盖, 使得对于任何 $x\in\bar{G}\cap G_k$, 锥 $x+V(e(x),H)$ 包含在 G 中(这些锥的开度可以依赖于 k). 在与函数的积分表示和嵌入定理的联系中, 锥条件的各向异性的推广已被考虑, 例如, 弱、强 l 角形条件(见[1]), 正方体条件, 等等.

参考文献

[1] Бесов, О. В., Ильин, В. П., Никольский, С. М., Интегральные представления функций и теоремы вложения, М., 1975 (英译本: Besov, O. V., Il'in, V. P. and Nikol'skii, S. M., Integral representations of functions and imbedding theorems, Wiley, 1978).

М. И. Войцеховский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Agmon, S., Lectures on elliptic boundary value problems, v. Nostrand, 1965.

史树中 译

置信界 [confidence bounds; доверительная граница]

见置信估计 (confidence estimation).

置信估计 [confidence estimation; доверительное оценивание]

一种数理统计学方法,用来为概率分布的未知参数构造出一个近似值集合.

设 X 为取值于 Euclid 空间中的集合 $\mathscr{X}$ 内的随机向量,设此向量的概率分布属于一个由密度 $p(x\mid\theta)$, $(x\in\mathscr{X},\ \theta\in\Theta)$ 所定义的参数分布族,密度 $p(x\mid\theta)$ 是相对于测度 $\mu(x)$ 而言. 假设相应于 X 的观察结果的参数值 θ 为未知, 置信估计的要点在于造出一个集合 $C(x)$,它依赖于 X 且包含相应于未知真值 θ 的一给定函数值 $u(\theta)$.

设 U 是函数 $u(\theta)$ 的值域 $(\theta\in\Theta)$, 并设 $C(x)\ (x\in\mathscr{X})$ 对所有来自 $\mathscr{X}$ 的 x 是属于 U 的一族集合;更进一步,假定对任一元 $u\in U$ 及任意值 $\theta\in\Theta$,事件 $\{C(X)\ni u\}$ 的概率有定义, 这概率由积分

$$\mathrm{P}_C(u,\theta)=\int_{C(x)\ni u}p(x\mid\theta)\,d\mu(x),\quad u\in U,\ \theta\in\Theta$$

给出,它称为对给定值 θ,集合 $C(X)$ 覆盖 u 的覆盖概率(covering probability).

若真值 θ 未知,则相应于 X 观察结果的集合 $C(X)$ (来自集族 $C(x)$, $x\in\mathscr{X}$) 称为函数 $u(\theta)$ 的未知真值的一个置信集(confidence set) 或区间估计 (interval estimator). 置信概率(confidence probability) $\mathrm{P}_C(\theta)$ 可通过覆盖概率用等式

$$\mathrm{P}_C(\theta)=\mathrm{P}_C[u(\theta),\theta],\quad \theta\in\Theta$$

表出,它用来作为按上述法则造出的区间估计 $C(X)$ 的概率特征. 换句话说, $\mathrm{P}_C(\theta)$ 就是 $C(X)$ 覆盖 $u(\theta)$ 的概率, $u(\theta)$ 是一给定函数 u 在未知真参数点 θ 处之值.

如果置信概率 $\mathrm{P}_C(\theta)$ 不依赖于 θ, 则区间估计 $C(X)$ 称为对样本空间相似. 这名称的来由是下述两公式的类似性:

$$\mathrm{P}_C(\theta) = \mathrm{P}\{C(X) \ni u(\theta) | \theta\} = 常数$$

以及

$$\mathrm{P}\{X \in \mathscr{X} | \theta\} = 常数 = 1.$$

在较一般的情况下，$\mathrm{P}_C(\theta)$ 依赖于未知的 θ，出于这个理由，在实际工作中区间估计的质量通常是通过置信水平(confidence level)

$$P_C = \inf \mathrm{P}_C(\theta)$$

来表征，此处下确界是在集合 Θ 上取值的(置信水平有时被称为置信系数(confidence coefficient)).

置信估计的优化是由区间估计所要满足的要求来定义．例如，若目的是构造与样本空间相似的、有给定置信水平 $\omega(0.5 \leqslant \omega < 1)$ 的置信集，则这要求可用恒等式

$$\mathrm{P}_C[u(\theta), \theta] \equiv \omega, \quad \theta \in \Theta$$

表示．自然地，去寻找这样的区间估计，它覆盖真值 $u(\theta)$ 的概率，至少等于它覆盖任意值 $u \in U$ 的概率．换句话说，这被称为无偏性要求的第二个要求，可用不等式

$$\mathrm{P}_C(u, \theta) \leqslant \omega, \quad u \in U, \quad \theta \in \Theta$$

表示．在这些条件下，"最好的"估计 C 可合理地取为这样的估计，它覆盖任一不同于真值 $u(\theta)$ 的值 u 的概率尽可能地小．由此得出第三个要求，即"最大精度"的要求：对任何不同于 C 且满足条件

$$\mathrm{P}_{C'}[u(\theta), \theta] \geqslant \omega, \quad \theta \in \Theta$$

的 C'，不等式

$$\mathrm{P}_C(u, \theta) \leqslant \mathrm{P}_{C'}(u, \theta), \quad u \in U, \quad \theta \in \Theta$$

必定成立．

寻找满足这三个要求的区间估计 C 的工作，等价于构造一个有显著性水平(significance level) $1-\omega$ 的、相似于样本空间的无偏最优统计检验的工作．这个问题的解的存在性及其构造，构成了统计假设检验一般理论的基础．

置信估计在 $u(\theta)$ 为一纯量函数时用得最多．设 $X_1, \cdots, X_n (n \geqslant 2)$ 为具有同一**正态分布**(normal distribution)的独立随机变量，带未知参数 $\mathrm{E}x_i = \theta_1$ 及 $\mathrm{D}x_i = \theta_2$．问题是造出 $u(\theta) = \theta_1$ 的区间估计．令

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad 和 \quad s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2.$$

由于随机变量 $T = \sqrt{n}\ (\bar{X} - \theta_1)/s$ 服从自由度为 $n-1$ 的 **Student 分布**(Student distribution)，且这分布不依赖于未知参数 θ_1 和 $\theta_2 (|\theta_1| < \infty, \theta_2 > 0)$，因此对任何正数 t，事件

$$\left\{\bar{X} - \frac{ts}{\sqrt{n}} < \theta_1 < \bar{X} + \frac{ts}{\sqrt{n}}\right\}$$

发生的概率只依赖于 t．如果把这区间取为 θ_1 的区间估计 C，则它将相应于置信概率

$$\mathrm{P}_C(\theta_1, \theta_2) = \mathrm{P}\{|T| < t\},$$

这与 $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ 无关．这样的区间估计称为置信区间(confidence interval)，而其端点则称为置信界(confidence bounds)．在这种情况下，置信区间是一个相似于样本空间的置信估计．在本例中，区间估计是最精确无偏的．

参考文献

[1] Wilks, S. S., Mathematical statistics, Wiley, 1962.

[2] Schmetterer, L., Introduction to mathematical statistics, Springer, 1974 (译自德文).

[3] Lehmann, E., Testing statistical hypothesis, Wiley, 1986.

[4] Большев, Л. Н., 《Теория вероят. и ее примен.》, 10 (1965), 1, 187－192.

Ю. В. Линник, Н. М. Халфина 撰　陈希孺 译

置信区间[confidence interval; доверительный интервал]

见**置信估计**(confidence estimation).

置信水平[confidence level; доверительный уровень]

见**置信估计**(confidence estimation).

置信概率[confidence probability; доверительная вероятность]

见**置信估计**(confidence estimation).

置信集[confidence set; доверительное множество]

见**置信估计**(confidence estimation).

构形[configuration; конфигурация]

以相互间的**关联**(incidence)关系相联系的一组点、线和面的有限集，构形可以在一个平面上，也可以在空间中．

一个平面构形(plane configuration)是平面上满足下述条件的 p 个点和 g 条(直)线的系统：每一点都与 γ 条线相关联，而每条线都与 π 个点相关联，这里的 γ 和 π 是固定常数．给定构形的一个所谓生成元系(system of generators)是该构形的这样一个极小点系：从与其中一对点相关联的线和一对线相交的点可以得出整个构形．数 p, g, γ, π 以关系式 $p\gamma = g\pi$ 相联系而构形则用符号 (p_γ, g_π) 表示．点数和线数相等的构形记成 (p_γ)．

平面构形的例．1) 相关联的一个点和一条线形成构形 (1_1)．2) 不共线的 3 点以及分别与其中每一对点

关联的 3 条线形成构形 (3_2)，图形是平面上的三角形或三边形．3) 由 4 边线和两两相交得出的 6 个点组成的完全 4 边形是构形 $(6_2, 4_3)$．不过这时并非所有连接构形中一对点的线都是这个构形的线；点 P, Q, R 和线 RP, RQ, PQ 不属于它(图 1)．

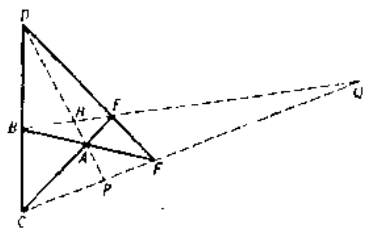


图 1

一个构形的自同构(automorphism of a configuration)是构形到自身的一个映射，它把点映成点，边映成边，而且既保留原有的关联关系又不产生新的关联．如果构形的自同构群对点和对线都是传递的，则该构形称为正则的(regular)．

对于给定的一个构形 (p_γ, g_π)，构形 (g_π, p_γ) 称为与它对偶的(dual)．(p_γ) 型的构形与其对偶构形同构者，称为自对偶的(self-dual)．

如果一个构形中元素间的关联在射影变换下保持不变，则该构形称为射影的(projective)．例如，射影平面上的某个构形中元素间的关联满足射影平面的公理，从而点和线的关联在该平面的射影变换下保持不变，于是这个构形是射影的，这种平面构形的所有元素及其关联可以只用直尺画成图形，作为对偶原理的推论，一个平面构形总有对偶．

一个构形可以定义成一个有限部分平面，某个构形存在的可能性取决于其点和线的总体与点和线的关联的总体之间的几何与组合关系．一个构形也可用一个抽象格式来定义，例如，图 2 的表展示了一个 4 面体的 4 点和 4 面的关联(用 × 表示)，其中 A_i 和 D_i 分别是点和面．当某一构形被抽象地定义后，就会产生实现问题．也就是说，用一组给定的生成元构作全部关联的可能性，一个构形实现为一个有限部分平面意味着把它同构地映射成某平面的一个子平面的可能性．

	A_1	A_2	A_3	A_4
D_1	•	×	×	×
D_2	×	•	×	×
D_3	×	×	•	×
D_4	×	×	×	•

图 2

构形 (p_2)，$p\geqslant 3$，可以用 p 边形的形式来实现；这时其顶点和边是成对关联的．构形 (3_2) 的抽象格式可以，比方说，像图 2 的表那样来构作．只有当 $p\geqslant 7$ 时才可能有平面构形 (p_3)，因为构形中过每点必须有 3 条线而每条线上还有构形中另外 2 点(数 p 必须满足不等式 $p(p-1)/2\geqslant 3p$)．一般情况下，会有几个不同构的 (p_3) 型构形，具体有多少个与 p 有关．(抽象地说是唯一的)构形 (7_3) 如图 3 的格式所示，其中每个数代表一点，而括号右边的数表示括号左边两对点的连线的交点，垂线右边的数表示左边的关联都成立时 5, 6, 7 点必须共线．

$$\left.\begin{matrix}13\\24\end{matrix}\right\}5\quad \left.\begin{matrix}12\\34\end{matrix}\right\}6\quad \left.\begin{matrix}14\\23\end{matrix}\right\}7\ \Big|\ 567$$

图 3

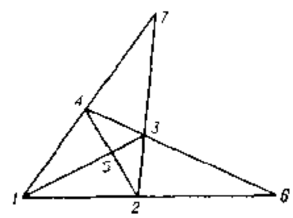


图 4

在实射影平面上，除最后的关联(3 点共线)不成立外，所有关联都可由完全 4 边形来实现(图 4)．共有 3 个不同构的构形 (9_3)，其中一个，$(9_3)_1$，称为 Brianchon - Pascal 构形(Brianchon - Pascal configuration)(图 5)：每条线 l_i 关联着 3 个不同的点 G_i，而每点关联着 3 条不同的线．这个构形可在射影平面上实现(图 6)；它是射影、正则和自对偶的(见

线 l_i	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
点 a_i	1	1	1	2	2	3	3	4	5
	2	4	6	4	7	6	5	6	7
	3	5	7	8	9	8	9	9	8

图 5

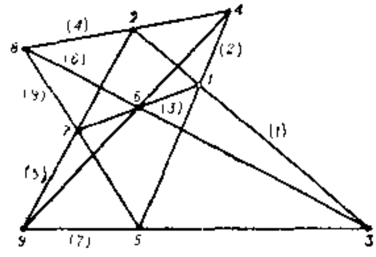


图 6

Brianchon 定理(Brianchon theorem)；**Pascal 定理**(Pascal theorem))．构形(9_3)的另外两种实现 $(9_3)_2$，$(9_3)_3$

(图 7) 与 Brianchon - Pascal 构形有本质性不同．例如，构形$(9_3)_3$不是正则的，而$(9_3)_2$的构作要借助于

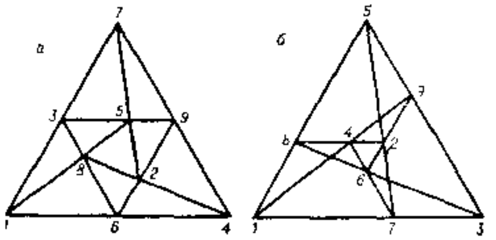


图 7

辅助的 2 阶曲线．构形(10_3)已有 10 个互不同构的实现，其中最重要的是 Desargues 的形 (Desarguesian configuration) (图 8)．它可以在实射影平面上实现，

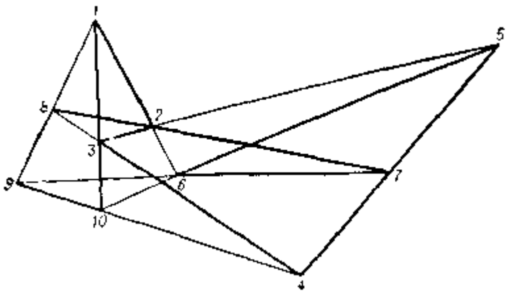


图 8

而且是射影、正则和自对偶的．(10_3)的另外 9 种实现没有表述成一般的几何定理，而且其中只有 8 种可在实射影平面上实现，但它们的构造都要求对生成元系作特定的安排(特别地、此类构形之一可以正多边形的形式来实现(图 9))．在图形中，顶点序列也能以作为同时内接和外接的 10 边形而得到．构形(9_3)和(10_3)也具有一种借助于作为互相内接和外接多边形的几何

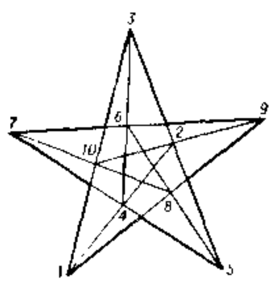


图 9

构造；这样一来，构形$(9_3)_1$表示成 9 边形 (2, 3, 6, 1, 5, 9, 4, 8, 7, 2) 的形式 (图 6)，Desargues 构形表示成 10 边形 (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 1) 的形式 (图 8)．这些构形的这种表示在自同构意义下是唯一的，一般地，互相内接和内接 p 边形的构造导出(p_3)型的一个构型．(p_3)型构形也存在以某种互相内接和外接多边形的形式给出的表示．例如，Desargues 构形有 (在自同构意义下) 唯一的方式表示成互相内接和外接的 5 边形 (1, 9, 7, 5, 3) 和 (8, 4, 10, 6, 2) (图 8)．当 p 增大时，互不同构的(p_3)型构形的个数迅速增大．

空间构形 (spatial configuration) 是点和面的一个有限系，其中每一点与确定个数的面关联，每一面也与确定个数的点关联．和空间中由点和面组成的构形一样，也可以研究空间中由点和线组成的构形．于是前面讨论过的由点和线组成的 Desargues 构形也是空间构形(10_3) (图 8)，这时相应的 3 边形位于不同的平面．它也可作为由点和面组成的构形$(10_3, 5_6)$．对应三角形的 6 个顶点，透视中心和透视轴上三角形的对应边相会的 3 点共有 10 个点．由 3 边形的对应边构成 3 个面加上 3 边形自身所在的 2 个面共有 5 个面．每个面上有构形的 6 个点，而每个点与 3 个不同的面关联．

构形(4_3)是平凡的(p_y)型空间构形，其格式在图 2 中给出，它可以图示为 4 面体．当 $p\leq 7$ 时不可能有(p_4)型的构形，当 $p=8$ 时有 5 个不同的构形格式，其中一个是所谓的 Möbius 构形 (Möbius configuration)，它由两个互相内接和外接的 4 面体组成．两个 4 面体的 8 个顶点中的每一个与 4 面体的 4 个面关联，而 8 个面中的每一个与 4 个点关联．当构形的阶增大时，不同构形的个数迅速增大；例如，构形(9_4)已有 26 种不同的几何实现．

最引人注目的空间高阶构形是 Reye 和 Schläfli 的所谓 Reye 构形 (Reye configuration)，它是由点和面组成的一个(12_6)构形．在实射影空间中它可以这样构造：点是立方体的顶点和中心、立方体之 3 组平行边 (在无穷远处的) 交点；面是立方体的 6 个面和通过每一对对边的 6 个面 (图 10)．

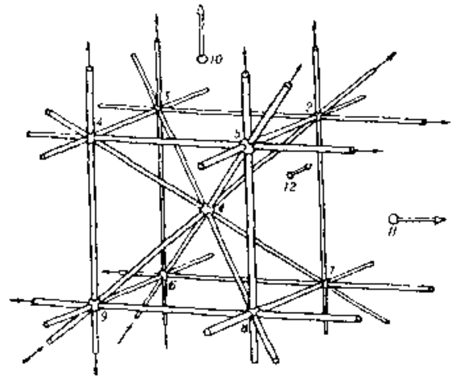


图 10

Reye 构形是射影、正则和自对偶的，其构造也可以(按对偶原理)用 8 面体替代立方体来表示(图11)．Reye 构形也可以当作点和线的空间构形 $(12_4, 16_3)$．

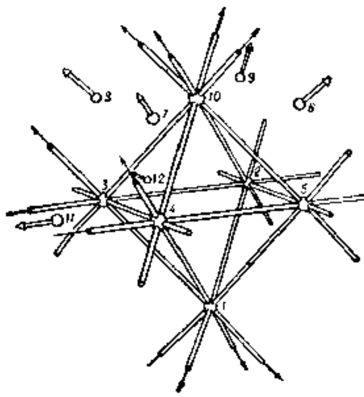


图 11

由点和线组成的 $(30_2, 12_5)$ 构形称为 Schläfli 双六(Schläfli double - six)．其空间图形可表示成在立方体的每个面上(关于两 6边形之一)对称地分布的点和线(图 12)．

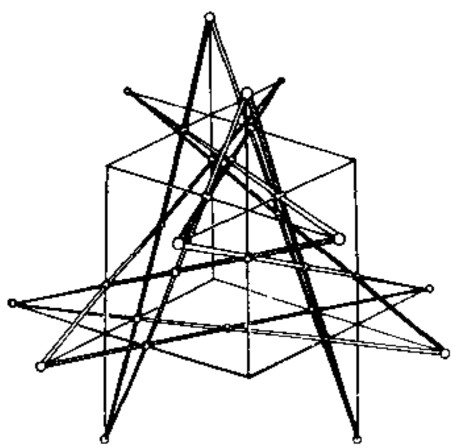


图 12

并非每个可平面构形都能在实射影平面上实现．例如，构形 (7_3) 和 (8_3) 就不能如此实现，从而产生了构形在其他射影平面上实现的问题．断言某构形连同其全部(但可能除去一个)关联在给定平面上的实现蕴涵了该构形连同其全部关联的实现的每个假设都称为给定平面的一个构形假设 (configuration hypothesis)．于是，如果在某种平面上一个构形的全部关联可以实现是该平面的几何性质所致，那么这个构形可以在该平面上实现，亦即是可平面的(planar)．例如，构形 $(9_3)_1$ 总可以在实射影平面上实现，因为由 Brianchon 和 Pascal 的定理，其除一个以外的全部关联的实现将蕴涵那个除外关联成立．换句话说，这些定理是构形假设，在这种平面上一个 (7_3) 构形(图 4)的那个除外关联不成立(因一个完全 4 边形的对边点不共线)．于是这样一个断言不是构形假设，但它在复射影平面上是．可以类似地考察其他构形的实现；特别是一个 (8_3) 构形可以在 3 个或 4 个元素的 Galois 域上构作的有限 Pappus 平面上实现．

在给定平面上成立的构形假设以一定的方式将该平面的元素进行组织，从而在该平面的几何的公理化结构上起作用．例如，如果射影平面的所有公理在一个平面上成立，但 Desargues 构形不能实现，则该平面是一个所谓的非 Desargues 几何．一个构形假设也能以代数形式表述为某个代数恒等式．在一个任意的射影平面上的构形假设只能当成新的公理被引进，而作为公设的一个构形假设却可能会导致该平面上其他构形假设的成立．一般地说，相应于一个代数恒等式的那个构形假设，称为这个恒等式在实现该构形的平面上的几何表示．(不过是否每个构形假设都是在平面三元环或体上的射影平面上的一种确定类型的恒等式的几何表示，则尚未确定．) 对类似的代数等价物的考察使人们既去研究一个构形的性质以及它作为有限部分平面在一个特定的射影平面上的实现，又研究不同构形假设之间的逻辑联系．

构形理论在一系列几何问题上得到应用．例如，(8_3) 平面构形在没有二重点的三次曲线理论，特别是关于拐点方面有重要作用．Reye 构形被用来研究 4 维欧氏空间 E^4 中的正则多面体．E^4 中的一个正则多面体是由 3 维正则多面体作为界面所界定的，E^4 中的一个正则多面体称为一个 n 胞腔 (n - cell)，如果它由 n 个正则多面体所界定．例如，一个5 胞腔由5 个3 维 4 面体界定，一个 8 胞腔由 8 个立方体界定，等等．5 胞腔与 24 胞腔是相互对偶的(点对应于空间，线对应于平面)，对正则胞腔的研究是通过考察它们在 E^3 的投影来进行的．如果对一个 24 胞腔选取某 3 维面作为投影的空间，则得到空间分成 12 个 8 面体的分解，其中除了中心的那个外其余的都伸展至无穷，所导致的这类射影由 Reye 构形(图 10)所实现．如果选取过 24 胞腔的一个顶点的 3 维空间作为射影的空间，则仍得到 Reye 构形(图 11)．(24 胞腔到 3 维空间的射影如图 13 所示．)

Reye 构形还产生于中心不共面的 4 个球的对称轴和对称点系统．在这个系统中每根轴与 3 点关联，每点与 4 根轴关联，从而得到点和线的空间构形 $(12_4, 16_3)$．每 3 个对称点确定一平面，与一个对称点关联的 2 根轴组成另外 8 个不同的平面，总共 12 个平面中的每一面与 6 点关联，10 个对称点中的每一点也与 6 面关联；亦即得到一个 (12_6) 构形．由 Schläfli 双六所表示的构

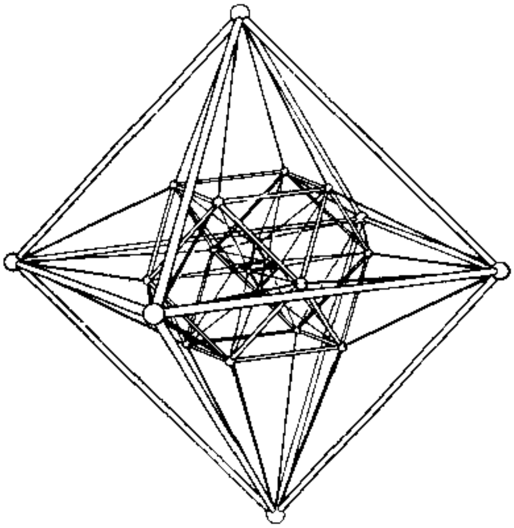


图 13

形在研究 3 次代数曲面的性质时得到应用．这样一个 3 次曲面由 19 个点确定，且总通过某个 Schläfli 双六．其本质在于它的任意 4 条线具有双曲面排列．

对于关联在平面上实现的构形假设被应用于研究多面体(或多面角)和解决有关在各种限制(具有不可达元素的结构，只用一根直尺的结构等等)下的构造问题．多面体构形的理论在运动学和图解静力学中得到了应用．

构形也可能由其他几何元素组成，例如，由 E^n 中任意维的单位半径圆盘组成．

参考文献

[1] Hilbert, D. and Cohn - Vossen, S. E., Anschauliche Geometrie, Springer, 1932 (中译本：D.希尔伯特，S. E.康福森，直观几何(上、下)，人民教育出版社，1964).

[2] Скорняков, Л. А.,《Успехи матем. наук》, **6** (1951), 112 – 154.

[3] Аргунов, Б. И.,《Матем. сб.》, **26** (1950), 425 – 456.

[4] Levi, F., Geometrische Konfigurationen (mit einer Einführung in die kombinatorische Flächentopologie), S. Hirzel, Leipzig, 1929.

Л. А. Сидоров 撰

【补注】 可平面构形(planar configuration)是可以嵌入到一个平面中的构形，但可能有多种方式的嵌入，而平面构形(plane configuration，如前定义)则是在一个平面上的构形．

如果在多边形 A 的边与多边形 B 的顶点之间有一一对应，使得 A 的每一边通过它在 B 中所对应的顶点，则 A 称为是关于 B 的外接多边形(circumscribed polygon)，而 B 称为是关于 A 的内接多边形(inscribed polygon)．这样在图 7a 中，三角形 147 是关于 369 外接的，369 又是关于 258 外接的，而 258 是关于 147 外接的．

[A3] 是关于构形的近代参考文献．有关在 3 次曲面中的 Schläfli 双六的一些材料可见[A4]．

这里论述之条目已不大为人所知．一方面已经有(有限)群的理论，特别是置换群理论(见**群**(group)；**有限群**(finite group)；**置换群**(permutation group))，其中作置换的对象的几何本性是无关紧要的．另一方面，如果对构形本身而不是对它的自同构群有兴趣，那么有些对此作研究的学科，像有限几何(连同其具有几何本性的对象)或区组设计理论(见**区组设计**(block design))(那里只关心**关联**(incidence)关系)．

[A2] 是关于这些材料的参考文献．

参考文献

[A1] Steinitz, E., Konfigurationen der projektiven Geometrie, in W. F. Meyer and H. Mohrmann (eds.): Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, vol. 3, Teubner, 1907 – 1910, 481 – 516.

[A2] Dembowski, P., Finite geometries, Springer, 1968.

[A3] Kárteszi, F., Introduction to finite geometries, North-Holland, 1976.

[A4] Manin, Yu. I., Cubic forms, North - Holland, 1984.

李 乔译 钟 集校

聚合分析 [**confluent analysis** 或 **confluence analysis**；**конфлюэнтный анализ**]

一类数理统计方法的总称．这些方法涉及分析数量(随机或非随机)变量 $X^{(1)},\cdots,X^{(p)}$ 之间先验地假定的函数关系，条件是变量 $X^{(s)}$ 自身不可观察，而随机变量

$$\tilde{X}_i^{(s)} = X_i^{(s)}+\varepsilon_i^{(s)},\quad i=1,\ldots,n \tag{1}$$

是可观察的．这里 $\varepsilon_i^{(s)}$ 是在对 $X^{(s)}$ 在第 i 次观察时之真值 $X_i^{(s)}$ 作测量时的误差，n 是观察数．这里，所考虑的不可观察变量 $X^{(1)},\cdots,X^{(p)}$ 间的函数("结构")关系的一般形式假定为已知．聚合分析的部分内容是对一些未知参数值构造统计估计量，这些参数出现在"结构"方程之中，以及构造一些统计检验，去检验有关这种关系的性质的不同假设．

聚合分析理论和应用方面的发展，是针对结构关系为线性型(或者，通过对原变量作适当变换可以线性化)的情况．在聚合分析线性模型的框架中，原先关于 p 个变量之间存在着 m $(m<p)$ 个线性关系的先验假定可表为：存在 $p-m$ 个"公共"因子 $Y^{(1)},\cdots,Y^{(p-m)}$，使

$$X^{(s)} = \lambda_{s,1}Y^{(1)}+\cdots+\lambda_{s,p-m}Y^{(p-m)},\quad s=1,\cdots,p, \tag{2}$$

这里矩阵 $\Lambda=\|\lambda_{s,k}\|$ $(s=1,\cdots,p;\ k=1,\cdots,p-m)$，有秩 $p-m$．把聚合分析模型参数化而得 (1) – (2)，使我们可将基本问题陈述为关于未知参数值 $\lambda_{s,k}$ 的统计估计和假设检验的问题．形式上，模型 (1) – (2) 看上去好象与**因子分析**(factor analysis)模型一样；然而，聚合分析和

因子分析问题几无共同之点．聚合分析的目的是描述存在于变量 $X^{(1)},\cdots,X^{(p)}$ 之间的结构关系，而因子分析中的基本问题则在于造出和解释公共因子 $Y^{(1)},\cdots,Y^{(p-m)}$．同时，可以说聚合分析与**回归分析**(regression analysis)问题性质接近，聚合分析某些部分模型可嵌入回归分析的框架中(例如，若按(1)的观察值，要求显示出带误差的变量 $X^{(1)}$ 对不带误差的变量 $X^{(2)},\cdots,X^{(p)}$ 的依赖时)．

参考文献

[1] Frisch, R., Statistical confluent analysis by means of complete regression systems, Univ. Oslo Econom. Inst. 1934.

[2] Koopmans, T. C., Linear regression alaysis of economic time series, Publ. Netherl. Econom. Inst. 20, Netherlands Econom. Inst, 1937.

[3] Kendall, M. G. and Stuart, A., The advanced theory of statistics, Inference and relationships, 2, Griffin, 1983, Chapt. 29.

[4] Malinveaud, E., Statistical methods of econometrics, North - Holland, 1970, Chapt 10（译自法文）.

[5] Айвазян С. А., Богдановский И. М., 《Заводск. лаборатория》, 40 (1974), 285－295.

C. A. Айвозян 撰

【补注】 这方法最初由 H. Frisch 提出([1])．其实"聚合分析"这个名称在西方文献中已不再使用．它已被 K. G. Jøreskog ([A1]) 的线性结构分析方法所代替．

参考文献

[A1] Jøreskog, K. G., Structural analysis of covariance and correlation matrices, *Psychometrika,* 41 (1978), 443－477.

【译注】 在中国从不使用"聚合分析"这个词．

陈希孺 译

汇合型超几何方程 [**confluent hypergeometric equation; вырожденное гипергеометрическое уравнение**]，退化超几何方程(degenerate hypergeometric equation)

二阶线性常微分方程

$$zw''+(\gamma-z)w'-\alpha w=0,\quad \alpha,\gamma=\text{常数}, \tag{1}$$

其自共轭形式为

$$(e^{-z}z^{\gamma}w')'-\alpha e^{-z}z^{\gamma-1}w=0.$$

一般地说，变量 z，w 和参数 α，γ 可以取复数值．**Whittaker 方程**(Whittaker equation)是方程(1)的约化形式．方程(1)同**超几何方程**(hypergeometric equation)有着密切的联系．合流超几何方程可以看作是由 **Riemann 微分方程**(Riemann differential equation)当两个奇点合并时所得到的方程．点 $x=0$ 是方程(1)的正则奇点，而点 $x=\infty$ 是强奇点(见**奇点**(singular point))．E. E. Kummer 最先对方程(1)的解进行了系统的研究．

方程(1)的解可以通过**汇合型超几何函数**(confluent hypergeometric function) $\Phi(\alpha;\gamma;z)$ 来表示．如果 γ 不是整数，则方程(1)的通解可以写成下列形式：

$$w=C_1\Phi(\alpha;\gamma;z)+C_2z^{1-\gamma}\Phi(\alpha+1-\gamma;2-\gamma;z), \tag{2}$$

其中 C_1 和 C_2 是任意常数．这个表达式在具有裂缝 $(-\infty,0)$ 的复 z 平面上成立．如果 γ 是整数，则通解具有更复杂的形式(可以含有对数项)．还可选取不同于(2)中的函数(例如 **Whittaker 函数**(Whittaker functions)，[2]，[3])作为方程(1)的基本解组．方程(1)的解还可通过复 z 平面上的围道积分来表示．

许多二阶线性常微分方程(例如 **Bessel 方程**(Bessel equation))都能通过未知函数和自变量的变换化为方程(1)([4])．特别是，形如

$$(a_0z+b_0)w''+(a_1z+b_1)w'+(a_2z+b_2)w=0,$$
$$a_i,b_i=\text{常数}$$

的方程可以利用汇合型超几何函数进行积分．

参考文献

[1] Kummer, E. E., Ueber die hypergeometrische Reihe $1+\alpha\beta x/(\gamma\cdot 1)+\cdots$, *J. Reine Angew. Math.*, 15 (1836), 39－83; 127－172.

[2] Krazer, A. and Franz, W., Transzendente Funktionen, Akademie - Verlag, 1960.

[3] Bateman, H. and Erdélyi, A., Higher transcendental functions. The gamma function. The hypergeometric function, 1, McGrow - Hill, 1953.

[4] Kamke, E., Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen, I, Chelsea, reprint, 1971（E. 卡姆克，常微分方程手册，科学出版社，1977).

H. X. Розов 撰 张鸿林 译

汇合型超几何函数 [**confluent hypergeometric function; вырожденная гипергеометрическая функция**]，Kummer 函数(Kummer function)，Pochhammer 函数(Pochhammer function)

汇合型超几何方程(confluent hypergeometric equation)

$$zw''+(\gamma-z)w'-\alpha w=0 \tag{1}$$

的解．这个函数可以利用所谓 Kummer 级数(Kummer series)来定义：

$$\Phi(\alpha;\gamma;z)={}_1F_1(\alpha,\gamma;z)= \tag{2}$$
$$=1+\frac{\alpha}{\gamma}\frac{z}{1!}+\frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{z^2}{2!}+\cdots,$$

其中 α 和 γ 是参数，可以取任何实数或复数值，但是 $\gamma=0,-1,-2,\cdots$ 除外，而 z 是复变量．函数 $\Phi(\alpha;\gamma;z)$ 称为第一类汇合型超几何函数(confluent hypergeometric

function of the first kind). 方程(1)的另一个线性无关的解

$$\Psi(\alpha;\gamma;z) =$$

$$\frac{\Gamma(\alpha-\gamma+1)\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\gamma)} z^{1-\gamma}\Phi(\alpha-\gamma+1,2-\gamma;z),$$

$$\gamma \neq 0,-1,-2,\ldots,\ |\arg z| < \pi,$$

称为第二类汇合型超几何函数 (confluent hypergeometric function of the second kind).

合流型超几何函数$\Phi(\alpha;\gamma;z)$是整个复z平面上的整解析函数;如果z固定,则$\Phi(\alpha;\gamma;z)$是α的整函数,是γ的亚纯函数,而点$\gamma=0,-1,-2,\cdots$是单极点.合流型超几何函数$\Psi(\alpha;\gamma;z)$在带裂缝$(-\infty,0)$的复z平面上是解析函数,并且是α和γ的整函数.

在汇合型超几何函数$\Phi(\alpha;\gamma;z)$与超几何函数 (hypergeometric function) $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$之间存在下列关系:

$$\Phi(\alpha;\gamma;z) = \lim_{\beta\to\infty} F\left(\alpha,\beta,\gamma;\frac{z}{\beta}\right).$$

初等关系.四个函数$\Phi(\alpha\pm1;\gamma;z)$,$\Phi(\alpha;\gamma\pm1;z)$称为函数$\Phi(\alpha;\gamma;z)$的邻接函数.在函数$\Phi(\alpha;\gamma;z)$和任何两个与其邻接的函数之间存在线性关系,例如

$$\gamma\Phi(\alpha;\gamma;z)-\gamma\Phi(\alpha-1;\gamma;z)-z\Phi(\alpha;\gamma+1;z) = 0.$$

可以从超几何函数的邻接函数之间的关系式中得到六个这种形式的公式.继续应用这些递推公式,可以推出函数$\Phi(\alpha;\gamma;z)$和连带函数$\Phi(\alpha+m;\gamma+n;z)$(其中$m$和$n$是整数)之间的线性关系.

微分公式:

$$\frac{d^n}{dz^n}\Phi(\alpha;\gamma;z) = \frac{\alpha\cdots(\alpha+n-1)}{\gamma\cdots(\gamma+n-1)}\Phi(\alpha+n;\gamma+n;z),$$

$$n=1,2,\ldots.$$

基本积分表示式:

$$\Phi(\alpha;\gamma;z) =$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 e^{zt}t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}\,dt,\quad \mathrm{Re}\gamma>\mathrm{Re}\alpha>0;$$

$$\Psi(\alpha;\gamma;z) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty e^{-zt}t^{\alpha-1}(1+t)^{\gamma-\alpha-1}\,dt,\quad \mathrm{Re}\alpha>0,\quad \mathrm{Re}z>0.$$

合流型超几何函数当$z\to\infty$时的渐近性质可以利用这些积分表示式来研究([1],[2],[3]).如果$\gamma\to\infty$,而α和z是有界的,则函数$\Phi(\alpha;\gamma;z)$的性质由公式(2)来描述.特别是,对于大的γ和有界的α和z:

$$\Phi(\alpha;\gamma;z) = 1+O(|\gamma|^{-1}).$$

各种函数的汇合型超几何函数表示式:

Bessel 函数:

$$J_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(1+\nu)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu e^{-iz}\Phi\left(\nu+\frac{1}{2};2\nu+1;2iz\right),$$

$$I_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(1+\nu)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu e^{-z}\Phi\left(\nu+\frac{1}{2};2\nu+1;2z\right),$$

$$K_\nu(z) = \sqrt{\pi}e^{-z}(2z)^\nu\Psi\left(\nu+\frac{1}{2};2\nu+1;2z\right).$$

Laguerre 多项式:

$$L_n^{(\alpha)}(z) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!}\Phi(-n;\alpha+1;z).$$

概率积分:

$$\mathrm{erf}(z) = \frac{2z}{\sqrt{\pi}}\Phi\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2};-z^2\right),$$

$$\mathrm{erf}\,c(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\Psi\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};z^2\right).$$

指数积分函数:

$$-\mathrm{Ei}(-z) = e^{-z}\Psi(1;1;z).$$

对数积分函数:

$$\mathrm{li}(z) = z\Psi(1;1;-\ln z).$$

Γ 函数:

$$\Gamma(\alpha,z) = e^{-z}\Psi(1-\alpha;1-\alpha;z).$$

初等函数:

$$e^z = \Phi(\alpha;\alpha;z),$$

$$\sin z = e^{iz}z\Phi(1;2;-2iz).$$

亦见[1],[2],[3],[8].

参考文献

[1] Bateman, H. and Erdélyi, A., Higher transcendental functions. Bessel functions, 2, McGraw-Hill, 1953.

[2] Градштейн, И. С., Рыжик, И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, 4 изд., М., 1963 (英译本:Gradshtein, I. S. and Ryzhik, I. M., Table of integrals, series and products, Acad. Press, 1980).

[3] Abramowitz, M. and Stegun, A. (eds.), Handbook of

mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables, Dover, reprint, 1964.

[4] Whittaker, E. T. and Watson, G. N., A course of modern analysis, Cambridge Univ. Press, 1952.

[5] Лебедев, А. В., Федорова, Р. М., Справочник по математическим таблицам, М., 1959.

[6] Бурунова, Н. М., Справочник по математическим таблицам, М., 1959.

[7] Fletcher, A., Miller, J. C. P., Rosenhead, L. and Comrie, L. J., An index of mathematical table, 1-2, Oxford Univ. Press, 1962.

[8] Лебедев, Н. Н., Специальные функции и их приложения, 2 изд., М.-Л., 1963 (英译本: Lebedev, N. N., *Special functions and their applications*, Prentice-Hall, 1965).

Э. А. Чистова 撰 张鸿林 译

共焦二次曲线 [**confocal conics; софокусные кривые**]

具有两个公共焦点的二次曲线．如果 F_1 和 F_2 是平面上给定的两点，则在平面的每一点上，有一个椭圆和一条双曲线通过，它们以 F_1 和 F_2 作为两个公共焦点．

每一个椭圆和每一条与其共焦的双曲线是正交的，也就是说，它们(在四个点上)相交成直角．在一个适当的坐标系中，一切共焦的椭圆和双曲线可以由下列方程给出：

$$\frac{x^2}{\lambda}+\frac{y^2}{\lambda-c^2}=1, \qquad (*)$$

其中 c 是由焦点到坐标原点的距离，λ 是可变参数．当 $\lambda>c^2$ 时，这个方程定义一个椭圆，当 $0<\lambda<c^2$ 时，定义一条双曲线(当 $\lambda<0$ 时，则为虚二次曲线)．如果其中一个焦点趋向于无穷远，则最终得到两族共焦抛物线(图 2)．

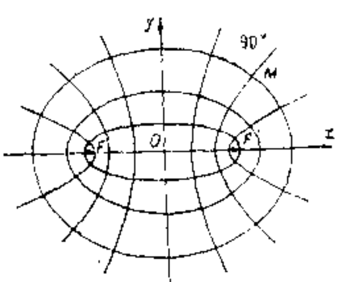


图 1

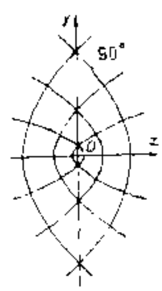


图 2

任何两条属于不同族的抛物线也是相互正交的．可以利用共焦的椭圆和双曲线按下述方式引入所谓平面上的**椭圆坐标系** (elliptic coordinate system)．如果 $M(x, y)$ 是平面上的任何一点，那么把它的坐标代入方程(*)，便得到一个关于 λ 的二次方程；这个方程的两个根 λ_1, λ_2 就是点 M 的椭圆坐标．共焦的椭圆和双曲线本身构成这个坐标系的坐标网，也就是说，它们由方程 $\lambda_1=$常数和 $\lambda_2=$常数来定义． БСЭ-3

【补注】

参考文献

[A1] Struik, D. J., *Lectures on analytic and projective geometry*, Addison-Wesley, 1953, 157-160.

张鸿林 译

共焦曲线 [**confocal curves; конфокальные кривые**]

同**共焦二次曲线** (confocal conics)．

共形联络 [**conformal connection; конформная связность**]

光滑流形 M 上一种**微分-几何结构** (differential-geometric structure)，流形上联络的一种特殊形式，它发生在底空间 M 上的光滑纤维丛 E 具有维数 $n=\dim M$ 的共形空间 C_n 为典型纤维的时候．E 的结构对每点 $x\in M$ 附加共形空间 C_n 的一个拷贝 $(C_n)_x$，它等同于(除了一个保持 x 及在 x 的所有方向的共形变换外)加上一个无穷远点的切空间 $T_x(M)$．作为这个空间 E 的一个联络的共形联络，对每一条原点为 x_0 的光滑曲线 $\mathscr{L}\subset M$ 和其上每个点 x_t，关联一个共形映射 $\gamma_t:(C_n)_{x_t}\to(C_n)_{x_0}$，使得满足某种条件(见下面对 γ_t 的条件)．假定空间 C_n 用由两个点(顶点)及 n 个过这两点的互相正交的超曲面组成的标架来描述．这种标架在伪 Euclid 空间 ${}^1R_{n+2}$ 中解释为满足下列条件的基的一个等价类：

$$\left.\begin{array}{c}(e_0,e_{n+1})=(e_1,e_1)=\cdots=(e_n,e_n),\\ (e_0,e_0)=(e_{n+1},e_{n+1})=(e_i,e_j)=0,\\ i,j=1,\ldots,n,\ i\neq j,\end{array}\right\} \qquad (1)$$

等价关系为

$$\{e_\alpha\}\sim\{\lambda e_\alpha\},\quad \alpha=0,\ldots,n+1.$$

假定 M 被坐标区域覆盖并且在每个区域中已固定一个 $(C_n)_x$ 中的光滑标架场，使得向量 e_0 定义的顶点和 x 相同．那么下面对 γ_t 的条件是：当 $t\to 0$, x_t 沿 $\mathscr{L}$ 移动到 x_0 时，γ_t 必收敛到恒等映射，并且它与后者的偏差的主部，关于 x_0 的某个邻域中的标架场，必须由下列形式的一个矩阵所定义：

$$\omega=\|\omega_\alpha^\beta\|=\begin{Vmatrix}\omega_0^0 & \omega_0^j & 0\\ \omega_i^0 & \omega_i^j & -\omega_0^i\\ 0 & -\omega_j^0 & -\omega_0^0\end{Vmatrix}, \qquad (2)$$

$$\omega_i^j+\omega_j^i=0,\quad \alpha,\beta=0,\ldots,n+1;\quad i,j=1,\ldots,n.$$

它有 $(n+1)(n+2)/2$ 个下述类型的线性微分形式 ω_0^0，ω_0^i，$\omega_i^j(i<j)$ 和 ω_i^0：

$$\omega_\alpha^\beta = \Gamma_{\alpha i}^\beta dx^i,\quad \det\|\Gamma_{0i}^j\| \neq 0 \tag{3}$$

换言之，在 x_t 的标架在 γ_t 之下的象必须由下述向量定义

$$e_\beta[\delta_\alpha^\beta + \omega_\alpha^\beta(X)t + \varepsilon_\alpha^\beta(t)],$$

其中 X 是 $\mathscr{L}$ 在 x_0 的切向量，并有

$$\lim_{t\to 0}\frac{\varepsilon_\alpha^\beta(t)}{t} = 0.$$

对任意点 x 处场的标架，在按公式 $e'_\alpha=A_\alpha^\beta e_\beta$，$e_\beta=A'^\alpha_\beta e'_\alpha$ 作保持条件 1) 的变换之下，即过渡到空间 $(C_n)_x$ 中共形标架主纤维丛 Π 的任意元时，形式 (3) 替换成下面的 Π 上的 1 形式：

$$\omega'^\beta_\alpha = A'^\beta_\gamma dA_\alpha^\gamma + A_\alpha^\gamma A'^\beta_\delta \omega_\gamma^\delta,$$

它也组成形如 (2) 的一个矩阵 ω'. 2 形式

$$\Omega'^\beta_\alpha = d\omega'^\beta_\alpha + \omega'^\beta_\gamma \wedge \omega'^\gamma_\alpha$$

组成一个结构和 (2) 相同的矩阵 $\Omega'=\|\Omega'^\beta_\alpha\|$，利用形式 $\Omega_\alpha^\beta=d\omega_\alpha^\beta+\omega_\gamma^\beta\wedge\omega_\alpha^\gamma$ 可以得到表达式 $\Omega'^\beta_\alpha=A_\alpha^\gamma A'^\beta_\delta\Omega_\gamma^\delta$，由于 (3)，$\Omega_\alpha^\beta$ 是 $dx^k\wedge dx^l$ 的线性组合，因而也是 $\omega_0^k\wedge\omega_0^l$ 的线性组合. 对于矩阵 ω' 中的元，有共形联络的结构方程（这里为简便起见省略了"$'$"号）：

$$\left.\begin{aligned}
&d\omega_0^0 + \omega_i^0\wedge\omega_0^i = \Omega_0^0,\\
&d\omega_0^i + (\omega_j^i - \delta_j^i\omega_0^0)\wedge\omega_0^j = \Omega_0^i,\\
&d\omega_i^j + \omega_k^j\wedge\omega_i^k + \omega_0^j\wedge\omega_i^0 + \omega_j^0\wedge\omega_0^i = \Omega_i^j,\quad i<j,\\
&d\omega_i^0 + \omega_j^0\wedge(\omega_i^j - \delta_i^j\omega_0^0) = \Omega_i^0.
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

在这里，右边部分是半基本的形式，即它们只是 $\omega_0^k\wedge\omega_0^l$ 的线性组合；它们组成共形联络的挠率－曲率形式组，并按下列规则变换：

$$\Omega'^0_0 = A'^0_0(A'^0_0\Omega_0^0 + A_i'^0\Omega_0^i),$$

$$\Omega'^i_0 = A_0^0 A_j'^i\Omega_0^j,$$

$$\Omega'^j_i = A_i^k A'^j_l\Omega_k^l + \Omega_0^k(A_i^0 A'^j_k - A_i^k A'^j_{n+1}).$$

方程 $\Omega_0^i=0$ 具有不变式意义，并决定一个零挠率的共形联络，设

$$\Omega_i^j = \frac{1}{2}C_{ikl}^j\omega_0^k\wedge\omega_0^l.$$

那么对于 $\Omega_0^i=0$：

$$C'^j_{ikl} = (A'^0_0)^2 A_i^r A'^j_q A_k^p A_l^s C_{prs}^q,$$

而对于 $C_{ik}=C^j_{ikj}$：

$$C_{ik} = (A'^0_0)^2 A_i^p A_k^r C_{pr}.$$

不变恒等式 $\Omega_0^i=\Omega_0^0=0$，$C_{ik}=0$ 决定所谓 (Cartan) 规范共形联络的特殊类.

组成 (2) 型的矩阵的那些形式 (3) 唯一地决定了 M 上的共形联络；x_t 处的标架在 $\gamma_t:(C_n)_{x_t}\to(C_n)_{x_0}$ 之下的象是由初始条件为 $u_\alpha(0)=e_\alpha$ 的下列方程组的解 $\{e_\alpha(t)\}$ 定义的：

$$du_\alpha = (\omega_\alpha^\beta)_{x(t)}(\dot{x}(t))u_\beta$$

其中 $x^i=x^i(t)$ 是曲线 $\mathscr{L}$ 在 x_0 的某个坐标邻域内的方程，x_0 的坐标为 $x^i(0)$. 如果 Π 上的一组 1 形式 ω_0^0，ω_0^i，$\omega_i^j(i<j)$，ω_i^0，满足右边可用 $\omega_0^k\wedge\omega_0^l$ 表达的方程 (4)，这里 $\omega_0^i(i=1,\cdots,n)$ 是线性独立的，那么它们就在上述意义下决定了 M 上的一个共形联络.

共形联络提供了研究 Riemann 空间共形映射的合适工具. 如果存在 M 上的局部标架场，关于它有

$$\omega_i^0 = P_{ij}\omega_0^j,\quad \omega_0^0 = Q_i\omega_0^i,\quad \Omega_0^i = Q_j\omega_0^i\wedge\omega_0^j.$$

那么共形联络就转化成某个 Riemann 空间的 **Levi-Civita 联络**（Levi-Civita connection）. 关于这个联络，由

$$d\omega_i^j + \omega_k^j\wedge\omega_i^k = \frac{1}{2}R_{ikl}^j\omega_0^k\wedge\omega_0^l$$

定义的曲率张量 R_{ikl}^j 为

$$R_{ikl}^j = \delta_l^j P_{ik} - \delta_k^j P_{il} - \delta_l^i P_{jk} + \delta_k^i P_{jl} + C_{ikl}^j.$$

反之，对于 Riemann 空间的每个 Levi-Civita 联络，存在唯一的规范共形联络，使得它可由上述的方法得到. 这里 $Q_j=0$，P_{ij} 是用 Ricci 张量 $R_{ik}=R^l_{ikl}$ 和数量曲率 $R=\sum R_{ii}$ 按下式表达的：

$$P_{ij} = \frac{1}{n-2}R_{ij} - \delta_j^i\frac{R}{2(n-1)(n-2)}.$$

相应的张量 C_{ikl}^j 称为 Levi-Civita 联络的**共形曲率张量**（conformal curvature tensor）. 两个 Riemann 空间是共形等价的，如果它们的 Levi-Civita 联络有相同的规范共形联络. 特别，当 $n>3$ 时，Riemann 空间是共形 Euclid 空间当且仅当它的 $C_{ikl}^j=0$.

参考文献

[1] Cartan, E., Les espaces à connexion conforme, *Ann Soc. Polon. Math.*, **2**(1923), 171－221.

[2] Ogiue, K., Theory of conformal connections, *Kodai Math. Sem. Reports*, **19**(1967), 193－224.

Ю. Г. Лумисте 撰

【补注】 除非另有所述，上述条目中的希腊文指标范围从 0 到 $n+1$，而拉丁文指标从 1 到 $n+1$.

关于（丛映射的）主部这个概念见**流形上的联络**（connections on a manifold）的补注.

潘养廉 译

共形微分几何学 [conformal - differential geometry; конформно - дифференциальная геометрия]

共形几何学 (conformal geometry)的一个分支,用分析的方法,主要是微分学的方法,研究在共形变换之下不变的几何量.

在共形平面 M_2 中,每个点或圆是用一个向量 $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 来定义的,这里 x_i $(i=1,\cdots,4)$ 是所谓的**四圆坐标**(tetracyclic coordinates). 对一个点有

$$(\mathbf{xx}) = x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2 = 0,$$

而对一个圆, $(\mathbf{xx})>0$. 平面的共形 - 微分几何学研究圆列和圆汇. 一个圆列对应于三维双曲空间中的一条曲线,而一个圆汇则对应于一个曲面. 圆列是用参数表示 $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)$ 给出的. 参数 t 可以被指定为

$$\sigma = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2}\, dt;$$

$d\sigma$ 是圆列中两个无限接近的圆之间的角. 在圆列理论中特别有意义的是这个圆列的包络的两个分支, $\mathbf{v}=\mathbf{v}(t)$ 和 $\tilde{\mathbf{v}}=\tilde{\mathbf{v}}(t)$, 即它们的密切圆. 如同曲线的普通微分几何学一样,对一个圆列,可以写成为向量 $\mathbf{x}, \mathbf{z}=d\mathbf{x}/d\sigma$, $\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}}$ 的导数关于它们自身分解的求导公式:

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\sigma} = \mathbf{z}, \quad \frac{d\mathbf{z}}{d\sigma} = -\mathbf{x}+\tilde{c}\mathbf{v}+c\tilde{\mathbf{v}},$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\sigma} = -c\mathbf{z}, \quad \frac{d\tilde{\mathbf{v}}}{d\sigma} = -\tilde{c}\mathbf{z}.$$

这样可得到两个不变量 $b=2c\tilde{c}$ 和 $g=c'/c$. 不变量 b 是用包络的密切圆之间的角 φ 来表达的: $b=1/\sin^2(\varphi/2)$. 共形平面中曲线的理论是由圆列理论构造的: 每一条曲线被看作一个包络,即不变量 $g=\pm 1$ 的圆列. 进一步,如果不变量 b 是常值,那么知道这曲线是一个圆束的等角轨线,即一条斜驶线.

在三维空间 M_3 中,方程 $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)$ 定义一个球面列,在对它的研究中,它的包络曲面,所谓的**管道曲面**(canal surface),起着重要的作用. 每一个球面列用三个不变量来刻画,它们是这个列中的球面所决定的某些角.

M_2 中的圆汇是用参数表示 $\mathbf{x}=\mathbf{x}(u_1, u_2)$ 给出的,在双曲空间中与它对应的曲面上,将与曲面在点 $\mathbf{x}$ 的切平面正交的直线取为第一类法线,以及第一类法线关于绝对形 K 的极法线取为第二类法线,这样就方便地引入了配极规范化(见[3]). 在 M_3 中,汇的规范化和曲面的规范化相对应: 和每个圆 $\tilde{\mathbf{x}}$ 相配的是和 $\mathbf{x}$ 以及每一个无穷小地接近的圆正交的圆 $\mathbf{x}$, 用来定义圆束的两个圆 $\mathbf{y}_i$ 共轭于圆束 $\{\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}\}$: $\mathbf{y}_i=\partial_i\mathbf{x}$. 在 M_2 上,对应于双曲空间中相伴曲面的不变量也定义了圆汇的不变量,并找出了一些特殊类型的圆汇.

在 M_3 的曲面论中,借助于在每点和曲面的所有切球面正交的正规圆引入曲面的标架; 在各点附以一个共形标架,它是由曲面的一个点 $\mathbf{x}$, 定义正规圆的两个坐标球面 $\mathbf{y}_i$ $(i=1,2)$, $\mathbf{x}$ 的一个切球面 $\mathbf{z}$ 以及这个球面和正规圆的交点 $\mathbf{X}$ 组成的. 在曲面规范化的一般理论中,我们用到共形空间的规范曲面论和双曲空间的绝对形的内配极规范化理论之间的同构. M_n 中一个规范曲面的内几何是一种 Weyl 几何,它的第一基本张量和曲面的角度量张量相同,而第二基本张量是定义球面的支撑坐标的正规化 f.

关于规范曲面得到的结果对于规范共形空间也是成立的.

参考文献

[1] Darboux, G., Lecons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitesimal, 1-4, Gauthier - Villars, 1887-1896.

[2] Blaschke, W., Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einstein's Relativitätstheorie, 3. Differentialgeometrie der Kreisen und Kugeln, Springer, 1929.

[3] Норден, А. П., Пространства аффинной связности, 2 изд, М., 1976.

[4] Бушманова, Г. В., Норден, А. П., Элементы конформной геометрии, Казань, 1972.

Г. В. Бушманова 撰 潘养廉 译

共形 Euclid 空间 [conformal Euclidean space; конформно - Евклидово пространство]

容有到 Euclid 空间上的共形映射的 Riemann 空间. 共形 Euclid 空间的曲率张量有形式

$$R^l_{ijk} = 2T^{lm}_{\cdot\cdot k[i}p_{j]m}, \tag{*}$$

这里

$$T^{km}_{\cdot\cdot ij} = \delta^k_i\delta^m_j+\delta^k_j\delta^m_i-g^{km}g_{ij},$$

$$p_{ij} = \nabla_i p_j-\frac{1}{2}T^{km}_{\cdot\cdot ij}p_k p_m.$$

当 $n=2$ 时,每个 V_n 都是共形 Euclid 空间. 为使 $n>3$ 的空间成为共形 Euclid 空间,必要和充分的是存在张量 p_{ij} 满足条件(*)和 $\nabla_{[k}p_{i]j}=0$. 有时共形 Euclid 空间也称为容有共形映射到 Euclid 空间上的 Weyl 空间(见[2]).

参考文献

[1] Schouten, J. A. and Struik, D. J., Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie, 2. Noordhoff, 1935.

[2] Норден, А. П., Пространства аффинной связности, 2 изд, М., 1976.

Г. В. Бушманова 撰

【补注】 本条目上面定义的概念也称为共形的 Euclid 空间,下面是对这个概念的另一种描述. 设 M 是一个 n

维 Riemann 空间 (Riemannian space),具有 **Riemann 度量**(Riemannian metric) g, Levi-Civita 导子(见 **Levi-Civita 联络**(Levi-Civita connection)) D, **曲率张量**(curvature tensor) R, Ricci 变换(见 **Ricci 张量**(Ricci tensor)) Ric 和**标量曲率**(scalar curvature) K. 那么共形曲率张量(conformal curvature tensor) C (Weyl 曲率张量(Weyl curvature tensor)) 是由下式定义的:

$$C(X, Y)Z = R(X, Y)Z - (X\wedge Y)(L(Z)) - L((X\wedge Y)(Z)),$$

这里

$$L(W) = \frac{1}{n-2}\operatorname{Ric}(W) - \frac{K}{2(n-1)(n-2)}W$$

$$(X\wedge Y)(W) = g(Y, W)X - g(X, W)Y.$$

于是, M 局部地容许到 E^n 的某个开集上的共形映射,当且仅当

1) 当 $n>3$ 时, $C=0$;或

2) 当 $n=3$ 时, $C=0$ 并且 $(D_X L)(Y) = (D_Y L)(X)$.

(例如见[A1];当 $n>3$ 时,对于 L 的"Codazzi 方程"(Codazzi equation)自动满足.)上面给出的方程的坐标表达式可在 J. A. Schouten 的书[A2]中找到.

参考文献

[A1] Yano, K., The theory of Lie derivatives and its applications, North-Holland, 1957.

[A2] Schouten, J. A., Ricci-calculus. An introduction to tensor analysis and its geometrical applications, Springer, 1954.

【译注】 当 $n=3$ 时,共形曲率张量 C 恒为零. 因此,这时 M 容有到 E^3 的某个开邻域上的共形映射,当且仅当 $(D_X L)(Y) = (D_Y L)(X)$.

潘养廉 译 沈一兵 校

共形测地网 [conformal-geodesic net; конформно-геодезическая сеть]

Euclid 空间中二维曲面上的一种网,它容许一个到**测地网**(geodesic net)上的**共形映射**(conformal mapping). 经旋转一个直角后,共形-测地网变成一个**菱形网**(rhombic net),反之亦然.

В. Т. Базылев 撰 潘养廉 译

共形几何学 [conformal geometry; конформная геометрия]

几何学的分支,它研究图形的那些在共形变换(conformal transformation)下不变的性质. 共形几何学中主要的不变量是两个方向之间的角.

共形几何学是定义于增添一个理想无穷远点扩充了的 Euclid 空间上的几何学,且以把球面变为球面的点变换群作为其基本群. 这个空间称为共形空间(conformal space) M_n, 而其基本群称为共形变换群(group of conformal transformations). 在共形空间中,平面是通过无穷远点的球面.

共形几何的这个定义适用于任意维数的 Euclid 空间;在二维情形,可用圆来代替球面. 对于维数 $n\geqslant 3$, 把球面变为球面的变换概括了所有的保角变换(**Liouville 定理**(Liouville theorem)). 对于 $n=2$, 保角变换群要大一些;可是,就是在这种情况下,共形几何学这一名称仍是指具有把圆变为圆的点变换群作为其基本群的几何学.

共形几何学的基本群中每个变换可分解为有限个 Euclid 运动、相似变换和反演.

平面 M_2 的共形几何学的基本群同构于射影群的一子群,即三维射影空间 P_3 的把某一个二阶卵形面(椭圆型二次曲面)变为其自身的射影变换子群,即三维空间的双曲运动群,这使得人们能够应用一个与被用于非 Euclid 几何学中的类似的解析结构于共形几何.

P_3 的每一点由四个齐次坐标 $x_i(i=1,\cdots,4)$ 或由具有这些坐标的伪向量 $\mathbf{x}$ 确定. 设

$$(\mathbf{xy}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4$$

是关于两向量 $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ 的一个形式,且设 K 是 P_3 中由方程 $x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2=0$ 或由 $(\mathbf{xx})=0$ 定义的椭圆型二次曲面. 对于 K 的外部点,有 $(\mathbf{xx})>0$, 对于 K 的内部点,有 $(\mathbf{xx})<0$. 利用绝对形 K, 可以施行**球极平面投影**(stereographic projection), 把绝对形上和其外部的点变为共形平面以及其圆的集合. P_3 的点的坐标 $x_i(i=1,\cdots,4)$ 称为平面 M_2 上点与圆的**四圆坐标**(tetracyclic coordinates). 由于在球极平面投影下,绝对形上的点变为平面中的点,而绝对形外部的点变为平面中的圆,所以具有绝对形 K 的 P_3 中的双曲运动群对应于平面的这种变换群,其变换把点变为点,把圆变为圆,即平面的共形几何学的基本群. 这个群可由下述公式解析地给出:

$$x_k^* = \sum_{l=1}^{4} p_k^l x_l,\ k=1,\ldots,4;\ \det\|p_k^l\|\neq 0,$$

其中 x_i 和 x_i^* 是一点在变换前后的坐标,且具有如下约束,即表达式

$$(\mathbf{xx}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$$

与

$$(\mathbf{x}^*\mathbf{x}^*) = (x_1^*)^2 + (x_2^*)^2 + (x_3^*)^2 - (x_4^*)^2$$

仅相差一个因子. 设

$$e^{ij} = p_1^i p_1^j + p_2^i p_2^j + p_3^i p_3^j - p_4^i p_4^j,$$

则该二次型保持的条件可写为

$$e^{44}=e^{11}=e^{22}=e^{33}=1;\ e^{ij}=0,\text{若}i\neq j.$$

在共形变换下，无穷远点可以变为任一别的点，所以一个圆可以变为一条直线，反之亦然．如果要求无穷远点变为其自身，即直线变为直线，那么这种变换群就是相似变换群（相似扩大(homothety)和Euclid运动）．

P_3中相似子群对应于保持绝对形上某一给定点不动的双曲运动子群．

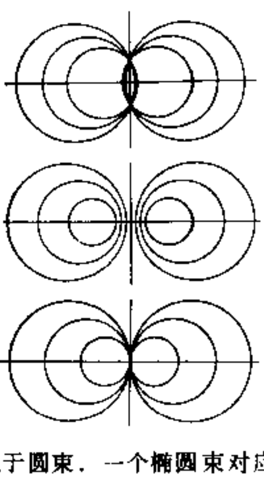
共形变换的另一重要的类是由反演(inversion)组成的．P_3中一个反演对应于一个极透射(polar homology)，即一个双曲运动，在它之下，每对对应点P和P^*位于一直线上，该直线通过绝对形外的某一固定点C，且满足交比条件$(p:p^*:C:N)=-1$，这里N为上述直线与一平面的交点，该平面为C关于绝对形的极面．正如每个双曲运动可由有限个极透射合成一样，任一共形变换可由有限个反演合成．

平面上共形几何学的主要不变量是两圆之间的夹角φ，它由下式

$$\cos^2\varphi=\frac{(\mathbf{xy})^2}{(\mathbf{xx})(\mathbf{yy})}$$

表示，其中$\mathbf{x}$和$\mathbf{y}$是在四圆坐标x_i和$y_i(i=1,\cdots,4)$中对应于两圆的向量．在P_3的双曲几何学中，平面上两圆之间的夹角等于空间中对应于那些圆的点之间的非Euclid距离．角的不变性可由距离的不变性得到．两圆正交的条件是$(\mathbf{xy})=0$，而相切的条件是$(\mathbf{xx})(\mathbf{yy})-(\mathbf{xy})^2=0$．如果其中的一个圆退化为一点，$(\mathbf{xx})=0$，那么点和圆关联的条件为$(\mathbf{xy})=0$．

M_2中最简单的图形是一个圆束，它是由方程$\mathbf{t}=\alpha\mathbf{p}+\beta\mathbf{q}$定义的，其中$\mathbf{p}$和$\mathbf{q}$是该束中的两个固定圆．圆束根据$\Delta=(\mathbf{pp})(\mathbf{qq})-(\mathbf{pq})^2$的符号而成为：a)椭圆的$(\Delta>0)$；b)双曲的$(\Delta<0)$；或c)抛物的$(\Delta=0)$（见图1）．



P_3中的直线对应于圆束．一个椭圆束对应于一条不与绝对形相交的直线，一个双曲束对应于一条与绝对形相交的直线，一个抛物束对应于一条与绝对形相切的直线．由于P_3中的每条线有一共轭线，所以M_2中每个束有一共轭束．属于平面共形几何的基本群的变换由复变量的分式线性函数给出．

在三维空间M_3的共形几何中，主要的对象是点和球，它们由五球坐标(pentaspherical coordinates) $x_i(i=1,\cdots,5)$或由五维空间中的伪向量$\mathbf{x}$定义．球之间的夹角由与平面上圆之间的夹角同样的公式来定义．

M_3中最简单的图形是：球束$\mathbf{w}=\alpha\mathbf{y}+\beta\mathbf{z}$，球的两参数丛$\mathbf{w}=\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}+\gamma\mathbf{z}$，球的三参数丛$\mathbf{w}=\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}+\gamma\mathbf{z}+\delta\mathbf{t}$．

M_3中的一个圆由一个椭圆型球束定义，即由公式

$$\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{2}\alpha^i\mathbf{x}_i$$

在附加条件

$$(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_1)(\mathbf{x}_2\mathbf{x}_2)-(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2)^2>0$$

下定义．由球$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$确定的圆与球$\mathbf{y}$之间的夹角θ，用公式

$$\cos^2\theta=\frac{A^{\alpha\beta}(\mathbf{x}_\alpha\mathbf{y})(\mathbf{x}_\beta\mathbf{y})}{(\mathbf{yy})}$$

定义，其中$A^{\alpha\beta}$是由$A_{\alpha\beta}=(\mathbf{x}_\alpha\mathbf{x}_\beta)$ $(\alpha,\beta=1,2)$形成的行列式的元素的余子式，圆对

$$\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{2}\alpha^i\mathbf{x}_i\quad\text{和}\quad\tilde{\mathbf{x}}=\sum_{i=1}^{2}\beta^i\tilde{\mathbf{x}}_i$$

有绝对不变量

$$k=\frac{s^2}{A\tilde{A}}\quad\text{和}\quad h=\frac{1}{2}A^{ij}\tilde{A}^{kl}S_{ik}S_{jl},$$

其中

$$A_{ij}=(\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j),\ \tilde{A}_{ij}=(\tilde{\mathbf{x}}_i\tilde{\mathbf{x}}_j),\ A=\det\|A_{ij}\|,$$
$$\tilde{A}=\det\|\tilde{A}_{ij}\|,\ S_{ij}=(\mathbf{x}_i\tilde{\mathbf{x}}_j).$$

对于每个圆对可以从其束的分支中选择两个主球．后者由如下性质定义，即由这些球表示的束满足条件$A_{11}=A_{22}=\tilde{A}_{11}=\tilde{A}_{22}=1$，$A_{12}=\tilde{A}_{12}=0$，$S_{12}=S_{21}=0$．这两个束本身则按下式由这些球所决定：

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}_1\cos\varphi+\mathbf{x}_2\sin\varphi,\ \tilde{\mathbf{x}}=\tilde{\mathbf{x}}_1\cos\varphi+\tilde{\mathbf{x}}_2\sin\varphi,$$

其中$\varphi(\varphi_1)$是球$\mathbf{x}_1(\mathbf{x}_2)$和球$\tilde{\mathbf{x}}_1(\tilde{\mathbf{x}}_2)$之间的夹角．如果角$\theta_1$和$\theta_2$是第一个圆的主球和第二个圆的主球的夹角，则称角$\theta_1$和$\theta_2$为这两个圆的主角（它们与第二个圆的主球和第一个圆的主球相交的角相同）．一圆对的不变量用主角表示如下：

$$k=\cos^2\theta_1\cos^2\theta_2,\ h=\frac{1}{2}(\cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2).$$

主角 θ_1 和 θ_2 定义了第一个圆的球与第二个圆的球形成的角的极值. 如果 $\theta_1=\theta_2$, 那么对应于圆对所有的球, $\theta=\theta_1=\theta_2$; 这样的一对圆称为等角的. 两个圆的相互位置可用圆对不变量: a)环绕 $(1-2h+k>0)$; b)分离 $(1-2h+k<0)$; 或 c)相交 $(1-2h+k=0)$(见图 2)及球 x_i 和 x_j 的线性独立条件来表征. 对于一个



图 2

圆对的等角性, 其充要条件是 $h^2-k=0$.

在共形几何学中,数学分析方法的使用导致了**共形微分几何学** (conformal-differential geometry) 的产生. 具有**共形联络** (conformal connection) 的空间的几何学是基于共形几何学来构造的, 并且这种几何学与共形几何学的关系和 Riemann几何学与 Euclid几何学的关系一样. 下面的术语也是对共形几何学的习惯叫法: 反演半径的几何学 (geometry of inverse radii), 圆几何学 (circular geometry), 反演几何学 (inversion geometry), 以及 Möbius 几何学 (Möbius geometry) (得名于首先研究圆变换几何学的 A. Möbius).

参考文献

[1] Klein, F., Vorlesungen über höhere Geometrie, Springer, 1926.

[2] Blaschke, W., Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einstein's Relativitätstheorie, 3. Differentialgeometrie der Kreisen und Kugeln, Springer, 1929.

[3] Бушманова, Г. В., Норден, А. П., Элементы конформной геометрии, Казань, 1972.

Г. В. Бушманова 撰

【补注】 [A1] 给出了二维 Möbius 几何的一个详尽无遗的论述.

参考文献

[A1] Schwerdtfeger, H., Geometry of complex numbers, Dover, reprint, 1979.

杨 路、张景中、侯晓荣 译

共形映射 [conformal mapping; конформное отображение]

使无穷小图形形状保持不变的连续映射.

基本概念 n 维 Euclid 空间 $(n\geqslant 2)$ 中的区域 G 到 n 维Euclid 空间的连续映射 $w=f(z)$ 称为在点 $z_0\in G$ 共形的, 如果该映射在该点具有保角性和伸缩不变性. $w=f(z)$ 在 z_0 的伸缩不变性 (property of constancy of dilation) 是指当 z 以任何方式趋于 z_0 时, 点 z 与 z_0 的象点 $f(z)$ 与 $f(z_0)$ 间的距离同 z 与 z_0 间的距离之比 $|f(z)-f(z_0)|/|z-z_0|$ 趋于一个确定的极限 $k=k(z_0,f)$. 数 k 称为所给映射在 z_0 点的伸缩系数 (coefficient of dilation). $w=f(z)$ 在 z_0 的保角性 (preservation (conservation) of angles) 是指在 G 内点 z_0 交成角 α 的任何两条连续曲线 l_1, l_2 (即它们在 z_0 点的切线构成角 α) 在所给映射下变成的一对连续曲线 L_1, L_2, 在 $w_0=f(z_0)$ 交成相同的角 α. 区域 G 的连续映射称为共形的, 如果它在该区域的每一点都共形. 按照定义, 区域 G 的共形映射只要求在 G 的内点连续并且共形; 当说到关于闭区域的共形映射时, 作为一条规定, 是指在内点共形的闭域上的连续映射.

在最重要的 $n=2$ 的情形, 区域 G 及其在映射 f 下的象 $f(G)$ 位于一个平面上, 为方便将平面视为复数 z 平面 $\mathbf{C}$; 于是, $w=f(z)$ 是复变量 $z\in G$ 的复值函数. 而且, 若 $w=f(z)$ 在点 z_0 保角, 则以 z_0 为顶点的曲线交角在该映射下或者大小和符号都保持不变, 或者保持其大小而改变其符号. 在第一种情形, 称该映射在 z_0 点为第一类共形的 (conformal of the first kind), 在第二种情形称为第二类共形的 (conformal of the second kind). 若函数 $w=f(z)$ 在 z_0 点确定一个第二类共形映射, 则复共轭映射 $w=\overline{f(z)}$ 在 z_0 为第一类共形映射, 其逆亦然. 因此, 只需研究第一类共形映射, 而且这也表明当说到共形映射时, 不必具体指明它们的类.

如果映射 $w=f(z)$ 在 z_0 共形, 那么当 $z\to z_0$ 时, 比值 $(f(z)-f(z_0))/(z-z_0)$ 趋于一个有限的极限, 即导数 $f'(z_0)$ 存在. 补充假定 $f'(z_0)\neq 0$, 则逆命题亦成立.

因此, 若 $f'(z_0)$ 存在并且非零, 则在 $w=f(z)$ 映射下从 z_0 出发每个无穷小向量伸张 $k(z_0,f)=|f'(z_0)|$ 倍, 旋转一个角 $\arg f'(z_0)$, 并按照向量 $f(z_0)-z_0$ 作位移; 以 z_0 为心的无穷小圆盘变成无穷小圆盘.

映射 $w=f(z)$ 在复平面 $\mathbf{C}$ 的区域 G 内共形, 当且仅当函数 $f(z)$ $(z\in G)$ 在 G 内解析且 $f'(z)\neq 0$. 欲映射 $w=f(z)$ 在区域 G 内共形 (或 $f(z)$ 解析), 只需 $f(z)$ 连续并且在每点 $z\in G$ 具有保角性 (即保持角度大小和符号不变的性质) 就够了. 如果转而要求连续映射 $w=f(z)$ $(z\in G)$ 单叶 (即一一对应) 并且在每一点具有伸缩不变性, 那么该映射是第一或第二类共形映射, 因此 $f(z)$ 或 $\overline{f(z)}$ 是在 G 的每一点具有非零导数的解析函数. 对于 $f(z)$ 在 $z_0\in\mathbf{C}$ 的某邻域内解析的情形, 下列三性质等价: a) $w=f(z)$ 在 z_0 是 (第一类) 共形映射; b) $f(z)$ 在 z_0 是 (局部) 单叶函数; c) $f'(z_0)\neq 0$. 区域 G 内的每一单叶解析函数 $f(z)$ 把 G 映射为具有相同连通数的区域 $f(G)$; 而且反函数 $f^{-1}(z)$ 是 $f(G)$ 内具有非零导数的单叶解析函数. 亦有非单叶共形映射 (例如, $w=z^4$ 是半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 内的非单叶共形映射; $w=e^z$ 是整个 $\mathbf{C}$ 上的非单叶共形映射).

平面共形映射理论及应用的首要问题是通过单叶

共形映射把一给定区域映射为另一区域的可能性问题，而在实用上则表现为用相对比较简单的函数实现这种映射的可能性问题．对于具有不退缩为一点的非空边界的单连通域的情形，前一个问题已由 Riemann 映射定理 (Riemann mapping theorem) 作了肯定的解答(见 **Riemann 定理**(Riemann theorem))．通过应用单复变初等函数(见下文)，把半平面或圆盘映射为多边形的 **Christoffel - Schwarz 公式** (Christoffel - Schwarz formula)，以及应用**反射原理** (reflection principle) 与共形映射的近似方法，对某些特殊类型的区域第二个问题亦已解决．按照 Riemann 映射定理，扩充复平面内所有具有不退缩为一点的非空边界的单连通域共形等价．对于多连通域的共形映射，其情形就大不相同．由于某个区域 G_1 到另一区域 G_2 的单叶共形映射一一连续并且具有连续的逆映射，为使这样的映射存在，G_1 和 G_2 必须有相同的连通数，即两者同为单连通或二连通等等，或同为无限连通．然而这个必要条件并不充分，这一点在单连通域情形已十分明显．例如，圆盘 $|z|<1$ 不可能被单叶共形地映射为有限平面 $\mathbf{C}$．同样，扩充复平面 $\overline{\mathbf{C}}$ 不可能单叶共形映射成圆盘 $|z|<1$ 或平面 $\mathbf{C}$ (事实上，在后两种情形甚至不可能找到拓扑映射)．在多连通区域的情形，其状况甚至更为严重．例如，圆环 $G_1=\{z:r_1<|z|<R_1\}$ 可单叶共形映射成另一圆环 $G_2=\{z:r_2<|z|<R_2\}$，$r_1>0$，$r_2>0$，当且仅当两圆环相似，即 $R_1/r_1=R_2/r_2$；在这种情形，G_1 到 G_2 的每个共形映射都是形如 $e^{i\beta}r_2z/r_1$ 的整线性函数，其中 β 是实数．尽管如此，扩充复平面内每个具有非空边界的有限连通域 G 均可单叶共形映射为具有相同连通数并包含点 ∞ 的所谓典型域 (canonical domains)，即具有有限条水平裂纹的扩充复平面；去掉有限个不相交闭圆盘的扩充复平面；或除去一些具有给定倾角 θ 的闭对数螺线弧的扩充复平面．此处的单个裂纹、圆盘和螺线弧可以退化为点．如果要求一给定点 $a\in G$ 在这样的一个映射下对应于 ∞ 且当 $z\to a$ 时对 $a\neq\infty$ 有关系式 $f(z)=(z-a)^{-1}+O(z-a)$，对 $a=\infty$ 有关系式 $f(z)=z+O(1/z)$，那么在前两种典型域的情形，映射函数 $w=f(z)$ 存在且唯一确定，并称为典型共形映射 (canonical conformal mapping)．对于无限连通域，类似的定理也成立．

由有限个不相交圆周(此处将直线视为半径无穷大的圆周)围成的区域 G_1 到同类区域 G_2 上的每个单叶映射都是**分式线性映射** (fractional - linear mapping)．在解析函数论中，也研究由解析函数作成的具有不同连通数的区域间的非单叶映射．这包括：圆盘到多连通区域的共形映射；n 连通区域到 n 叶圆盘的映射；以及更为一般的，一个 **Riemann 曲面** (Riemann surface) 到另一个 Riemann 曲面的映射．

在共形映射的理论及应用中，关于共形映射的所谓正规化条件 (normalization conditions) 或唯一性条件 (uniqueness conditions) 起着重要作用．这些条件使之有可能从一给定区域到另一区域(单连通区域的情形)或一给定区域到特定类型的典型区域(任意连通域的情形)的共形映射无穷族中挑选出一个唯一的函数．对于分别具有不退化为点的非空边界 Γ_1，Γ_2 的区域 G_1，G_2，最通用的正规化条件是：1) 给定的有穷点 $a\in G_1$ 对应于给定的有穷点 $b\in G_2$，$\arg f'(a)=\alpha$，α 是预先指定的实数，$0\leqslant\alpha<2\pi$ (见关于共形映射的 **Riemann 定理**(Riemann theorem))；2) 给定点 $a\in G_1$ 对应于给定点 $b\in G_2$，并且 G_1 的一个给定的可达边界点 ζ_1 (素端，边界元或**极限元** (limit elements))；**可达边界点** (attainable boundary point) 对应于 G_2 的给定可达边界点(素端) ω_1 (见**共形映射的边界性质** (conformal mapping, boundary properties of a))；或 3) 区域 G_1 的三个给定的不同可达边界点(素端) ζ_1，ζ_2，ζ_3 分别对应于区域 G_2 的给定可达边界点(素端) ω_1，ω_2，ω_3，其中当沿着 Γ_1 从 ζ_1 经 ζ_2 到 ζ_3 时若区域 G_1 位于其左边(或右边)，则沿 Γ_2 从 ω_1 经 ω_2 到 ω_3 时区域 G_2 也必须位于其左边(或右边)．后两种规范化类型多半用于由闭 Jordan 曲线围成的区域，因为在这种情形，区域的可达边界点与素端的概念都等价于区域的边界点．关于任意连通域到典型域的映射的正规化条件已在上文作过讨论．

对于 $n\geqslant3$，n 维 Euclid 空间中区域的共形映射形成一个十分狭窄的所谓 Möbius 映射 (Möbius mappings) 类，其中的每个映射或者是线性相似映射，或者是这种线性相似映射同**反演** (inversion，即关于空间中某个球面的对称变换，或反半径映射) 的合成 (Liouville 定理 (Liouville theorem))．对于 $n\geqslant2$，一个值得注意的更大的映射类由所谓**拟共形映射** (quasi - conformal mapping) 组成．在这类映射下，无穷小图形的形状有了偏差，但这种偏差是有限度的．特别地，角度的大小有了有限度的改变；同样，无穷小球变成无穷小椭球，其长短轴之比有界．

二维区域的共形映射起着很大的作用，不单是平面上的区域，亦指位于光滑曲面上的区域，这种共形映射的例子可以由球面到平面的**球极平面投影** (stereographic projection) 与 Mercator 投影给出．它们是在制图学中被发现与应用的(见**制图学中的数学问题** (cartography, mathematical problems in)；**制图投影** (cartographic projection))．应当指出，在那个时代，曲面共形映射问题的提出，以其一般形式引出一般曲面论的开端与发展．共形映射在函数论、位势理论、数学物理方程的边值问题的解、以及首先是关于

Laplace 与 Poisson 方程的第一边值问题的解等方面找到了广泛的应用.

某些单连通域的共形映射. 复平面中区域的伸缩、旋转与平移是通过形如 $w=az+b$ 的整线性函数实现的. 半平面、圆盘与圆盘的外部彼此之间的单叶共形映射是通过分式线性变换实现的. 此处, 任意给定这种区域之一 G_1 边界上三个不同的点 ζ_1, ζ_2, ζ_3 (其编号使得围绕 G_1 的边界从 ζ_1 经 ζ_2 到 ζ_3 时 G_1 位于其左), 及另一这种区域 G_2 的边界上三个不同的点 ω_1, ω_2, ω_3 (作类似的编号), 则存在唯一的分式线性变换 $w=L(z)$ 把 G_1 单叶共形映射为 G_2 并具有第三型规范化条件: $L(\zeta_k)=\omega_k$, $k=1, 2, 3$. 该函数可从方程

$$\frac{w-\omega_1}{w-\omega_2}:\frac{\omega_3-\omega_1}{\omega_3-\omega_2}=\frac{z-\zeta_1}{z-\zeta_2}:\frac{\zeta_3-\zeta_1}{\zeta_3-\zeta_2}$$

求出. 如果点 $\omega_k=\infty$ 或点 $\zeta_k=\infty$ 出现在表达式中, 相应的每个分子和分母须代之以数 1. 特别地, 单位圆盘 $D=\{z:|z|<1\}$ 到自身的映射的一般形式为

$$w=L_1(z)=e^{i\alpha}\frac{z-a}{1-\overline{a}z},$$

而上半平面 $P=\{z:\operatorname{Im}z>0\}$ 到该圆盘的映射的一般形式为

$$w=L_2(z)=e^{i\alpha}\frac{z-c}{z-\overline{c}}.$$

其中 a 和 c 分别是 0 在这些映射下的原象, 且 $\alpha=\arg L_1'(a)=\arg L_2'(c)$, $0\leqslant\alpha<2\pi$. 数值 a ($|a|<1$), c ($\operatorname{Im}c>0$), α ($0\leqslant\alpha<2\pi$) 均可预先任意给定. 因此, 单位圆盘与上半平面到单位圆盘的单叶共形映射的上述一般形式, 使之可用简单的方法给出第一型正规化条件. $b=0$ 的第二型正规化也容易满足, 只要应用上述具有给定 a (或 c) 的一般形式, 接着从给定边界点 ζ 和 ω 的对应条件选定因子 $e^{i\alpha}$.

实现单位圆盘到自身或上半平面到自身的映射的正规化的简单性, 可作为下面具有广泛应用的方法的基础, 借助于此可研究具有非空非退化边界的任意区域 G_1, G_2 间单叶共形映射的正规化. 即把两个区域 G_1 和 G_2 分别设法借助于某函数 $w=f_1(z)$ 和 $w=f_2(z)$ 单叶共形地映射为 D (或 P), 于是具有某种正规化条件的 G_1 到 G_2 的映射问题就归结为寻求 D (或 P) 到自身具有相应正规化条件的分式线性变换 $w=L(z)$. 若函数 L 已求得, 则 $f(z)=f_2^{-1}(L(f_1(z)))$ 就是原问题的解. 考虑到这一点, 下面将只讨论种种区域到单位圆盘 D 或上半平面 P 的单叶共形映射而不带任何正规化条件.

1) 函数 $w=e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$ 把水平带域 $\{z=x+iy:0<y<\pi\}$ 映射为上半平面. 该函数把水平直线 $y=c$ 映射成射线 $\operatorname{Arg}w=c$, 把竖直线段 $\{x+iy: x=d, \alpha\leqslant y\leqslant\beta\}$ 映射成圆弧 $\{w:|w|=e^d, \alpha\leqslant\operatorname{Arg}w\leqslant\beta\}$.

2) 函数 $w=\tan z$ 把竖直带域 $\{x+iy: -\pi/4<x<\pi/4\}$ 映射为圆盘 D. 此处竖直线 $x=c$, $-\pi/4\leqslant c\leqslant\pi/4$, 对应于以 i 和 $-i$ 为端点的圆周的"子午线"弧, 穿过点 $w=\tan c$; 而水平线段 $\{x+iy: -\pi/4\leqslant x\leqslant\pi/4, y=d\}$ $(-\infty<d<\infty)$ 对应于正交于"子午线"的圆周的"纬线"弧, 连结单位圆周的左半与右半部分并穿过点 $z=i\tanh d$.

3) 函数 $w=\sin z$ 把半带域 $\{x+iy:-\pi/2<x<\pi/2, y>0\}$ 映射为 P. 此处水平线段对应于以 -1, $+1$ 为焦点的椭圆弧, 而竖直线段则对应于有同样焦点的双曲线弧.

4) 扇形 $V_\alpha=\{z:0<\arg z<\alpha\}$ $(0<\alpha\leqslant2\pi)$ 到扇形 $V_\beta=\{z:0<\arg z<\beta\}$ $(0<\beta\leqslant2\pi$ $(V_\pi=P))$ 的映射函数

$$w=\exp\left\{\frac{\beta}{\alpha}\ln z\right\}=$$

$$=|z|^{\beta/\alpha}\left\{\cos\left[\frac{\beta}{\alpha}\arg z\right]+i\sin\left[\frac{\beta}{\alpha}\arg z\right]\right\}$$

是函数 $w=z^{\beta/\alpha}$ 的一个单值解析分支. 此处射线 $\arg z=c$ 对应射线 $\arg w=\beta c/\alpha$, 并且圆周 $|z|=d$ 的弧对应于圆周 $|w|=d^{\beta/\alpha}$ 的弧.

5) 由两条圆弧或一条圆弧与一条直线段组成的以 a 和 b $(a\neq b)$ 为顶点的月牙形的内部或外部可用如下方法映射为 P. 首先用分式线性映射 $w_1=(z-a)/(z-b)$ 把所给区域映射为以 0 为顶点的扇形 V, 然后用旋转某个角 γ: $w_2=e^{i\gamma}w_1$ 把 V 映射为 V_α (见上文 4)), 随后作 4) 中 $\beta=\pi$ 的变换.

6) 用解析函数 (见 **Жуковский 函数** (Zhukovskii function))

$$w=\frac{1}{c}(z+\sqrt{z^2-c^2})$$

的一个单值分支 (以条件 $|w|<1$ 选取之), 可将具有焦距 $c=\sqrt{a^2-b^2}>0$ 的椭圆 $(x^2/a^2)+(y^2/b^2)=1$ 的外部映射为圆盘 $|w|<c/(a+b)$; 用其另一分支 (以条件 $|w|>1$ 选定之) 可将该区域映射为区域 $|w|>(a+b)/c$. 同样的这两个分支分别把具有裂纹 $[-c, c]$ 的扩充平面 $\overline{\mathbf{C}}$ 映射为单位圆周 $|z|=1$ 的内部和外部. 椭圆内部不可能通过初等函数的复合映射成 D 或 P; 该映射可通过初等函数与椭圆正弦 $\operatorname{sn}z$ 的复合实现.

7) 用函数

$$w=\left\{e^{-i\gamma}\frac{1}{c}(z+\sqrt{z^2-c^2})\right\}^{\pi/(\pi-2\gamma)},$$

可将具有焦距 $c=\sqrt{a^2+b^2}$ 的双曲线 $(x^2/a^2)-(y^2/b^2)=1$

两分支间的区域 G 映射成 P，其中函数 $t=z+\sqrt{z^2-c^2}$ 在 G 内的单值解析分支由条件 $\operatorname{Im} t>0$ 选定，$\gamma=\arctan(b/a)$，

$$\zeta^{\pi/(\pi-2\gamma)} = |\zeta|^{\pi/(\pi-2\gamma)}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{\pi-2\gamma}\arg\zeta\right)\right.$$

$$\left.+i\sin\left(\frac{\pi}{\pi-2\gamma}\arg\zeta\right)\right\}.$$

该双曲线右叶的内部可用解析函数

$$i\cosh\left(\frac{\pi}{2\gamma}\cosh^{-1}\frac{z}{c}\right)$$

的单值分支映射成上半平面，其中 $\cosh^{-1}\zeta$ 表示方程 $\cosh\omega=\zeta$ 属于带域 $\{z:0<\operatorname{Im}z<\pi\}$ 并添加上正实半轴的(唯一)解.

8) 抛物线 $y^2=2px$ 的外部到 P 的映射可通过函数

$$w = \sqrt{z-\frac{p}{2}}-i\sqrt{\frac{p}{2}}$$

的一个单值解析分支来实现，该分支系由条件 $\operatorname{Im} w>0$ 选定，即函数

$$w = \sqrt{\left|z-\frac{p}{2}\right|}\left\{\cos\frac{1}{2}\arg\left(z-\frac{p}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+i\sin\frac{1}{2}\arg\left(z-\frac{p}{2}\right)\right\}-i\sqrt{\frac{p}{2}},$$

其中的平方根取正值. 该抛物线的内部到 P 的映射可通过单值解析函数

$$w = i\cosh\pi\sqrt{\frac{z}{2p}-\frac{1}{4}}$$

来实现，其中

$$\sqrt{\zeta} = \sqrt{|\zeta|}\left\{\cos\frac{1}{2}\arg\zeta+i\sin\frac{1}{2}\arg\zeta\right\}.$$

9) 矩形 $Q=\{x+iy:-a<x<a,0<y<b\}$ 可用椭圆正弦映射为 P，而 P 到 Q 的映射则可由函数

$$w = c\int_0^z\frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}}$$

的一个单值解析分支实现，其中 k 依赖于比值 a/b，c 依赖于量 a/K，此处

$$K = \int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

参考文献

[1] Лаврентьев, М. А., Шабат, Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, 4 изд., М., 1973 (中译本: М. А. 拉甫伦捷夫, Б. В. 沙巴特, 复变函数论方法, 高等教育出版社, 上册, 1956, 下册1957).

[2] Голузин, Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966 (中译本: Г. М. 戈鲁辛, 复变函数的几何理论, 科学出版社, 1956).

[3] Келдыш, М. В., 《Успех матем. наук》, 6 (1939), 90–109.

[4] Привалов, И. И., Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.-Л., 1950 (中译本: И. И. 普里瓦洛夫, 解析函数的边界性质, 科学出版社, 1956).

[5] Лаврентьев, М. А., Конформные отображения с приложениями к некоторым вопросам механики, М.-Л., 1946.

[6] Koppenfels, V. and Staiman, F., Praxis der konformen Abbildung, Springer, 1959.

[7] Лаврик, В. И., Савенков, В. Н., Справочник по конформным отображениям, К., 1970.

[8] Фильчакова, В. П., Конформные отображения областей специального типа, К., 1972.

[9] Carathéodory, C., Conformal representation, Cambridge Univ. Press, 1932.

[10] Бицадзе, А. В., Основы теории аналитических функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1972.

[11] Лаврентьев, М. А., Шабат, Б. В., Проблемы гидродинамики и их математические модели, 2 изд., М., 1977.

Е. П. Долженко 撰

【补注】 关于共形映射的构造亦见[A1]. 在第一流的著作[A2], [A3], [A7]中对平面共形映射理论作了出色的阐述，其中也给出了一些特殊映射.

参考文献

[A1] Gaier, D., Konstruktive Methoden der konformen Abbildung, Springer, 1964.

[A2] Nehari, Z., Conformal mapping, Dover, reprint, 1952.

[A3] Tsuji, M., Potential theory in modern function theory, Chelsea, reprint, 1975.

[A4] Cohn, H., Conformal mapping on Riemann surfaces, Dover, reprint, 1980.

[A5] Kober, H., Dictionary of conformal representation, Dover, reprint, 1952.

[A6] Courant, R., Dirichlet's principle, conformal mapping and minimal surfaces, Wiley (Interscience), 1950, With appendix by M. Schiffer: Some recent developments in the theory of conformal mapping.

[A7] Bieberbach, L., Conformal mapping, Chelsea, reprint, 1964 (译自德文).

杨维奇 译

共形映射的边界性质[**conformal mapping, boundary properties of a; конформных отображений граничные свойства**]

把复平面内一区域共形映射成另一区域的函数在被映射区域边界上及边界邻近的性质．在这些性质中有：把给定区域 G_1 共形映射为区域 G_2 的函数 $w=f(z)$ 连续延拓到 G_1 的边界 Γ_1 的某点 ζ 或整个边界 Γ_1 的可能性；在这种延拓不可能的情况下的不连续性特征；经延拓的映射在边界点 $\zeta\in\Gamma_1$ 的共形性；经延拓的函数在 Γ_1 上及闭区域 $\overline{G}_1=G_1\cup\Gamma_1$ 上的可微性或光滑性特征；或映射函数的导数对于 G_1 中各种解析函数族的类属关系，等等．这些性质是同 G_1 和 G_2 的边界性质联系在一起加以研究的．共形映射的最一般的边界性质之一断言：对任何单连通区域 G_1 和 G_2 及 G_1 到 G_2 上的任一单叶共形映射 $w=f(z)$，该映射按照如下意义建立了两区域的素端（见**极限元**（limit elements））间的一一对应：即该映射把位于 G_1 内确定 G_1 的某个素端 ζ 的所有等价路径组成的类变成位于 G_2 内确定 G_2 的某个素端 ω 的所有等价路径组成的类（逆映射 $z=f^{-1}(w)$，$w\in G_2$，则把确定 ω 的路径等价类变成确定 ζ 的路径等价类）．而且，依照特定的拓扑，f 确定了区域 G_1 连同它的素端（要求同点 $z\in G_1$ 一起都成为一拓扑空间中的点）到区域 G_2 连同它的素端的同胚．通常考虑 G_1 和 G_2 之一是单位圆盘 $D=\{z:|z|<1\}$ 的情形（偶尔是半平面或扇形域）；一般情形可归结为这种特殊情形．

设 $w=f(z)$ 是具有边界 $C=\{z:|z|=1\}$ 的圆盘 D 到具有边界 Γ 的有界区域 G 上的单叶共形映射，设 $z=\varphi(w)$ 是它的逆映射：$\varphi(f(z))=z$，$z\in D$．则有如下结果．

1) 为使 $w=f(z)$ 可连续延拓到点 $\zeta\in C$，其必要充分条件是，在这一映射下 G 的对应于 ζ 的素端是第一类素端（即由单个点组成）．为使 $z=\varphi(w)$ 可连续延拓到点 $\omega\in\Gamma$，其必要充分条件是，ω 是仅仅一个素端的组成部份（更确切地说，是 G 的仅仅一个素端的支撑的组成部份）．若 Γ 是一条闭 Jordan 曲线，则 f 可连续延拓到 C 上，φ 可连续延拓到 Γ 上，因此经延拓的函数实现闭区域 $\overline{D}$ 和 $\overline{G}$ 之间的一一双向连续映射（同胚）．

在下文中，Γ 表示一条 Jordan 曲线，并且假定函数 f 和 φ 分别被延拓到 C 和 Γ．

2) 若 Γ 是可求长的闭 Jordan 曲线，则边界函数 $f(\zeta)$ $(\zeta\in C)$ 和 $\varphi(\omega)$ $(\omega\in\Gamma)$ 是绝对连续函数．因此，$\omega=f(\zeta)$ $(\zeta\in C)$ 和 $\zeta=\varphi(\omega)$ $(\omega\in\Gamma)$ 都把边界零测度集变成边界零测度集．函数 $f(z)$ 关于闭圆盘 $\overline{D}$ 在几乎每个点 $\zeta\in C$ 处有有限的非零导数，同时 $\varphi(\omega)$ 在几乎每个点 $\omega\in\Gamma$ 处有有限的非零导数．因而这些映射在各自的区域的几乎每个边界点处是共形的（即具有保角性和伸缩比的不变性）．函数 $f'(z)$ 属于 Hardy 类 H^1．

3) 设 Γ 是可求长的闭 Jordan 曲线且具有如下性质：对于任何不同两点 $\omega_1,\omega_2\in\Gamma$，它们分 Γ 为两段弧，其中较短弧的长度与这两点的距离 $|\omega_1-\omega_2|$ 之比具有上界 d，d 是某个与 ω_1 和 ω_2 无关的量．则 $f(z)$ 在 D 上满足阶为 $2(1+d)^{-2}$ 的 Hölder 条件．

4) 设 Γ 是光滑的闭 Jordan 曲线．固定一点 $\omega_2\in\Gamma$ 对于 $-\infty<s<\infty$，一条长度为 $|s|$ 的弧沿着 Γ 依照关于 G 的正向（当 $s>0$ 时）或负向（当 $s<0$ 时）从该点发出．设 $\omega(s)$ 是这条弧的终点，设 $\tau(s)$ 是在点 $\omega(s)$ 处的切线正向与实轴正向间的夹角（选取 $\tau(s)$ 的值使得函数 $\tau(s)$ 连续）．若对于某个 $p=0,1,\cdots$，存在导数 $\tau^{(p)}(s)$ 满足某个正数阶 $\alpha<1$ 的 Hölder 条件，则函数 $f^{(p+1)}(z)$ 连续并且在闭圆盘 $\overline{D}$ 上满足同一阶 α 的 Hölder 条件，而且在 $\overline{D}$ 上 $f'(z)\neq 0$；函数 $\varphi^{(p+1)}(w)$ 连续并且在 $\overline{G}$ 上满足阶 α 的 Hölder 条件，而且在 $\overline{G}$ 上 $\varphi'(w)\neq 0$．

参考文献

[1] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968（中译本：А. И. 马库雪维奇，解析函数论，高等教育出版社，1957）．

[2] Collingwood, E. F. and Lohwater, A. J., The theory of cluster, sets, Cambridge Univ. Press, 1966.

[3] Привалов, И. И., Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М., 1966（中译本：И. И. 普里瓦洛夫，解析函数的边界性质，科学出版社，1956）．

[4] Голузин, Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966（中译本：Г. М. 戈鲁辛，复变函数的几何理论，科学出版社，1956）．

[5] Warschawski, S. E., On differentiability at the boundary in conformal mapping, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **12** (1961) 4, 614–620.

[6] Kellogg, O. D., Harmonic functions and Green's integral, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **13** (1912), 1, 109–132.

[7] Долженко, Е. П.,《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **29** (1965), 1069–1084.

Е. П. Долженко 撰　杨维奇 译

共形半径[**conformal radius; конформный радиус**]，关于区域的

单连通区域共形映射的一个特征，其定义如下：设 D 是 z 平面内的单连通区域，其边界点多于一个，z_0 是 D 内一点．若 $z_0\neq\infty$，则存在唯一的函数 $w=f(z)$ 在 D 内全纯，满足规范化条件 $f(z_0)=0$，$f'(z_0)=1$，并把 D 单叶映射成圆盘 $\{w:|w|<r\}$．该圆盘半径 $r=r(z_0,D)$ 称为 D **关于 z_0 的共形半径**．若 $\infty\in D$，则存在唯一的函数 $w=f(z)$ 在 D 内除 ∞ 点外全纯，在 ∞ 点一邻域内有形如

$$f(z)=z+c_0+c_1z^{-1}+\cdots$$

的 Laurent 展开式，并把 D 单叶映射成区域 $\{w:$

$|w|>r\}$. 在这种场合，称量 $r=r(\infty, D)$ 为 D 关于无穷远点的共形半径. 当 $\infty\in D$ 时，D 关于无穷远点的共形半径等于 D 的边界 C 的**超限直径** (transfinite diameter)，并且等于集 C 的**容量** (capacity).

区域的共形半径的概念在复平面内任意区域情形的推广是区域 D 关于一点 $z_0\in D$ 的内半径概念 (在苏联以外的文献中，"内半径"一词最初用于单连通区域的情形). 设 D 是 z 平面上一区域，z_0 是 D 内一点，且假定区域 D 以 z_0 为极点的 Green 函数 $g(z, z_0)$ 存在. 设 γ 是区域 D 关于 z_0 点的 Robin 常数 (Robin constant)，即

$$\gamma=\begin{cases}\lim\limits_{z\to z_0}[g(z, z_0)+\ln|z-z_0|] & 对\quad z_0\neq\infty,\\ \lim\limits_{z\to\infty}[g(z,\infty)-\ln|z|] & 对\quad z_0=\infty.\end{cases}$$

量 $r=e^{\gamma}$ 称为区域 D 关于 z_0 点的内半径 (interior radius). 若 D 是单连通区域且其边界至少含有两个点，则 D 关于 $z_0\in D$ 的内半径就等于 D 关于 z_0 点的共形半径. 当区域增大时其内半径不减：即若区域 D 和 D_1 分别具有 Green 函数 $g(z, z_0)$ 和 $g_1(z, z_0)$, $z_0\in D$, $D\subset D_1$，则它们在 z_0 点的内半径 r 和 r_1 满足如下不等式

$$r\leqslant r_1.$$

任意区域 D 关于点 $z_0\in D$ 之内半径则定义为所有包含于 D，含有 z_0，且 Green 函数存在之区域在 z_0 的内半径的集合的最小上界. 根据这一定义，若 D 没有广义的 Green 函数，则 D 在 $z_0\in D$ 的内半径 r 等于 ∞.

参考文献

[1] Голузин, Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966 (中译本: Г. М. 戈鲁辛，复变函数的几何理论，科学出版社，1956).

[2] Смирнов, В. И., Лебедев, Н. А., Конструктивная теория функций комплексного переменного, М.-Л, 1964 (英译本: Smirnov, V. I. and Lebedev, N. A., Functions of a complex variable: constructive theory, M. I. T., 1968).

[3] Hayman, W. K., Multivalent functions, Cambridge Univ. Press, 1958. Г. В. Кузьминс 撰

【补注】 在 [A2] 中，z 平面内紧连通集 E 的共形半径定义为它的余集关于无穷远点的共形半径(如上文所定义). 若 E 被包含于半径为 r 的圆盘内且其直径 $d\geqslant r$，则

$$\rho\leqslant r\leqslant 4\rho,$$

此处 ρ 是它的共形半径(依 [A2] 中的意义，见 [A2]).

参考文献

[A1] Tsuji, M., Potential theory in modern function theory, Chelsea, reprint, 1975.

[A2] Duren, P. L., Univalent functions, Springer, 1983.

杨维奇 译

共形空间 [conformal space; конформное пространство]

由增添了一个理想无穷远点的 **Euclid** 空间的扩充空间 M_n. 在**共形几何学** (conformal geometry) 中考虑到这种空间. 对应于这个空间的基本群由球面 (M_2 中的圆) 变为球面的点变换组成. 通过**球极平面投影** (stereographic projection)，共形空间 M_n 被映射成具有双曲度量的空间 P_{n+1} 的绝对形 K_n. 共形几何学的基本群同构于空间 P_{n+1} 的双曲运动群.

理想点的存在保证了球极平面投影是一一对应的. 在共形群的变换下，理想点可以变为平常点. 因此，在共形空间中，球面与平面可不加区分：平面乃是通过理想点的球面.　　Г. В. Бушманова 撰

【补注】 共形几何学也称作 Möbius 几何学 (Möbius geometry)，P_{n+1} 的绝对形也称为 P_{n+1} 的绝对二次曲面 (absolute quadric).

关于 M_2 的几何学的更多论述可在 [A1] 中找到.

参考文献

[A1] Schwerdtfeger, H., Geometry of complex numbers, Dover, reprint, 1979. 杨 路、张景中、侯晓荣 译

共形结构 [conformal structure; конформная структура]

1) 向量空间 V 上的共形结构是 V 上两两位似的 Euclid 度量类 K. V 上的任一 Euclid 度量 g 定义一个共形结构

$$K=\mathbf{R}^+g=\{\lambda g:\lambda>0\},$$

称为由 Euclid 度量 g 诱导的共形结构. V 的自同构 A 称为共形结构 K 的自同构 (automorphism of the conformal structure)，是指双线性型空间上的诱导变换保持集合 K. 一个共形结构的自同构群同构于线性共形群

$$CO(n)=\mathbf{R}^+\times O(n),\quad n=\dim V,$$

它是正数乘法群与正交群的直积.

2) 流形上的共形结构是切空间上的共形结构场. 即流形 M 上的对称双线性型丛的子丛 $\pi: K\to M$，其纤维 $K_p=\pi^{-1}(p)$ 是对应切空间 T_pM 上的共形结构. 丛 π 是拓扑平凡的且其任何截面 g (产生 M 上的 Riemann 度量) 由下式唯一地定义一个共形结构：

$$K_p=\{\lambda g_p:\lambda>0\}.$$

截面 g 称为从属于共形结构 K 的 Riemann 度量 (Riemannian metric). 该丛的任何别的截面 g_1 有形式

$g_1=fg$，这里f是M上的正函数，即Riemann度量g_1和g是共形等价的．因此，一个共形结构也可定义为一个共形等价的Riemann度量类．流形M上的一个共形结构K可等同于M上的$CO(n)$结构B，它由M上所有至少关于一个从属于K的Riemann度量标准正交的标架组成．一个共形结构的主要性质由如下事实确定，即一个$CO(n)$结构B是一个二阶G结构：它的第一个扩张是B上的一个$\mathbf{R}$结构$B^{(1)}\to B$，而第二个扩张是$B^{(1)}$上的一个e结构(一标架场)．因而特别地可知，K的自同构群(它与任一从属于K的Riemann度量的共形变换群相同)是维数$\leqslant(n+1)(n+2)/2$的李群．而在第二阶切空间中它的稳定子群的迷向表示是一一的．

一般说来，一个共形结构K的自同构群与某一从属于它的Riemann度量的运动群相同．仅有的例外是球面S^n和Euclid空间E^n上由标准Riemann度量生成的标准共形结构K_0．流形M上的共形结构称为局部平坦的，指它局部等价于Euclid空间E^n的标准共形结构K_0，即任一点$p\in M$的一个邻域内存在一个从属于K的平坦Riemann度量．一个共形结构是**局部平坦的**(locally flat)充要条件是，某个(因而任一个)从属于它的Riemann度量的Weyl共形曲率张量为零．局部平坦共形结构的例子是，Euclid空间E^n中、球面S^n上、Лобачевский空间Λ^n中，以及由这些标准度量生成的空间$\Lambda^{n_1}\times S^{n_2}$，$\Lambda^n\times E^1$中的标准共形结构．在具有一可迁自同构群的单连通流形上，所有局部平坦的共形结构都是以这种方式考虑的．在球面S^n上标准共形结构K_0是仅有的具有一极大(在维数意义下)自同构群的共形结构．赋予共形结构K_0的球面S^n称为**共形空间**(conformal space)．

共形结构的概念与M上的**共形联络**(conformal connection)的概念密切相关：这样的一个联络总定义M上的一个共形结构；另一方面，一个共形联络是由所给共形结构定义的约化主丛上的联络．

参考文献

[1] Kobayashi, S., Transformation groups and differential geometry, Springer, 1972.

[2] Sternberg, S., Lectures on differential geometry, Prentice - Hall, 1964.

[3] Кимельфельд, Б. Н.,《Матем заметки》, 8 (1970), 3, 321－328.

[4] Алексеевский, Д. В.,《Матем сб.》, 89 (1972), 2, 280－296.

Д. В. Алексеевский, Ю. Г. Лумисте 撰
杨 路、张景中、侯晓荣 译

共形变换 [**conformal transformation**；**конформное преобразование**]

——共形映射(conformal mapping)．$n>2$时，n维Euclid空间的共形变换构成$(n+1)(n+2)/2$参数共形群．

М. И. Войцеховский 撰 杨维奇 译

共形不变度量 [**conformally - invariant metric**；**конформно - инвариантная метрика**]，Riemann曲面R上的一个规则，它使把一个参数邻域$U\subset R$映射到闭复平面$\overline{\mathbf{C}}$中的局部参数$z:U\to\overline{\mathbf{C}}$对应于一个实值函数

$$\rho_z: z(U)\to[0,+\infty)$$

使得对所有的局部参数$z_1:U_1\to\overline{\mathbf{C}}$及$z_2:U_2\to\overline{\mathbf{C}}$，当交$U_1\bigcap U_2$非空时，有以下关系式：

$$\frac{\rho_{z_2}(z_2(p))}{\rho_{z_1}(z_1(p))}=\left|\frac{dz_1(p)}{dz_2(p)}\right|\quad(\forall p\in U_1\bigcap U_2),$$

其中$z(U)$是在z下U在$\overline{\mathbf{C}}$中的象．一个共形不变度量通常记为$\rho(z)|dz|$，它反映了关于局部参数z的选取的上述不变性．

每个线性微分$\lambda(z)dz$(或**二次微分**(quadratic differential) $Q(z)dz^2$)可诱导一个共形不变度量$|\lambda(z)|\cdot|dz|$(或$|Q(z)|^{1/2}|dz|$)．作为定义共形不变量的一个很一般的形式，共形不变度量的概念使人们能够导出R上曲线长度的概念和极值长度及曲线族的模的概念(见**极值度量方法**(extremal metric, method of)和[1])．共形不变度量的定义可移植到任意维的Riemann簇上．

参考文献

[1] Jenkins, J. J., Univalent functions and conformal mappings, Springer, 1958.

[2] Schiffer, M., Spencer, D. C., Functionals of finite Riemann surfaces, Princeton Univ. Press, 1954.

[3A] Ahlfors, L. V., The complex analytic structure of the space of closed Riemann surfaces, in Analytic functions, Princeton Univ. Press, 1960, 45－66.

[3B] Ahlfors, L. V., On quasiconformal mappings, *J. d'Anal. Math.*, 3 (1954), 1－58.

[3C] Ahlfors, L. V., Correction to On quasiconformal mappings, *J. d'Anal. Math.*, 3(1954), 207－208.

[3D] Bers, L., Quasiconformal mappings and Teichmüller's theorem, in Analytic functions, Princeton Univ. Press, 1960, 89－119.

[3E] Bers, L., Spaces of Riemann surfaces, in J. A. Todd (ed.): Proc. Internat. Congress Mathematicians Edinburgh, 1958, Cambridge Univ. Press, 349－361.

[3F] Bers, L., Simultaneous uniformization, *Bull. Amer Math. Soc.*, 66(1960), 94－97.

[3G] Bers, L., Holomorphic differentials as functions of moduli, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 67(1961), 206－210.

П. М. Тамразов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Ahlfors, L. V., Lectures on quasiconformal mappings, v. Nostrand, 1966. 陈志杰 译

同余式 [congruence; сравнение]

两个整数 a 与 b 之间形如 $a=b+mk$ 的关系，表示两数之差 $a-b$ 能被一个给定的正整数 m 整除，m 称为这个同余式的模 (modulus (或 module) of a congruence)，a 称为 b 关于模 m 的剩余（见**整数的剩余** (remainder of an integer)）．为表示 a 与 b 关于模 m 同余，使用记号

$$a \equiv b \pmod{m},$$

这个式子称为同余式．如果差 $a-b$ 不能被 m 整除，则 a 与 b 称为模 m 不同余，为表示 a 与 b 不同余，使用记号

$$a \not\equiv b \pmod{m},$$

同余式 $a \equiv b \pmod{m}$ 表示 a 与 b 被 m 除时有相同的余数．

以一个固定的 m 为模的同余式是一个等价关系：它是自反的，因为 $a\equiv a \pmod{m}$；它是对称的，因为由 $a\equiv b \pmod{m}$ 即得 $b\equiv a \pmod{m}$；它还是传递的，因为由 $a\equiv b \pmod{m}$ 和 $b\equiv c \pmod{m}$ 即得 $a\equiv c \pmod{m}$．于是，关系"$\equiv \pmod{m}$"把所有整数的集合分成一些两两不相交的等价类 $A, B, \cdots$．两个整数属于同一个类，当且仅当它们关于模 m 同余．这些类称为模 m 的剩余类 (residue classes modulo m)．每个整数关于模 m 恰与数 $0, \cdots, m-1$ 中的一个同余，数 $0, \cdots, m-1$ 属于不同的类，因此恰好有 m 个剩余类，而数 $0, \cdots, m-1$ 构成这些类的一组代表元．任一组包含每个剩余类中一个数的 m 个整数皆称为一个模 m 的完全剩余系 (complete residue system modulo m)．

以同一个数为模的同余式与通常的等式一样可以进行加、减及乘法运算，即由

$$a \equiv b \pmod{m} \quad 和 \quad c \equiv d \pmod{m}$$

可得

$$a\pm c \equiv b\pm d \pmod{m} \quad 和 \quad ac \equiv bd \pmod{m}.$$

同余式的两边可乘以同一个整数，也可除以一个公因子，只要这个因子与该同余式的模互素．如果 d 是同余式两边的数与该同余式的模 m 的一个公因子，那么用 d 去除就得到一个以 m/d 为模的同余式．

同余式的加法、减法及乘法运算诱导出剩余类的类似运算．因此，若 a 与 b 分别是剩余类 A 与 B 的任意元，则 $a+b$ 恒属于同一个剩余类，称之为剩余类 A 与 B 的和 (sum) $A+B$．两个剩余类 A 与 B 的差 $A-B$ 及积 $A\cdot B$ 可同样定义．模 m 的全体剩余类对加法构成一个 m 阶 Abel 群．这个群的零元是由数 m 的所有倍数组成的类；类 A 的负（逆）元是 A 的所有元素取负号所组成的类．此外，模 m 的全体剩余类对上面定义的加法、减法和乘法运算构成一个环．

设 $F(x_1, \cdots, x_n)$ 是 n 个变量的整系数多项式．形如

$$F(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0 \pmod{m} \qquad (*)$$

的方程称为**同余方程** (congruence equation)．未知数 $x_1, \cdots, x_n$ 所取的任何一组整数值 $a_1, \cdots, a_n$ 称为同余方程(*)的一个解，如果 $F(a_1, \cdots, a_n)$ 对模 m 同余于零．如果 $a_i (1\leqslant i\leqslant n)$ 对模 m 属于剩余类 X_i，那么另外的任何一组 $a_i' \in X_i (1\leqslant i\leqslant n)$ 也是这个同余方程的一个解．因此，我们就把以 $a_1, \cdots, a_n$ 为代表元的那组剩余类称为同余方程(*)的一个解，即是代数方程 $F(x_1, \cdots, x_n)=0$ 在模 m 的剩余类环中的一个解．根据这一约定，模 m 的完全剩余类环中有多少组剩余类满足方程 $F(x_1, \cdots, x_n)=0$，就说同余方程(*)有多少个解．更一般形式的同余方程的解数以及同余方程组的解数，均可同样地来定义．

一次同余方程

$$ax \equiv b \pmod{m},$$

当 a 与 m 互素（记为 $(a, m)=1$）时，有唯一解．对模 m，那些元素与 m 互素的剩余类关于乘法构成一个 Abel 群．这个群的单位元是包含数 1 的类 E，而类 A 的逆元是由同余方程

$$ax \equiv 1 \pmod{m}, \quad 其中\ a\in A$$

的解组成的类 A^{-1}．

由与 m 互素的元素组成的模 m 的剩余类称为既约剩余类 (reduced residue class)，而包含每个既约剩余类中一个数的任何一组数称为一个既约剩余系 (reduced residue system)．一个既约剩余系由 $\varphi(m)$ 个元素组成，$\varphi(m)$ 是 **Euler 函数** (Euler function)，它等于集合 $1, \cdots, m$ 中与 m 互素的元素个数．

由模 m 的既约剩余类组成的乘法群的构造已由 L. Euler 和 P. Fermat 的定理作了相当透彻的说明，这些定理表明：这个群的任何元素的阶可整除 $\varphi(m)$．

Euler 定理 (Euler theorem)．如果 a 与 m 互素，那么

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}.$$

这一定理对素数模的一个特例是 **Fermat 小定理** (Fermat little theorem)：如果 p 是素数且 a 不能被 p 整除，那么

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

研究既约剩余类的乘法群时用的一个重要概念是模 m 的**原根**(primitive root). 当 $(a,m)=1$ 时,存在正整数 γ 使 $a^\gamma\equiv 1(\mathrm{mod}\ m)$,例如可取 $\gamma=\varphi(m)$. 这种正整数中最小者称为数 a 对模 m 所属的指数.

属于指数 $\varphi(m)$ 的数(如果有这样的数存在的话)称为模 m 的原根(primitive root modulo m). 如果 g 是一个模 m 的原根,而 γ 取遍模 $\varphi(m)$ 的一个完全剩余系,那么 g^γ 取遍模 m 的既约剩余系. 因此,若 $(a,m)=1$,则对集合 $0,\cdots,\varphi(m)-1$ 中某个 γ,同余式 $a\equiv g^\gamma\ (\mathrm{mod}\ m)$ 成立. 此 γ 称为数 a 模 m 关于底 g 的指数,并用符号 $\mathrm{ind}\,a$(更确切地,用 $\mathrm{ind}_g a$)来表示. 指数的性质与对数的性质很相似. 原根仅对形如 $2,4,p^\alpha$ 以及 $2p^\alpha$ 的模 $m>1$ 才存在,其中 $p\geqslant 3$ 为素数而 $\alpha\geqslant 1$ 为整数. 在这些情形,模 m 的既约剩余类的乘法群即为 $\varphi(m)$ 阶循环群. 在其他情形,既约剩余类群的构造要复杂得多.

数论中许多问题可归结为某种类型的同余方程是否可解. 因此,首先由 C. F. Gauss (见[5])系统建立起来并用来作为经典数论之基础的同余式理论,迄今已成为求解数论问题的基本工具之一. 就这一点来说,同余方程解数问题的研究对数论有极为重要的意义. 最简单类型的同余方程是含有一个未知数的一次同余方程 $ax\equiv b\ (\mathrm{mod}\ m)$. 一次同余方程的解数问题由如下的定理所完全解决. 设 $(a,m)=d$,那么当 b 不能被 d 整除时,同余方程 $ax\equiv b(\mathrm{mod}\ m)$ 无解; 而当 b 是 d 的倍数时,这个同余方程恰有 d 个解.

以素数 $p>2$ 为模的线性同余方程组

$$\sum_{j=1}^{t} a_{ij}x_j\equiv b_i\ (\mathrm{mod}\,p),\quad i=1,\ldots,t$$

的可解性问题可以用任意域上的线性方程的一般理论来彻底解决. 合数模的情形可以化为素数模的情形.

按照研究的复杂性,**二项同余式**(two-term congruence)

$$x^n\equiv a\ (\mathrm{mod}\ m),\ 当(a,m)=1时$$

是接下来要讨论的含一个未知数的代数同余方程. 如果同余方程 $x^n\equiv a\ (\mathrm{mod}\ m)$ 有解,则 a 称为模 m 的 n 次幂剩余(n-th power residue modulo m); 如果无解,则 a 称为模 m 的 n 次幂非剩余(n-th power non-residue modulo m). 特别地,当 $n=2$ 时,剩余或非剩余称为是二次的(quadratic),当 $n=3$ 时称为三次的(cubic),而当 $n=4$ 时,称为双二次的(bi-quadratic).

以合数 $m=p_1^{\alpha_1}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 为模的同余方程

$$f(x)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,m)$$

的解数问题可化为同余方程 $(i=1,\cdots,s)$

$$f(x)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,p_i^{\alpha_i})$$

的解数问题. 首先,下面的定理成立: 如果 $m_1,\cdots,m_r$ 是两两互素的正整数,那么同余方程 $f(x)\equiv 0(\mathrm{mod}\ m_1\cdots m_r)$ 的解数 N 可以用诸 $N_i\ (i=1,\cdots,r)$ 的值按照公式 $N=\prod_{i=1}^{r}N_i$ 表出,这里 N_i 等于相应同余方程 $f(x)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ m_i)$ 的解数. 其次,同余方程

$$f(x)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,p^\alpha),\quad \alpha>1$$

的解数问题,一般说来,可化为同余方程 $f(x)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p)$ 的解数问题,这里 p 是一个素数. 下述定理是这种转化的基础: 同余方程 $f(x)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,p)$ 的每个解 $x\equiv x_1(\mathrm{mod}\ p)$ 可以唯一地确定同余方程 $f(x)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p^\alpha)$ 的一个解 $x\equiv x_\alpha\ (\mathrm{mod}\ p^\alpha)$,只要形式导数 $f'(x_1)\not\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$,即存在同余方程 $f(x)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p^\alpha)$ 的唯一解 x_α,使得 $x_\alpha\equiv x_1\ (\mathrm{mod}\ p)$.

在多元同余方程的情形也有类似的结论,即在非退化情形,以合数 m 为模的同余方程 $F(x_1,\cdots,x_n)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ m)$ 的解数问题可以化为对素数模的同样的同余方程的解数问题.

同余方程 $f(x)\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$ ($f(x)=a_0x^n+\cdots+a_n$, $a_0\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p)$) 的解数的上界由 Lagrange 定理(Lagrange theorem)给出: 同余方程 $f(x)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p)$ 的解数不超过多项式 $f(x)$ 的次数. 一般来说,研究同余方程 $f(x)\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$ 的确切解数问题会遇到相当大的困难,因而迄今为止(1984)在这方面只得到了为数不多的一些结果.

在合数模的情形, Lagrange 定理不再成立. 上面所提到的有关素数的这个特殊性质可用以下的事实来作出解释: 以素数 p 为模的剩余类构成一个域(见**素数模的同余式**(congruence modulo a prime number)). 另一个可用此事实解释的素数的特殊性质表述在 **Wilson 定理**(Wilson theorem)中.

在研究素数模 p 的二次同余方程

$$x^2\equiv a\ (\mathrm{mod}\,p)$$

及其应用中引进了 **Legendre 符号**(Legendre symbol)及 **Jacobi 符号**(Jacobi symbol).

素数模的两个未知数(以及一般来说任意多个未知数)的同余方程

$$F(x,y)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,p)$$

可以作为 p 个元素的有限素域上的方程来处理. 于是,在其研究中既要用到数论的方法,也要用到代数函数论及代数几何的方法. 正是由于用了这些方法,才首次对很广的一类同余方程 $F(x,y)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p)$ 的解数 N_p 得到了形如

$$N_p=p+O(\sqrt{p})$$

的渐近展开式．此后，只利用数论中不超出同余理论范围的方法也导出了同样的渐近展开式(见[6])．

相对来说，人们对多变量的代数同余方程所知甚少．下面的Chevally定理(Chevally theorem)是一个很一般的结果．设$F(x_1,\cdots,x_n)$为一个有理整系数的多项式，其次数小于n．这时，同余方程

$$F(x_1,\ldots,x_n)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\, p)$$

的解数可被素数p整除．有关这种类型问题的一个很强的结果是由P. Deligne ([9])得到的(亦见[10])．

研究同余方程在不完全剩余系中的解数问题也有重要的意义．И. М. Виноградов首先试图对这种类型的问题给出系统的解法(见[4])．这种类型的问题之一例是二次剩余及非剩余在集合$1,\cdots,p-1$中的分布问题，它与同余方程$y^2\equiv x\ (\mathrm{mod}\ p)$的解的研究有关(见**Виноградов 假设**(Vinogradov hypotheses)；**幂剩余和非剩余的分布**(distribution of power residues and non-residues))．

参考文献

[1] Боревич, З. И., Шафаревич, И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972 (英译本：Borevich, Z. I. and Shafarevich, I. R., Number theory, Acad. Press, 1966).

[2] Венков, Б. А., Элементарная теория чисел, М. - Л., 1937.

[3] Виноградов, И. М., Основы теории чисел, 8 изд., М., 1972 (中译本：维诺格拉朵夫，И. М., 数论基础，商务印书馆，1952；高等教育出版社(新一版)，1956).

[4] Виноградов, И. М., Избр. труды, М., 1952 (英译本：Vinogradov, I. M., Selected works, Springer, 1985).

[5] Gauss, C. F., Untersuchungen über höhere Arithmetik, Springer, 1889 (translated from the Latin).

[6] Степанов, С. А., 《Тр. Матем. ин - та АН СССР》, **132** (1973), 237 - 246.

[7] Hasse, H., Zahlentheorie, Akademie - Verlag, 1963.

[8] Chandrasekharan, K., Introduction to analytic number theory, Springer, 1968.

[9] Deligne, P., La conjecture de Weil I. *Publ. Math. IHES*, **43** (1974), 273 - 307.

[10] Katz, N. M., An overview of Deligne's proof of the Riemann hypothesis for varieties over finite fields, Proc. Symp. Pure Math., 28, Amer. Math. Soc., 1976, pp. 275 - 305.

С. А. Степанов 撰

【补注】 联立同余方程组$x\equiv c_i\ (\mathrm{mod}\ m_i)$, $i=1,\cdots,r$，这里对所有$i\neq j$有$(m_i,m_j)=1$，对模$M=m_1\cdots m_r$有唯一的剩余类为其解，这就是**孙子剩余定理**(Chinese remainder theorem)．

在**Hensel 引理**(Hensel lemma)(见[A2])中叙述了从$f(x)\equiv 0(\mathrm{mod}\ P)$的解来得到$f(x)\equiv 0(\mathrm{mod}\ p^a)$的解的具体方法，这已拓广成为**$p$-进数**($p$-adic number)理论中的一种技巧．

参考文献

[A1] Hardy, G. H. and Wright, E. M., An introduction to the theory of numbers, Oxford Univ. Press, 1979, Chapt. 5; 7; 8.

[A2] Koblitz, N., p-adic numbers, p-adic analysis and zeta-functions, Springer, 1977, Chapt. 1.

【译注】

参考文献

[B1] 华罗庚，数论导引，科学出版社，1975.

[B2] 潘承洞、潘承彪，解析数论基础，科学出版社，1990.

张明尧 译　潘承彪 校

同余方程 [**congruence equation**; **сравнение уравнение**]，代数同余式(algebraic congruence)

形如

$$F(x_1,\ldots,x_n)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\, m) \tag{1}$$

的同余式，其中

$$F(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i_1=0}^{m_1}\cdots\sum_{i_n=0}^{m_n}a_{i_1\cdots i_n}x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}$$

是变量$x_1,\cdots,x_n$的、有理整系数$a_{i_1\cdots i_n}$的多项式，而m为整数．量

$$d(i_1,\ldots,i_n)=i_1+\cdots+i_n$$

的最大值称为关于变量组$x_1,\cdots,x_n$的次数或称为(1)的次数(degree)，这里最大值是取在使$a_{i_1\cdots i_n}\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ m)$的所有可能的数组$i_1,\cdots,i_n$上．量$i_s(1\leqslant s\leqslant n)$之最大值称为该同余方程关于变数$x_s$的次数．这里最大值是取在同样的数组$i_1,\cdots,i_n$上的．

同余方程理论中的主要问题是求给定的同余方程的解数．可以把问题限制在素数模的情形，因为对合数模m而言，除了少数退化的情形外，方程(1)的解数问题均可归结为对素数模p的同余方程$F(x_1,\cdots,x_n)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p)$的解数问题，这里$p$是$m$的除数．

研究得最为透彻的一个变量的同余方程$F(x)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p)$是**二项同余式**(two-term congruence)

$$x^n\equiv a\ (\mathrm{mod}\, p),\quad a\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\, p).$$

对一般多项式$F(x)$的情形，同余方程解数的研究极其困难，迄今只得到一些零星的结果．

同余方程组

$$F_i(x_1,\ldots,x_n)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\, p),\ i=1,\ldots,m \tag{2}$$

可以视为由p个元素组成的有限素域$\mathbf{Z}/(p)$上的代数方程组

$$F_i(x_1, \ldots, x_k) = 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

此同余方程组的解数等于由方程组(2)所定义的**代数簇**(algebraic variety)的 $\mathbf{Z}/(p)$ 有理点的个数. 因此，在研究此种同余方程及同余方程组时，在用数论方法的同时，也要用代数几何的方法.

研究得最充分的多变量同余方程是形如

$$F(x, y) \equiv 0 \pmod p$$

的同余方程. 对这种类型的同余方程的解数 N_p，可得到估计式

$$|N_p - p| \leqslant 2g\sqrt{p}, \tag{3}$$

其中 $F(x, y)$ 为一绝对不可约多项式. 常数 g 只与此多项式有关且等于曲线 $F(x, y) = 0$ 的亏格. 1934 年 H. Hasse 对第一个非平凡的情形，即对椭圆型同余方程

$$y^2 \equiv x^3 + ax + b \pmod p,$$

得到了这样的估计，根据的是他的关于曲线 $y^2 = x^3 + ax + b$ 的 **Jacobi 簇** (Jacobi variety) 上的点的加法公式. Hasse 的方法后来被 A. Weil ([4]) 推广到绝对不可约多项式 F 的情形. 在 [3] 中用初等方法也得到了这个估计式.

变量个数 $n \geqslant 3$ 的同余方程的研究还很不充分. 一个一般性的结果是 Chevalley 定理 (Chevalley theorem). 根据这个定理，如果 $F(x_1, \cdots, x_n)$ 是一个次数严格小于变量个数的型，那么同余方程

$$F(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0 \pmod p$$

的解数是正的且能被 p 整除；在非齐次多项式的情形，并不能保证有解存在，但解数能被 p 整除仍然正确，此为 Warning 定理 (Warning theorem). 后一定理已被推广到同余方程组的情形.

同余方程的理论在数论的其他一些分支 (Diophantus 方程论、堆垒数论问题及代数数论等) 中均有大量的应用.

参考文献

[1] Боревич, З. И., Шафаревич, И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972 (英译本: Borevich, Z. I. and Shafarevich, I. R., Number theory, Acad. Press, 1966).

[2] Виноградов, И. М., Основы теории чисел, 8 изд., М., 1972 (中译本: Виноградов, И. М., 数论基础，商务印书馆，1952；高等教育出版社 (新一版)，1956).

[3] Степанов, С. А., 《Труды Матем. ин-та АН СССР》, **132** (1973), 237–246.

[4] Weil, A., Courbes algébriques et variétés abéliennes. Sur les courbes algébriques et les varietés qui s'en deduisent, Hermann, 1948.

С. А. Степанов 撰

【补注】 一个比 Warning 定理(的推广)远为一般的结果已为 P. Deligne 所证明 (1973). 事实上，他证明了有限域的 Riemann 假设 (Riemann hypothesis for finite fields). 此假设是由 Weil 提出 (1948) 的，它与 $\mathbf{Z}/(p)$ 上代数簇的 ζ 函数 (zeta-function) (以及 $\mathbf{Z}/(p)$ 上代数簇上点的计数) 有密切的联系. 关于 Deligne 的证明，对非奇异情形见[A1]，而对奇异情形见[A2]. [A3] 中有关于他的结果 (及证明) 的综述. 对于有限域上的曲线，这一 Riemann 假设的难点在估计式 (3). 此式的一个简单证明见[A4]. $\mathbf{Z}/(p)$ 上曲线上的点数之估计在编码理论中也十分重要.

参考文献

[A1] Deligne, P., La conjecture de Weil, 1, *Publ. Math. IHES*, **43** (1974), 273–307.

[A2] Deligne, P., La conjecture de Weil, 2, *Publ. Math IHES*, **52** (1980), 137–252.

[A3] Katz, N. M., An overview of Deligne's proof of the Riemann hypothesis for varieties over finite fields, *Proc. Symp. Pure Math.*, Vol. 28, Amer. Math. Soc., 1976, pp. 275–305.

[A4] Bombieri, E., Counting points on curves over finite fields, *Sém. Bourbaki*, **430** (1972–1973).

张明尧 译 潘承彪 校

合同(代数学中的) [congruence (in an algebra) ; конгруэнция]

泛代数 (universal algebra) $\mathbf{A} = \{A, \Omega\}$ 上与 Ω 中的所有运算可交换的一个等价关系 π，即 π 满足如下条件：对任意 $a_i, a_i' \in A (i=1, \cdots, n)$ 和任意 n 元运算 $\omega \in \Omega$，如果 $a_i \pi a_i' (i=1, \cdots, n)$，那么 $(a_1, \cdots, a_n \omega) \pi (a_1', \cdots, a_n' \omega)$. 用类似的方式定义代数系统中的合同. 于是，模一个合同 π 的等价类形成与 $\mathbf{A}$ 同型的一个泛代数(代数系统) $\mathbf{A}/\pi$，称 $\mathbf{A}/\pi$ 为模 π 的**商代数** (quotient algebra (或称**商系统** (quotient system))). 从 $\mathbf{A}$ 到 $\mathbf{A}/\pi$ 上的自然映射 (把 A 的元素 a 映射到 A/π 中包含 a 的类 a/π) 是一个满同态. 反之，每一个同态 $\varphi: A \to B$ 确定唯一的一个合同，此合同的类由 B 的元素的原象构成.

在一个泛代数(代数系统)的关系格中，若干个合同 $\pi_i (i \in I)$ 的交是一个合同，一般说来，关系格中的若干个合同的并不是一个合同. 两个合同 π_1 和 π_2 的积 $\pi_1\pi_2$ 是一个合同，当且仅当 π_1 与 π_2 可换，即当且仅当 $\pi_1\pi_2 = \pi_2\pi_1$.

参考文献

[1] Курош, А. Г., Общая алгебра, Лекции ···, М., 1974 (中译本: А. Г. 库洛什，一般代数讲义，上海科学技术出版社，1964)

В. С. Малаховский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Cohn, P. M., Universal algebra, Reidel, 1981.

卢景波 译

全等(几何中的) [**congruence (in geometry)**; **конгруэнтность**]

几何图形(线段,角等)集合中的一个等价关系.它的引进既可是公理式的(见 **Hilbert 公理系统** (Hilbert system of axioms)),也可基于变换群,最通常的是**运动** (motion) 群. 于是,在 Euclid 几何(更一般地在常曲率空间的几何)中,两个图形称为全等的 (congruent),或相等的 (equal),如果一个能经运动而变成另一个.

М И. Войцеховский 撰 虞言林 译

重模 $(p,f(x))$ 的同余式 [**congruence modulo a double modulus** $(p,f(x))$; **сравнение по двойному модулю** $(p,f(x))$]

整系数多项式 $a(x)$ 与 $b(x)$ 之间形如

$$a(x)-b(x) = f(x)g(x)+ph(x)$$

的关系式,其中 p 为素数,而 $f(x)=x^n+\alpha_1x^{n-1}+\cdots+\alpha_n$,$g(x)$ 以及 $h(x)$ 皆为有理整系数多项式. 换言之,具有有理整系数的多项式 $a(x)$ 与 $b(x)$ 称为对重模 $(p,f(x))$ 同余,如果它们的差 $a(x)-b(x)$ 可以被 $f(x)$ 模 p 整除. 用记号

$$a(x) \equiv b(x) \ (\mathrm{mod}(p, f(x)))$$

表示 $a(x)$ 与 $b(x)$ 对重模 $(p,f(x))$ 同余. 这个记号以及重模同余这一概念,都是 R. Dedekind 引进的.

重模同余是所有整系数多项式组成的集合上的一个等价关系,于是就把这个集合分成一些两两不相交的类,称为对于重模 $(p,f(x))$ 的剩余类. 由于每个多项式 $a(x)$ 对重模 $(p,f(x))$ 恰与一个形如

$$\beta_1x^{n-1}+\beta_2x^{n-2}+\cdots+\beta_n$$

的多项式同余,其中 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 相互独立地取遍模 p 的一个完全剩余系,因而恰有 p^n 个模 $(p, f(x))$ 的剩余类.

重模同余式可以与正常同余式同样地相加、相减及相乘. 这些运算诱导出重模剩余类中同样的运算,于是,全体剩余类组成的集合构成一个交换环.

模 $(p,f(x))$ 的剩余类环是系数属于有限素域 K_p 的多项式环 $K_p[x]$ 对于由多项式 $\overline{f}(x)$ 生成的理想 $(\overline{f}(x))$ 的商环,这里 $\overline{f}(x)$ 是由 $f(x)$ 对模 p 化简得到的. 特别当 $f(x)$ 对模 p 不可约时,$(\overline{f}(x))$ 是 $K_p[x]$ 中的一个极大理想,而 $K_p[x]/(\overline{f}(x))$ 是由 p^n 个元素组成的域(它是素域 K_p 的一个 n 次扩张).

如果 $f(x)$ 对模 p 不可约,则对重模同余式有与 **Fermat 小定理** (Fermat little theorem) 类似的结果成立:

$$a(x)^{p^n} \equiv a(x) \ (\mathrm{mod}(p, f(x))),$$

关于 **Lagrange 定理** (Lagrange theorem) 也有类似的结论:系数为整系数多项式之同余方程

$$z^m+a_1(x)z^{m-1}+\cdots+a_m(x) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}(p, f(x))),$$

对模 $(p,f(x))$ 至多有 m 个不同余的解. 由这些定理可以推出

$$x^{p^n}-x = \prod_{d|n}\Phi_d(x) \ (\mathrm{mod}\, p).$$

这里 $\Phi_d(x)$ 是所有关于模 p 不同的、标准的(即首项系数为 1)不可约 d 次多项式的乘积. 如果用 (n) 表示模 p 不同的、标准的不可约 n 次多项式的个数,那么

$$(n) = \frac{1}{n}\sum_{d|n}\mu(d)p^{n/d},$$

其中 $\mu(d)$ 为 **Möbius 函数** (Möbius function),特别地,对任何自然数 n 有 $(n)>0$. 于是,对任何整数 $n>0$,存在由 p^n 个元素组成的有限域 K_q,它是以素数 p 为模的剩余类域 K_p 的 n 次扩域.

参考文献

[1] Венков, Б. А., Элементарная теория чисел, М. - Л., 1937.

С. А. Степанов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hardy, G. H. and Wright, E. M., An introduction to the theory of numbers, Oxford Univ. Press, 1979. Chapts 5; 7; 8.

张明尧 译 潘承彪 校

素数模的同余式 [**congruence modulo a prime number**; **сравнение по простому модулю**]

模是素数的同余式. 素数模的同余式理论的显著特点是模 p 的剩余类组成 p 个元素的一个有限域. 所以素数模的同余式可以作为有限素域上的方程来处理,而且除了数论的方法以外,还可以用代数几何方法进行研究.

对于**代数数论** (algebraic number theory)、编码理论和数学的其他分支有重大意义的含单变量 x 的同余式理论,其基本问题之一是研究分解对素数模 p 的任意整系数多项式为不可约因子

$$f(x) \equiv f_1(x)\cdots f_r(x) \ (\mathrm{mod}\, p)$$

的法则.

以素数 p 为模的有 $n\geqslant 2$ 个变量的同余式理论的第二个基本问题是**同余方程** (congruence equation)

$$f(x_1,\ldots,x_n) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, p)$$

的解的个数问题,其中 $x_i\,(1\leqslant i\leqslant n)$ 彼此独立地变化,或

者遍历整个模 p 剩余类的集合(完全剩余系的问题),或者取值于它的特殊部分(不完全剩余系的问题).

在有二个变量的二次和双二次同余式解数问题的研究方面,最早的结果是由 C. F. Gauss ([1])和 J. L. Lagrange ([2])得到的. E. Artin([3])建立了超椭圆同余式 $y^2 \equiv f(x) (\bmod p)$ 在素数模 p 的完全剩余系上解的个数问题与由他引进的有有限常数域的代数函数域上 ζ 函数的 Riemann 假设之间的联系. 特别是,他宣布了这样的假设,即对于同余式 $y^2 \equiv f(x) \ (\bmod p)$ 的解数 N_p(此处多项式 $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 对模 p 而言,不是另一个多项式的平方),估计式

$$|N_p-p| \leqslant 2\left[\frac{n-1}{2}\right]p^{1/2}$$

成立(其中 $[x]$ 表示实数 x 的整数部分).

Artin 的假设对于椭圆同余式

$$y^2 \equiv x^3+ax+b \ (\bmod p)$$

的情形首先为 H. Hasse([6])所证明. 后来 A. Weil([8])推广 Hasse 的方法到一般的情形,而且得到了方程 $f(x,y)=0$ 在由 $q=p^r$ 个元素组成的域 F_q 的元素中的解数 N_q 的估计

$$|N_q-q| \leqslant c(f)q^{1/2},$$

此处 $f(x,y)$ 是系数在 F_q 中的绝对不可约多项式. Hasse-Weil 的方法很复杂而且需要用到近代抽象代数几何学. 证明 Hasse 和 Weil 的结果的一个简单的纯算术方法可在[7]中找到.

以素数为模的 n 个变量的同余式的研究较少. 下面的定理可以作为一般的结果. 设 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 是整系数绝对不可约多项式. 那么对于同余式

$$f(x_1,\ldots,x_n) \equiv 0 \ (\bmod p), \quad n \geqslant 2$$

的解数 N_p,估计式

$$|N_p-p^{n-1}| \leqslant c(f)p^{n-1-1/2}$$

成立,其中常数 $c(f)$ 不依赖于 p. 更好的结果已由 P. Deligne ([9])得到.

关于素数模的同余式在不完全剩余系上的结果见 **Виноградов 假设**(Vinogradov hypotheses); **二项同余式** (two-term congruence); **幂剩余和非剩余的分布** (distribution of power residues and non-residues).

参考文献

[1] Gauss, C. F., Untersuchungen über höhere Arithmetik, Springer, 1889 (译自拉丁文).

[2] Lagrange, J. L., Démonstration d'un théorème d'arithmétique, in Oeuvres, Vol. 3, Paris, 1869, 189–201.

[3] Artin, E., Quadratische Körper in Gebiete der höheren Kongruenzen II, *Math. Z.*, **19** (1924), 207–246.

[4] Виноградов, И. М., Избр. труды, М., 1952 (英译本: Vinogradov, I. M., Selected works, Springer, 1985).

[5] Hasse, H., Zahlentheorie, Akademie-Verlag, 1963.

[6] Hasse, H., Abstrakte Begründung der komplexen multiplication und Riemannsche Vermutung in Funktionenkörpern, *Abh. Math. Sem. Hamburg Univ.*, **10** (1934), 325–347.

[7] Степанов, С. А., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», **132** (1973), 237–246.

[8] Weil, A., Courbes algébriques et variétés abéliennes. Sur les courbes algébriques et les varietés qui s'en deduisent, Hermann, 1948.

[9] Deligne, P., La conjecture de Weil I, *Publ. Math. IHES*, **43** (1974), 273–307.

С. А. Степанов 撰

【补注】 如果多项式 $f(x,y)$ 在 F_q 的代数闭包 $\overline{F}_q$ 上是不可约的,那么它在 F_q 上是绝对不可约的. 关于在编码理论里出现的有关有限域上的多项式及其因式分解的某些材料见[A1].

参考文献

[A1] MacWilliams, F. J. and Sloane, N. J. A., The theory of error correcting codes, I–II, North-Holland, 1977.

[A2] Hardy, G. H. and Wright, E. M., An introduction to the theory of numbers, Oxford Univ. Press, 1979, Chapts. 5; 7; 8.

戚鸣皋 译 张明尧 校

线汇 {**congruence of lines; конгруэнция прямых**}

三维(射影、仿射或 Euclid)空间中,依赖于两個参数的直线的集合 C. 直线 $l \in C$ 称为线汇的射线 (ray of a congruence). 线汇的阶 (order of a congruence) 是通过空间任一点的线汇中的直线数. 线汇的级 (class) 是在任一平面中的直线数.

可按两种方式将线汇的射线分解成单参数可展曲面(见**可展曲面** (developable surface))族, 使得每条射线 $l \in C$ 有两个可展曲面通过, 它们或是实的且相异(双曲射线 (hyperbolic ray) 的情形), 或是虚的(椭圆射线 (elliptic ray) 的情形), 或是实的且重合(抛物射线 (parabolic ray) 的情形). 射线 $l \in C$ 和这些可展曲面的脊线的切点称为 l 的焦点 (foci). 线汇中射线的焦点组成的曲面称为它的焦曲面 (focal surface). 过线汇中射线 l 的焦曲面的切平面称为 l 的焦平面 (focal plane). 线汇的可展曲面和每个焦曲面交成一个线网, 称为线汇的焦网 (focal net). 每个焦曲面上线的焦网是共轭网. 在双曲区域, 线汇由两个焦曲面的公切线组成; 在椭圆区域, 线汇由两个共轭虚曲面的实公切线组成; 在抛物区域, 线汇由唯一的焦曲面的一族渐近线的切线组成. 线汇中射线的中心 (centre of a ray of a congruence) 是

这条射线的焦点决定的线段的中点.由射线的中心形成的曲面称为线汇的平均曲面(mean surface). 两条邻近的射线 $l(u,v)$ 和 $l'(u+du, v+dv)$ 的公垂线的垂足填满射线 l 上的一个线段,它的端点称为射线的边界点(boundary points).在边界点与公垂线方向垂直的平面称为主平面(principal planes);严格线与射线交于射线边界点的直纹面称为主曲面(principal surfaces).射线的边界点的集合称为边界曲面(boundary surface).

线汇的例子: W 线汇,它的两个焦曲面上的渐近线彼此对应;线性线汇,即空间中与两条称为准线(directrices)的定曲线相交的直线集;法线线汇,即某个曲面的法线集;迷向线汇,即具有不定主曲面的线汇.

和线汇一起被研究的还有(两参数族的)平面汇,锥面汇,二次曲面汇和其他图形的线汇(见**图形的流形**(manifold of figures)).空间中任意线(曲线)汇称为曲线汇(curvilinear congruence).

参考文献

[1] Фиников, С. П., Теория конгруэнций, М. - Л. 1950.

В. С. Малаховский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Darboux, G., Théorie générale des surfaces, 2, Chelsea, reprint, 1972

潘养廉 译

同余问题[congruence problem; конгруэнц. проблема]

G_O 中每个有限指数的子群是否都是**同余子群**(congruence subgroup)? 这里, O 是代数数域 k 中的整数环,见**代数数论**(algebraic number theory),而 G 是 k 上连通的**线性代数群**(linear algebraic group). 以上是同余问题的经典陈述. 它的近代说法基于同余核的概念,这个核衡量与肯定解答的偏离程度. 令 $\hat{G}_O$ 和 $\bar{G}_O$ 分别是 G_O 在由它的所有有限指数的子群和由所有同余子群所定义的拓扑下 O 点的群的完全化. 存在一个连续的满同态 $\pi: \hat{G}_O \to \bar{G}_O$. π 的核称为同余核,用 $c(G)$ 表示. 经典同余问题的肯定解答等价于证明 $c(G)=1$. 用现代的术语, 同余问题是同余核 $c(G)$ 的计算问题.

设 $G_O=\mathrm{SL}(n,\mathbf{Z})$,其中 $\mathbf{Z}$ 是整数环. 19 世纪时已知对 $n=2$,同余问题的回答是否定的. 对 $n>2$, 1965 年证明了 $\mathrm{SL}(n,Z)$ 中有限指数的每个子群都是同余子群(见[1]). 此后,同余问题对于 $G_O=\mathrm{SL}(n,O)$ $(n>2)$ 和 $\mathrm{Sp}(2n,O)$ $(n>1)$ 都得到了解决([1]),这里 Sp 表示辛群. 对这些群其结果如下: $c(G)\neq 1$ 仅对全虚域 k 成立, 这时同余核同构于 k 中单位根的(循环)群. 还可证明除了 SL(2) 外同样结果对单连通 Chevalley 群也成立(见[3]). 单连通条件是本质的, 因为从强逼近定理(见**线性代数群**) 可得出, 非单连通的半单群 G 的同余核 $c(G)$ 是无限群. 对每个非半单群 G, $c(G)=c(S)$, 其中 S 是 G 的极大半单子群, 特别地, 对可解群 G, $c(G)=1$.

同余问题的更一般的形式可以用环

$$O_V=\{x\in k: v(x)\leqslant 1,\ 对一切\ v\notin V\}$$

代替 O 而得到,其中 V 是域 k 的包含所有 Archimedes 范数的不等价范数的任何有限集. 此时, 同余核(用 $c(G,V)$ 表示)本质上依赖于 V (见[4], [5]).

参考文献

[1] Bass, H., Milnor, J. and Serre, J. P., Solution of the congruence subgroup problem for SL_n $(n\geqslant 3)$ and Sp_{2n} $(n\geqslant 2)$, *Publ. Math. IHES*, **33** (1967), 421 - 499.
[2] Serre, J. - P., Le problème des groupes de congruence pour SL_2, *Ann. of Math.*, **92** (1970), 489 - 527.
[3] Matsumoto, H., Sur les sous - groupes arithmétiques des groupes semi - simples dépolyés, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* (4), **2** (1969), 1 - 62.
[4] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 11. М., 1974, 5 - 37 (英译本: Platonov, V. P., Algebraic groups, *J. Soviet Math.*, **4** (1975), 5, 463 - 482).
[5] Raghunathan, M., On the congruence subgroup problem, *Publ. Math. IHES*, **46** (1946), 107 - 161.

В. П. Платонов 撰

【补注】 同余问题通常称为同余子群问题.

石生明 译 许以超 校

同余子群[congruence subgroup; конгруэнц-подгруппа]

环 R 上一般线性群 $\mathrm{GL}(n,R)$ 的具有下列性质的子群 H: 存在 R 的非零双边理想 $\mathfrak{P}$ 使得 $H\supseteq \mathrm{GL}(n,R,\mathfrak{P})$, 其中

$$\mathrm{GL}(n,R,\mathfrak{P}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{GL}(n,R)\to \mathrm{GL}(n,R/\mathfrak{P})),$$

即 H 包含 $\mathrm{GL}(n,R)$ 中与单位矩阵模 $\mathfrak{P}$ 同余的全部矩阵. 更一般地, R 上次数为 n 的线性群 Γ 的子群 H 称为同余子群,如果

$$H \supseteq \Gamma\bigcap \mathrm{GL}(n,R,\mathfrak{P})$$

对某非零双边理想 $\mathfrak{P}\subseteq R$ 成立.

如果

$$H = \Gamma\bigcap \mathrm{GL}(n,R,\mathfrak{P}),$$

则 H 称为对应于 $\mathfrak{P}$ 的主同余子群(principal congruence subgroup). 同余子群的概念首先产生于 $R=\mathbf{Z}$ 的情形. 对于 Dedekind 环 R, 从应用的角度看,特别有效和重要的情形是 $\Gamma=G\bigcap \mathrm{GL}(n,R)$, 其中 G 是 R 的分式域上的代数群.

参考文献

[1] Bass, H., Milnor, J. and Serre, J.-P., Solutions of the congruence subgroup problem for $SL_n(n\geqslant 3)$ and $Sp_{2n}(n\geqslant 2)$, *Publ. Math. IHES*, **33** (1967), 421-499.

В. П. Платонов 撰 石生明 译 许以超 校

多变量同余式 [congruence with several variables; сравнение от нескольких переменных]

同余式

$$f(x_1,\ldots,x_n)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,m), \qquad (1)$$

其中$f(x_1,\cdots,x_n)$是$n(\geqslant 2)$个变量的多项式，具有不全被m除尽的整有理系数．当模$m=p_1^{\alpha_1}\cdots p_s^{\alpha_s}$ ($p_1,\cdots,p_s$是不同的素数)时，这个同余式的可解性等价于同余式

$$f(x_1,\ldots,x_n)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,p_i^{\alpha_i}) \qquad (2)$$

对全部$i=1,\cdots,s$的可解性．因此，(1)的解数N等于乘积$N_1\cdots N_s$，其中N_i是(2)的解数．于是，研究形如(1)的同余式，只需研究模为素数幂的情形就足够了．

要同余式

$$f(x_1,\ldots,x_n)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,p^{\alpha}),\ \ \alpha>1 \qquad (3)$$

可解，必须对素数模p的同余式

$$f(x_1,\ldots,x_n)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,p) \qquad (4)$$

可解．在非退化的情形，(4)的可解性也是(3)的可解性的充分条件．更确切地说，下列命题是正确的：当(4)的每一个解$x_i\equiv x_i^{(\alpha)}(\mathrm{mod}\,p)$使得$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^{(1)},\cdots,x_n^{(1)})\not\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,p)$至少对一个$i=1,\cdots,n$成立时，(3)就有$p^{(\alpha-1)(n-1)}$个解$x_i\equiv x_i^{(\alpha)}(\mathrm{mod}\,p^{\alpha})$，而且$x_i^{(\alpha)}\equiv x_i^{(1)}(\mathrm{mod}\,p)$ ($i=1,\cdots,n$)．

因此，在非退化的情形，模为复合数m时的同余式(1)的解数问题可归结为模为除尽m的素数p的形如(4)的同余式的解数问题．如果$f(x_1,\cdots,x_n)$是一个整有理系数绝对不可约多项式，则对于(4)的解数N_p，估计式

$$|N_p-p^{n-1}|\leqslant C(f)p^{n-1-1/2}$$

成立，其中常数$C(f)$只与f有关而与p无关．由这个估计可知，同余式(4)对于所有大于某一有效可计算的常数$C_0(f)$的素数p是可解的，这一常数依赖于给定的多项式$f(x_1,\cdots,x_n)$ (也见**素数模的同余式** (congruence modulo a prime number))．这个问题的更强的结果已由 P. Deligne ([3])得到．

参考文献

[1] Боревич, З. И., Шафаревич, П. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972 (英译本：Borevich, Z. I. and Shafarevich, I. R., Number theory, Acad. Press, 1966).

[2] Hasse, H., Zahlentheorie, Akademie-Verlag, 1963.

[3] Deligne, P., La conjecture de Weil I. *Publ. Math. IHES*, **43** (1974), 273-307.

С. А. Степанов 撰

【补注】 更多的情况也见**同余方程** (congruence equation)．多项式$f(x_1,\cdots,x_n)$在$\mathbf{Q}$上是绝对不可约的，如果它在$\mathbf{Q}$的任意(代数的)扩域上仍然是不可约的．

戚鸣皋 译 张明尧 校

二次曲线 [conic; коника]，亦称**圆锥曲线**

射影平面、仿射平面或 Euclid 平面内的一个点集，其中的点的齐次坐标(关于某一射影坐标系、仿射坐标系或 Descartes 坐标系)x_0,x_1,x_2满足一个二次方程：

$$F(x)\equiv\sum_{i,j=0}^{2}a_{ij}x_ix_j=0,\ \ a_{ij}=a_{ji}.$$

对称双线性型$\Phi(x,\tilde{x})=\sum_{i,j=0}^{2}a_{ij}x_i\tilde{x}_j$称为$F(x)$的极形式 (polar form)．若两点$M'=(x_0',x_1',x_2')$和$M''=(x_0'',x_1'',x_2'')$满足$\varphi(x',x'')=0$，则称它们关于二次曲线是极共轭的．如果直线$M'M''$与二次曲线相交于$N_1,N_2$两点，且$M',M''$关于该二次曲线是极共轭的，那么$N_1,N_2,M',M''$形成一个调和四元点组．只有二次曲线自身的点才是自共轭的．一条给定直线关于二次曲线的极点(pole)是与此直线的所有点都极共轭的点．与给定点M'关于二次曲线极共轭的点的集合称为M'关于该二次曲线的极线(polar)．在坐标x_0,x_1,x_2下，M'的极线由线性方程$\Phi(x,x')=0$来定义．若$\Phi(x,x')\not\equiv 0$，则M'的极线是一条直线．若$\Phi(x,x')\equiv 0$，则M'的极线是整个平面，在这种情况下，M'位于二次曲线上，且称之为该二次曲线的一个奇点(singular point)　若$R=\mathrm{rank}(a_{ij})=3$，则二次曲线没有奇点，此时就说它是非退化的或不可分解的(不可分裂的)．在射影平面中，这是一条实的或虚的卵形线．一个非退化的二次曲线定义了射影平面上的一个对射变换，即把点集映成直线集的一个双射．非退化二次曲线的切线是其切点的极线．若$R=2$，则二次曲线是一对实的或虚的相交于一奇点的直线．若$R=1$，则二次曲线上的每一点都是奇异的，此时，二次曲线本身是一对重合的实直线(二重线)．二次曲线的仿射性质由它的位置特性及与它关于特异直线$x_0=0$(无穷远直线)相关的点和直线来区分．一条二次曲线是双曲型的、椭圆型的或抛物型的，根据它与上述直线在无穷远处相交($\delta<0$)、不相交($\delta>0$)或相切($\delta=0$)来判定，其中

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

二次曲线的中心(centre)是无穷远直线的极点，直径(diameter)是无穷远点的极线，渐近线(asymptote)是与二次曲线切于无穷远点的切线．两直径称为关于二次曲线共轭，如果它们的无穷远点关于该二次曲线极共轭．

二次曲线的度量性质是从它的仿射性质由两任意点之间距离的不变性来决定的．若二次曲线的一直径与其共轭直径正交，则该直径是二次曲线的对称轴，称它为二次曲线的一条轴．二次曲线的一条准线(directrix)是一个焦点的极线．

参考文献

[1] Фиников, С. П., Аналитическая геометрия, 2 изд., М., 1952.

[2] Ефимов, Н. В., Краткий курс аналитической геометрии, 5 изд., М., 1960.

В. С. Малаховский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Salmon, G., A treatise on conic sections, Longmans, 1879.

[A2] Giering, O., Vorlesungen über höhere Geometrie, Vieweg, 1982.

杨 路、张景中、侯晓荣 译

圆锥曲线 [**conic sections**; **конические сечения**]，亦称二次曲线

直立圆锥与不过其顶点的平面相截而得到的曲线．圆锥曲线可能属于下列三种类型之一：1) 截平面同圆锥的所有母线相交，且只在同一凸半锥的点上相交(图 a)；交线是一封闭的卵形曲线——**椭圆**(ellipse)；当截平面与圆锥的轴垂直时，作为椭圆的一个特殊情况得到一个圆．2) 截平面平行于圆锥的一个切平面(图 b)；交线是一不封闭的伸向无穷远的曲线——**抛物线**(parabola)，且整个地位于一个半锥中．3) 截平面同两个半锥相交（图 c）；交线是一**双曲线**（hyperbola)——是由两个相同的不封闭的伸向无穷远的部分(即双曲线的两个分支(叶))组成的，它们各处于一个半锥上．

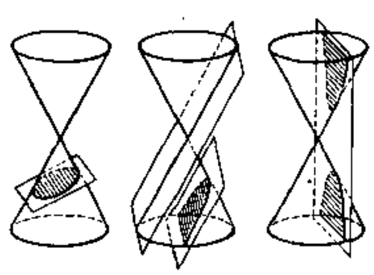


图 a　　图 b　　图 c

从解析几何学的观点来看，圆锥曲线是实的非退化**二次曲线**(second-order curve)．

当圆锥曲线具有对称中心(centre)时，即在椭圆和双曲线的情况下，曲线的方程可以化为(把坐标原点移至中心)下列形式：

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = a_{33}.$$

这类圆锥曲线(所谓有心圆锥曲线(central conic sections))的进一步研究表明，它们的方程还可化为更简单的形式：

$$Ax^2 + By^2 = C, \qquad (*)$$

这只须取坐标轴的方向与圆锥曲线的对称轴即所谓主轴(principal axes)重合即可．如果 A 和 B 具有同样的符号(与 C 同号)，则方程(*)定义一椭圆；如果 A 和 B 具有相反的符号，则方程(*)定义一双曲线．

抛物线的方程不能化为形式(*)．适当选择坐标轴(取抛物线的唯一对称轴作为一个坐标轴，取过抛物线的顶点且垂直于对称轴的直线作为另一个坐标轴)，抛物线方程可以化为下列形式：

$$y^2 = 2px.$$

古希腊的数学家已经知道圆锥曲线．那个时代论述圆锥曲线的最全面的著作是珀加的 Apollonius(大约公元前 200 年)的《圆锥曲线》(Conic sections)．后来在圆锥曲线理论方面所取得的成就，同 17 世纪新的几何方法(射影法(G. Desargues, B. Pascal)，特别是坐标法(R. Descartes, P. Fermat))的发明有关．

再适当选择坐标系(取圆锥曲线的对称轴作为横坐标轴，取过顶点的切线作为纵坐标轴)，圆锥曲线的方程可以化为下列形式：

$$y^2 = 2px + \lambda x^2$$

(其中 p 和 λ 是常数)．如果 $p \neq 0$，则当 $\lambda = 0$ 时它定义一个抛物线，当 $\lambda < 0$ 时定义一个椭圆，当 $\lambda > 0$ 时定义一个双曲线．这个方程给出的圆锥曲线的几何性质，古代几何学家已经知道；珀加的 Apollonius 就是根据这些性质为各类圆锥曲线命名的．这些名称一直沿用到现在："parabola"(希腊文为 $\pi\alpha\rho\alpha\beta o\lambda\eta$)的意思是"应用"(application)(因为在希腊几何学中，把具有给定面积 y^2 的矩形变换成面积相同而具有给定底边 $2p$ 的矩形，称为把给定的矩形"应用"于底边 $2p$)；"ellipse"(希腊文为 $\varepsilon\lambda\lambda\varepsilon\iota\psi\iota\sigma$)的意思是"不足"(deficiency)(带有不足的应用)；"hyperbola"(希腊文为 $\upsilon\pi\varepsilon\rho\beta o\lambda\eta$)的意思是"剩余"(带有剩余的应用)．

随着向现代研究方法的转变，圆锥曲线的立体几何定义被它们作为平面上点的集合的平面几何定义所代

替．例如，把椭圆定义为这样一些点的集合，它们与两给定点(焦点)的距离之和为给定的值．还可给出圆锥曲线的另一个平面几何定义，它概括了所有三种类型的曲线：圆锥曲线是这样一些点的集合，它们与一个给定点(焦点)和一条给定直线的距离之比是一个固定的正数 e (离心率)．如果 $\alpha<1$，则该圆锥曲线为椭圆；如果 $\alpha>1$，则为双曲线；如果 $e=1$，则为抛物线．

参考文献

[1] Александров, П. С., Лекции по аналитической геометрии, М., 1968.

[2] Waerden, B. L. van der, Ontwakende wetenschap, Noordhoff, 1957.

B. И. Битюцков 撰

【补注】 所有圆锥曲线在射影上都是等价的(见射影变换(projective transformation))．圆锥曲线分别为椭圆、抛物线和双曲线，当且仅当它与无穷远直线(见射影平面(projective plane))分别相交于 0, 1, 2 点．

参考文献

[1] Coxeter, H. S. M., Projective geometry, Univ. Toronto Press, 1974.

张鸿林 译 蒋正新 校

锥形网 [conical net；коническая сеть]

在三维空间中曲面上，由曲面的锥形线，即曲面的外切锥面的切线组成的共轭网．具有锥形网的曲面称为 **Peterson 曲面** (Peterson surface)．**迁移网** (transport net)可看作锥形网的特殊情形．锥形网的锥面顶点位于两条曲线上．锥形网至多依赖于四个参数．只有非退化的二次曲面能有四参数族的锥形网．具有两参数锥形网族的曲面是属于一个线性线汇(即两直线的公割线组成的线汇)的直纹面．

参考文献

[1] Бланк, Я. П.,《Тр. геометр. семинара Ин-т науч. информ АН СССР》, 3 (1971), 5－27.

B. T. Базылев 撰 潘养廉 译

锥面 [conical surface 或 cone；коническая поверхность]

通过一给定点(顶点(vertex))且与一给定曲线(准线(directrix))相交的一条直线(母线(generator))运动所形成的曲面．一个锥面由两个空腔组成，它们的位置关于原点是对称的．

二次锥面(second-order cone)是二次曲面(surface of the second order)的一种形式．实二次锥面(real second-order conical surface)的标准方程是

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0;$$

当 $a=b$ 时，这个锥面称为圆锥面(circular conical surface)或旋转锥面(conical surface of rotation)；虚二次锥面(imaginary second-order conical surface)的标准方程是

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0;$$

虚锥面的唯一的实点是(0, 0, 0)．

n 次锥面(n-th order cone)在仿射坐标系 x, y, z 中是由下列方程给出的代数曲面：

$$f(x,y,z)=0,$$

其中 $f(x,y,z)$ 是 n 次齐次多项式(变量 x,y,z 的 n 次形式)．如果点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处于锥面上，则直线 OM 也处于锥面上(O 是坐标原点)．反之亦然：由通过一个点的直线所组成任何代数曲面都是锥面．

A. Б. Иванов 撰 张鸿林 译

函数的共轭类 [conjugate class of functions；сопряженный класс функций]

具体反映函数空间中的对偶性(duality)的函数论概念．这样，如果一个函数类 X 被看成是 Banach 空间或拓扑向量空间，那么函数的共轭类就被定义为等距同构于对偶空间 X^* 的函数类．例如，当 $1\leqslant p<\infty$ 且 $1/p+1/q=1$ 时，存在空间 $(L_p[a,b])^*$ 和 $L_q[a,b]$ 之间的等距同构，在这一同构下，对应的元素 x^* 和 g 由下式相联系：

$$x^*(f)=\int_a^b g(x)f(x)\,dx.$$

如果考虑某个在 $[-\pi,\pi]$ 上可和的 2π 周期函数类 X，那么函数的共轭类被定义为共轭于 X 中的函数的函数类．例如，共轭于 $L_p[-\pi,\pi]$ $(1<p<\infty)$ 的函数类重合于满足

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=0$$

的 $L_p[-\pi,\pi]$ 中的函数 f 的类．共轭于 Lip α $(0<\alpha<1)$ 的函数类重合于 Lip α 中的满足 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=0$ 的函数类．

参考文献

[1] Fréchet, M., *C. R. Acad. Sci.*, **144** (1907), 1414－1416.

[2] Riesz, F., *C. R. Acad. Sci.*, **144** (1907), 1409－1411.

[3] Priwaloff, I., *Bull. Soc. Math. France*, **44** (1916), 100－103.

[4] Бари, Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961 (英译本：Bary, N. K., A treatise on trigonometric series, Pergamon, 1964).

[5] Dunford, N. and Schwartz, J. T., Linear operators general theory, 1, Interscience, 1958.

T. П. Лукашенко 撰 史树中 译

共轭方向 [**conjugate directions**; **сопряженные направления**]

在曲面 S 上从一点 P 出发的一对方向,使得以它们为方向的直线是 S 在 P 的 **Dupin 标形**(Dupin indicatrix)的共轭直径．为了使 S 上一点 P 的方向 $(du:dv)$, $(\delta u:\delta v)$ 是共轭的,下列条件是必要和充分的:

$$L du\delta u + M(du\delta v + dv\delta u) + N dv\delta v = 0,$$

这里 L, M 和 N 是在 P 点计算值的 S 的第二基本形式的系数．例:**主方向**(principal direction)．

参考文献

[1] Погорелов, А. В., Дифференциальная геометрия, 5 изд., М., 1969.

E. B. Шикин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Blaschke, W. and Leichtweiss, K., Elementare Differentialgeometrie, 1, Springer, 1973.

[A2] Hsiung, C. C., A first course in differential geometry, Wiley, 1981, Chapt. 3, Sect. 4.

潘养廉 译

共轭元 [**conjugate elements**; **сопряженный элемент**], 群 G 中的

G 的元素 x 和 x', 对于它们有 G 中某个 g 使得

$$x' = g^{-1}xg,$$

也称 x' 是以 g 对 x 取共轭 (conjugating) 的结果．乘幂记号 x^g 常用来表示 x 被 g 取共轭．

令 A, B 是群 G 的两个子集，则 A^B 表集合

$$\{a^b: a\in A,\ b\in B\}.$$

对于 G 中某固定的 g, 集合 $M^g=\{x^g|x\in M\}$ 称为与 G 中集合 M 共轭的 (conjugate). 特别地,两个子群 U 和 V 称为共轭子群 (conjugate subgroups)，若对 G 中某个 g 有 $U=V^g$. 如果对 G 的每个 $g\in G$, 子群 H 与 H^g 重合 (即 H 由它的全部元素的所有共轭组成), 则 H 称为 G 的**正规子群**(normal subgroup) 或不变子群 (invariant subgroup)，极少时候也称之为自共轭子群．

О. А. Иванова 撰

【补注】

参考文献

[A1] Huppert, B. Endliche Gruppen, 1, Springer, 1967.

[A2] Gorenstein, D., Finite groups, Chelsea, 1980.

石生明 译　许以超 校

共轭函数 [**conjugate function**; **сопряженная функция**]

函数论中的概念,关于相应的函数类的某种对合算子的具体反映．

1) 复值函数 f 的共轭函数是 $\bar{f}$，其取值为 f 所取的值的共轭复数．

2) 关于调和函数的共轭函数,见**共轭调和函数** (conjugate harmonic function)．

3) 以 2π 为周期并在 $[-\pi,\pi]$ 上可积(可和)的函数 f 的共轭函数由

$$\bar{f}(x) = \lim_{\epsilon\to 0+} -\frac{1}{\pi}\int_{\epsilon}^{\pi}\frac{f(x+t)-f(x-t)}{2\tan(t/2)}\,dt$$

给出;上式右边的积分几乎处处存在,且几乎处处与 f 的**共轭三角级数**(conjugate trigonometric series)的 (C,α) 和 $(\alpha>0)$ 及 Abel - Poisson 和相等．

4) 定义于向量空间 Y(关于双线性形式 $\langle x,y\rangle$)的对偶空间 X 上的函数 $f: X\to\overline{\mathbf{R}}$ 的共轭函数是 Y 上由

$$f^*(y) = \sup_{x\in X}(<x,y>-f(x)) \qquad (*)$$

给定的函数．定义在 Y 上的函数的共轭函数以类似的方式定义．

单变量函数 $f_p(x)=|x|^p/p\ (1<p<\infty)$ 的共轭函数由

$$f_q(y) = \frac{|y|^q}{q},\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$$

给出．具有纯量积 $\langle\ ,\ \rangle$ 的 Hilbert 空间 X 上的函数 $f(x)=\langle x,x\rangle/2$ 的共轭函数是 $\langle y,y\rangle/2$．赋范空间上的范数 $N(x)=\|x\|$ 的共轭函数是函数 $N^*(y)$, 它当 $\|y\|\leqslant 1$ 时取零值,当 $\|y\|>1$ 时取 $+\infty$ 值．

如果 f 光滑且在无穷远处以快于任何线性函数的速度递增,则 f^* 恰是 f 的 **Legendre 变换**(Legendre transform)．对于一维严格凸函数、W. H. Young ([1])以另外的方式给出了(*)的等价定义．对于函数

$$f(x) = \int_0^x\varphi(t)\,dt$$

(其中 φ 连续且严格递增), 他用关系

$$f^*(y) = \int_0^y\psi(t)\,dt$$

(其中 ψ 是 φ 的反函数)定义其共轭函数．定义式(*)在一维函数情形由 S. Mandelbrojt 首先提出．在有限维情形由 W. Fenchel(见[2])首先提出，在无穷维情形由 J. Moreau(见[3])和 A. Brøndsted(见[4])首先提出．对于凸函数及其共轭函数，Young 不等式 (Young inequality)

$$<x,y> \leqslant f(x)+f^*(y)$$

成立．

共轭函数是闭凸函数．共轭算子 $^*: f\mapsto f^*$ 建立了 X 上的正常闭凸函数族与 Y 上的正常闭凸函数族之间的一一对应 (Fenchel - Moreau 定理 (Fenchel - Mor-

eau theorem)).

关于细节见[5]和[6].

亦见**凸分析** (convex analysis), **支撑函数** (support function), 极值问题的**对偶性** (duality); **对偶函数** (dual function).

参考文献

[1] Young, W. H., On classes of summable functions and their Fourier series, *Proc. Roy. Soc. Ser. A.*, **87** (1912), 225–229.

[2] Fenchel, W., On conjugate convex functions, *Canad. J. Math.*, **1** (1949), 73–77.

[3] Moreau, J. J., Fonctions convexes en dualité, Univ. de Montpellier, 1962

[4] Brøndsted, A., Conjugate convex functions in topological vector spaces, *Math. Fys. Medd. Danske vid. Sel. sk.* **34** (1964), 2, 1–26.

[5] Rockafellar, R. T., Convex analysis, Princeton Univ. Press, 1970.

[6] Алексеев, В. М., Тихомиров, В. М., Фомин, С. В., Оптимальное управление, М., 1979 (英译本: Alekseev, V. M., Tikhomirov, V. M., Fomin, S. V., Commande optimale, Mir, 1982).

B. M. Тихомиров 撰

【补注】 共轭调和函数与共轭三角级数这两个概念是有联系的. 设 u 是闭单位圆盘上的调和函数, $\tilde{u}$ 是 u 的共轭调和函数, 于是 $u=\mathrm{Re}(\varphi)$, $\tilde{u}=\mathrm{Im}(\varphi)$, 其中 $\varphi=u+i\tilde{u}$ 是解析函数. 设 $g(t)$ 是 u 的边值函数, 即 $g(t)=u(e^{it})$, 则有 Poisson 积分表示

$$u(re^{i\theta})=\int_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta-t)g(t)dt,$$

其中

$$P_r(s)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{Re}\frac{1+re^{is}}{1-re^{is}},$$

而

$$\tilde{u}(re^{i\theta})=\int_{-\pi}^{\pi}Q_r(\theta-t)g(t)dt,$$

其中

$$Q_r=\frac{1}{2\pi}\mathrm{Im}\frac{1+re^{is}}{1-re^{is}},$$

令 $r\uparrow 1$, 则(形式地)

$$\tilde{u}(e^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{g(\theta-t)-g(\theta+t)}{\tan(t/2)}dt$$

正是 $g(t)$ 的共轭三角级数.

参考文献

[A1] Zygmund, A., Trigonometric series, 1–2, Cambridge Univ. Press, 1959.

沈永欢 译

共轭梯度法 [**conjugate gradients, method of** 或 conjugate-gradient method; **сопряженных градиентов метод**]

解线性代数方程组 $Ax=b$ 的一种方法, 其中 A 是正定(对称)矩阵. 这同时是直接法和迭代法: 对任意的初始近似, 经过有限次迭代后收敛到精确解. 使用这种方法, 在计算过程中, 方程组的矩阵并不改变, 在每次迭代时, 它仅用来乘一个向量. 因此, 可在计算机上求解高阶的方程组, 其阶数由定出矩阵的数值信息确定.

作为直接法, 它的构造是基于向量集的一系列 A 正交化过程, 是关于数积 $(x,y)=x^TAy$ 的普通正交化过程(见**正交化法** (orthogonalization method)). 如果 $\{s_1,\cdots,s_n\}$ 是空间的一组 A 正交基, 则对任意初始近似 x_0, 方程组的精确解 x^* 可由分解

$$x^*-x_0=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j s_j,\quad \alpha_j=\frac{(r_0,s_j)}{(s_j,As_j)}$$

得到, 其中 $r_0=b-Ax_0$ 是 x_0 的差误. 在共轭梯度法中, A 正交向量 $s_1,\cdots,s_n$ 通过 A 正交化近似序列 $x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}$ 的差误 $r_0,\cdots,r_{n-1}$ 得到, 这里 $x_0,\cdots,x_{n-1}$ 由公式

$$x_k=x_0+\sum_{j=1}^{k}\alpha_j s_j,\quad \alpha_j=\frac{(r_0,s_j)}{(s_j,As_j)}$$

给出. 以这种方式构造的向量 $r_0,\cdots,r_{n-1}$ 和 $s_1,\cdots,s_n$ 有如下性质:

$$(r_i,r_j)=0,\ i\neq j;\ (r_i,s_j)=0,\ j=1,\ldots,i. \quad (1)$$

现在共轭梯度法用如下递推关系来定义(见[1]):

$$\left.\begin{aligned}
s_1=r_0;\ x_i=x_{i-1}+\alpha_i s_i,\ \alpha_i=-\frac{(s_i,r_{i-1})}{(s_i,As_i)},\\
r_i=r_{i-1}+\alpha_i As_i,\ s_{i+1}=r_i+\beta_i s_i,\\
\beta_i=-\frac{(r_i,As_i)}{(s_i,As_i)}.
\end{aligned}\right\}\quad (2)$$

对某个 $k\leqslant n$, 如果 $r_k=0$, 则这个过程就停止, 这时 $x^*=x_k$. 停止点由初始近似 x_0 确定. 从递推关系(2)知道, 向量 $r_0,\cdots,r_i$ 是向量 $r_0,Ar_0,\cdots,A^ir_0$ 的线性组合. 由于向量 $r_0,\cdots,r_i$ 是正交的, 所以仅当向量 $r_0,Ar_0,\cdots,A^ir_0$ 线性相关时, r_i 才可能为零. 例如 r_0 关于 A 的特征向量基的分解中仅有 i 个非零分量. 这些因素可能影响初始近似的选择.

共轭梯度法与取使某泛函为极小的向量作为解的一类方法有关系. 为了计算这个向量, 构造一迭代序列收敛到极小点. 在(2)中的序列 $x_0,\cdots,x_n$ 实现了泛函 $f(x)=(Ax,x)-2(b,x)$ 的极小化. 在过程(2)的第 i 步, 向量 s_i 和曲面 $f(x)=c$ 在 $(n-i)$ 维椭球上的最速下降(梯度)方向一致. 这个椭球由该曲面和共轭于方向 $s_1,\cdots,s_{i-1}$ 的平面相交形成.

这个方法和它类似的方法有许多不同的名称，如 Lanczos 法 (Lanczos method)、Hestenes 法 (Hestenes method)、Stiefel 法 (Stiefel method) 等等. 在所有极小化泛函的方法中，共轭梯度法在策略设计方面是最优的：经过 n 步后，它给出了极大极小值. 但是，在机器运算的实际条件下，计算(2)对舍入误差是敏感的，而且可能破坏条件(1). 这就妨碍了 n 步后这个过程的终止. 所以，在 n 次迭代后，计算仍继续，因此它可被看作极小化泛函的无限迭代过程. 已经找到一些计算格式(2)的抗舍入误差的修正方法 (见[3], [4]).

参考文献

[1] Фаддеев, Д. К., Фаддеева, В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, М., 1963 (英译本: Faddeev, D. K. and Faddeeva, V. N., Computational methods of linear algebra, Freeman, 1963).

[2] Березин, И. С, Жидков, Н. П., Методы вычислений, т. 2, М., 1960 (英译本: Berezin, I. S. and Zhidkov, N. P., Computing methods, Pergamon, 1973).

[3] Воеводин, В. В., Численные методы алгебры, М., 1966.

[4] Бахвалов, Н. С., Численные методы, М., 1974(英译本: Bakhvalov, N. S., Numerical methods: analysis, algebra, ordinary differential equations, Mir, 1977).

Г. Д. Ким 撰

【补注】 对线性方程组的极小极大解，Stiefel 法与 Zukhovitskiĭ 法 (Zukhovitskiĭ methed) 有关系 (见[A1]).

最速下降法的修正可在 [A1] 和 [A12] 中找到.

共轭梯度法的经典文献是[A4]. 最新的评述并附补充文献是[A3]. 它与矩阵分解的关系在 [A9] 中讨论.

J. K. Reid 似乎是第一位将这个方法用作迭代法 (iterative methed)的 (见[A8]).

已提出了几种修正，如预处理共轭梯度法 (见[A2]) 和利用不完全 Cholesky 因子分解 (incomplete Cholesky factorization)的共轭梯度法 (所谓 ICCG 法 (ICCG methods), 见 [A7] 和 [A6]).

对非对称共轭梯度法的推广在[A1] 和[A10] 中讨论.

参考文献

[A1] Axelsson, O., Conjugate gradient type methods for unsymmetric and inconsistent systems of linear equations, *Lin. Alg. and its Appl.*, **34**(1980), 1–66.

[A2] Concus, P., Golub, G. H. and O'Leary, D. P., A generalized conjugate gradient method for the numerical solution of elliptic partial differential equations, in J. R. Bunch and D. J. Rose (eds.), Sparse matrix computations, Acad. Press, 1976.

[A3] Golub, G. H. and Loan, C. F. van, Matrix computations, North Oxford Acad., 1983.

[A4] Hestenes, M. R., Conjugate directions methods in optimization, Springer, 1980.

[A5] Hestenes, M. R. and Stiefel, E., Methods of conjugate gradients for solving linear systems, *J. Res. Nat. Bur. Stand.*, **49** (1952), 409–436.

[A6] Manteuffel, T. A., Shifted incomplete Cholesky factorization, in I. S. Duff and G. W. Stewart (eds.), Sparse matrix proceedings, SIAM Publ., 1979.

[A7] Meijerink, J. A. and Vorst, H. A. van der, An iterative solution method for linear systems of which the coefficient matrix is a symmetric M-matrix, *Math. Comp.*, **31** (1977), 148–162

[A8] Reid, J. K., On the method of conjugate gradients for the solution of large systems of linear equations, in J. K. Reid (ed.), Large sparse sets of linear equations, Acad. Press, 1971.

[A9] Stewart, G. W., Conjugate gradients methods for solving systems of linear equations, *Numerical Math.*, **21** (1973), 284–297.

[A10] Young, D. M. and Jea, K. C., Generalized conjugate gradient acceleration of non-symmetrizable iterative methods, *Lin. Alg. and its Appl.*, **34** (1980), 159–194.

[A11] Zukhovitsky, S. I. and Avdeeva, L. I., Linear and convex programming, Saunders, 1966.

[A12] Zoutendyk, G., Methods of feasible directions, Elsevier, 1960.

郭祥东 译

共轭调和函数 [conjugate harmonic functions, harmonically-conjugate functions; сопряженные гармонические функции]

一对实调和函数 u 和 v，它们是某个单复变量解析函数 $f=u+iv$ 的实部和虚部. 在单复变量 $z=x+iy$ 的情形，两个调和函数 $u=u(x,y)$ 和 $v=v(x,y)$ 在复平面 $\mathbf{C}$ 的区域 D 内共轭，当且仅当它们在 D 内满足 Cauchy-Riemann 方程:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1}$$

(1)中 u 与 v 的地位不是对称的: v 是 u 的共轭，但 v 的共轭不是 u，而是 $-u$. 给定调和函数 $u=u(x,y)$，易于确定一个局部共轭函数 $v=v(x,y)$ 和一个局部完全解析函数 $f=u+iv$ (可相差一虚常数项 ic). 例如，在 u 的定义域的某点 $z^0=x^0+iy^0$ 的邻域内，可用 Goursat 公式 (Goursat formula)

$$f(z)=2u\left[\frac{z+\bar z^0}{2},\frac{z-\bar z^0}{2i}\right]-u(x^0,y^0)+ic \tag{2}$$

求出.

在多复变量 $z=x+iy=(z_1,\cdots,z_n)=(x_1,\cdots,x_n)+i(y_1,\cdots,y_n)$ $(n>1)$ 的情形，Cauchy - Riemann 方程组

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}=\frac{\partial v}{\partial y_k},\quad \frac{\partial u}{\partial y_k}=-\frac{\partial v}{\partial x_k},\quad k=1,\ldots,n \tag{3}$$

成为超定的.

由(3)得知，当 $n>1$ 时，u 不再能取为任意的调和函数，它必须属于多重调和函数子类(见**多重调和函数**(pluriharmonic function))．此时可利用(2)求出共轭多重调和函数 v.

涉及向量函数 $f=(u_1,\cdots,u_m)$ (其分量 $u_j=u_j(x_1,\cdots,x_n)$是实变量 $x_1,\cdots,x_n$ 的实值函数)时，有各种类似于共轭调和函数(u,v)的概念．例子之一是梯度系(gradient system) $f=(u_1,\cdots,u_n)$，它满足广义 Cauchy - Riemann 方程组

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}=0,\quad \frac{\partial u_i}{\partial x_j}=\frac{\partial u_j}{\partial x_i},\quad i,j=1,\ldots,n,\ i\neq j, \tag{4}$$

这个方程组也可写为简缩形式:

$$\operatorname{div} f=0,\quad \operatorname{curl} f=0.$$

如果条件(4)在 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 的一个同胚于球的区域 D 内满足，则存在 D 上的调和函数 h，使得 $f=\operatorname{grad} h$．当 $n=2$ 时，这就成为 u_2+iu_1 是变量 $z=x_1+ix_2$ 的解析函数．在某些方面，(4)的解的性态类似于 Cauchy - Riemann 方程组(1)的解的性态；例如在边界性质的研究中，情形便是如此(见[3]).

参考文献

[1] Бицадзе, А. В., Основы теории аналитических функций комплексного переменого, 2 изд., М., 1972.

[2] Владимиров, В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964(英译本: Vladimirov, V. S., Methods of the theory of functions of several complex variables, M. I. T., 1966).

[3] Stein, E. M., Weiss, G., Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces, Princeton Univ. Press, 1971.

Е. Д. Соломенцев 撰　沈永欢 译

共轭等温坐标 [conjugate isothermal coordinates; сопряженные изотермические координаты]

曲面上的一种坐标，使得第二基本形式能写成

$$\mathrm{II}=-\Lambda(u,v)(du^2+dv^2). \tag{*}$$

在正则曲面椭圆点的充分小邻域内总可引入共轭等温坐标．在正则曲面双曲点的充分小邻域内可以引入坐标使得

$$\mathrm{II}=\ \Lambda(u,v)(du^2-dv^2),$$

但在这种情形，常常宁可选用所谓的渐近坐标(asymptotic coordinates) $\tilde{u},\tilde{v}$，在这个坐标中

$$\mathrm{II}=\ \tilde{\Lambda}(\tilde{u},\tilde{v})\,d\tilde{u}\,d\tilde{v}.$$

Д. Д. Соколов 撰

【补注】 在西方文献中很少使用这个概念．由于当曲面片的定向颠倒时，第二基本形式改变符号，因此(*)中的负号是不重要的，事实上，常常被删除.

共轭等温坐标也称为仿射等温坐标(affine isothermal coordinates)(见[A1]).

参考文献

[A1] Blaschke, W. and Leichtweiss, K., Elementare Differentialgeometrie, 1, Springer, 1973, 160.

潘养廉 译

共轭网 [conjugate net; сопряженная сеть]

曲面上由两族在曲面的每一点都有**共轭方向**(conjugate directions)的曲线组成的曲线网．如果坐标网是共轭网，那么曲面的第二基本形式的系数 M 恒等于零．在曲面的每一个非平坦点的邻域内能够引入参数表示，使得坐标曲线组成共轭网．其中的一族可以任意选取，甚至这族曲线可以没有渐近方向．一个重要的例子就是曲率线网.

参考文献

[1] Погорелов, А. В., Дифференциальная геометрия, 5 изд., М., 1969.

Е. В. Шикин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hsiung, C. C., A first course in differential geometry, Wiley, 1981, Chapt. 3, Sect. 4.

潘养廉 译

共轭三角级数 [conjugate trigonometric series; сопряженный тригонометрический ряд]

与三角级数

$$\sigma=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$$

共轭的三角级数是

$$\tilde{\sigma}=\sum_{n=1}^{\infty}-b_n\cos nx+a_n\sin nx.$$

这两个级数分别是级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-ib_n)z^n$$

的实部和虚部，其中 $z=e^{ix}$．与函数 $f(x)$ 的Fourier级数共轭的三角级数 $\tilde{\sigma}[f]$ 的部分和公式是

$$\tilde{S}_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\pi} f(t)\tilde{D}_n(t-x)\,dt,$$

其中 $\widetilde{D}_n(x)$是共轭的 **Dirichlet核**(Dirichlet kernel).如果 $f(x)$ 在$[-\pi,\pi]$上是有界变差函数,则级数$\widetilde{\sigma}[f]$在点 x_0 收敛的必要充分条件是**共轭函数**(conjugate function) $\widetilde{f}(x_0)$存在,这时,$\widetilde{f}(x_0)$就是级数 $\widetilde{\sigma}[f]$ 的和. 如果 $f(x)$ 是$[-\pi,\pi]$上的可和函数,则级数 $\widetilde{\sigma}[f]$几乎处处可用 α 次 Cesàro 求和法 (C,α) 及 Abel-Poisson 求和法求和,并且几乎处处同$f(x)$的共轭函数一致. 如果函数 $\widetilde{f}(x)$是可和的,则共轭级数$\widetilde{\sigma}[f]$是它的 Fourier 级数. 函数$f(x)$不一定是可和的;在 Lebesgue 积分的推广,例如 *A* **积分** (*A*-integral) 和 **Boks 积分** (Boks integral)的情况下,共轭级数$\widetilde{\sigma}[f]$总是共轭函数的 Fourier 级数.

参考文献

[1] Tauber, A., Über ben Zusammenhang des reellen und imagnären Teiles einer Potenzreihe, *Monatsh. Math. Phys.*, 2 (1891), 79-118.

[2] Young, W. H., *Sitzungsber. Bayerischen Akad. Wiss. München Math. Naturwiss. Kl.*, 41 (1911), 361-371.

[3] Priwaloff, I. I., Sur les fonctions conjuguees, *Bull. Soc. Math. France*, 44 (1916), 100-103.

[4] Привалов, И. И., Интеграл Cauchy, Саратов, 1919, 61-104.

[5] Лузин, Н. Н., Интеграл и тригонометрический ряд, М., Л., 1951.

[6] Бари, Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961 (英译本: Bary, N. K., A treatise on trigonometric series, Oxford Univ. Press, 1964).

[7] Виноградова, И. А., Скворцов, В. А., и кн., Итоги науки. математический анализ., 1970. М., 1971, 65-107.

[8] Жижиашвили, Л. В., Сопряженные функции и тригонометрические ряды, Тбилиси, 1969.

Т. П. Лукашенко 撰

【补注】 文献 [7] 是一篇很长很有用的综述. 文献[A1],[A2]是标准文献.

参考文献

[A1] Zygmund, A., Trigonometric series, 1-2, Cambridge Univ. Press, 1959-1968.

[A2] Hardy, G. H. and Rogosinsky, W. W., Fourier series, Cambridge Univ. Press, 1950.

张鸿林 译

合取 [conjunction; конъюнкция]

一种逻辑运算,用来从两个表示式 *A* 和 *B* 构成表示式"*A* 并且 *B*". 在形式语言中,两个表示式 *A* 和 *B* 的合取记作 $A\&B$, $A\wedge B$, $A\cup B$, $A\cdot B$ 或 AB. 表示式 *A* 和 *B* 称为 $A\&B$ 的合取项(conjunction term). 在数理逻辑中,与合取的通常用法所对应的真假值表如下:

A	*B*	*A* & *B*
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

В. Е. Плиско 撰　沈复兴 译

合取范式 [conjunctive normal form; конъюнктивная нормальная форма]

如下形式的命题公式:

$$\bigwedge_{i=1}^{n}\bigvee_{j=1}^{m_i} C_{ij},\tag{*}$$

其中每个 $C_{ij}(i=1,\cdots,n, j=1,\cdots,m_i)$ 或是原子公式(单个变元或常量)或是原子公式的否定. 合取范式(*)是重言式,当且仅当对每个 *i* 都存在某原子公式 *p*,在 $C_{i1},\cdots,C_{im_i}$ 中可以同时找到 *p* 和 $\neg p$. 给定任意一个命题公式 *A*,可以构造一个与之等价的合取范式 *B*,使 *B* 与 *A* 含有同样的变元和常量. 这个 *B* 就称为 *A* 的合取范式.

С. К. Соболев 撰

【补注】 合取范式的对偶式是**析取范式**(disjunctive normal form). 两者也都应用于 Boole 函数理论(见 **Boole 函数的范式**(Boolean functions, normal forms of)).

沈复兴 译　王世强 校

单位元的连通分支[connected component of the identity; связная компонента единицы], 单位元分支(identity component), 群 *G* 的

拓扑群(或代数群)*G* 的包含此群的单位元的最大连通子集 G^0. 分支 G^0 是 *G* 的闭正规子群; *G* 的关于 G^0 的陪集就是 *G* 的连通分支,商群 G/G^0 是完全不连通和 Hausdorff 的,且在 *G* 的所有使 G/H 完全不连通的正规子群 *H* 中,G^0是最小的.如果 *G* 局部连通(例如, *G* 为 Lie 群),则 G^0 在 *G* 中是开的,且G/G^0 是离散的.

对任意代数群 *G* 来说,单位分支也是开的,且它有有限指数; G^0 还是 *G* 中具有有限指数的极小闭子群. 代数群的连通分支和不可约分支相同. 对代数群 *G* 的任一多项式同态 φ,我们有 $\varphi(G^0)=(\varphi(G))^0$. 如果 *G* 是一域上代数群,则 G^0 仍定义在此域上.

若 *G* 为复数域 **C** 上代数群,则它的单位分支 G^0 和它作为复 Lie 群的单位分支相同. 若 *G* 为实数域 **R** 上的群,则 G^0 中实点构成之群 $G^0(\mathbf{R})$ 按 Lie 群 $G(\mathbf{R})$ 的拓扑它不一定连通,然而它的连通分支数有限. 例如,虽然 $GL_n(\mathbf{C})$ 是连通的,可是 $GL_n(\mathbf{R})$ 分裂成两个

连通分支．又例如，伪正交么模群 $SO(p,q)$ 能看作是连通复代数群 $SO_{p+q}(C)$ 的实点构成之群，当 $p=0$ 或 $q=0$ 时，它是连通的，当 $p,q>0$ 时，它分裂成两个连通的分支．然而，当 Lie 群 $G(R)$ 是紧 Lie 群时，$G^0(R)$ 是连通的．

参考文献

[1] Borel, A., Linear algebraic groups, Benjamin, 1969.

[2] Понтрягин, Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973 (中译本：Л. С. 邦德列雅金，连续群(上，下)，科学出版社，1978).

[3] Helgason, S., Differential geometry and symmetric spaces, Acad. Press, 1962.

[4] Шафаревич, И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972 (英译本：Shafarevich, I. R., Basic algebraic geometry, Springer, 1977).

А. Л. Онищик 撰　许以超 译　石生明 校

连通集 [connected set；связное множество]

定义了**连通性** (connectivity) 概念的环绕空间集的子集，在这种意义下该子集是连通的．例如，实数空间中连通集是凸集且只有凸集是连通集．图的连通集是其任意两点能用全部位于其中的道路连接的集合．

В. И. Малыхин 撰　方嘉琳 译

连通空间 [connected space；связное пространство]

不能表示成互相分离的两部分之和的拓扑空间，或更确切地说，不能表示成两个非空不交开闭子集的和．空间是连通的，当且仅当在其上任意连续实值函数取得所有的中间值．连通空间的连续象，连通空间的积，以及在 Vietoris 拓扑下连通空间的闭子集空间都是连通空间．任何连通完全正则空间的基数都不小于连续统的基数；尽管存在着可数连通 Hausdorff 空间．

В. И. Малыхин 撰

【补注】 关于 Vietoris 拓扑见**超空间** (hyperspace)．

参考文献

[A1] Arkhangel'skiĭ, A. V. and Ponomarev, V. I., Fundamentals of general topology. Problems and exercises, Reidel, 1984 (译自俄文).

方嘉琳 译

连通和 [connected sum；связная сумма]，集族的

这些集合之并成为一个单连通集．连通和的概念是为了区别这种类型的并与不连通或开-闭和的概念而产生的，后者也就是那些不交集的并，它的连通子集只能是这个并中那些集合的连通子集．

В. И. Малыхин 撰

【补注】 有几种不同的方法来弥补连通和或空间与集合之并的含糊的提法，但没有哪一个是特别规范的．它的定义根据所讨论对象种类的不同而不同．

在微分拓扑中，两个微分流形的连通和 (connected sum) 是如下定义的．设 M_1，M_2 是已定向(紧)的 C^∞ 流形，并且 D^n 是 n 维的单位圆盘，设 $f_i: D^n \to M_i$ ($i=1, 2$) 是保持定向的嵌入．那么，借助于 $f_2 \circ f_1^{-1}$ 把 $M_1 \setminus f_1(D^n)$ 和 $M_2 \setminus f_2(D^n)$ 的边界粘在一起(等同)，就得到 M_1 与 M_2 的连通和 $M_1 \# M_2$．$M_1 \# M_2$ 的定向就是 M_i 的定向，$M_1 \# M_2$ 的微分结构不依赖于 f_i 而唯一确定．在微分同胚的意义下，取连通和的运算是可结合、可交换的．n 维球面当作零元，即 $M \# S^n$ 微分同胚于 n 维流形 M．

参考文献

[A1] Hirsch, M. W., Differential topology, Springer, 1976.

许依群、徐定宥、罗嵩龄 译

联络 [connection；связность]，纤维丛上的

具有Lie结构群的光滑纤维丛上的一种**微分-几何结构** (differential-geometric structure)，它推广了**流形上的联络** (connection on a manifold)，例如 Riemann 几何中的 **Levi-Civita 联络** (Levi-Civita connection)．设 $p: E \to B$ 是一个具有标准纤维 F 的光滑局部平凡纤维化，Lie 群 G 有效且光滑地作用在 F 上．这个纤维丛上的一个联络是从底空间B中分段光滑曲线范畴到纤维的微分同胚范畴中的一个映射，它对每条(起点为 x_0 终点为 x_1 的)曲线 $L=L(x_0, x_1)$ 伴随一个满足下列公理的微分同胚 $\Gamma L: p^{-1}(x_1) \to p^{-1}(x_0)$:

1) 对 $L(x_0, x_1)$, $L'(x_1, x_2)$, $L^{-1}(x_1, x_0)$ 和 $LL'(x_0, x_2)$，有

$$\Gamma L^{-1} = (\Gamma L)^{-1}, \quad \Gamma(LL') = (\Gamma L)(\Gamma L');$$

2) 对任意一个平凡化微分同胚 $\varphi: U \times F \to p^{-1}(U)$ 和一个 $L(x_0, x_1) \subset U$，微分同胚 $\varphi_{x_0}^{-1}(\Gamma L)\varphi_{x_1}: (x_1, F) \to (x_0, F)$ 是由某个元 $g_\varphi^L \in G$ 的作用定义的，这里 $\varphi_x = \varphi|_{(x,F)}$;

3) 对任意一个分段光滑参数表示 $\lambda: [0,1] \to L(x_0, x_1) \subset U$，映射 $t \mapsto g_\varphi^{L_t}$ 定义了 G 中一条从单位元 $e=g_\varphi^{L_0}$ 出发的分段光滑曲线，这里 L_t 是 $[0,t]$ 在 λ 之下的象，此外，具有公共非零切向量 $X \in T_{x_0}(B)$ 的 λ 和 $\lambda': [0,1] \to L'(x_0, x_1) \subset U$ 定义了 G 中具有公共切向量 $\theta_\varphi(x_0, X) \in T_e(G)=g$ 的道路，$\theta_\varphi(x_0, X)$ 光滑依赖于 x_0 和 X.

微分同胚 ΓL 称为沿 L 的**平行移动** (parallel displacement)．沿所有可能的闭曲线 $L(x_0, x_0)$ 的平行移动组成联络 Γ 在 x_0 的**和乐群** (holonomy group)；这个群同构于 G 的一个不依赖于 x_0 的 Lie 子群．E 上的曲线 $\Lambda(y_0, y_1)$ 称为关于 Γ 是水平的，如果对任何 $t \in [0,1]$ 和它的某个分段光滑参数表示有 $\Gamma(p\Lambda_t)y_t = y_0$．如果给定 $L(x_0, x_1)$ 和 $y_0 \in p^{-1}(x_0)$，那么总存在唯一的一条水平曲线 $\Lambda(y_0, y_1)$，称为曲线 L 的**水平提升** (horizontal lift of a

curve),使得 $p\Lambda=L$;它由 $\Gamma L_t^{-1}y_0$ 这种点组成. B 中所有曲线 L 的水平提升集唯一地决定了联络 Γ: ΓL 将 L 的所有提升曲线的终点映为起点.

如果 $\theta_\varphi(x,X)$ 对任何 φ 和 x 线性依赖于 X,或等价地,如果对任何 $y\in E$,从 y 出发的水平曲线的切向量组成 $T_y(E)$ 的一个向量子空间 Δ_y,称为水平子空间,那么这个联络称为线性联络.这里 $T_y(E)=\Delta_y\oplus T_y(F_y)$,其中 F_y 是过 y 的纤维,即 $F_y=p^{-1}(p(y))$.光滑分布 $\Delta: y\mapsto\Delta_y$ 称为线性联络 Γ 的**水平分布**(horizontal distribution).它唯一地决定了 Γ:它的积分曲线是水平提升曲线.

对纤维丛 E,如果 G 单纯可迁地(或相应地可迁地)作用在 F 上,即如果对任何 $z(z'\in F)$ 都恰有一个(或相应地,有一个)元 $g\in G$,将 z 变为 z',那么 E 称为主丛(或相应地,齐性型空间),记为 P(或相应地,Q).假定 G 左作用在 F 上;那么可定义 P 上的一个自然的右作用,其中 g 定义 $R_g: z\mapsto z\circ g$.这里的 Q 等同于由轨道 $y\circ H$ 组成的商流形 P/H,其中 H 是 $F=G/H$ 中一点的平稳子群.更一般地,E 可以等同于轨道 $(y,z)\circ G$ 的商流形 $(P\times F)/G$,这里的作用由 $(y,z)\circ g=(y\circ g, g^{-1}\circ z)$ 定义.

P 上的一个光滑分布 Δ 是某个线性联络(由 Δ 唯一确定)的水平分布,当且仅当对任何 $y\in P$ 和 $g\in G$ 有

$$T_y(P)=\Delta_y\oplus T_y(F_y),\ R_g^*\ \Delta y=\Delta y\cdot g$$

Q 上(或相应地,P 上)所有的水平分布都是这种 Δ 在规范射影 $P\to Q=P/H$ 下的象(或相应地,这种 Δ 在规范射影 $P\times F\to E=(P\times F)/G$ 下的自然提升).线性联络常常直接地定义为具有上述性质的一个分布.已经知道在每一个 P 上,同样在每个 Q 和 E 上,总有线性联络.

通常利用线性联络的**联络形式**(connection form)来研究线性联络,联络形式唯一地决定了联络并且可以成为别的定义的基础.线性联络的一个重要特征是**曲率形式**(curvafure form),它可用来计算和乐群的 Lie 代数.

联络的概念首先在 1917 年出现于 T. Levi-Civita 关于 Riemann 几何学中向量的平行移动的工作中([1]).1918年,H. Weyl 引入了**仿射联络**(affine connection)的概念.在 20 年代,E. Cartan 研究了**射影联络**(projective connection)和**共形联络**(conformal connection)(见[3]—[5]).在1926年,他给出了"具有基本群的非和乐空间"的一般概念(见**流形上的联络**(connection on a manifold)),并且用一般联络论的观点来划分这些空间.在 40 年代,В. В. Вагнер 发展了更一般的概念,其精神(不是其方法)接近于联络的现代想法.1950 年是决定性的一年;这一年里,出现了 В. В. Вагнер 的综合报告([6]),Г. Ф. Лаптев 的第一篇注记,揭示了新方法特别是新的分析方法;还有 C. Ehresmann 的工作([7]),奠定了现代整体联络论的基础.也见 **Weyl 联络**(Weyl connection);**线性联络**(linear connection);**Riemann 联络**(Riemannian connection);**辛联络**(symplectic connection);**Hermite 联络**(Hermitian connection).

参考文献

[1] Levi-Civita, T., Nozione di parallelismo in una varietò qualunque e consequente specificazione geometrica della curvatura Riemanniana. *Rend Cir. Mat. Palermo*, **42** (1917), 173-205.

[2] Weyl, H., *Raum. Zeit. Materie*, Springer, 1923.

[3] Cartan, E., Les espaces à connexion conforme, *Ann. Soc. Polon. Math.*, **2** (1924), 171-221.

[4] Cartan, E., Sur les variétés à connexion projective, *Bull. Soc. Math. France*, **52**(1924), 205-241.

[5] Cartan, E., Les groupes d'holonomic des espaces généralisés, *Acta Math.*, **48**(1926), 1-42.

[6] Вагнер, В. В., 《Тр. Семин. по вект. и тенз. анализу》, **8**(1950), 11-72.

[7] Ehresmann, C., Les connexion infinitesimal dans une espace fibré différentiable, in Colloq. de Topologie Bruxelles, 1950, G. Thone & Massons, 1951, 29-55.

[8] Лаптев, Г. Ф., 《Тр. Моск. матем. об-ва》, **2**(1953), 275-382.

[9] Nomizu, K., Lie groups and differential geometry, *Math. Soc. Japan*, 1956.

[10] Lichnerowicz, A., Global theory of connection and holonomy groups, Noordhoff, 1955(译自法文).

[11] Лумисте, Ю. Г., в. кн., Итоги науки. Сер. Математика, В. 21-Алгебра. Топология. Геометрия. 1969, М., 1971, 123-168.

Ю. Г. Лумисте 撰

【补注】 考察一个光滑局部平凡纤维丛 $p:E\to B$.一个光滑截面是指一个光滑映射 $s:B\to E$ 使得 $p\circ s=\mathrm{id}$.这个概念推广了函数 $B\to F$ 的概念(这里 F 是 p 的纤维),后者和平凡纤维丛 $B\times F\to B$ 的截面是一样的.在数学的一些领域中,考察截面而不是考察函数是重要的.例如在规范场理论中就是这样.然而还想有某些像截面的偏导数之类的东西供使用,也即那种描述当 b(无限小地)变化时 $s(b)$ 在一阶范围内怎样变化的量.这就需要比较 $p:E\to B$ 在邻近点的纤维,但是在纤维丛的概念里目前是没有东西容许做到这一点的.为此需要某些额外的结构,而联络(connection)的想法提供了这种结构.

如果对任意两点 $b,b'\in B$,都能按相容的方式指定一个同构 $\varphi_{b,b'}:E_b\to E_{b'}$ 使得对任何三个 b,b',b'' 都有 $\varphi_{b',b''}\circ\varphi_{b,b'}=\varphi_{b,b''}$,那么,这是最简单的情形.这里 E_b 即 E 在 b 的纤维当然就是 $p^{-1}(b)$.然而这就使这个丛成为平凡丛,一般来说这是不可能的.下一个最好的情形是:对每一条从 x_0 到 x_1 的光滑道路 L,有一个从道路起点的纤维到道路终点的纤维的同构 $\varphi_L:E_{x_0}\to E_{x_1}$(它可能

依赖于道路 L)，但要加上某些自然的限制，这恰恰就是一个联络所说的情形.

至少有三种描述联络的自然直观的方法.

i) 对每一条从 x_0 到 x_1 的光滑道路 L，给定受三个条件 1), 2), 3) 约束的一个同构 $E_{x_1}\to E_{x_0}$.

ii) 对每个 $e\in E$，设 $VT_eE=\ker((T_p)_e: T_eE\to T_{p(e)}B)$ 是在 e 的切映射的核. E 在 e 的切空间 T_eE 的子空间 VT_eE 称为 E 在 e 的垂直切子空间(vertical tangent subspace). 现在对每个 $e\in E$ 定义在 e 的补子空间 HT_eE，称为在 $e\in E$ 的水平切子空间(horizontal tangent subspace). 因此，$T_eE=HT_eE\oplus VT_eE$，$(T_p)_e$ 诱导一个同构 $HT_eE\to T_{p(e)}B$. 还要求 VT_eE 光滑地随 e 变化. 在线性联络的情形(见上述)，这就是 i)的无穷小说法.

iii) 设 E 是向量丛. 那么线性联络可以说也是通过直接给出截面的偏导数来具体规定的(共变微分法(covariant differentiation)). 这就要具体指定一个双线性映射: $\nabla: V(B)\times\Gamma(E)\to\Gamma(E)$，这里 $V(B)$ 是 B 上的向量场空间，$\Gamma(E)$ 是具有某些性质的 $p:E\to B$ 的截面空间，在 $E=TB$ 时的这些性质见线性联络(linear connection). 这些性质的一个结果是 $(\nabla_X s)(b)$, $X\in V(B)$, $s\in\Gamma(E)$，仅依赖于在 b 的 $X(b)$. 如果 $L:[0,t]\to B$ 是从 b 出发且在 b 的切向量为 $X(b)$ 的一条光滑道路，那么

$$(\nabla_{X(b)}s)(b)=\lim_{h\to 0}h^{-1}(\Gamma_h s(b(h))-s(b)),$$

这里 $\Gamma_h: E_{L(h)}\to E_{L(0)}=E_b$ 是由 $L:[0,h]\to B$ 定义的平行移动.

在 E 是向量丛的情形，描述线性联络的一种精美又适用的方法如下. 设

$$\begin{array}{ccc}\pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\tilde\varphi} & \varphi(U)\times \mathbf{R}^m\\ \downarrow & & \downarrow\\ U & \xrightarrow[\varphi]{} & \varphi(U)\subset\mathbf{R}^n\end{array}$$

是 B 的一个局部坐标卡和 E 的一个平凡化，于是在 $\pi^{-1}(U)$ 上有 TE 的下列局部平凡化:

$$\begin{array}{ccc}T\pi^{-1}(U) & \xrightarrow{T\tilde\varphi} & \varphi(U)\times \mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m\\ \downarrow & & \downarrow\\ \pi^{-1}(U) & \xrightarrow[\tilde\varphi]{} & \varphi(U)\times\mathbf{R}^m\end{array}$$

这里右边的箭头是在前两个因子上的射影，E 上的一个线性联络就由一个丛映射 $K:TE\to E$ 给出(即图

$$\begin{array}{ccc}TE & \xrightarrow{K} & E\\ \downarrow & & \downarrow p\\ E & \xrightarrow[p]{} & B\end{array}$$

是可交换的且 K 在纤维中是线性的)，使得这个映射在局部就像

$$K_\varphi=\tilde\varphi\circ K\circ(T\tilde\varphi)^{-1}: \varphi(U)\times\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m\to\varphi(U)\times\mathbf{R}^m,$$

$$(b,\xi,v,\eta)\mapsto(b,\eta+\Gamma_\varphi(b)(v,\xi)).$$

这些 $\Gamma_\varphi(b)$ 是(关于平凡化 $(\varphi,\tilde\varphi)$ 的) Christoffel 符号(Christoffel symbols)；如果 $E=TB$，那么 $\tilde\varphi$ 可取得等于 $T\varphi$，使 Christoffel 符号仅依赖于坐标卡 φ.

给定联络 K，水平子空间 HT_eE 如下定义，

$$HT_eE=\mathrm{Ker}(K_e: T_eE\to E_{p(e)}),$$

截面 $s:B\to E$ 沿向量场 $X:B\to TB$ 的共变导数是截面 $K\circ Ts\circ X: B\to TB\to TE\to E$.

在无限维流形和丛的情形，最后这种线性联络的概念看来是对较传统的共变导数 $\nabla: V(B)\times\Gamma(E)\to\Gamma(E)$ 的合适替代，见 [A2] 中 1.1 节.

参考文献

[A1] Kobayashi, S. and Nomizu, K., Foundations of differential geometry, 1, Interscience, 1963.

[A2] Klingenberg, W., Lectures on closed geodesics, Springer, 1979.

潘养廉 译

联络形式 [connection form; связности форма]

主纤维丛 P 上取值于 P 的结构群 G 的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的线性微分形式 θ. 它由 P 上某个线性联络(linear connection) Γ 定义，并且它唯一地决定了这个联络. Γ 的联络形式的值 $\theta_y(Y)$，这里 $y\in P$ 而 $Y\in T_y(P)$，被定义为 $\mathfrak{g}$ 的这种元素: 按照 G 在 P 上的作用，它们生成 Y 关于直和 $T_y(P)=\Delta_y\oplus T_y(G_y)$ 的第二个分量. 这里 G_y 是 P 的包含 y 的纤维，Δ 是 Γ 的水平分布. 按照下面的方法，从联络形式 θ 能够重新获得水平分布 Δ，因而重新获得联络 Γ.

Cartan - Лаптев 定理(Cartan - Laptev theorem). 为使 P 上的取值于 $\mathfrak{g}$ 的形式 θ 成为一个联络形式，必要和充分的条件是: 1) 对 $Y\in T_y(G_y)$, $\theta_y(Y)$ 是 $\mathfrak{g}$ 中的元素，它按照 G 在 P 上的作用生成 Y; 2) 由 θ 组成的取值于 $\mathfrak{g}$ 的 2 形式

$$\Omega=d\theta+\frac{1}{2}[\theta,\theta]$$

是半基本的或水平的，即如果向量 Y 和 Y_1 中至少有一个属于 $T_y(G_y)$，那么 $\Omega_y(Y,Y_1)=0$. 2 形式 Ω 称为联络的曲率形式(curvature form). 如果在 $\mathfrak{g}$ 中确定一个基 $\{e_1,\cdots,e_r\}$，那么条件 2) 局部地可用等式

$$d\theta^\rho+\frac{1}{2}C^\rho_{\sigma\tau}\theta^\sigma\wedge\theta^\tau=\frac{1}{2}R^\rho_{ij}\omega^i\wedge\omega^j$$

来表达，其中 $\omega^1,\cdots,\omega^n$ 是某些线性独立的半基本的 1 形式. 条件 2) 的必要性是由 E. Cartan 按这种形式证明的([1])；它在有附加假设 1) 时的充分性是由 G. F. Laptev [2] 证明的. 联络形式的分量方程(*) 称为 P

中联络的结构方程(structure equations), R^ρ_{ij} 定义了曲率对象(curvature object).

作为例子,设 P 是一个 n 维光滑流形 M 的切丛中的仿射标架空间,那么 G 和 $\mathfrak{g}$ 分别是下列形式的矩阵组成的群和 Lie 代数:

$$\left\|\begin{matrix}1 & a^i\\ 0 & A^i_j\end{matrix}\right\|,\quad \det|A^i_j|\neq 0,$$

和

$$\left\|\begin{matrix}0 & \mathfrak{g}^i\\ 0 & \mathfrak{g}^i_j\end{matrix}\right\|\quad (i,j=1,\ldots,n).$$

根据 Cartan - Laptev 定理, P 上的 $\mathfrak{g}$ 值 1 形式

$$\theta=\left\|\begin{matrix}0 & \omega^i\\ 0 & \omega^i_j\end{matrix}\right\|$$

是 M 上某个**仿射联络**(affine connection)的联络形式,当且仅当

$$d\omega^i+\omega^i_j\wedge\omega^j=\frac{1}{2}T^i_{jk}\omega^j\wedge\omega^k,$$

$$d\omega^i_j+\omega^i_k\wedge\omega^k_j=\frac{1}{2}R^i_{jkl}\omega^k\wedge\omega^l.$$

这里 T^i_{jk} 和 R^i_{jkl} 分别组成 M 上仿射联络的挠率张量和曲率张量.最后的这两个关于联络形式分量的方程称为 M 上仿射联络的结构方程。

参考文献

[1] Cartan, E., Espaces à connexion affine, projective et conforme, *Acta Math.*, **48** (1926), 1-42.

[2] Лаптев, Г. Ф., 《Тр. Моск. матем. об - ва》, **2** (1953), 275-382.

[3] Kobayashi, S. and Nomizu, K., Foundations of differential geometry, 2, Wiley (Interscience), 1969.

Ю. Г. Лумисте 撰 潘养廉 译

连通数 [connection number; связности число]

拓扑空间中连通分支族的基数. 例如,若从实直线上去掉 n 个点 $a_1<\cdots<a_n$,则剩下的分支为集合

$$(-\infty,a_1),\ (a_1,a_2),\ \ldots,(a_n,\infty),$$

故连通数为 $n+1$.

术语"连通数"也在下列意义下用到,Euclid 空间中一个区域称为 n 连通的(n - connected),如果它的边界是由 n 个不相交的连通子集所组成. 例如,圆盘的内部是 1 连通的,而圆环的内部是 2 连通的.

В. И. Мальцев 撰 许依群、徐定宥、罗嵩龄 译

联络对象 [connection object; связности объект]

在光滑主纤维丛 P 上的微分 - 几何的对象,它用来定义 P 上一个联络的**水平分布**(horizontal distribution) Δ. 设 $R_0(P)$ 是 P 的全体切标架组成的丛,它使得切标架的前 r 个向量 $e_1,\cdots,e_r$ 切于对应的纤维,并且由 P 的结构群 G 的 Lie 代数中 r 个基元素所生成, $r=\dim G$. 那么,一个联络对象就由 $R_0(P)$ 上一些函数 Γ^ρ_i 组成,这些函数使得 Δ 中的子空间由向量 $e_i+\Gamma^\rho_i e_\rho(\rho,\sigma=1,\cdots,r;\ i,j,\cdots=r+1,\cdots,r+n)$ 张成. 进而,这些 Γ^ρ_i 在 $R_0(P)$ 上必须满足下列条件:

$$d\Gamma^\rho_i-\Gamma^\rho_j\omega^j_i+\Gamma^\sigma_i\omega^\rho_\sigma+\omega^\rho_i=\Gamma^\rho_{ij}\omega^j.\qquad(1)$$

它们可以用 $R_0(P)$ 上的 1 形式来表达,这些 1 形式出现在关于 $\{e_i,e_\rho\}$ 的对偶共基给出的形式 ω^i,ω^ρ 的结构方程之中;

$$\left.\begin{aligned}d\omega^i&=\omega^j\wedge\omega^i_j,\\ d\omega^\rho&=-\frac{1}{2}C^\rho_{\sigma\tau}\omega^\sigma\wedge\omega^\tau+\omega^i\wedge\omega^\rho_i,\\ \omega^\rho_\sigma&=-C^\rho_{\sigma\tau}\omega^\tau.\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

一个联络对象也定义了一个由关系式 $\theta^\rho=\omega^\rho-\Gamma^\rho_i\omega^i$ 给出的对应的**联络形式**(connection form) θ, 以及由下面公式给出的它的**曲率形式**(curvature form) Ω,

$$\Omega^\rho=-\frac{1}{2}R^\rho_{ij}\omega^i\wedge\omega^j,$$

$$R^\rho_{ij}=-2(\Gamma^\rho_{[ij]}+C^\rho_{\sigma\tau}\Gamma^\sigma_i\Gamma^\tau_j).$$

例如,设 P 是一个 n 维光滑流形 M 的仿射切标架空间.那么,(2)中第二个方程形如

$$d\omega^i_j=-\omega^i_k\wedge\omega^k_j+\omega^k\wedge\omega^i_{jk}$$

而(1)化为

$$d\Gamma^i_{jk}-\Gamma^i_{lk}\omega^l_j-\Gamma^i_{jl}\omega^l_k+\Gamma^l_{jk}\omega^i_l+\omega^i_{jk}=\Gamma^i_{jkl}\omega^l.$$

在**平行移动**(parallel displacement)下,必有 $\omega^i_j-\Gamma^i_{jk}\omega^k=0$. 如果在 M 中选取一个局部坐标卡,并且在它的定义域中过渡到这个卡的自然标架,即 $\omega^k=dx^k$, 那么平行移动是由 $\omega^i_j=\Gamma^i_{jk}dx^k$ 定义的. M 上一个仿射联络的联络对象的经典定义是由一套定义在各坐标卡的定义域中的函数 Γ^i_{jk} 给出的,使得当从一个坐标卡转移到另一个坐标卡时,这些函数按下列公式变换:

$$\Gamma^{i'}_{j'k'}=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\Gamma^i_{jk}+\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}.$$

上面这个式子可由移动下的不变性条件导出.

Ю. Г. Лумисте 撰 潘养廉 译

流形上的联络 [connections on a manifold; связности

на многообразии]

光滑流形(manifold)M上的**微分-几何结构**(differential-geometric structure),它们是底流形M上标准纤维为与M维数相同的齐性空间G/H的光滑纤维丛E上的**联络**(connection).根据选取的齐性空间,可以得到M上的如**仿射联络**(affine connection),**射影联络**(projective connection),**共形联络**(conformal connection)等.流形上联络的一般概念是由E. Cartan([1])引入的,他将一个其上定义了联络的流形M称为一个"具有基本群的非和乐空间".

流形M上联络的现代定义是以底流形M上光滑纤维丛的概念为基础的,设$F=G/H$是维数与M相同的一个**齐性空间**(homogeneous space)(例如,仿射空间,射影空间等等).设$p: E \to M$是有标准纤维F的一个光滑局部平凡纤维化,并假定在这个纤维化中固定一个光滑截面s,即一个光滑映射$s: M \to E$使得对每个$x \in M$有$p(s(x))=x$.最后这个条件保证s是M到$s(M)$上的微分同胚,因而,如果需要可将M和$s(M)$等同起来.换言之,对每一点$x \in M$,都附着维数与M相同的齐性空间F的一个拷贝F_x(即$p: E \to M$在x上的纤维),F_x上有一固定点$s(x)$能等同于点x.

流形上的联络是更一般联络概念的特殊情形;它可以像下面那样单独定义,假定对流形M上每一条分段光滑曲线$L(x_0, x_1)$,曲线端点处切齐性空间之间有一个同构$\Gamma L: F_{x_1} \to F_{x_0}$(例如,如果$F$是一个仿射空间或射影空间,那么$\Gamma L$分别是一个仿射映射或射影映射).此外,假定:

1) 对$L(x_0, x_1)$, $L'(x_1, x_2)$, $L^{-1}(x_1, x_0)$和$LL'(x_0, x_2)$,有$\Gamma L^{-1}=(\Gamma L)^{-1}$, $\Gamma(LL')=(\Gamma L)(\Gamma L')$;

2) 对每个点$x \in M$和每个切向量$X_x \in T_x(M)$,同构$\Gamma L_t: F_{x_t} \to F_x$当$t \to 0$时趋向恒等同构,并且它与后者的偏差的主部仅依赖于$x$和$X$,这种依赖关系是光滑的,这里$L_t$表示在$L$以$X$为切向量的参数表示$\lambda: [0,1] \to L(x, x_1)$下$[0,t]$的象.

在这种情形,就说在M上已经定义了一个F型的联络Γ;同构ΓL称为沿L的**平行移动**(parallel displacement).对每条曲线$L(x, x_1) \in M$,定义它的渐屈线(evolute)为F_x中的一条曲线,由L的点x_t在沿L_t平行移动之下的象组成.从2)得到:在点x有公共切向量X的曲线的渐屈线有公共切向量Y, Y光滑依赖于x和X.由此推出对每点x都有一个映射

$$f_x: T_x(M) \to T_{s(x)}(F_x).$$

流形上研究的最多的联络是线性联络,具有如下附加性质:

3) 关于某个标架场,结构群G的Lie代数$\mathfrak{g}$中定义同构ΓL_t当$t \to 0$时与恒等同构的偏差主部的元$\omega(x)$线性地依赖于X.

在这种情形,f_x是线性映射.如果对任何点x, f_x都是同构,则称之为流形上的非退化联络,或一个Cartan联络(Cartan connection);此时,也认为纤维化$p: E \to M$通过同构f_x^{-1}(沿着截面s)粘合到底流形M上.M上的一个Cartan联络称为完全的(complete),如果对每个点x, F_x中起点为x的任何光滑曲线都是M上某条曲线的渐屈线.

还有另一种一般联络理论的观点,在那里,纤维化$p: E \to M$的一个线性联络是用E上的一个**水平分布**(horizontal distribution)Δ定义的.于是映射f_x是将X映入$s(M)$的对应切向量的同构S^*和空间$T_{s(x)}(E) = \Delta_{s(x)} \oplus T_{s(x)}(F_x)$到第二个直加项上的投影的复合映射.由此得到联络是非退化的当且仅当对任何$x \in M$, $\Delta_{s(x)} \cap T_{s(x)}(s(M))=\{0\}$.在一般联络论中展开的所有概念和结果都适用于$M$,例如**和乐群**(holonomy group),**曲率形式**(curvature form),和乐定理等等.然而,流形上纤维丛的附加结构能用来引入某些更特殊的概念.除渐屈线外,它们之中最重要的是M上一个联络在点x的**挠率形式**(torsion form)的概念.

当$F=G/H$是齐性**约化空间**(reductive space)(即存在直和分解$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{m}$使得$[\mathfrak{h}\,\mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$)时,Cartan联络在流形的联络论中占有特殊的位置.在这种情形,曲率形式Ω分成两个独立部分:它在$\mathfrak{m}$中的分量生成挠率形式,而在$\mathfrak{h}$中的分量生成曲率形式,其中最有名的例子是M上的仿射联络,此时F是维数和M相同的仿射空间.

约化空间F有一个不变仿射联络,更一般地,如果在F上有一个不变仿射联络或射影联络,那么M上一个F型联络的**测地线**(geodesic line)被定义成那些渐屈线为给定不变联络的测地线的曲线.

参考文献

[1] Cartan, E., Espaces à connexion affine, projective et conforme, *Acta Math.*, **48**(1926), 1-42.

[2] Лаптев, Г. Ф., 《Тр. Моск. матем. об-ва》, **2**(1953), 275-382.

[3] Ehresmann, C., Les connexions infinitésimal dans une espace fibré différentiable, in Colloq. de Topologie Bruxelles, 1950. G. Thone & Masson, 1951, 29-55.

[4] Kobayashi, S., On connections of Cartan, *Canad. J. Math.*, **8**(1956), 2, 145-156.

[5] Clifton, Y. H., On the completeness of Cartan connections, *J. Math. Mech.*, **16**(1966), 6, 569-576.

Ю. Г. Лумисте 撰

【补注】 设$E=U \times F$是一个平凡**向量丛**(vector bundle),元素$e=(u, f) \in E$的主部(principal part)是分量f.类似地,如果$\varphi: E \to E$是一个丛同态$((u, f) \mapsto (u, g(u)f))$,那么$g(u)$,或$u \mapsto g(u)$,是它的主部,亦见

联络(connection)的补注. 潘养廉 译

连通性 [**connectivity** 或 **connectedness** ; **связность**]

拓扑空间的一种性质,它指明不能将空间表示成彼此分离的两部分之和,即不能表示成两个非空不交开且闭子集的和.不是连通的空间称为不连通的.例如,通常 Euclid 平面是连通空间;如果除去一点,则剩余部分是连通的,但当除去不能收缩为一点的圆周时,剩余部分是不连通的.

连通性的抽象性质表明,连通空间的直观概念是一个没有孤立"岛"的实体.拓扑空间的连通性在同胚下保持,因而是拓扑空间的最重要性质之一.

拓扑空间的子集称为连通的 (connected),如果它是连通子空间.在当初引进这个概念时,如果空间的任意两点处于某连通子集中,即若它们能由某连通集连接,就说空间是连通的.根据这个观点,连通性的抽象性质可被看做是道路连通性(path connectivity)的推广,即空间具有它的任意两点可由道路(线段的连续象)连接这个性质.开连通子集称为区域 (domain). Euclid 空间中区域和凸子集是道路连通的,因而是连通的.

如果连通子集族有非空交,则族中集合的并是连通集.对拓扑空间的每一点,包含该点的所有连通子集的并是包含该点的最大连通子集;这个并称为该点的连通分支 (component).连通分支是闭集,且不同的连通分支不相交.

一点的拟连通分支 (quasi-component) 是含该点的所有开且闭子集的交.一点的连通分支包含在该点的拟分支中.对于紧空间,连通分支和拟连通分支一致.

空间称为遗传不连通的(hereditarily disconnected) (分散的 (dispersed)),如果它的所有连通分支是单元集,即如果所有连通子集由一点组成.空间称为全不连通的 (totally disconnected) (无处连通的 (nowhere connected)),如果它的所有拟连通分支都是单点集.空间称为极不连通的 (extremally disconnected),如果任一开集的闭包是开集.极不连通 Hausdorff 空间是全不连通的,而任一全不连通空间是遗传不连通的.存在连通空间,它含有一个弥散点,去掉它就剩下一个全不连通空间;一个例子是 **Kuratowski - Knaster 扇形** (Kuratowski - Knaster fan).

连通紧空间称为连续统(continuum).非空连续统的递减族的交是非空连续统.但连续统不能分解为非空不交闭子集的可数并(Sierpiński 定理 (Sierpiński theorem)).

空间称为在它的两点间是不可约的 (irreducible),如果它是连通的且这两点不能用异于全空间的连通集连接.对于任意两点,每个连续统都含有在它们之间不可约的子连续统 (Mazurkiewicz - Janicewski 定理 (Mazurkiewicz - Janicewski theorem)).

空间称为在一点局部连通的 (locally connected),如果该点的任意邻域都包含该点的连通邻域.

空间称为 n 维连通的 (connected in dimension n).如果 n 维球面到其内的任何连续映射都能扩张为 $(n+1)$ 维球的连续映射.一维连通的性质等价于空间的**基本群** (fundamental group) 是平凡的.

一个拓扑空间到另一拓扑空间的连续映射称为单调的 (monotone),如果每点的原象是连通子集.闭映射是单调的性质等价于每一连通子集的前象是连通的.

参考文献

[1] Александров, П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977.

[2] Kuratowski, K., Topology, 2, Acad. Press, 1968 (译自法文).

B. И. Малыхин 撰

【补注】道路连通性也称为线性连通性 (linear connectedness) 或弧状连通性 (arcwise connectedness).拓扑空间是不可约的 (irreducible),如果它不能写成两个非空闭子集的并.环 A 的代数几何谱 Spec (A) 是不可约的当且仅当 A 的幂零根基是素的.

参考文献

[A1] Arkhangel'skiĭ, A. V. and Ponomarev, V. I., Fundamentals of general topology, Problems and exercises, Reidel, 1984 (译自俄文).

方嘉琳 译

接合 [**connex** ; **коннекс**],Clebsch 接合(Clebsch connex)

平面中点和直线的连接,用下面的方程表达

$$f(x^1, x^2, x^3, u_1, u_2, u_3) = 0, \tag{1}$$

其中 x^i 和 u_i 分别是点和直线的齐次坐标.例如,方程

$$u_1x^1 + u_2x^2 + u_3x^3 = 0 \tag{2}$$

定义了所谓的主接合(principal connex),表示点 x 和线 u 的关联.共有的两个接合称为叠合(coincidence).接合的概念是 A. Clebsch 在 1871 年为了微分方程的一致表述而引进的.

比如,方程

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \tag{3}$$

由接合(1)和(2)的叠合定义,方程(3)的求积问题,在于由此决定的点 x 和直线 u 构造的曲线,使得 x 和 u 分别是积分曲线的点和切线.这种射影观点(坐标 x 和 u 地位平等)的引进也提供了微分方程分类的一个原则.

对于偏微分方程,无须是一阶的,可以类似地构造.

参考文献

[1] Klein, F., Vorlesungen über höhere Geometrie, Springer, 1926.

M. И. Войцеховский 撰 潘养廉 译

劈锥曲面 [conoid ; коноид]

所有的直母线都和一条固定直线相交的一种 Catalan 曲面(Catalan surface),固定直线称为劈锥曲面的轴(axis). 例如,双曲抛物面就是有两根轴的劈锥曲面.

劈锥曲面的位置向量由

$$r=\{u\cos v+\alpha f(v),\ u\sin v+\beta f(v),\ \gamma f(v)\}$$

给出,这里$\{\alpha,\beta,\gamma\}$是和劈锥曲面的轴同方向的单位向量,而$f(v)$是某个函数. 对正劈锥曲面,$\alpha=\beta=0$, $\gamma=1$. 因而它的轴是一条腰曲线. $f(v)=a(v)$的正劈锥曲面是螺旋面(helicoid).

И. Х. Сабитов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Berger, M. and Gostlaux, B., Géométrie différentielle: variétes, courbes et surfaces, PUF, 1987.

[A2] Do Carmo, M. P., Differential geometry of curves and surfaces, Prentice Hall, 1976.

潘养廉 译

余法线 [conormal ; конормаль]

偏微分方程边值问题(boundary value problem, partial differential equations)理论中的一个术语. 令 $\mathbf{v}=(v_1,\cdots,v_n)$是具有坐标 $x^1,\cdots,x^n$ 的 Euclid 空间 E^n 中光滑曲面 S 在一点 x 处的外法线,令 g^{ij} 是一反变连续张量,通常表示某个二阶(椭圆型)微分算子 $D=g^{ij}(\partial/\partial x^i)(\partial/\partial x^j)$ 的系数. 于是(关于 D 的)余法线(conormal)是向量

$$\mathbf{n}=(v^1,\cdots,v^n),$$

其中$v^i=g^{ik}v_k$. 换言之,余法线是对 S (在具有 Euclid 度量的空间中)的法向共变向量 $\mathbf{v}$ 的反变描述(在度量由g^{ij}的逆张量所定义的空间中).

参考文献

[1] Бицадзе, А. В., Уравнения математической физики, М., 1976 (英译本: Bitsadze, A. V., Equations of mathematical physics, Mir Publishers, 1980).

[2] Miranda, C., Partial differential equations of elliptic type, Springer, 1970 (译自意大利文).

М. И. Войцеховский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Friedman, A., Partial differential equations of parabolic type, Prentice-Hall, 1964 (中译本: A. 弗里德曼, 抛物型偏微分方程, 科学出版社, 1984).

孙和生 译 陆柱家 校

相容性 [consistency ; непротиворечивость]

形式系统(formal system)的下列性质: 并非此系统的每个公式在其中都是可证的. 具有此性质的形式系统称为相容的或形式相容的, 相反的情况下, 此形式系统称为矛盾的或不相容的. 对于很大一类形式系统, 其语言中含否定符号 ¬, 相容性等价于性质"不存在公式 φ 使 φ 与 $\neg\varphi$ 皆可证". 一个形式系统的一族公式称为相容的, 若并非系统的每个公式可由这一族公式推出. 一形式系统称为可满足, 若存在一个模型使所有此系统的定理在其中皆真. 若一形式系统是可满足的, 那么它是相容的. 对于基于经典谓词演算的形式系统, 其逆也真: 由经典谓词演算的 **Gödel 完全性定理**(Gödel completeness theorem), 每个相容的系统有模型. 因此证明形式系统相容性的方法之一就是构作一个模型. 另一个由 D. Hilbert 在 20 世纪初提出的(元数学)方法是某个形式系统的相容性的断言可作为关于在此系统中可能进行的证明的命题. 一个对象为任意数学证明的理论称为**证明论**(proof theory)或元数学. 元数学方法的应用例子是 G. Gentzen 的关于算术形式系统的相容性的证明(见 **Gentzen 形式系统**(Gentzen formal system)).

任何相容性证明都要用到某一个数学理论工具, 这样就把一个理论的相容性化归于另一个理论的相容性. 人们可以说第一个理论相对相容于第二个理论. 具有重大意义的是 Gödel 第二定理, 断言含有算术的形式理论的相容性不能用此理论自身的工具来证明(假设此理论事实上是相容的).

参考文献

[1] Hilbert, D. and Bernays P., Grundlagen der Mathematik, 1-2, Springer, 1968-1970.

[2] Новиков, П. С., Элементы математической логики, 2 изд., М., 1973 (英译本: Novikov, P. S., Elements of mathematical logic, Edinburgh, 1964).

[3] Fraenkel, A. A. and Bar-Hillel, Y. Foundations of set theory, North-Holland, 1958.

[4] Szebo, M. E. (ed.), The collected papers of G. Gentzen, North-Holland, 1969.

[5] Минц, Г. Е., в кн.: Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 13, М., 1975, 5-49.

[6] Gödel, K., Die Vollstandigkeit der Axiomen des logischen Funktionalkalküls, *Monatsh. Math. Physik*, **37** (1930), 349-360.

【补注】 可满足系统是相容的亦称为"系统的可靠性". Gödel 第二定理(Gödel second theorem)亦称为 **Gödel 不完全性定理**(Gödel incompleteness theo-

rem).　　B. E. Плиско 撰　宋方敏 译　莫绍揆 校

相合估计量 [consistent estimator; состоятельная оценка] "相合估计量序列"的简称，表示一串统计估计量收敛到所要估计的值.

在概率论中有好几个不同的收敛概念. 其中对统计估计理论最重要的，是依概率收敛和以概率1收敛. 如果一统计估计量序列依概率收敛于要估计的值，则称该序列为"弱相合"或简单地就称为"相合". "强相合"一词则保留给以概率1收敛于要估计的值的那种估计量序列.

例 1. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是独立的随机变量，有相同的正态分布 $N(a,\sigma^2)$，则统计量

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$$

和

$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

分别是 a 和 σ^2 的相合估计量.

例 2. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 为有同一分布函数 $F(x)$ 的独立随机变量. 这时，由初始样本 $X_1,\cdots,X_n$ 构造的**经验分布**(empirical distribution)函数 $F_n(x)$ 是 $F(x)$ 的一个相合估计量.

例 3. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是独立的随机变量，有同一的 Cauchy 分布，其概率密度为 $p(x)=1/(\pi[1+(x-\mu)^2])$. 对任何自然数，统计量

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$$

就服从起初的 Cauchy 律，因此，这串估计量 $\bar{X}_n$ 不依概率收敛到 μ. 即在本例中 $\bar{X}_n$ 不是相合的. 此处 μ 的一个相合估计是样本中位数.

相合估计量有如下性质：若 f 为连续函数而 T_n 为参数 θ 的相合估计量，则 $f(T_n)$ 是 $f(\theta)$ 的相合估计量. 获取统计点估计量的最常见方法是**最大似然法**(maximum-likelihood method)，此方法给出相合估计量. 必须注意，参数 θ 的相合估计量 T_n 并非唯一，因为，任何形如 $T_n+\beta_n$ 的估计量也为相合的，只要 β_n 是一串依概率收敛于零的随机变量. 这个事实降低了相合估计量这个概念的价值.

参考文献

[1] Cramér, H., Mathematical methods of statistics, Princeton Univ. Press, 1946.

[2] Ибрагимов, И. А., Хасьминский, Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979.

М. С. Никулин 撰　陈希孺 译

相合检验 [consistent test; состоятельный критерий]，相合统计检验(consistent statistical test)

当观察数目无限增加时，能可靠地分辨一个假设及其对立假设的统计检验.

设 $X_1,\cdots,X_n$ 为一串取值于样本空间 $(\mathfrak{X},\mathscr{B},\mathrm{P}_\theta)$ $(\theta\in\Theta)$ 的独立同分布随机变量，设要检验假设 $H_0:\theta\in\Theta_0\subset\Theta$，对立假设为 $H_1:\theta\in\Theta_1=\Theta\setminus\Theta_0$，其第一类错误(见**显著性水平**(significance level))概率预先给定为 α $(0<\alpha<0.5)$. 设用前 n 个样本 $X_1,\cdots,X_n$ 去构造一个水平 α 的统计检验，以检验 H_0 对立 H_1，并以 $\beta_n(\theta)$ $(\theta\in\Theta)$ 记其功效函数(见**检验的功效函数**(power function of a test))，它给出当随机变量服从分布律 P_θ 时，该检验拒绝 H_0 的概率. 当然，有 $\beta_n(\theta)\leqslant\alpha$ 对一切 $\theta\in\Theta_0$. 当观察数目无限增加时，可构造出一串都有给定水平 α 的统计检验，以检验 H_0 对立 H_1；相应的功效函数列 $\{\beta_n(\theta)\}$ 满足条件

$$\beta_n(\theta)\leqslant\alpha, \text{对任何 } n \text{ 及 } \theta\in\Theta_0.$$

如果在这些条件下，这一列功效函数 $\{\beta_n(\theta)\}$ 有以下性质：对任何固定的 $\theta\in\Theta_1=\Theta\setminus\Theta_0$，

$$\lim_{n\to\infty}\beta_n(\theta) = 1,$$

则我们说，为检验 H_0 对立 H_1，已构造出一串水平 α 的相合统计检验. 作为一种约定，我们就说已构造出一个相合检验. 由于 $\beta_n(\theta)(\theta\in\Theta_1)$ (它是 $\beta_n(\theta)$，$\theta\in\Theta=\Theta_0\cup\Theta_1$ 在 Θ_1 上的局限)是由观察值 $X_1,\cdots,X_n$ 构造出的统计检验的功效函数，一串统计检验的相合性质可表为：其相应的功效函数 $\beta_n(\theta)(\theta\in\Theta_1)$ 在 Θ_1 上收敛于恒等于1的函数.

例 设 $X_1,\cdots,X_n$ 为独立同分布随机变量，其分布函数属于一切在 $\mathbf{R}^1$ 上连续的分布函数构成的族 $H=\{F(x)\}$，而 $p=(p_1,\cdots,p_k)$ 为一个正概率向量，$p_1+\cdots+p_k=1$. 其次，设 $F_0(x)$ 为 H 中任一分布，则 $F_0(x)$ 和 p 唯一地决定了一个将实轴分成 k 个区间 $(x_0;x_1],\cdots,(x_{k-1};x_k]$ 的分割，此处

$$x_0 = -\infty,\ x_k = +\infty,$$

$$x_i = F_0^{-1}(p_1+\cdots+p_i) = \inf\{x: F_0(x)\geqslant p_1 + \cdots + p_i\},\ i = 1,\ldots,k-1.$$

换句话说，区间的端点都是分布函数 $F_0(x)$ 的分位点. 这些区间决定了一个将 H 分成两个不交集 H_0 和 H_1 的分割，如下：H 中一分布函数 F 属于 H_0，当且仅当

$$F(x_i)-F(x_{i-1}) = p_i,\quad i=1,\ldots,k$$

成立时；否则 $F\in H_1$. 现设 $\nu_n=(\nu_{n,1},\cdots,\nu_{n,k})$ 为将前 n 个随机变量 $X_1,\cdots,X_n$ 组分到区间 $(x_0,x_1],\cdots,(x_{k-1},x_k]$ 所得的计数向量. 则为检验 X_i 的分布函数属于集合 H_0 这个假设 H_0，其对立假设为它属于集合 H_1，可使用基于统计量

$$X_n^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(\nu_{n,i} - np_i)^2}{np_i}$$

的 χ^2 检验. 依这个检验,在显著性水平为 $\alpha(0<\alpha<0.5)$ 时, 只要 $X_n^2 > \chi_{k-1}^2(\alpha)$, 假设 H_0 就必须被拒绝, 此处 $\chi_{k-1}^2(\alpha)$ 是自由度 $k-1$ 的 χ^2 分布的上 α 分位点. 从 χ^2 型检验的一般理论可知, 当 H_1 正确时,

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\{X_n^2 > \chi_{k-1}^2(\alpha) \mid H_1\} = 1.$$

这证明了为检验 H_0 对立 H_1 的 χ^2 检验的相合性. 任取 H_0 的一非空真子集 H_0^*, 以之作为原假设, 而以 $H_0^{**}=H_0\setminus H_0^*$ 作为对立假设. 或以 $H_0^{**}\cup H_1$ 作为对立假设更好.

参考文献

[1] Wilks, S. S., Mathematical statistics, Wiley, 1962.

[2] Lehmann, E., Testing statistical hypothesis, Wiley, 1959.

М. С. Никулин 撰 陈希孺 译

常量 [constant ; константа], 数理逻辑中的

形式语言 (formal language)的一种符号, 用来表示这一语言所描述的某个结构中的某一确定的(个体)元素, 一种确定的运算或一种确定的关系. 因此, 需要区分**个体常量** (individual constant), 函数常量 (function constant) 和谓词常量 (predicate constant). 一个语言中的常量组成的集合称为这个语言的表征 (signature). 例如, 有一种表示法, **形式算术** (arithmetic, formal)语言的表征可以由个体常量"0"(零), 二元函数常量"+"(加法)和"·"(乘法), 一元函数常量"'"(后继)和二元谓词常量"="(等于)所组成. С. К. Соболев 撰

【补注】 术语"常量"(常数)也用以表示各种式子里恒定不变的元素. 例如: 多项式中的常数(也称为**系数** (coefficient)), 域常数(在考虑一个**域** (field)上某种结构时, 称域自身中的元素为常数), 等等.

沈复兴 译 王世强 校

常曲率空间 [constant curvature, space of ; постоянной кривизны пространство]

截曲率 $K(\sigma)$ 在一切二维方向 σ 都是常值的 Riemann 空间 M; 如果 $K(\sigma)=k$, 那么这个空间称为常曲率 k 的. 根据 Schur 定理, 如果对任何点 $p\in M$, 截曲率 $K(\sigma)$ 在切空间 T_pM 的任何二维子空间 σ 的方向都相等, 那么 Riemann 空间 $M^n(n>2)$ 是常曲率空间. 常曲率空间的曲率张量可用曲率 k 和度量张量 g_{ij} 按公式

$$R_{jlk}^{i} = k(\delta_k^i g_{jl} - \delta_l^i g_{jk})$$

来表达. 常曲率空间是局部对称空间.

除去等距外, 存在唯一的一个完全单连通 n 维常曲率 k 的 Riemann 空间 $S^n(k)$. 当 $k=0$ 时, 它是 **Euclid 空间** (Euclidean space); 当 $k>0$ 时, 它是半径为 $1/\sqrt{k}$ 的球面; 当 $k<0$ 时, 它是 **Лобачевский 空间** (Lobachevsky space).

空间 $S^n(k)$ 是极大齐性空间, 即它们的运动群有最大可能的维数 $n(n+1)/2$. 将球面对径点等同得到的射影(椭圆)空间穷尽了所有的不同于 $S^n(k)$ 的极大齐性 Riemann 空间.

完全但多连通的常曲率空间称为空间型 (space forms). 它们是由单连通空间 $S^n(k)$ 通过 $S^n(k)$ 的自由作用的离散运动群分解而得到的. 所有的正曲率的空间型已经都知道. 零曲率和负曲率空间型的分类问题迄今(1983)还未完全解决.

常曲率空间由于下面的特征而与其他的 Riemann 空间不同: 1) 常曲率空间满足平面公理, 即通过每个点以及该点的每一个平面元素方向有一个全测地子流形; 2) 常曲率空间是局部射影平坦空间, 即它容许到 Euclid 空间的局部射影映射.

常曲率空间的概念并不包含"适定性"性质("修正性"): 一个缓慢改变截曲率的空间与常曲率空间非常不同. 然而具有常曲率空间的某些公共性质, 例如保持拓扑结构 (Hadamard - Cartan 定理, 球面定理等, 见**曲率** (curvature), [2]). 在常曲率的伪 Riemann 空间类中, 情况则完全不同: 任何维数大于 2 且有定号截曲率的伪 Riemann 空间是常曲率空间.

常曲率空间也是局部共形平坦的, 即它们容许到 Euclid 空间的局部共形映射.

参考文献

[1] Wolf, J., Spaces of constant curvature, Publish or Perish, 1977.

[2] Бураго, Ю. Д., Залгаллер, В. А., 《Успехи матем. наук》, 32 (1977), 3, 3-55.

Д. Д. Соколов 撰

【补注】 按照截曲率是正的、负的或零, 常曲率空间被称为是椭圆的 (elliptic)、双曲的 (hyperbolic) 或平坦的 (flat). 文献 [A1] 和 [1] 包含 Schur 定理的一个证明, 并给出了明显的常曲率度量. 常曲率为正数的紧空间的分类是由 J. A. Wolf 完成的. 如果 $\nabla R=0$, 那么 Riemann 空间 M 称为局部对称空间 (locally symmetric space), 见**对称空间** (symmetric space).

参考文献

[A1] Kobayashi, S. and Nomizu, K., Foundations of differential geometry, I, Interscience, 1963, Chapt. V, VI.

【译注】 关于常曲率伪 Riemann 空间, 可参阅 [B1], 8.28.

参考文献

[B1] O'Neill, B., Semi - Riemannian geometry, Acad. Press, 1983.

潘养廉 译 沈一兵 校

定宽体 [**constant width, body of; постоянной ширины тело**]

一个凸体,在它的任意一对平行支撑平面之间的距离都相同.这个距离称为体的宽度(width).除去闭球体外,还有无穷多个一般说来是非光滑的定宽体.其中最简单的是由 Reuleaux 三角形绕其一根对称轴旋转而得的曲面围成的凸体.定宽体的类与凸的定周长体的类是一致的,所谓定周长体(bodies of constant perimeter)是指它在所有可能的平面上的正交投影的边界有相同的长度.

除去定宽体外,人们有时研究定亮度体(bodies of constant brightness).它为下列性质刻画:它在所有平面上的正交投影的面积恒为常数.

参考文献

[1] Blaschke, W., Kreis und Kugel, Chelsea, reprint, 1949.

Д Д Соколов 撰

【补注】 定宽凸体的两个重要的刻画是:1)一个凸体是定宽的当且仅当它的边界的每一条法线是二重法线;2)定宽凸体的充要条件是:它是 Euclid 空间中的完全集.这里人们称 Euclid 空间中的集合 S 是完全的,如果在 S 上添加一个单独的点则其直径必增大.

定宽概念的推广归功于 S. A. Robertson,见**定宽曲线**(constant width, curve of)(特别见该条目的参考文献[2]和[A2]),文中也包含了 Reuleaux 三角形的定义.

参考文献

[A1] Bonnesen, T. and Fenchel, W., Theorie der konvexen Körper. Springer, 1934.

虞言林 译

定宽曲线 [**constant width, curve of; постоянной ширины кривая**]

一条平面曲线,在它的任意两个平行支撑直线间的距离都相等.这个距离称为曲线的宽度(width).除去圆周外还有无穷多个定宽曲线,一般说来它们是不光滑的.其中最简单的是 Reuleaux 三角形(Reuleaux triangle),它是由连接边长为 a 的正三角形的三个顶点的三段半径为 a 的圆弧组成的(见图 1).

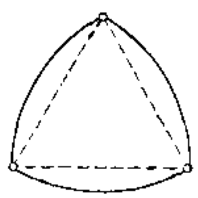


图 1

Reuleaux 三角形的宽度等于 a. Reuleaux 三角形所围图形的面积是 $\frac{a^2}{2}(\pi - \sqrt{3})$.在所有给定宽度 a 的曲线中 Reuleaux 三角形围成面积最小的图形.定宽曲线的别的例子如图 2,外接于不同的多边形的定宽曲线的弧皆是圆弧.定宽为 a 的曲线之弧长是 πa,见 **Barbier 定理**(Barbier theorem).

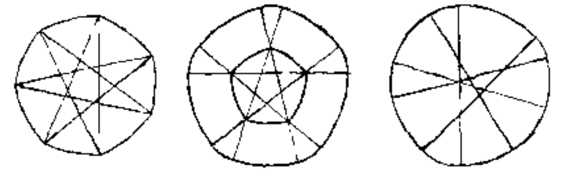


图 2

定宽曲线的概念可以推广到高余维的对象.设 V 是一个 n 维 Euclid 空间的光滑子流形.V 称为迁法子流形(transnormal submanifold)(见[2]),如果对于任意点 $p \in V$,法流形 $\nu(p)$ 满足:对任意 $q \in \nu(p) \cap V$,有 $\nu(q) = \nu(p)$.迁法平面曲线的类与定宽光滑曲线的类是一致的(关于空间中迁法曲线的更多信息,见[3]).

参考文献

[1] Blaschke, W., Kreis und Kugel, Chelsea, reprint, 1949.

[2] Robertson, S. A., Generalised constant width for manifold, *Michigan Math. J.*, **11** (1964), 97 – 105.

[3A] Wegner, B., Globale Sätze über Raumkurven konstanter Breite, *Math. Nachr.*, **53** (1972) 337 – 344.

[3B] Wegner, B., Globale Sätze über Raumkurven konstanter Breite II, *Math. Nachr.*, **67** (1975), 213 – 223.

Д Д Соколов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Bonnesen, T. and Fenchel, W., Theorie der konvexen körper, Springer, 1934.

[A2] Robertson, S. A., Smooth curves of constant width and transnormality, *Bull. London Math. Soc.*, **16** (1984), 264 – 274.

虞言林 译

可构造子集 [**constructible subset; конструктивное подмножество**]、代数簇的

Zariski 拓扑(Zariski topology)下的局部闭子集的有限并.一个局部闭子集(locally closed subset)被定义为一个开子集与一个闭子集的交.可构造子集组成一个 Boole 代数,而且可以定义为由代数子簇生成的 Boole 代数的元素.下述 Chevalley 定理(Chevalley theorem)揭示了可构成子集在代数几何学中所起的作用:若 $f: X \to Y$ 是代数簇的态射,则 $f(X)$(进而 X 内任意一个可构成子集的象)是 Y 中可构成子集.这与"代数"条件决定代数簇里的可构成子集这个事实有关.

映射 $h: X \to T$ 称为可构成的(constructible),如果 $h(X)$ 有限,而且对任意一点 $t \in T$,原象 $h^{-1}(t)$ 是 X 中可构成子集.

参考文献

[1] Grothendieck, A., Dieudonne, J., Eléments de géométrie algébrique, I, Springer, 1971.

[2] Borel, A., Linear algebraic groups, Benjamin, 1969.

В. И. Данилов 撰 陈志杰 译

构造分析 [**constructive analysis**; **конструктивный анализ**], 递归分析(recursive analysis), 可计算分析(computable analysis)

涉及数学分析及数学基础的几个方面的概念. 在构造分析的发展中, 主要研究下面两个或第二个主要问题: 1) 在比普通分析的集合论假设更清楚且更大范围内考虑计算的可能性的初始概念基础上, 研究分析的某些非传统构造. 2) 分析中能行性的研究, 引入且研究分析中的可计算对象, 特别研究问题: 用什么初始数据能能行地找到可计算对象? 相应地, 构造分析研究粗略地分为两类: 趋向或不趋向于 1) 的研究. 第一类研究的特点是由非标准逻辑或限制地使用传统逻辑或数学方法. 而第二类研究可自由使用传统逻辑和数学. 第二类研究的基础工作是引入**可计算实数**(computable real number)的近代概念(见[1]–[4], 亦见[5]–[12]). 第一类研究是**直觉主义**(intuitionism)分析的研究, 这不仅与 R. L. Goodstein 递归分析(见[12])和 E. Bishop(见[13])发展的独创和有深远意义的构造分析系统有关, 而且与 I. E. J. Brouwer 发展的数学构造化的直觉主义程序有关, 这对构造分析的问题形成和方法有重要影响(Brower 的构造分析处于直觉主义和使用精确算法概念的系统之间). 构造分析(特别是测度论)的一个创造性的处理是 P. Martin-Löf([14])于 1970 年提出的. 在苏联, 从 50 年代起, 在 A. A. Марков, Н. А. Шанин 和他们的学生的工作中(见[15], [16], [19]), 深入地发展了一个构造分析系统. 它属于第一类研究, 且限于数学中的构造趋向. 作为构造数学的一部分, 这个系统(下面简称构造分析)保持了构造数学的特点. 特别地, 讨论限于**构造对象**(constructive object)(大部分为某字母表上的字, 或具有明显的字编码的对象), 且在**潜在可实现性抽象**(abstraction of potential realizability)内使用特殊的构造逻辑. 这个逻辑是为考虑作为潜完全无限构造的结果的构造对象的特征而发展的. 这里完全性排除了使用**实无穷抽象**(abstraction of actural infinity), 能行性的直觉主义概念与算法的精确定义有关(在大部分与所讨论的构造分析有关的文章中, 常用**正规算法**(normal algorithm)的概念). 构造分析具有许多结果, 且从问题 1), 2) 的观点看都是有意义的. 原则上, 验证了由构造数学构造许多理论(如初等数论, 级数理论, Riemann 和 Lebesgue 积分, 复变函数论, 广义函数论, 等等)的可能性. 所得到的构造理论明显不同于传统的理论. 此外, 这些差别不仅表现在有关分析应用的具体问题之中, 也表现在理论的概念(如, 紧性概念, 等等)之中.

构造分析的基本概念是构造实数和构造实变函数. 有许多方法定义构造实数(不总是等价的). 我们将描述一种来自 Cantor 的经典连续统构造的方法, 引出构造(可计算)实数的最有说服力、最自然的概念. 首先, 定义自然数为二元字母表 $\{0, 1\}$ 上的形为 0, 01, 011, ⋯, 的字. 类似地, 可以定义有理数为字母表 $\{0, 1, -, /\}$ 上的某种类型的字, 有理数的序和相等关系, 以及算术运算. 自然数的构造序列(constructive sequence of natural numbers)是将每个自然数映射到自然数的正规算法. 用同样的方法定义有理数的构造序列(constructive sequence of rational numbers). 正规算法模式可唯一地由 $\{0, 1\}$ 上的字编码. 给定算法的编码称为算法的描述(description of the algorithm). 自然数构造序列 α 称为有理数构造序列 β 的基本调节子(fundamentality regulator)(或收敛模(modulus of convergence)), 如果对任意自然数 l, m, n 使得 $l, m \geqslant \alpha(n)$, 则有 $|\beta(l)-\beta(m)|<2^{-n}$. 有理数的构造序列称为基本的(fundamental), 如果能构造它的一个基本正规子.

构造实数(constructive real number)是有理数或字母表 $\{0, 1, \square\}$ 上的形为 $U \square V$ 的字(这里的□作为分隔符号), 其中 U 是有理数的构造序列的描述, 并且 V 是 U 的基本调节子的自然数构造序列的描述. 构造实数概念(由 Н. А. Шанин(见[16])引入的, 称为 FR 数或 duplices), 是与作为能被有理数任意精确地逼近的对象的可计算实数的直觉主义概念相容的. 可以自然地定义构造实数的序和相等关系, 以及算术运算(由算法给出的). 带有相等和序关系以及算术运算的构造实数系为一域. 此外, 可以考虑构造实数的构造序列以及定义类似于上述的概念, 如构造实数的基本构造序列、构造实数的构造序列构造收敛于一构造实数的概念. 相对于这一收敛概念、构造实数系是完全的(complete): 存在一个算法, 由构造实数 γ 的任一构造序列的描述以及其基本调节子的描述(构造地)给出 γ 收敛的构造实数(构造实数系的完全性定理(completeness theorem for the system of constructive real numbers)). 由类似于 Cantor 的方法, 也能证明所有构造实数集(set of constructive real numbers)的构造不可数性(constructive uncountability): 存在一算法将任意构造实数序列的描述映射到(在构造实数相等的意义下)不同于这个构造序列任何项的构造实数. 完全性定理说明了构造和经典极限理论之间存在有值得注意的类似. 这类似性在分析中的某些具体序列及

级数收敛问题中特别明显．同时也有相当的差别，如下列E．Specker（见[4]）的结果：可以构造一递增的构造实数的构造序列β使得$0<\beta(n)<1$，且β不是基本的（因此，不（构造地）收敛于任意构造实数）．此外，β不包含任意构造收敛子序列，但β在构造连续统中的值集不能达到其上确界．引入构造实数的另一方法是在某些基础上扩展概念的构造化．更精确地，构造m元分数（constructive m-ary fraction）（$m>1$）是一（正规）算法α使得$\alpha(0)$为整数，且对$i>0$，$\alpha(i)$是自然数，其中$0\leqslant\alpha(i)\leqslant m-1$（每个$m$元分数$\alpha$，相当于构造实数的构造序列$\alpha(0)+\sum_{k=1}^{n}m^{-k}\alpha(k)$）．尽管这个构造实数概念简单，但它使用并不广泛，因为它有许多本质性的缺点：如不保持完全性定理，不存在算法实现两m元分数的加法．

构造函数是可计算实数上点点可计算函数的直观概念的精确形式．（实变）构造函数（constructive function）是一（正规）算法F使得对任意两个相等的构造实数x和y，如果F可作用于x，则F也可作用于y，且$F(x)$和$F(y)$为相等的可构造实数．初等函数（指数函数，三角函数，等等）能由构造函数定义，且保持通常性质．也可以引入近似于经典理论的构造函数的微分，Riemann积分等理论．此外，也有不同于经典分析的其他函数：例如，构造在单位区间上处处有定义且连续，但无界的构造函数（见[17]）．不同于传统分析的一个定理是每个构造函数在其具有定义的每个点上是构造连续的（见[18]）．

从1）的观点看，可以作出重大进展的构造分析的方法和概念的系统，对于理解分析中可计算关系也是很方便的，因为构造分析中许多定理要么是关于由某些初始数据构造对象的算法的存在性，要么断言不存在这样的算法．至今（1987），许多分析中的自然判定问题的不可解性已解决．这类结果（经典分析中完全没有的）具有明显的实际和理论价值，因为它们具有潜可计算特征，且对于理解可计算的极限也很有帮助．例如，已证明下列算法的不存在性（在某种精确的算法意义下）：1）识别任一构造实数是否等于0；2）对每个收敛的有理数构造序列，找其收敛的构造实数；3）找任意相容的线性方程组（在构造实数域上）的一个解；4）找任意连续的分段线性确定函数的根；5）找任意连续的分段线性函数在单位区间上的Riemann积分．下面的定理也属于这类结果，它完全解决了由一数系统到另一数系统的能行变换的可能性问题：对每个m元构造分数找一与其相等的n元构造分数的算法存在当且仅当n的所有素因子集包含在m的所有素因子集中（见[6]）（特别地，存在由十进位系统到二进位系统的算法，但不存在从二进位系统到十进位系统的算法）．关于算法不存在性的定理常导出一些关于解决具有更完全初始数据（见构造实数的完全性定理以及例2））或达到所要任意精确度的问题的算法存在性定理（例如，可以构造算法对每个处处定义的确定构造函数f和n，找一构造实数$x_{x,f}$使得$|f(x_{f,n})|<2^{-n}$）．在许多情况下，由上述结果能更清楚地知道如何正确处理各种算法问题．

参考文献

[1A] Turing, A. M., On computable numbers with an application to the Entscheidungs problem, *Proc. London Math. Soc.* (2), **42** (1937), 230–265.

[1B] Turing, A. M., On computable numbers with an application to the Entscheidungs problem, a correction, *Proc. London Math. Soc.* (2), **43** (1937), 544–546.

[2] Banach, S., Mazur, S., *Ann. Polon. Math.*, **16** (1937), 223.

[3] Mazur, S., Computable analysis, Warszawa, 1963.

[4] Specker E., Nicht konstruktiv beweisbare Sätze der Analysis, *J. Symbol. Logic*, **14** (1949), 3, 145–158.

[5] Grzegorczyk, A., *Fundam. Math.*, **42** (1955), 168–202, 232–239; **44** (1957), 61–71.

[6] Mostowski, A., On computable sequences, *Fundam. Math.*, **44** (1957), 37–51.

[7] Klaua, D., Konstruktive Analysis, Deutsch. Verlag. Wissenschaft., 1961.

[8] Kreisel, G., Lacombe D. and Schoenfield J. R., Fonctionelles récursivement définissables et fonctionelles récursives, *C. R. Acad. Sci.*, **245**(1957), 4, 399–402.

[9] Kreisel, G. and Lacombe, D., Ensembles récursivement mésurables et ensembles récursivement ouverts ou fermés, *C. R. Acad. Sci.*, **245**(1957), 14, 1106–1109.

[10A] Lacombe, D., Extension de la notion de fonction récursive aux fonctions d'une ou plusieurs variables reéles, I, *C. R. Acad. Sci.*, **240** (1955), 26, 2478–2480.

[10B] Lacombe, D., Extension de la notion de fonction récursive aux fonctions d'une ou plusieurs variables reéles, II, *C. R. Acad. Sci.*, **241** (1955), 1, 13–14.

[10C] Lacombe D., Extension de la notion de fonction récursive aux fonctions d'une ou plusieurs variables reeles, III, *C. R. Acad. Sci.*, **241**(1955), 2, 151–153.

[10D] Lacombe, D., Remarques sur les opérateurs récursifs et sur les fonctions récursives d'une variable reéles, *C. R. Acad. Sci.*, **241** (1955), 19, 1250–1252.

[10E] Lacombe, D., Quelques propriétés d'analyse récursive, *C. R. Acad. Sci.*, **244** (1957), 7, 838–840.

[10F] Lacombe, D., Quelques propriétés d'analyse récursive, *C. R. Acad. Sci.*, **244**(1957), 86, 996–997.

[10G] Lacombe, D., Les ensembles récursivement ouverts ou fermés et leurs applications à lànalyse récursive, I, *C. R. Acad. Sci.*, **245** (1957), 13, 1040–1043.

[10H] Lacombe, D., Les ensembles récursivement ouverts ou fermés et leurs applications à lànalyse récursive Ⅱ, *C. R. Acad. Sci.*, **246** (1958), 1, 28–31.

[11] Успенский, В. А., Лекции о вычислимых функциях, М., 1960.

[12] Гудстейн, Р. Л., Рекурсивный математический анализ, пер. с англ., М., 1970.

[13] Bishop, E., Foundations of constructive analysis, McGraw-Hill, 1967.

[14] Martin-Löf, P., Notes on constructive mathematics, Almgvist & Wiksell, 1970.

[15] Марков, А. А., Теория алгорифмов, М.-Л., 1954 (中译本：А. А. 马尔科夫，算法论，科学出版社，1959).

[16] Шанин, Н. А.,《Тр. матем. ин-та АН СССР》, **67** (1962), 15–294.

[17] Заславский, И.Д.,《Тр. матем. ин-та АН СССР》, **67** (1962), 385–457.

[18] Цейтин, Г. С.,《Тр. матем. ин-та АН СССР》, **67** (1962), 295–361.

[19] Кушнер, Б. А., Лекции по конструктивному математическому анализу, М., 1973. (英译本：Kushner, B. A., Lectures on constructive mathematicalanalysis, Amer. Math. Soc., 1984.

Б. А. Кушнер 撰

【补注】 Bishop 型的构造分析，见[13]的修改文[A1]. 递归分析(recursive analysis)，见[A2]. 关于 Brouwer 纲要，见**直觉主义** (intuitionism). 构造和直觉主义分析的各种形式系统的讨论，及其广泛和有用文献目录，见[A3].

参考文献

[A1] Bishop, E. and Bridges, D. S., Constructive analysis, Springer, 1985.

[A2] Alberth, O., Computable analysis, McGraw-Hill, 1980.

[A3] Beeson, M. J., Foundations of constructive mathematics, Springer, 1985.

眭跃飞 译

构造实变函数 [**constructive function of a real variable**; **конструктивная функция действительного переменного**]，构造函数(constructive function)

一元或多元函数论中的一个概念，用于**构造数学** (constructive mathematics). 它是由 А. А. Марков 引入的，可以作为构造度量空间中算法算子概念的一个特例. 亦见**构造分析** (constructive analysis)；**构造度量空间** (constructive metric space).

Б. А. Кушнер 撰　眭跃飞 译

构造逻辑 [**constructive logic**; **конструктивная логика**]

研究**构造对象** (constructive object)和构造的数理逻辑分支，在此意义下，构造逻辑比**构造数学** (constructive mathematics)逻辑更广. 与经典(传统)逻辑最主要的差别在于它没有**排中律** (law of the excluded middle) $A\vee\neg A$ 和**双重否定律** (double negation, law of) $\neg\neg A\to A$.

当描述纯逻辑系统(命题和谓词演算)时，"构造的"，"直觉主义的"，"Heyting 的"的意义时常就看作是同义的(见 **Heyting 形式系统** (Heyting formal system)). 构造算术(constructive arithmetic) 有时指 Heyting 算术，有时指加上 Марков 原理(见**构造选择原理** (constructive selection principle))，公理模式 $A\leftrightarrow\exists e(erA)$ 的扩展系统，其中公理模式表示数学公式的等价以及其可实现性(见**构造语义** (constructive semantics)). 这个扩展系统足以证明构造数学分析中的基本结果，但与 Heyting 系统相比它不是经典算术的子系统：在这系统中排中律 $\forall x(A(x)\vee\neg A(x))$ 是可驳的. **直觉主义逻辑** (intuitionistic logic)系统，包括描述特殊的直觉主义概念的方法，有时也看作属于构造逻辑. 许多构造逻辑系统反映连接符号 $\vee$ 和存在量词 $\exists$ 的特殊构造意义的一般方法是给出这些连接词的显可实现性. $A\vee B$(或 $\exists xA(x)$)的可推导性蕴含公式 A, B 之一的(或对某项 t, $A(t)$ 的)可推导性. 在应用系统(算术，分析)情况下，要求所讨论的公式是闭的. 大多数构造逻辑系统(包括所有 Heyting 系统)，关于各种各样实现性概念，包括 Kleene 可实现性及 **Gödel 解释** (Gödel interpretation)是可靠的：所有可推导公式是可实现的，因而它们在构造语义中为真. 另一方面，通常构造逻辑的形式系统关于自然构造语义是不完全的. 对于包含算术的系统，这可由 **Gödel 不完全定理** (Gödel incompleteness theorem)得出.

可实现谓词公式集不是递归可枚举的，因此构造谓词演算关于可实现性是不完全的，而关于"朴素"构造语义的完全性蕴含了构造选择原理的直觉主义真. 构造命题演算关于可实现性也是不完全的，但借助于 Post 系统在一定的解释下是完全的. 算术半形式系统(arithmetic semi-formal system)关于 Марков-Шанин 构造语义是完全的，它是形式构造算术加上公理模式 $A\leftrightarrow\exists e(erA)$、构造选择原理以及能行 ω 规则(effective ω-rule)所得的：由 $A[0]$, $A[1]$, $\cdots$，推出 $\forall x A(x)$. Heyting 系统关于 Kripke-Beth 的模型论语义是完全的，这种语义用到了可能世界(这些语义与集合论力迫法有关)，且涉及代数和拓扑模型.

借助于 Gödel 双重否定(转换) (Gödel double negation (translation))，即将所有子公式前加双重否定符号，经典形式系统通常可嵌入在相应的构造逻辑系统中(保持可推导性). 因此，基于经典逻辑的算术、分析以及**类型论** (types, theory of)系统能同构嵌入到基于构造逻辑的相应系统之中. 存在基于构造逻辑的且

经典系统能嵌入的集合论系统．由□转换（□-translation），即将每个子公式前加上必须符号□，Heyting系统能嵌入到古典系统的模态扩展中．这里，□可读作“可证的”或更恰当地，读作“可证且真”．

在一定的构造逻辑系统中，在经典解释下为假的命题是永真的．如排中律的否定，或关于选择序列的特殊直觉主义命题．在适当的可实现性 ρ 下，系统 S 可归为经典系统 S^0．已经证明 $S\vdash A$ 蕴含了存在 t 使得 $S^0\vdash (t\rho A)$．此外，如果 A 是数值相等，则 $S^0\vdash (A\leftrightarrow t\rho A)$，这蕴含了 S 相对于 S^0 的协调性．

构造逻辑也研究在不同于谓词逻辑、算术、分析等语言的非传统语言的命题的永真性．除了传统的否定 $\neg$，也研究强否定（strong negation）$\sim$．它适合构造反例，对于 $\sim$，许多经典逻辑定律是永真的，如：

$$\sim(p\& q)\leftrightarrow p\vee q,\quad \sim\sim p\leftrightarrow p.$$

但等价代换定理只在下列形式中才为真

$$((p\leftrightarrow q)\&(\sim p\leftrightarrow\sim q))\supset(A(p)\leftrightarrow A(q)).$$

与强否定系统相近的是基于对称处理真假的系统．这些系统的语义不仅说明验证所考虑的命题为真的构造形式，而且说明验证为假的构造形式．

不含否定词的 Griss-Nelson 逻辑（Griss-Nelson logic）企图避免使用否定词，只考虑非空性质，这样的逻辑语言包含连接词 $\to_\kappa$，其中 $A\to_\kappa B$ 大意为：

$$\forall x(A\supset B)\ \&\ \exists x\,A.$$

在构造理论（theory of construction）中，人们研究构造数学基础中各种构造和证明的规则．构造是指由原始构造通过一些组合子和作用到一个变元上的运算所能构造出的．公式由相等公式通过命题逻辑连接词和可证性谓词 π 所构造的，其中 $\pi(a,x\cdot\alpha(x))$ 读作“a 是 $\alpha(x)$ 对所有 x 为真的一个证明”．取所有经典重言式（包括排中律）作为公理，即：假设关系“是一个证明”是可判定的，在构造理论中存在 Heyting 系统的可靠的和诚实（完全）的解释．

在构造逻辑中无量词系统用来得到命题或部分命题的有限主义的证明（在某种意义下）（见**构造语义学**（constructive semantics））．许多构造逻辑的传统系统 S 能嵌入到无量词系统 S^- 中去，使得 $\forall x\,\exists y R(x,y)$ 在 S 中的可推导性蕴含对适当的 φ，公式 $R(x,\varphi(x))$ 在 S^- 中的可推导性，其中 R 是无量词公式．如果 S 是无归纳法的一阶算术，则 S^- 是原始递归算术．如果 S 是 Heyting 算术，则 S^- 是一个 Gödel 原始递归泛函系统．

对于构造逻辑的形式系统**正规化定理**（normalization theorem）是可以证明的：任何推导经有限次标准变换（归约）能归为不包含“多余”部分的正规形式（见 **Gentzen 形式系统**（Gentzen formal system））．正规推导（完全地，或在算术或在更强系统中部分地）具有子公式性质．

构造逻辑和范畴论有一定关系．例如，Descartes 封闭范畴概念对应于 Gentzen 命题演算．

有时，认为构造逻辑包括所有这样的逻辑研究，其中要求一切研究对象都是可构造的，而与所用的逻辑无关．

参考文献

[1] Kleene, S. C., Introduction to metamathematics, North-Holland, 1951（中译本：S. C. 克林，元数学导论，科学出版社，上册 1984，下册 1985）．

[2] Troelstra, A. S. (ed.), Metamathematical investigation of intuitionist arithmetic and analysis, Lectures Notes in Math., 344, Springer, 1973.

[3] Новиков, П. С., Конструктивная математическая логика с точки зрения классической, М., 1977.

[4] Kreisel, G., Mathematical logic, in Lectures on modern mathematics, Vol. 3, Wiley, 1965, 95–195.

Г. Е. Минц 撰

【补注】 Gödel 解释也称为 Dialectica 解释（Dialectica interpretation）．与范畴论的关系见[A1]，[A2]及其引用的参考文献．

参考文献

[A1] Lambek, J. and Scott, P., Higher order categorical logic, Cambridge Univ. Press, 1986.

[A2] Johnstone, P. T., Topos theory, Acad. Press, 1977.

眭跃飞 译

构造数学 [**constructive mathematics**; **конструктивная математика**]，数学中的构造趋势（constructive trend in mathematics）

根据一定的构造数学观点建立起来的数学，旨在寻求关于带有构造可能性的数学对象的存在性的结论，因而排除许多传统集合论数学的观点．引入一些纯存在性定理（特别是**实无穷抽象**（abstraction of actual infinity）以及**排中律**（law of the excluded middle）的通用本质的否决）．数学中的构造趋向以这样或那样的形式出现在整个数学历史上，尽管是 C. F. Gauss 第一个明确地陈述了潜无穷和实数学无穷之间的差别（这是构造数学中的主要差别），但他反对使用后者．在这方面、L. Kronecker, H. Poincare，特别是 L. E. J. Brouwer 作出了关键性的结论．在 Brouwer 于 19 世纪末 20 世纪初数学基础危机时写出的评论中，坚决地抛弃了对无穷集存在性的确信和对经典逻辑原理，特别是排中律的无限制推论的允许性的认可．作为另一种集合论处理方法，Brouwer 与其追随者发展了一

个独创的构造数学程序，现称为**直觉主义**(intuitionism). Brouwer的直觉主义数学被看作是第一个试图在构造基础上系统地建立数学. 与直觉主义成功的同时，在**证明论**(proof theory)(由D. Hilbert创立，目的在于判明集合论数学)中也出现了许多不同于直觉主义的构造趋势的创新想法. 这方面的大部分文章(象"构造"、"能行"等概念有许多不同解释)都依赖于成功地研究**算法**(algorithm)这个数学概念(仍受Hilbert思想的影响)，在此基础上的构造数学的发展中，构造数学的苏联学派的A. A. Марков作出了最一般的和确定的处理，其基本概念形式可追溯到20世纪50年代. 构造数学(数学中的构造趋势)本身在更一般意义下常指苏联学派的构造数学. 下文中的构造数学也是指在这个意义下的构造数学.

构造数学概括地有下列基本特征：1) 研究的对象是构造过程和作为执行该过程的结果的**构造对象**(constructive object)；2) 构造过程和构造对象在**潜在可实现性抽象**(abstraction of potential realizability)的框架内验证，完全排除实无穷概念；3) 能行性的直观概念与算法的精确定义的联系；4) 特殊的**构造逻辑**(constructive logic)，用来研究构造过程和构造对象的特征.

构造过程和构造对象的概念是原始的，其思想有其实际的人类活动作为基础. 比如，在传送带上生产装配手表，修理店中完全地或部分地拆卸手表；印刷厂文章的带校正排印；安装和拆除铁路火车，等等. 构造过程的特征是分步运算，具有指定的规则，其基本对象彼此间明显可区分，且在这过程中看作是不可分的. 由原始基本对象经运算所得结果称为构造对象(constructive object). 构造数学不需要深入研究构造过程或对象一般概念，因为构造对象的特殊形式，即某字母表上的字或其他的字，完全适合这一需要.

字(假设这概念是原始的)可如下验证.

开始，假设一固定字母表，即一列不可分的，明显可区别的基本符号(字母(letters)). 每个字母表的字母能够拷贝；一系列这样的拷贝的线性串或符号串称为原字母表上的字(words). 为方便起见，我们常常加上一个空字(empty word)，即不包含任意符号的串. 例如，串5): "abbbcd"，和6): "book"是英文字母表上的字. 在处理字时，构造数学(这里其抽象自然性较为明显)用到**同化抽象**(abstraction by identification)和潜实现. 同化抽象首先使我们能从不同的拷贝和原始字母中进行抽象，确信给定字母的不同拷贝以及是否为相同的字母. 比如，在字5)中，英文字母表的字母"b"出现了三次，而在实际中，是在写的时候产生原来字母的三个不同拷贝. 这种相等自然可以扩展到字的相等(但图像不同). 比如，字"book"和字6)是相同的字. 假设以同化抽象为基础，才使人类有识字能力，即指能重复和一致地认出符号串是相同还是不同. Hilbert指出这种能力是进行任何科学活动的最低要求. 潜在可实现性抽象能使我们不用考虑字的描述与实际的空间，时间和物质的限制. 这样，我们可以讨论想象中非常长的字，不管实际上是否存在，特别地，可以在任意给定字的右边(或左边)写下任意其他字，这蕴含了考虑任意大的自然数以及自然数相加的可能性，因为自然数可以看作是字母表{0，|}上形为0, 0|, 00|, …，等等的字. 此外，潜在可实现性抽象并不能使我们将无穷字和字母表上的"所有"字的集合看作其本身是完全的(特别地，自然序列不能看作是完整的对象). 这种考虑需要更强的抽象——实无穷抽象，这是构造数学所排斥的.

接受潜可实现性抽象使我们不仅能考虑初等的完全可视的构造过程(比如写较短的字)，也能考虑不是实际产生的概念的构造过程. 这样的过程由其指令所定义；这些指令本身又构成了研究的对象. 指令给出的构造过程(简单地，处理字的过程)必须是完全自明的，且一步步地完全唯一决定字串的构造；此外，步必须是基本的，即只假设读者能读，能写(或抹除)这些字. 这样，步可以化归为写下字和某些字的图形比较，以及由一字代换某一字的出现(见**嵌入字**(imbedded word)). 过程的停止由指令本身定义，且依赖于前面一些步所得到的结果；接受一给定步的有结果性判断必须也满足刚描述的基本特点. 可能没有一步是有结果的，即在每个完整步之后，给定的指令要求完成下一步. 对于这样的一个指令，不能附加任何潜在可实现的构造过程.

因此用传统术语是很方便的. 据此，相应的指令确定一无界可扩展(潜无穷)的过程. 由于这些术语的正当，也可以由潜在可实现过程考虑更抽象的形式，如与它们的指令相同的过程，以扩展原始构造过程思想. 随着构造过程的潜无穷出现，产生出关于确定由给定指令定义的算法是否停止的判定问题. 构造数学运用一个重要原理，称为**构造选择原理**(constructive selection principle)(Марков原理)，可以使我们用反证法得到事实，即相应构造过程的潜无穷归约于假设的可驳性. 指令的例子：7)：写|；8)：在{0，|}上的任意字的右边写|；9)：9a)：写|且转到9b)；9b)：抹除|(即用空字代替这字母)，到9a；10)：10a)：在{0，|}上的字的右边加|，转到10b)；10b)：如果当时的字为0||，则停止过程，否则回到10a)；11)：11a)：写0且转到11b)；11b)：在当前的字右边写|，转到11c)；11c)：如果得到一个完整的自然数则停止过程，否则在当前字上加|，回到11b).

指令7)定义一构造过程，它在一步写下一个字母|

之后停止．执行9)的过程是潜无穷的．我们不知道是否由11)定义的构造过程停止(在9)中用到了数论中的思想；显然，利用扫描，写和比较字母表{0，|}上的字的能力，可以定义更长的这种指令)．指令8)和10)有相当特别的特点：它们由指令字母表上的任何字开始，且由8)定义的构造过程总是停止的，而同时由10)定义的对某些初始字是潜无穷的．上述类型的指令习惯地称为算法(algorithm)（在本文中我们只考虑字上运算的算法)．

存在命题的构造处理必须考虑算法．具有给定性质的构造对象的存在性断言，即形如12)：$\exists x A(x)$，的命题，关于作为构造过程结果的构造对象的性质，在构造数学中建立，只有当所要求的对象的构造说明潜可实现构造过程停止．同样建立带参量的存在命题13)：$\forall x \exists y A(x, y)$（对所有$x$，存在$y$使得$A(x, y)$）假定有"一般的"构造过程使得由任意给定原始的构造对象x开始，且停止于y的构造．换句话说，13)表示存在由x找y的算法．存在性的处理蕴涵了**析取**(dis-junction)的构造解释：命题$A \vee B$(A或B)看成被证明仅当有一构造过程停止且指明A，B中的一个为真．根据原来的构造目的，进一步解释更复杂结构的命题以及处理它们的规则的描述则为**构造语义**(constructive semantics)和**构造逻辑**(constructive logic)的问题．上面给出的存在和析取命题的构造处理本质上不同于以下传统的方法：比如在集合论数学中，由12)的否定引出矛盾可以证明12)．这样的证明通常不含构造所需构造对象的方法．在构造数学中，这样不能证明12)．只证明了它的双重否定，即$\neg\neg\exists x A(x)$．这命题在构造数学中常常看作比12)弱．这样，构造数学中不用消除双重否定规则，因而也不用排中律(析取的构造处理也指出不能接受后者)．

自然数，整数和有理数的原始数学结构可以直接处理为一固定字母表上的某些简单类型的字；因此，相等和序关系很容易地归结为字的图形的一致和不同．在构造数学中，由算法概念也能引入更复杂的结构，如实数及实函数，等等，其中算法粗略地看成为传统数学中的函数概念．由于算法的直觉概念对这样的构造过于模糊，构造数学采取了一个重大措施，接受近代算法的精确定义和与此相应的Church论题来标准化可用的算法，**Church论题**(Church thesis)断言由算法可做的运算可能性在直觉和精确意义下是相同的．事实上，构造数学中更多地应用Марков**正规算法**(normal algorithm)．存在的构造处理也要求精确的算法定义．比如，13)的否定断言某些算法的不存在性，而足以认知作为算法的某些具体指令的直观想法原则上不能得出关于不可能性的非平凡定理．在上述原则基础上，利用构造数学中的近代算法理论，可以发展许多数学分支，包括构造数学分析，泛函分析基础，微分方程，复变函数论等(见**构造分析**(constructive analysis))．这样所得的理论模型基于比通常系统更合适的抽象，尽管不如传统方法那样明显和优美，然而它们仍有相同的应用范围．

构造数学与Brouwer的直觉主义数学有相同的本质来源，且用到了后者的许多构造和想法，它们有一定的类似．此外，也有一般哲学的和具体数学的自然特性两方面的主要差别．在哲学自然方面，在数学直觉的本来特征中的构造数学，并不注重信仰，这是直觉主义特有的，这种直觉本身是在人类实践活动的影响下形成的．相应地，构造数学的抽象不是象直觉主义那样来自主观构造，而是来自于最简单的实际可观察的构造过程．在数学结构方面，构造数学不用自由选择序列的推导概念，这已超出构造过程和对象的框架，也不用作为基于自由选择序列的自由框架介质的连续统的直觉主义理论．另一方面，直觉主义数学不接受构造选择原理，也不认为必须为相应的精确定义而消除直觉算法．值得指出的是，在最近几年出现了某种揉合构造主义和直觉主义的倾向：在某些构造研究中，特别是与语义相关的构造研究中，使用了归纳定义以及相应的归纳证明，这使人们想起了在Brouwer的所谓坝定理(见**坝归纳**(bar-induction))的证明中的Brouwer构造，这个定理在直觉主义数学中占有中心地位．

参考文献

[1] Fraenkel, A. A. and Bar-Hillel, Y., Foundations of set theory, North-Holland, 1985.

[2] Heyting, A., Intuitionism: an introduction, North-Holland, 1970.

[3] Hilbert, D., Grundlagen der Geometric, Springer, 1913 (中译本：D．希尔伯特，几何基础，上册，科学出版社，1987).

[4] Heyting, A. (ed.), Constructivity in mathematics, Noth-Holland, 1959.

[5] Марков, А. А., Теория алгорифмов, М., 1954(中译本：А. А. 马尔科夫，算法论，科学出版社，1959).

[6] Марков, А. А., О логике конструктивной математики, М., 1972.

[7] Проблемы конструктивного направления в математике, в., 1-6, М-Л., 1958-1973 (Тр. матем. ин-та АН СССР, т. 52, 67, 72, 93, 113, 129).

Б. А. Кушнер 撰

【补注】 见**构造分析**(constructive analysis)的参考文献．

胜跃飞 译

构造度量空间[constructive metric space；конструктивное метрическое пространство]

用于构造数学中的度量空间概念．递归度量空间有与其相近的意思．

$\{\mathfrak{M}, \rho\}$ 称为构造度量空间，其中 $\mathfrak{M}$ 是构造对象集合(通常为某字母表上的字)，ρ 是将任意 $\mathfrak{M}$ 的元素对映射到构造实数(见**构造分析** (constructive analysis))的算法，如果对任意 $X, Y, Z \in \mathfrak{M}$，有下列性质：1) $\rho(X, X)=0$; 2) $\rho(X, Y) \leqslant \rho(X, Z)+\rho(Y, Z)$ (这里及下面的算法将是指精确意义下的算法)．集合 $\mathfrak{M}$ 和算法 ρ 分别称为构造度量空间的承载集 (carrier) 和度量算法 (metric algorithm)，$\mathfrak{M}$ 的元素称为这个构造度量空间的点 (point)．公理 1), 2) 蕴含 $\rho(X, Y) \geqslant 0$，且 $\rho(X, Y)=\rho(Y, X)$．在构造度量空间 $\{\mathfrak{M}, \rho\}$ 中两点 $X, Y \in \mathfrak{M}$ 称为相同的 (equivalent) (或不同的 (distinct))，如果 $\rho(X, Y)=0$ (或 $\rho(X, Y) \neq 0$).

构造度量空间的例子．

a) 自然数空间 H．H 的载体是自然数集 (自然数看成是形为 0, 01, 011, ⋯，的字)，而度量算法 ρ 为 $\rho(m, n)=|m-n|$．类似地，可以定义有理数空间 R 和构造实数空间 E_1.

b) n 维 Euclid 空间 E_n．E_n 的载体为形如 $x_1 * \cdots * x_n$ 的字集，其中 $x_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ 是构造实数，度量算法 ρ 的构造使得

$$\rho(x_1 * \cdots * x_n, y_1 * \cdots * y_n) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}.$$

c) 单位区间上一致连续构造函数空间 C．C 的载体是形为 $\varepsilon f \varepsilon * \varepsilon \gamma \varepsilon$ 的字集，其中 f 是在单位区间上处处有定义的构造函数；γ 是一算法，它将每个自然数映射到一个自然数使得

$$\forall n, x_1, x_2 ((0 \leqslant x_1, x_2 \leqslant 1 \& |x_1 - x_2| < 2^{-\gamma(n)}) \supset$$
$$\supset |f(x_1) - f(x_2)| < 2^{-n})$$

($\varepsilon \mathfrak{A} \varepsilon$ 表示算法 $\mathfrak{A}$ 的描述(编码))．度量算法 ρ 的构造使得

$$\rho(\varepsilon f_1 \varepsilon * \varepsilon \gamma_1 \varepsilon, \varepsilon f_2 \varepsilon * \varepsilon \gamma_2 \varepsilon) = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f_1(x) - f_2(x)|.$$

空间 C 的载体的复杂形式是度量的能行计算所必须的．

d) 一般递归函数的 Baire 空间 B．B 的载体是一般递归函数的 Gödel 数集，度量算法 ρ 的构造使得如果 φ_n 和 φ_m 是编码为 n 和 m 的一般递归函数，则 $\rho(n, m)=0$，如果对任意 i，$\varphi_n(i)=\varphi_m(i)$；且 $\rho(n, m)=2^{-k}$，如果对于 $i<k$，$\varphi_n(i)=\varphi_m(i)$，且 $\varphi_n(k) \neq \varphi_m(k)$.

设 $M=\{\mathfrak{M}, \rho\}$ 是构造度量空间．算法 β 称为 M 的点序列 (sequence of points)，如果对每个 n，$\beta(n) \in M$．序列 β 称为正规的 (regular)，如果对每个 $m>n$，有 $\rho(\beta(m), \beta(n))<2^{-n}$．正规序列 β 收敛于构造度量空间 M 的点 X，如果对任意 n，$\rho(X, \beta(n)) \leqslant 2^{-n}$．构造度量空间 M 称为完全的 (complete)，如果存在一个算法使得对每个(M 的点的)正规序列 β，可找到其收敛于 M 的点．M 称为可分的 (separable)，如果存在算法 α，δ 使得 α 是 M 上的点序列，且对任意 $x \in M$ 和 n，$\delta(X * n)$ 是一自然数，其中 $\rho(\alpha(\delta(X * n)), X)<2^{-n}$．所有例 a)—d) 的空间 H, R, E_1, E_n, C, B 是可分的，空间 H, E_1, E_n, C 也是完全的．非递归可枚举集生成 H 的子空间是非可分离的构造度量空间．在构造度量空间中可以陈述度量空间经典理论的许多结果，特别地，Hausdorff 定理的构造变式 (constructive variant of Hausdorff theorem) 是很重要的．对每个构造度量空间都能构造其完全化构造度量空间．

使一个构造度量空间完全化的过程是构造数学中引入新结构的有力方法．构造实数就是这样引入的．可测集和可测函数，Lebesgue 可积函数等经典概念也可类似地定义．构造度量空间理论的基本目的之一是研究关于某些可计算度量为良定义的算法映射．

设 $\mathfrak{M}_1=\{\mathfrak{M}_1, \rho_1\}$，$\mathfrak{M}_2=\{\mathfrak{M}_2, \rho_2\}$ 是两构造度量空间．$M_1 \to M_2$ 型的算法算子 (algorithmic operator) 为满足下面条件的算法 ψ：a) 如果 $X \in \mathfrak{M}_1$，且 $\psi(X)$ 有定义，则 $\psi(X) \in \mathfrak{M}_2$；b) 如果 X, Y 为 M_1 的等价点(即，$\rho_1(X, Y)=0$)，且 $\psi(X)$ 有定义，则 $\psi(Y)$ 有定义，且 $\psi(X)$，$\psi(Y)$ 为 M_2 的等价点．$E_1 \to E_1$，$E_n \to E_1$ 型的算法算子分别是一元或 n 元构造函数；$B \to H$ 型的算法算子习惯上称为能行泛函 (effective functionals) (或能行算子 (effective operators))．

算法算子理论中的基本结果之一是 Tseitin 定理 (Tseitin theorem)，该定理断言完全的、可分离的构造度量空间 M_1 中，对任意 $M_1 \to M_2$ 型的算法算子 ψ 及每个 n，可以构造包含 ψ 定义域的球的算法(递归)可枚举集，使得在这个集合的任意球上的振动不超过 2^{-n}．这定理蕴含了关于能行泛函到部分递归泛函的可扩展性的著名结果．上面结果的另一个重要推论就是算法算子连续性定理：如果 M_1 是完全的、可分离的构造度量空间，M_2 为任意构造度量空间，则对任意 $M_1 \to M_2$ 型的算法算子 ψ，可以构造一个算法 α 使得对任意 ψ 定义域中的 X, Y 和任意 n，$\alpha(X, n)$ 是一个自然数，其中 $\rho_1(X, Y)<2^{-\alpha(X, n)}$ 蕴含了 $\rho_2(\psi(X), \psi(Y))<2^{-n}$.

用与构造度量空间相同的一般方法，可以研究构造赋范空间和 Hilbert 空间的理论．

参考文献

[1] Цейтин, Г. С.,《Тр. матем. ин-та АН СССР》, 67 (1962), 295—361.

[2] Moschovakis, Y. N., Recursive metric spaces, *Fund. Math.*, 55 (1964), 3, 215—238.

[3] Шанин, Н. А., 《Тр. матем. ин-та АН СССР》, 67 (1962), 15-294.

[4] Кушнер, Б. А., Лекции по констуктивному математическому анализу, М., 1973 (英译本: Kushner, B. A. Lectures on constructive mathematical analysis, Amer. Math. Soc., 1984). Б. А. Кушнер 撰

【补注】 上文只涉及了狭窄的苏联学派意义下的构造分析(亦见**构造数学** (constructive mathematics)). [A1]和[A2]提供了不同的处理方法. 递归度量空间概念, 见[A3].

参考文献

[A1] Bishop, E. and Bridges, D., Constructive analysis, Springer, 1985.

[A2] Beeson, M. J., Foundations of constructive mathematics, Springer, 1985.

[A3] Alberth, O., Computable analysis, McGraw-Hill, 1980. 眭跃飞 译

构造模型论[constructive model theory; конструктивных моделей теория]

见**递归模型论** (recursive model theory).

构造对象[constructive object; конструктивный объект]

作为完成一构造过程(constructive process)的结果的数学对象. 为描述某一构造过程, 常常假定所考虑的对象作为不可分的初始对象已被明显刻画; 且假定给出了作为描述构造过程的允许步骤, 由已构造的对象如何形成(产生)新的对象的形成规则, 且过程是分步进行的, 其中新的一步是由已构造对象和实际能用于已构造对象的规则所决定的(见[4]). 当然, 构造过程和构造对象的这种描述不是精确的数学定义, 然而, 具体的数学理论总是只讨论有精确定义的和具体类型的构造对象. 以上所述的构造对象的描述只作选择相应的精确定义的方法.

固定**字母表** (alphabet)上的字是精确定义的一类构造对象(字母表中的字母看作是初始对象). 新字是由已构造的对象在其右边加上字母所得到的(见[3]的17节). 另外, 构造对象的例子有有限**图** (graph). 有限抽象拓扑**复形** (complex), relay-contant 模式(选择相应的初始对象和形成规则是不困难的), 还有有理数、代数多项式、**算法** (algorithm)和各种良定性的**演算** (calculus). 有限表示群和其他类似的数学对象也可以看作是构造对象.

构造对象在对所考虑的对象借助于数学符号化要求有一清晰的个体说明的数学理论中有重要作用. 在集合论数学中, 由于无限制地用到**实无穷抽象** (abstraction of actural infinity), 构造对象和构造对象集是与简单的数学对象同等看待的, 其差别仅在构造对象的高度可达性. 在构造数学(constructive mathematics)中, 构造对象(或由其所决定的对象)自然形成一类可讨论的数学对象. 这里的讨论基于排除实无穷抽象以及考虑构造对象的定义特征的**特殊构造逻辑** (constructive logic), 亦见**构造数学** (constructive mathematics).

参考文献

[1] Марков, А. А., 《Тр. матем. ин-та АН СССР》, 67 (1962), 8-14.

[2] Марков, А. А., О логике конструктивной математики, М., 1972.

[3] Markov, A. A. and Nagornyi, N. M., Theory of algorithms, Reidel, 1988 (译自俄文).

[4] Шанин, Н. А., 《Тр. матем. ин-та АН СССР》, 67 (1962), 15-294.

Н. М. Нагорный 撰 眭跃飞 译

构造命题演算[constructive propositional calculus; конструктивное исчисление высказываний]

描述在**构造数学** (constructive mathematics)观点下永真的表达式的推导方法的**逻辑演算** (logical calculus). "构造命题演算"一词通常指的是**直觉主义命题演算**(intuitionistic propositional calculus). 然而, 在某种构造主义的特定解释下, 直觉主义命题演算是不完全的. 例如, 著名的 Rose 公式 (Rose formula)

$$((\neg\neg A \supset A) \supset (\neg\neg A \vee \neg A)) \supset (\neg\neg A \vee \neg A),$$

其中 A 是公式 $\neg p \vee \neg q$, 而 p, q 是命题变元, 在直觉主义命题演算中是不可推导的, 同时在递归可实现的 Kleene 解释下是恒真的, 至少在接受**构造选择原理** (constructive selection principle) (Марков 原理 (Markov principle)) 时是如此. 实质问题是研究不同的构造数学语义的构造命题演算的完全性.

参考文献

[1] Kleene, S. C., Introduction to metamathematics, North-Holland, 1951 (中译本: S. C. 克林, 元数学导论, 科学出版社, 上册 1984, 下册 1985).

[2] Rose, G. F., Propositional calculus and realizability, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **75** (1953), 1-19.

А. Г. Драгалин 撰 眭跃飞 译

构造性量子场论[constructive quantum field theory; конструктивная квантовая теория поля]

数学物理学的一个分支, 研究**量子场论** (quantum field theory)模型的性质. 构造性量子场论的问题之一是真实四维时空中相互作用量子场的研究. 然而, 这些场的存在性, 数学上尚未确立(1987). 因此, 曾经主要致力于二维和三维时空中量子场论的较少奇异性模型的

研究.构造性量子场论是公理化场论和重正化理论的概念和方法与现代数学方法的综合.相对论量子场的概念本身容许有各种等效数学解释,使得人们能够应用数学不同领域的方法.

一个量子场可以或者利用对算子广义函数的非线性双曲型方程来处理,或者利用广义随机场理论来处理(与统计力学建立密切联系),或者作为多复变数解析函数系来处理(S 矩阵解析性质的研究中),或者可从 C^* 代数和表示理论的观点来考虑.

关于构造性量子场论最早的工作,应用的主要是泛函分析方法.满足 Wightman 公理的二维时空相对论量子场,应用量子场论的Euclid 型表述 ([9])首次成功地构造出来 ([8]),使人们能引进概率论和统计力学的方法.

相对论量子场由其 Wightman 函数 $W_n(x_1, \cdots, x_n)$ 完全表征.量子场论的等价 Euclid 型表述利用 Schwinger 函数 $S_n(x_1, \cdots, x_n)$ (这些是由 W_n 通过解析延拓到Euclid 点($ix_1^0, \mathbf{x}_1, ix_2^0, \mathbf{x}_2, \cdots$) 获得的) 给出,满足 Osterwalder - Schrader 公理.在某些附加假设下可以证明,S_n 是具有特殊性质的**概率测度**(probability measure)的矩.已经证明,构造量子场论模型最方便的方法,也是最通用的方法是,开始先构造一个概率测度,然后对其矩证明 Osterwalder - Schrader 公理为正确.

对于单一标量场的最简单情况,考虑一个**可测空间**(measurable space) ($S'(\mathbf{R}^d)$, B),其中 $S'(\mathbf{R}^d)$是(实值)缓增广义函数空间, B是柱集生成的 σ 代数,而 (S', B)上的一类概率测度 μ 具有下列特殊性质.

1) 在(S', B)上通过 σ 代数B的自同构定义 $\mathbf{R}^d$的Euclid 运动群单位元素连通分量 G 的一个自然表示.人们要求测度 μ 为 G 不变量.这个条件是相对论不变性的 Euclid 表达式.

2) 设 $\Phi(f)$ 为由 $\Phi(f)(\omega)=\omega(f)$ ($\omega\in S'$, $f\in S'$)定义的 (S', B, μ)上的广义随机场.对 S' 上任一函数 $F(\omega)$,定义 $F_\theta(\omega)=F(\omega_\theta)$,其中 $\omega_\theta(f)=\omega(f_\theta)$, $f_\theta(x_1, \cdots, x_d)=f(x_1, \cdots, -x_d)$.设 B_+ 为由函数 $\Phi(f)$ 生成的 σ 代数,并且 $\operatorname{supp} f\subset\{x\in\mathbf{R}^d: x_d>0\}$.人们要求对 S' 上任一 B_+ 可测函数 F, Osterwalder - Schrader 的正性条件成立:

$$\int \overline{F}_\theta(\omega)F(\omega)\,d\mu(\omega)\geqslant 0,$$

这个条件表达相对论 Hilbert 空间中标量积的正定性.对于二维模型,对场 $\Phi(f)$ 广泛应用稍强的 Марков 条件.

3) 人们要求 $S(\mathbf{R}^d)$上存在范数 $\|\cdot\|$,使得

$$\int e^{\Phi(f)}\,d\mu$$

在

$$\{f: \in S(\mathbf{R}^d), \|f\|\leqslant 1\}$$

上关于 $\|\cdot\|$ 是一致有界和一致连续的.

4) 群 G 的平移子群必须是遍历的.这表达相对论中真空的唯一性.

若测度 μ 满足条件 1) - 4),则称为**量子测度**(quantum measure),相应的广义随机场 $\Phi(f)$ 称为 Euclid 场(Euclidean field).量子测度的矩量,

$$S_n(f_1, \ldots, f_n)=\int \Phi(f_1)\cdots\Phi(f_n)\,d\mu$$

是 Schwinger 函数,满足 Osterwalder -Schrader 公理.存在一个唯一的相对论性量子场,满足所有 Wightman 公理,使其 Wightman 函数到 Euclid 点的解析延拓与给定量子测度 μ 的 Schwinger 函数相同.若一测度 μ 仅满足条件 1) - 3),则对其所有遍历分量条件 1) - 4) 有效.

有一类量子测度容易构造,即具有特征泛函

$$\int \exp\{i\Phi(f)\}\,d\nu_m=\exp\left\{\frac{1}{2}(f, (-\Delta+m^2)^{-1}f)_{L_2(\mathbf{R}^d)}\right\}$$

的 Gauss 型测度(依赖于一参数 $m>0$),其中 Δ 是 Laplace 算子(当 $d\geqslant 3$时,容许有 $m=0$).相应的 Euclid 场称为具有质量为 m 的自由(标量)Euclid 场.

非 Gauss 型测度的构造出现巨大困难,结果基本上依赖于维度 d.通常步骤如下.在 S' 上构造函数 $V(\Lambda, \kappa)$ (相互作用势),依赖于参数 Λ 和 κ,Λ 称为体积截止,κ 称为紫外截止.启发式地说,$V=-L_{\text{int}}$ (见量子场论(quantum field theory)).$V(\Lambda, \kappa)$ 对 Λ 是加性的,而对 κ 不是.于是构造出测度

$$d\mu_{\Lambda,\kappa}=\frac{e^{-V(\Lambda,\kappa)}\,d\nu_m^\Lambda}{\int e^{-V(\Lambda,\kappa)}\,d\nu_m^\Lambda}$$

($d\nu_m^\Lambda$ 的定义在下面给出),并研究当 $\Lambda, \kappa\to\infty$ 时测度 $d\mu_{\Lambda,\kappa}$ 序列的极限.对于某些势 V (究竟是怎样的,要由物理考虑来确定;V 的形式也给定一个模型),极限测度 μ 满足条件 1) - 4).测度的收敛通常在其所有矩和特征泛函的收敛这样的意义上来理解.

例如,对具有互作用 $\lambda\Phi^4$ 和 $d=2$ 的模型,这个步骤可具体以下列方式作出.设 $d\nu_m^\Lambda$ 为(S', B)上的Gauss 型测度,具有特征泛函

$$\int \exp\{i\Phi(f)\}\,d\nu_m^\Lambda=\exp\left\{-\frac{1}{2}(f, (-\Delta_\Lambda+m^2)^{-1}f)_{L_2}\right\},$$

其中 Δ_Λ 是平面 $\mathbf{R}^2$ 内域 Λ 的边界 $\partial\Lambda$ 上具有某些边界条件的 Laplace 算子的自伴扩张(通常 Λ 是矩形);核$(-\Delta_\Lambda+m^2)^{-1}(x, y)$.例如,可以是对于 Dirichlet 问题的 Green 函数.进一步假定 $h_\kappa\in S$ 和当 $x\to\infty$ 时 $h_\kappa(x-y)\to\delta(x, y)$.对于 $\kappa<\infty$,随机变量 $\Phi_\kappa(x)=\Phi(h_\kappa$

$(x-\cdot)$是参数 $x\in\mathbf{R}^2$ 的光滑函数而当 $\kappa\to\infty$ 时

$$\int\Phi_\kappa(x)f(x)dx\to\Phi(f)$$

设

$$V(\Lambda,\kappa)=\lambda\int_\Lambda:\Phi_\kappa^4(x):dx,\ \lambda\geqslant 0,$$

其中 $:\Phi_\kappa^4(x):$ 是 $\Phi_\kappa(x)$ 的 Wick 幂(见 **Фок** 空间 (Fock space)). 于是

$$e^{-V(\Lambda,\kappa)}\in L_p(d\nu_m^\Lambda),\ p\geqslant 1,$$

$$Z_{\kappa,\Lambda}=\int e^{-V(\Lambda,\kappa)}d\nu_m^\Lambda\neq 0.$$

最后,设

$$d\mu_{\Lambda,\kappa}=\frac{\exp\{-V(\Lambda,\kappa)\}d\nu_m^\Lambda}{Z_{\kappa,\Lambda}}.$$

当 $\kappa\to\infty$, $\Lambda\to\mathbf{R}^2$ 时, 测度 $\mu_{\Lambda,\kappa}$ 的所有矩和特征泛函收敛至某个量子测度 μ 的矩和特征泛函. 结果是对充分大的 λ, 在 $\partial\Lambda$ 上具有不同边界条件的测度 $\mu_\Lambda=\lim_{\kappa\to\infty}\mu_{\Lambda,\kappa}$, 当 $\Lambda\to\mathbf{R}^2$ 时一般地具有不同极限. 在这种情况下表明发生相变.

构造性量子场论的中心问题包括: 描述相应于给定互作用势的所有量子测度(相), 以及研究相应相对论量子场的性质. 首先, 人们感兴趣的是 Poincaré 群的质量算子的谱性质(其研究归结为检查大距离上 Schwinger 函数的行为)以及 S 矩阵的性质, 如解析性、酉性等等(S 矩阵利用 Schwinger 函数的解析延拓来研究).

当 $d=2$ 时, 对于下列一些互作用势: $V=P(\Phi)$, 其中 P 是下有界的任何多项式, $V=\lambda\cos g\Phi$ (正弦 Gordon 方程)和一些其他非多项式互作用, 以及对一些多分量场 $\Phi=(\Phi_1,\cdots,\Phi_N)$, 量子测度的存在性已经得到证明(1978). 对充分弱的多项式型互作用, 曾进行过质量算子谱对多项式形式的依存性的研究, 并且已经确立 S 矩阵的存在性. 具有汤川互作用的 Fermi 子场和纯量场也进行过研究. Euclid 型 Fermi 子场不是广义随机场, 它在 Grassmann 代数中取值. 然而, 人们能"积分掉"Fermi 子变数, 于是问题归结为对于普通 Gauss 测度估计某些路径积分. 所有这些模型, 对某些参数值具有相变.

上面描述的相对论量子场的构造, 仅导致所谓真空区域, 即导致满足 Wightman 公理并补充以真空的存在性公理的量子场. 这些场是具有显见初值条件的非线性方程的解. 对于许多二维模型(正弦 Gordon 等等), 曾经构造出孤立子区域, 其中没有真空, 但对质量算子具有离散谱; 从物理学观点看, 这具有很大兴趣. 这些新区域是利用真空区域中观测量的 C^* 代数的特殊自同构构造出来的.

当 $d=3$ 时, 在具有 $\lambda(\Phi,\Phi)^2$ 相互作用的模型中, 曾经证明了量子测度的存在性, 其中

$$(\Phi(x),\Phi(x))=\sum_{i=1}^N\Phi_i(x)\Phi_i(x).$$

这里相互作用势具有形式

$$V(\Lambda,\kappa)=\lambda\int_\Lambda:(\Phi_\kappa(x),\Phi_\kappa(x))^2:dx+$$

$$+\lambda^2\delta m_\kappa\int_\Lambda:(\Phi_\kappa(x),\Phi_\kappa(x)):dx+C_{\kappa,\Lambda},$$

其中 δm_κ 和 $C_{\kappa,\Lambda}$ 是 κ 和 Λ 的某些确定函数; 即计数项相加. 还有, 在这个模型中, 当 λ 充分大时, 也发生相变, 并且伴随有 $O(N)$ 对称破缺.

参考文献

[1] Боголюбов, Н. Н., Логунов, А. А., Тодоров, И. Т., Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля, М., 1969 (英译本: Bogolyubov, N. N., Logunov, A. A. and Todorov, I. T., Introduction to axiomatic quantum field theory, Benjamin, 1975).

[2] Constructive quantum field theory, Lecture Notes in Physics, 25, Springer, 1973.

[3] Reed, M. and Simon, B., Methods of modern mathematical physics, 1 - 4, Acad. Press, 1972 - 1978.

[4] Simon, B., The $P(\varphi)_2$ model of Euclidean (quantum) field theory, Princeton Univ. Press, 1974.

[5] Hepp, C., Théorie de la renormalisation, Lecture Notes in Physics, 2, Springer, 1969.

[6] Эвклидова квантовая теория поля. Марковский подход, пер. с англ., М., 1978.

[7] Добрушин, Р. Л., Минлос, Р. А., 《Успехи матем. наук》, 32 (1977), 2, 67 - 122.

[8] Glimm, J., Jaffe, A. and Spencer, T., The Wightman axioms and particle structure in the $P(\varphi)_2$ quantum field model, *Ann. of Math.*, **100** (1974), 3, 585 - 632.

[9] Nelson, E., Construction of quantum fields from Markoff fields, *J. Funct. Anal.*, **12** (1973), 1, 97 - 112.

[10] Fröhlich, J., Schwinger functions and their generating functionals II. Markovian and generalized path space measures on S, *Adv. Math.*, **23** (1977), 2, 119 - 181.

И. В. Волович, М. К. Поливанов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Glimm, J. and Jaffe, A., Quantum physics, a functional integral point of view, Springer, 1981.

徐锡申 译

构造实数 [**constructive real number**; **конструктивное действительное число**]

用于**构造数学**(constructive mathematics)的实数的概念. 在更广的意义下, 它是在一些构造方法下可构造的实数. "可计算实数"一词与其具有相近的意义, 它不是用于从开始起构造非传统连续统的情况,

而是用于考虑在某种意义下由算法可计算的经典实数的问题(亦见**构造分析** (constructive analysis)).

Б. А. Кушнер 撰 眭跃飞 译

构造选择原理 [**constructive selection principle**；**конструктивного подбора принцип**], Марков 原理 (Mapkov principle)

由 A. A. Марков ([1], [2]) 提出的**构造数学** (constructive mathematics) 中的逻辑·哲学原理, 其一般形式断言由某一描述给定的构造过程, 如果它不是潜在无穷的(无界可扩展的), 那么该过程停止. 在构造数学中常用与其等价的几种具体形式. 1) 设 Ψ 是**正规算法** (normal algorithm), P 为某字母表上的字, 如果命题 Ψ 不能作用于 P 是可驳的, 则 Ψ 可作用于 P, 记为

$$\neg\neg !\Psi(P) \supset !\Psi(P).$$

2) 在**形式算术** (arithematic, formal) 中构造选择原理可由下列公式表示:

$$\forall z\ \forall x\,[\neg\forall y\,\neg T_1(z,x,y)\supset\exists y\ T_1(z,x,y)],$$

其中 T_1 是一个原始递归谓词, 使得 Godel 数为 z 的部分递归函数在 x 处有定义当且仅当 $\exists y T_1(z, x, y)$ (见[3]). 3) 如果一递归可枚举集是非空的, 则它包含某一元素. 4) 设 A 是自然数的一个算法可验证性质. 如果断言不存在满足 A 的数的命题是可驳的, 则存在具有性质 A 的自然数, 相应的逻辑形式为:

$$\forall x\,(A(x)\vee\neg A(x))\supset(\neg\neg\exists x\,A(x)\supset\exists y\,A(y)).$$

有时构造选择原理特指这种形式, 因为所要的数可在下列构造过程中选出: 验证 $A(0)$; 如果为真, 则选 0 为所要的数; 否则, 验证 $A(1)$, 等等.

构造数学中可用的抽象系统的框架内可如下直观判断构造选择原理: 如果一给定构造过程的潜无穷的不可能性是确定可证的, 则该过程的停止, 作为一步步执行该过程的结果是潜可达的. 这样, 在潜可实现性抽象内, 基于构造选择原理可以断言**构造对象** (constructive object) (如, 将正规算法作用于某字的结果) 的存在性.

从经典逻辑看来, 构造选择原理是绝对允许的, 因为它是消除双重否定和排中律的一般规则的特例. 应用这些逻辑规则可归结为在许多**递归函数** (recursive function) 论的构造中的构造选择原理. 这使这些构造在构造数学中也有用. 由构造选择原理可以得到**构造分析** (constructive analysis) 中的许多重要结果. 特别是算法算子连续性定理和能行泛函到部分递归泛函 (亦见**构造度量空间** (constructive metric space)) 的可扩展性定理. 构造选择原理应用的另一领域是在构造语义中([4]). 在构造选择原理在构造数学中作为一般原理之前, 在不同的构造意义下做了许多基于各种形式的该原理的研究. 这里必须提到 P. C. Новиков 在 1943 年 (见[5]) 得到的基本结果: 假定对一元公式 $A(x)$, 对每个 n, $A(n)\vee\neg A(n)$ 在构造形式算术中可推导, 且 $\exists x A(x)$ 在古典算术中可推导, 则公式 $\exists x A(x)$ 在构造算术中可推导. 在 [6] 中, 由 Марков 发展的构造语义新系统内可以判断构造选择原理.

由于受构造数学初期结论影响, 一些倡导者带保留地运用构造选择原理. 构造选择原理也被直觉主义者所排斥, 因为从直觉主义观点看来它不是充分可信的. 另一方面, 联系于直觉主义数学的许多分支, 人们详细地研究了相应的表达构造选择原理的形式模式的系统之间的关系问题, 特别地, 证明了模式(2), (4) 是独立于直觉主义谓词演算, 算术和分析的 (见[2], [7], [8]).

参考文献

[1] Марков, A. A., 《Успехи матем. наук》, **9** (1954), 3, 226－230.

[2] Марков, A. A., в кн.: Тр. 3 Всесоюзного математического съезда, M., **2** (1956), 146－147.

[3] Kleene, S. C., Introduction to metamathematics, North-Holland, 1951 (中译本: S. C. 克林, 元数学导论, 科学出版社, 上册 1984, 下册 1985).

[4] Шанин, H. A., 《Tp. матем. ин-та AH CCCP》, **52** (1958), 226－311.

[5] Новиков, П. C., 《Матем. сб.》, **12** (1943), 2, 231－261.

[6] Марков, A. A., 《Докл. AH CCCP》, **214** (1974), 4, 765－768; **215** (1974), 1, 57－60.

[7] Kleene, S. C., and Vesley, R. E., The foundations of intuitionistic mathematics: especially in relation to recursive functions, North-Holland, 1965.

[8] Troelstra, A. S., Markov's principle and Markov's rule for theories of choice sequences, in ISILC. Proof theory symposium, Lecture Notes in Math., Vol. 500, Springer, 1975, 370－383.

Б. А. Кушнер 撰 眭跃飞 译

构造语义学 [**constructive semantics**；**конструктивная семантика**]

理解**构造数学** (constructive mathematics) 命题的一类方法. 特殊语义的需要是由于传统(经典)数学与构造数学(主要指苏联学派的构造数学) 在一般原理上的差别. 主要考虑关于**构造对象** (constructive object) 的一阶语言命题; 即基本算术命题(见**形式算术** (arithmetic, formal)). 与传统语义对 $A_0\vee A_1$ (以及关于存在的命题 $\exists x A(x)$) 的理解的主要差别是由 L. E. J. Brouwer 提出的. 构造判断这样的命题需要解决下述问题: 找一数 $i\leqslant 1$, 使得 A_i 为真 (或找数 n 使得 $A(n)$). A. Heyting 与 A. Колмогоров 概括了对应于更复杂公式

的问题描述原则．由 S. C. Kleene 以闭算术公式的实现概念形式(见**递归可实现性**(recursive realizability))，给出了精确的形式化(这由于**算法**(algorithm)的数学定义的出现而成为可能)．$t=r$ 真相等的实现(realization of a true equality)是一固定常量；例如，当 $t=r$ 方程没有实现时为 0．合取 $A\&B$ 的实现(realization of a conjunction)是 $\langle a, b\rangle$，其中 a 为 A 的实现，b 为 B 的实现．析取 $A_0 \vee A_1$ 的实现为 $\langle i, a\rangle$，其中 $i=0, 1$，a 是 A_i 的实现．$\exists xA(x)$ 的实现为 $\langle n, a\rangle$，其中 n 是一数，a 是 $A(n)$ 的实现．$\forall xA(x)$ 的实现是一个一般方法 f 使得对每个自然数 n，给出 $A(n)$ 的实现 $f(n)$．$A\supset B$ 的实现是一个一般方法 f 使得对每个 A 的实现 a，给出 B 的实现 $f(a)$ (且对于不为 A 的实现 a 不一定要有定义)．这里一般方法可理解为一算法(一个部分递归函数)．利用算法的数编码，"数 e 是公式 A 的实现"可以写成一算术公式 (erA)，其中不包含析取 $\vee$ 且只在等式前面以自然方式出现．这样的公式称为几乎正规(almost normal)或几乎否定(almost negative)．命题 $\exists e(erA)$ (读"A 可实现")作为 A 的构造解释．在这个解释下排中律，$\forall x(A(x)\vee\neg A(x))$ 是可驳的，比如，取 $A(x)=\exists yT(x, x, y)$，其中 $T(e, x, y)$ 表示(解码)算法 e 在变量 x 上进行 y 步之后停止．双重否定律 $\forall x(\neg\neg B(x)\supset B(x))$ 也是可驳的，例如，取 $B(x)=A(x)\vee\neg A(x)$．上述定义给出了每个公式 A 的一个构造解释(找一实现)，即使 A 不包含 $\vee$、$\exists$．H. A. Шанин 进一步给出了这个构造解释的算法，它不改变没有 $\vee$，$\exists$ 的公式(正规公式(normal formulas))，且等价于无量词归纳的形式直觉主义算术的可实现性．任意公式都可化为几乎正规公式，因为 $\exists xA(x)$ 的判断在于产生一数 n 及 $A(n)$ 的判断．几乎正规公式的构造语义不同研究者有不同定义方式，但还没有人得到像包含 $\vee$ 和非平凡 $\exists$ 公式这样明显不同于经典概念的差别．

A. A. Марков 用根据通常逻辑连接词的规则和能行 ω 规则的推导，定义几乎正规公式的真：如果存在一般方法使得对每个 n 得到由命题 K 到 $A(n)$ 的可推导性，则可由 K 推导出 $\forall xA(x)$．真是一步步定义的．所有几乎正规公式组成的语言 L_∞ 可分层为 L_1，L_2，$\cdots$．语言 L_1 由不包含 $\supset$，$\forall$ 的公式组成；语言 L_{n+1} $(n\geqslant 1)$ 包括 L_n 和由 L_n 中的公式经使用一次蕴含和任意次运用 $\forall$，$\&$ 而得到的公式集合．L_1 的公式真定义为通常 $\&$，$\exists$，$\vee$ 规则的可推导性．L_2 的公式真在允许适当的规则下定义．比如，$\exists xR(x)\supset\exists yT(y)$ 的真指存在算法 φ 使得对任意 n，$R(n)\supset T(\varphi(n))$．对于 L_{n+1} $(n\geqslant 1)$ 的公式，合取和 $\forall$ 的公式真由它们组成部分的真按通常规则定义，而蕴含 $A\supset B$ 的真指根据某些规则 S_n 由 A 到 B 的可推导性，其中 S_n 保持 L_n 公式为真．系统 S_n 包含 ω 规则和所有 L_n 的真公式作为公理．S_n 的可推导性定义由广义归纳定义引入，且相应的归纳原则用于元定理的证明．对 S_2 推导作归纳可以证明规则 $A\supset\neg\neg\exists xR\vdash A\supset\exists xR$ 的允许性．这包含在 S_3 中且给出 Марков 原理：$\neg\neg\exists xR\supset\exists xR$．系统 S_{n+3} $(n>0)$ 是由连接词的通常规则和 ω 规则组成的．几乎正规公式 A 在 Марков 意义下为真当且仅当 A 的本原递归无截证明搜索树 T_A' (带 ω 规则和 Марков 原理)在归纳定义意义下为一推导．这(在经典数学中)等价于 A 的经典真．

在 Шанин 的主化语义中，对每个几乎正规公式 A，定义简单结构公式的超限分层 $\{A^\alpha\}$ 使得 $A^\alpha\supset A$ 在适当的形式系统中可证．公式 A^α 称为 A 的主化子，且 A 称为秩为 α 的真公式，如果 A^α 为真．逼近的精确度随 α 增加而增加：$\alpha<\beta\supset(A^\alpha\supset A^\beta)$．更详细地，根据等价

$$\neg\neg(B\vee\neg\neg\exists u\forall vC(u, v))\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\exists\bar{u}\forall\bar{v}\neg\neg(B\vee\neg\neg\exists u\forall vC(u,v)\vee C(\bar{u},\bar{v})),$$

作 α 次向前移动量词和根据构造解释的算法压缩量词串，构造公式 A^α．这就给出等价关系

$$A\leftrightarrow\exists u\forall v\neg\neg(\neg\neg\exists wC_\alpha\vee D_\alpha),$$

上式在带 α 超限归纳法的算术中可证，且包含一个无量词公式 C_α 使得

$$A^\alpha=\exists u\forall v\exists wC_\alpha(u, v, w)$$

为 A 的主化子．命题 A^α 除某些技术处理外等价于断言原来公式用 ω 规则，高度小于 α 的推导的存在性．在这个意义下主化语义等价于 Марков 的步骤语义．固定某类一般递归函数 Θ (比如所有递归到 α 定义的函数类)，更简单结构的主化子定义为，对 $\varphi\in\Theta$，

$$\exists u\forall vC_\alpha(u, v, \varphi(v)).$$

如果 K 为类 Θ 的不含量词的演算，则公式 $\exists u\forall vC(u, v)$ 的 K 真定义为带变量 $\vee$ 和常项 t 的 $C(t, v)$ 的可推导性．如果 K 是递归到 α 所定义的函数的标准方程演算，则公式的 K 真就是指公式在扩展形式直觉主义算术中可推导，这种算术是增补 Марков 原理，定义构造解释的算法的等价关系，和到序数 β $(\varepsilon(\beta)\leqslant\alpha)$ 的归纳规则所得到的，其中 $\varepsilon(\beta)$ 为第一个大于 β 的 ε 数．特别地，当 $\beta=\omega$，$\alpha=\varepsilon_0$ 时，即为一般归纳法．

在无量词层(K 真)判断要求尽可能地保持在有限主义范围内，即，无量词语言和相应的逻辑方法．这就是限制 α 值的目的所在．对于更大部分的构造分析"实际"有限个 α 就够了(已包含在能行算子的连续性定理中)．

参考文献

[1] Марков, А. А., в сб.: Исследования по теории алгорифмов и математической логике, М., 1976, 2, 3–31.

[2] Шанин, Н. А.,《Тр. Матем. ин-та АН СССР》, **129** (1973).

[3] Kleene, S. C., Introduction to metamathematics, North-Holland, 1951 (中译本: S. C. 克林, 元数学导论, 科学出版社, 上册 1984; 下册 1985).

Г. Е. Минц 撰

【补注】 **可实现性** (realizability)只是构造的或**直觉主义逻辑** (intuitionistic logic)和数学的许多语义中的一种. [A1]中给出初步说明; 关于可实现性更多的内容, 见[A2]. 其他**语义学** (semantics)包括用层论和**拓扑斯** (topos)理论的语义学 ([A3]).

参考文献

[A1] Dummett, M., Elements of intuitionsm, Oxford Univ. Press, 1977.

[A2] Troelstra, A. S. (ed.), Mathematical investigations of intuitionistic arithmetic and analysis, Lecture Notes in Math., 344, Springer, 1973.

[A3] Johnstone, P. T., Topos theory, Acad. Press, 1977.

眭跃飞 译

构造函数论 [**constructive theory of functions**; **конструктивная теория функции**]

由 С. Н. Бернштейн 引入的一个概念, 他称构造函数论为"函数论的一个分支, 旨在对自然提出的数学分析问题的解函数和经验函数的定量研究和计算提供最简单、最方便的基础" ([1]). 应当指出, 构造函数论包括函数逼近论作为它的一个分支. 但是, 当实际使用"构造函数论"一词时, 则取较狭窄的意义, 就是指函数逼近论. 现在已很少使用"构造函数论"一词.

参考文献

[1] Бернштейн, С. Н.《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **9** (1945), 3, 145–158 (Собр. соч., т. 2, М., 1954, 349–360).

С. А. Теляковский 撰

【补注】

[A1] Ibragimov, I. I., On Bernstein's contributions to the constructive theory of functions, in G. Alexits and S. B. Stechkin (eds.), Proc. Conf. Constructive Theory of Functions, Akad. Kindó, 1969, 27–40 (俄文).

[A2] Szegö, G., The contributions of L. Fejér to the constructive function theory, in G. Alexits and S. B. Stechkin (eds.), Proc. Conf. Constructive Theory of Functions, Akad. Kindó, 1969, 19–26.

眭跃飞 译

弹性理论的接触问题 [**contact problems of the theory of elasticity**; **контактные задачи теории упругости**]

具有部分共同边界(接触面)的固体系统的变形与应力分布问题. 在一般提法中接触问题的结果只限于存在定理和某些近似解法. 更完整的结果可以在以下情况中得到: 一个接触体是弹性半平面(或半空间), 而另一接触体是绝对刚体, 它在给定力作用下压入此半平面(或半空间) (模具问题). 在与弹性体进行接触的模具基底以外, 弹性体的边界条件可从一些容许的条件中任意选定, 而在模具底下部分则根据接触性质描述其边界条件. 于是, 如果弹性体与施压的刚体固接, 则模具下面的位移可看作是给定的; 如果容许弹性体沿刚性模具的接触面滑移, 那么, 在模具下面的法向位移分量以及与摩擦系数有关的、法向应力和切向应力之间的某一线性关系式(Coulomb 定律)是已知的. 其他边界条件也可实现. 所有弹性半平面(半空间)情况均化为混合问题, 即在各部分边界上有各种边界条件. 研究模具问题的论文的主题是探讨这些问题的求解方法, 包括两个接触体都是弹性体的情况. 这些方法是紧密相关的, 并且在平面情况下最终都化为分段全纯函数的共轭方法(Riemann-Hilbert 问题的方法). 借助此方法, 接触问题可用求积法求解. 三维情况下二弹性体的接触问题是 H. Hertz 首先提出并加以解决的. 他认为接触面很小, 接触部位附近的未变形表面的方程为二阶曲面方程. 而且可以证明: 采用静电比拟法是可能的, 描述接触区压痕的函数可用某个椭球的静电势的形式来表示. 在平面情况下 Hertz 问题化为一阶 Fredholm 方程

$$\int_a^b p(t)\ln|t-t_0|\,dt = f(t_0)+C,$$

式中 $p(t)$ 是未知函数, 它表示接触区 ab 上 t 点处一物体对另一物体的压力, $f(t)$ 是已知函数. 此问题可化为有封闭形式解的奇异积分方程.

在一般提法中接触问题按以下方式描述.

问题 I. 假设在 Lamé 常数为 λ_0, μ_0 的无限各向同性弹性体中, 有 m 个弹性的各向同性孤立夹杂物, 它们具有常数 λ_k, μ_k, $k=1,\cdots,m$, 并以具有任意形状的光滑表面 S_k 为界. 假设这些夹杂物沿接触面 S_k 固接在基质上, 要求确定在给定体积力作用下此物体的应力状态.

问题 II. 在有任意光滑边界 S_0 和 Lamé 常数 λ_0, μ_0 的有限各向同性弹性体中, 有 m 个弹性的各向同性孤立夹杂物, 其界面是 S_k, $k=1,\cdots,m$, 它们沿 S_k 固接于支持介质. 要求确定作为给定体积力和 S_0 上给定边界条件作用结果的物体弹性状态.

可以对各向异性体和对沿 S_k ($k=1,\cdots,m$) 的接触性质作其他假设的情况, 提出相同的问题. 对这些问题已证明其存在定理. 方法是: 在各向同性情况中用奇异势方法和奇异积分方程; 对各向异性体则用泛函分析方法.

在各向同性情况中，近似的求积解法已经得到．假设：x，y 是三维空间 E_3 的两个点，D_k 是曲面 S_k 界定的区域，$D^+=\bigcup_{k=1}^m D_k$，$D^-=E_3\setminus D^+$，$\Gamma^k(x-y)$ 是域 $D_k(k=1,\cdots,m)$ 中的 3×3 的基本解矩阵，$\Gamma^0(x-y)$ 是域 D^- 的同一矩阵，$u(x)$ 是点 x 处位移向量，T 是应力算子，$Tu(x)$ 是对应于点 x 处位移 u 的应力向量，$T\Gamma_p^k(x-y)(p=1,2,3)$ 是对应于 $x\neq y$ 时，D_k 中的位移 $\Gamma_p^k(x-y)$ 的应力向量，$T\Gamma^k(x-y)$ 是列为 $T\Gamma_p^k(x-y)$ $(p=1,2,3)$ 的 3×3 矩阵，并且 $(T\Gamma^k(x-y))'$ 是伴随矩阵．3×6 矩阵 $M^k(x,y)$ 和 $M^0(x,y)$ 定义如下 $(x\in E_3)$：

$$M^k(x,y)=$$
$$=\begin{cases}\|(T\Gamma^k(x-y))' \quad -\Gamma^k(x-y)\|_{3\times6}, \\ \qquad\qquad y\in S_k,\ k=1,\ldots,m, \\ 0 \qquad\qquad y\in S_j,\ j=1,\ldots,m,\ j\neq k,\end{cases}$$

$$M^0(x,y)=\|(T\Gamma^0(x-y))',-\Gamma^0(x-y)\|_{3\times6},$$
$$y\in\bigcup_{k=1}^m S_k,\quad x\in E_3.$$

不失一般性，问题 I 是从以下条件确定位移的问题：

$$\forall x\in D_k:\ \mu_k\Delta u+(\lambda_k+\mu_k)\operatorname{grad}\operatorname{div}u=0,$$
$$\forall x\in D^-:\ \mu_0\Delta u+(\lambda_0+\mu_0)\operatorname{grad}\operatorname{div}u=\Phi^0(x),$$
$$\forall y\in S_k:\ \lim_{D^+\ni x\to y}u(x)=\lim_{D^-\ni x\to y}u(x),$$
$$\lim_{D^+\ni x\to y}Tu(x)=\lim_{D^-\ni x\to y}Tu(x),\quad k=1,\ldots,m.$$

设接触边界两面上 $u(x)$ 和 $Tu(x)$ 的极限值用 $u(y)$，$Tu(y)$ 表示，$y\in\bigcup_{k=1}^m S_k$．于是对正则解有

$$\left.\begin{aligned}&\delta_k(x)u(x)=\int_{S_k}\Gamma^k(x-y)Tu(y)\,d_yS-\\&-\int_{S_k}(T\Gamma^k(x-y))'u(y)\,d_yS,\quad k=1,\ldots,m;\\&\delta(x)u(x)=\int_{\bigcup_{i=1}^m S_i}\Gamma^0(x-y)Tu(y)\,d_yS-\\&-\int_{\bigcup_{i=1}^m S_i}(T\Gamma^0(x-y))'u(y)\,d_yS-F(x),\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

式中

$$F(x)=\int_D\Gamma^0(x-y)\Phi^0(y)\,dy;$$

对于 $x\in D_k$，$\delta_k(x)=2$，而对于 $x\in E_3\setminus\overline{D}_k$，$\delta_k(x)=0$；对于 $x\in\bigcup_{i=1}^m D_i$，$\delta(x)=0$，而对于 $x\in D^-$，$\delta(x)=2$．公式(1)可写成如下形式：

$$\forall x\in E_3\setminus\overline{D}_k:\ \int_{\bigcup_{i=1}^m S_i}M^k(x,y)\lambda(y)\,d_yS=0,$$
$$k=1,\ldots,m;$$
$$\forall x\in\bigcup_{i=1}^m D_i:\ \int_{\bigcup_{i=1}^m S_i}M^0(x,y)\lambda(y)\,d_yS=F(x),$$

式中 $\lambda(y)=(u(y),\ Tu(y))$ 是 6 维向量．这些方程中的第一个方程对于属于 $E_3\setminus\overline{D}_k$ 的所有 x 成立，而第二个方程则对于属于 $\bigcup_{i=1}^m D_i$ 的所有 x 成立．变量 x 的相应的任意给定值导致以下方程的无穷集：

$$\left.\begin{aligned}&\int_{\bigcup_{i=1}^m S_i}M^k(\xi_j,y)\lambda(y)\,d_yS=0,\\&k=1,\ldots,m;\ \xi_j\in E_3\setminus\overline{D}_k,\ j=1,2,\ldots,\\&\int_{\bigcup_{i=1}^m S_i}M^0(\xi_j^1,y)\lambda(y)\,d_yS=F(\xi_j^1),\ldots,\\&\ldots,\int_{\bigcup_{i=1}^m S_i}M^0(\xi_j^m,y)\lambda(y)\,d_yS=F(\xi_j^m),\\&\xi_j^h\in D_h,\ h=1,\ldots,m;\ m=1,2,\ldots\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

设 $\{\varphi^n(y)\}_0^\infty$ 是 6 维向量集

$$(T\Gamma_p^1(\xi_j-y),\ -\Gamma_p^1(\xi_j-y)),\ \ldots,$$
$$(T\Gamma_p^m(\xi_j-y),\ -\Gamma_p^m(\xi_j-y)),$$
$$(T\Gamma_p^0(\xi_j^1-y),\ -\Gamma_p^0(\xi_j^1-y)),\ \ldots,$$
$$(T\Gamma_p^0(\xi_j^m-y),\ -\Gamma_p^0(\xi_j^m-y)),$$
$$y\in\bigcup_{i=1}^m S_i,\quad p=1,2,3,$$

例如按对角线法则相应地标出其角标．此集合在 $L_2(\bigcup_{i=1}^m S_i)$ 中是线性无关的和完整的．式(2)的方程左边是对于角标 n 的任意值的点积 $(\lambda,\ \varphi^n)$．这些积是给定向量的分量，因此也是给定的．由于 $L_2(\bigcup_{i=1}^m S_i)$ 中 $\{\varphi^n(y)\}_0^\infty$ 的完整性，如果从范数

$$\left\|\lambda(y)-\sum_{n=1}^N a_n^N\varphi^n\right\|_{L_2(\bigcup_{i=1}^m S_i)}$$

为极小值的条件求出常数 a_n^N，那么未知向量 $\lambda=(u,\ Tu)$ 可用线性组合 $\sum_{n=1}^N a_n^N\varphi^n(y)$ 近似表示．

由此得到线性代数方程组

$$\sum_{s=1}^N a_s^N(\varphi^s,\varphi^n)=(\lambda,\varphi^n),\quad n=1,\cdots,N,$$

它是可解的．向量 $\lambda(y)$ 的 N 次近似 $\lambda^N(y)$ 用公式 $\lambda^N(y)=\sum_{n=1}^N a_n^N\varphi^n(y)$ 表示．

将 $\lambda^N(y)$ 的前三个分量作为向量代替方程组(1)中

的 $u(y)$，用第二组三个分量代替被积函数中的 $Tu(y)$，可用求积法得到问题 I 的近似解．当此区域的任意内点处 $N\to\infty$ 时，精确解是其一致极限．

除以下修正外，问题 II 的解的公式是相同的．此修正是，对由 S_0 界定的整个区域，用相应于表面 S_0 上确定的边界条件的 Green 张量来取代矩阵 $\Gamma^0(x-y)$．

参考文献

[1] Мусхелишвили, Н. И., Некоторые основные задачи математической теории упругости, 5 изд., М., 1966 (中译本：Н. И. 穆斯赫利什维里，数学弹性力学的几个基本问题，科学出版社，1959).

[2] Галин, Л. А., Контактные задачи теории упругости, М., 1953(中译本：Л. А. 加林，弹性理论的接触问题，科学出版社，1960).

[3] Штаерман, К. Я., Контактная задача теории упругости, М. - Л., 1949.

[4] Купрадзе, В. Д. и др., Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости, 2 изд., М., 1976(英译本：Kupradze, V. D. et al., Three-dimensional problems of the mathematical theory of elasticity and thermoelasticity, North-Holland, 1979)

[5] Fichera, G., Existence theorems in elasticity, in Handbuch der Physik, Vol. Ⅵ/2, Springer, 1973.

В. Д. Купрадзе 撰

参考文献

[A1] Gladwell, G. M. L., Contact problems in the classical theory of elasticity, Sythoff & Noordhoff, 1980.

晏名文 译　庄峰青 校

热传导理论的接触问题 [**contact problems of the theory of heat conduction**；**контактные задачи теории теплопроводности**]

当物质不均匀受热时，即由具有不同的热传导系数 k，不同的热容量系数 c 和不同的密度系数 ρ 几部分组成时，有关热传播的问题(对椭圆型和抛物型方程分别是定常的和非定常的)．微分方程中的系数 k、c、ρ 有第一类间断．这导致问题的解有弱间断，即温度 T 是连续的，而导数商则是间断的．但是，热流 w 是定义成连续的．

例如，设有一关于 $x\,(0<x<l)$ 的一维热方程

$$c(x)\rho(x)\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[k(x)\frac{\partial T}{\partial x}\right] \tag{1}$$

且设在点 $0<x=x^0<l$ 处诸函数 $k(x)$，$c(x)$ 及 $\rho(x)$ 有第一类间断，

$$[k]\equiv k(x^0+0)-k(x^0-0)\neq 0,\ [c\rho]\neq 0.$$

于是温度 T 和流 $w=-k(x)(\partial T/\partial x)$ 在 $x=x_0$ 处必须是连续的(见[1]，[2])，

$$[T]=0,\ [w]=0,\ t\geqslant 0 \tag{2}$$

(伴随性条件(adjointness conditions))．在区间的其它点上，温度 $T(x,t)$ 必须满足 $t>0$ 时的方程(1)，$t=0$ 时的初始条件以及 $x=0$，$x=l$，$t>0$ 时的边界条件．

在多维情形时对抛物型方程

$$c(x,t)\rho(x,t)\frac{\partial T}{\partial t}=\sum_{\alpha,\beta=1}^{p}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[k_{\alpha\beta}(x,t)\frac{\partial T}{\partial x_\beta}\right]+$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{p}b_\alpha(x,t)\frac{\partial T}{\partial x_\alpha}-q(x,t)T+f(x,t),$$

$$x=(x_1,\ldots,x_p),$$

在系数间断的曲面 Γ^0 上也要加上函数 T 和流

$$w=\sum_{\alpha,\beta=1}^{p}k_{\alpha\beta}(x,t)\frac{\partial T}{\partial x_\beta}\cos(\widehat{n^0,x_\alpha})$$

的连续性条件(2)，其中 $\mathbf{n}^0$ 是 Γ^0 的法向，$(\widehat{\mathbf{n}^0,x_\alpha})$ 是 $\mathbf{n}^0$ 和 x_α 方向之间的夹角(见[3]，[4])．

在定常情形($\partial T/\partial t\equiv 0$)时，条件(2)给在间断上．有时给的是更一般的守恒律(见[2]，[4])．例如，在一维情形时考虑下面的条件：

$$[T]=r(t),\quad\left[a\frac{\partial T}{\partial x}\right]=h(t),\quad x=x^0,\quad t\geqslant 0.$$

与热传导理论的接触问题有关的是热在介质中传播的问题，该介质的聚集态可以在温度的某一值 T^*(相变温度)处变化，带有潜热 λ 的释放或吸收(**Stefan 问题**(Stefan problem)，[5])．在相界面的未知边界 $x=x^0(t)$ 处在一维情形给出下列条件：

$$T(x^0(t)+0,t)=T(x^0(t)-0,t)=T^*,$$

$$\left[k\frac{\partial T}{\partial x}\right]=\rho\lambda\frac{dx^0}{dt}.$$

对热传导方程组和与气体动力学及磁流体动力学有关的方程，有大量的接触问题．

参考文献

[1] Самарский, А. А., «Докл. АН СССР», **121** (1958), 2, 225-228.

[2] Камынин, Л. И., «Сиб. матем. ж.», **4** (1963), 5, 1071-1105.

[3] Олейник, О. А., «Изв. АН СССР Сер. матем.», **25** (1961), 1, 3-20.

[4] Камынин, Л. И., «Дифференциальные уравнения», **3** (1967), 6, 948-964.

[5] Тихонов, А. Н., Самарский, А. А., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1972.

[6] Ладыженская, О. А., Солонников, В. А., Уральцева, Н. Н., Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, М., 1967 (英译本: Ladyženskaja, O. A., Solonnikov, V. A. and Ural'ceva, N. N., Linear and quasilinear equations of parabolic type, Acad. Press, 1968).

И. В. Фрязинов 撰 孙和生 译 陆柱家 校

触点模式 [**contact scheme**; **контактная схема**], 触点网络 (contact network), 触点线路 (contact circuit), 切换线路 (switching circuit)

一类特殊控制系统的表示，由继电接触器组成的实际结构的一类数学模型. 一个接触网络是一类控制系统的模型，需要对它研究的问题与其他类控制系统是一样的. 在研究控制系统的"结构"性质时，它特别有用.

将一组选定的顶点联接以边线就成一图，给每一边一个从有限字母表$\{x_1, \overline{x}_1, \cdots, x_n, \overline{x}_n\}$中选出的字母，就得到一个触点网络 S. 所选的顶点被称为网络的端点(terminals of network)或结点(nodes of network). 附有字母 x_i(或 $\overline{x}_i$) 的边称为通(或断)触点. 在 S 的端点 a 与 b 之间的一个触点序列对应于一个简单的链(或路径) (见**图** (graph)) 称为图 S 中 a 与 b 间的链(chain)，相应的字母的合取称为给定链的传导率(conductivity). 一模式的两个端点 a 与 b 间的传导率是一个 Boole 函数 $f_{ab}(x_1, \cdots, x_n)$, 它等于这两个端点间所有链的传导率的析取(当a与b间的链集是空的时$f_{ab}\equiv 0$, 当 a 与 b 重合时$f_{ab}\equiv 1$). 与每个触点网络相联系的有一个传导率矩阵 $\|f_{ab}\|$, 这个矩阵的元素正是两个端点间的传导率. 这里，$f_{ab}\cdot f_{bc}\leqslant f_{ac}$. 相反地，如果给出的 Boole 函数的矩阵 $\|f_{ab}\|$ 使得 $f_{aa}\equiv 1$, $f_{ab}=f_{ba}$ 及 $f_{ab}\cdot f_{bc}<f_{ac}$ 对任意 a, b, c 成立，则存在一个触点网络，其端点使所有传导率为 f_{ab}. 特别地，对任意f存在一个两端点网络，它的端点间传导率等于 f. 在这一情况下，可说: 网络实现函数 f. 例如图 1 所示的网络实现一个线性函数 $f=x_1+\cdots+x_n+1\ (\mathrm{mod}\ 2)$. 每一

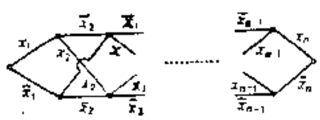


图 1

个 Boole 函数可由某一触点网络来实现. 有时一个触点网络中的所有端点的集合被分成两个子集：输入与输出. 一个具 r 个输入和 s 个输出的触点网络称为触点 (r, s) 端点网络. 一个触点网络，若它的任一对输出(或输入)间的传导率等于零，则称为相对于输出(或输入)是分离的. 一个分离的(相对于输出) $(1, 2^n)$ 端点网络可由一触点树 (tree) 给出 (图 2).

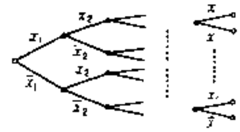


图 2

一个触点网络称为可平面的(planar)，若它的图加上一个源边(即，联接端点的边上没有附加字母)后是可平面的(见**可平面图** (graph, planar)). 一个平面触点网络 S^* 称为对偶(dual)于平面触点网络 S, 若 S^* 的图Γ^*(具有源边) 对偶于 S 的相应图Γ, 其中 Γ^*的源边对应于 Γ 的源边，而其余的相应边均标以相同的字母

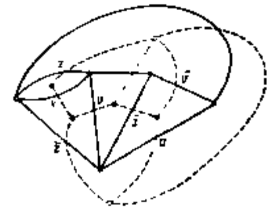


图 3

(图 3). 网络 S 与 S^*有相同数目的触点并实现对偶函数(对偶原理). 如果网络 S^*的触点代之以它们相对的触点，就得到由 S 实现的函数的负函数. 一般来说，不能从非平面触点网络转变到另一具有相同数目的触点并实现对偶函数的触点网络. 一个 Π 网络(并串网络)可以用归纳法定义: 由单一触点连接端点组成的触点网络是一个 Π 网络，由两个 Π 网络并联成串联地连接起来构成的触点网络也是一个 Π 网络. 存在一些触点网络，它们并非 Π 网络，如图 4 所示的网络.

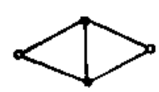


图 4

Π 网络的对偶仍是 Π 网络. 存在着 Π 网络与用$\{\&, \vee, -\}$表述的公式之间的对应关系. 此时，每一个 Π 网络实现与它对应的公式相同的函数，而且具有的触点数等于公式中的字母数. 例如，与图 5 所示之网络对应的公式为

$$(x_1x_2\vee\overline{x}_1\overline{x}_2)(x_3x_4\vee\overline{x}_3\overline{x}_4)\vee(x_1\overline{x}_2\vee\overline{x}_1x_2)(x_3\overline{x}_4\vee\overline{x}_3x_4).$$

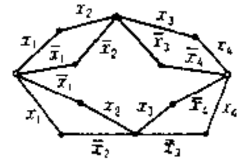


图 5

触点网络的复杂性表现在它的触点数上. 用触点网络实现一个依赖于 n 个变量的任意 Boole 函数所需要的最小触点数渐近地等于 $2^n/n$；足以实现一个 Π 网络的最小触点数渐近地等于 $2^n/\log_2 n$（见**综合问题**（synthesis problems））.

两个触点网络称为等价的 (equivalent)（在一个给定的端点间的一一对应关系下），如果它们的任两对应端点间的传导率相同. 在将触点网络 S 的任一子网络 S_1 代之以它的等价网络后，得到的网络等价于 S（在替代中，必须将所有在 S_1 中的 S 的端点和不在 S_1 中的 S 的触点上的所有 S_1 的顶点都当作 S_1 的端点）. 若 S_1 和 S_2 是等价网络，那么触点网络的等价变换规律 $S_1 \Longleftrightarrow S_2$，使我们能在任意网络中将从 S_1(或 S_2) 中得到的子网络通过字母的重新命名，代之以从 S_2(或 S_1) 中得到的触点网络，并通过同样的重新命名.

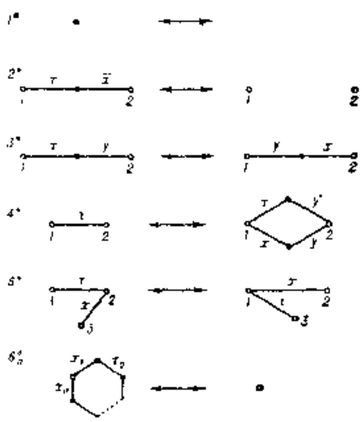


图 6

对任一 n，存在一个有限的完全规则系统(图6)，使得可以对变量数不超过 n 的任意两个等价触点网络互相转换. 但是对所有触点网络集（对变量数目不加限制），并不存在一个有限的完全规则系统（如果在应用规则时只允许字母的重新命名）.

参考文献

[1] Шестаков, В. И., 《Автоматика и телемеханика》, 6 (1941), 2, 15 – 24.

[2] Shannon, C., A simbolic analysis of relay and switching circuits, *AIEE Transact.*, **57** (1938), 713 – 723.

[3] Nakasima, A. and Hanzawa, M., Theory of equivalent transformation of simple partial parts in relay circuits, *Nippon Electr. Comm. Eng.*, 1938, 9, 32 – 39.

[4] Яблонский, С. В., 《Тр. Матем. ин - та АН СССР》, **51** (1958), 5 – 142.

[5] Кузнецов, А. В., 《Тр. Матем. ин - та АН СССР》, **51** (1958), 174 – 185.

[6] Чегис, И. А., Яблонский, С. В., 《Тр. Матем. ин - та АН СССР》, **51** (1958), 270 – 360.

[7A] Лупанов, О. Б., Проблемы кибернетики, 1963, 10, 63 – 97.

[7B] Lupanov, O. B., Complexity of formula realization of functions of logical algebra, *Probl. Cybernetics*, 3 (1962), 782 – 811. (*Probl. Kibernet.*, 3 (1960), 61 – 80.)

[7C] Lupanov, O. B., Ueber den Schaltaufwand bei den Realizierung logischer Funktionen, *Probleme der Kibernetik*, 3 (1963), 68 – 90. (*Probl. Kibernet.*, 3 (1960), 61 – 80.)

[8A] Murskii, V. L., On equivalent transformations of switching circuits, *Probl. Cybernetics*, **5** (1964), 77 – 98. (*Probl. Kibernet.*, **5** (1961), 61 – 76.)

[8B] Murski, W. L., Ueber äquivalente Transformationen von Kontakt - Schaltungen, *Probleme der Kibernetik*, **5** (1964), 44 – 64. (*Probl. Kibernet.*, **5** (1961), 61 – 76.)

Н. А. Карпова 撰

【补注】

参考文献

[A1] Eilenberg, S., Automata, languages and machines, A. Acad. Press, 1973.

高为炳 译

切触结构 [contact structure; контактная структура]

奇数维光滑流形 M^{2n+1} 上的一阶**无穷小结构** (infinitesimal structure)，它是由在 M^{2n+1} 上定义一个使得 $\alpha\wedge(d\alpha)^n\neq 0$ 的 1 形式 α 来决定的. 于是形式 α 称为 M^{2n+1} 上的切触形式(contact form). 只有可定向的 M^{2n+1} 上存在切触结构，并且在 M^{2n+1} 上定义了一个唯一的向量场 Y，满足 $\alpha(Y)=1$ 及对任何向量场 X 有 $d\alpha(Y, X)=0$；场 Y 称为 M^{2n+1} 上对应于切触形式 α 的动力系统. 切触结构在分析力学中得到应用是由于下面的事实：在相空间中定义的 Hamilton 系统的任何等位子流形上有一个自然的切触结构.

参考文献

[1] Godbillon, C., Géometrie différentielle et mécanique analytique, Hermann, 1969.

Ю. Г. Лумисте 撰

【补注】 更精确地说，上面定义的概念是严格切触结构(strict contact structure)或恰当切触结构(exact contact structure)，[A1]，[A2]. 设 $\mathscr{E}$ 是 M^{2n+1} 上的一个 **Pfaff 方程**(Pfaffian equation)，即余切丛 T^*M^{2n+1} 的一个一维子丛. 设 α 是在 $x\in M^{2n+1}$ 的一个邻域 U 中定义 U 上的 $\mathscr{E}$ 的1形式(即 Pfaff 形式)，即 α 是 $\mathscr{E}$ 在 U 上的一个处处非零的截面，则存在整数 s 使得 $\alpha\wedge(d\alpha)^s(x)\neq 0$ 和 $\alpha\wedge(d\alpha)^{s+1}(x)=0$. 这个数不依赖于 α 的选取. 奇整数 $2s+1$ 称为 Pfaff 方程 $\mathscr{E}$ 在 x 的阶. 因此，M^{2n+1} 上的一个切触结构(contact structure)是由 M 上的一个处处为 $2n+1$ 阶的 Pfaff 方程 $\mathscr{E}$ 给出的. $(M, \mathscr{E})$ 称为一个切触流形(contact manifold). 如果 M 上存在一个 Pfaff 形式 ω，处处定义切触结构 $\mathscr{E}$，即如果存在 $\mathscr{E}$ 的一个处处非零的整体截面 α(因而 $\mathscr{E}$ 是一个平凡丛，也称为可横截定向的 (transversally orientable))，那么 α 定义了一个严格切触结构，而$(M$,

α)是一个具有切触形式 α 的严格切触流形.在这种情形下,$\alpha\wedge(d\alpha)^n$ 是 M 上使得 M 可定向的体积形式(volume form).满足缩并条件 $i(Y)\alpha=1$(即 $\alpha(Y)=1$)和 $i(Y)d\alpha=0$(即对一切的向量场 $X, d\alpha(Y,X)=0$)的唯一向量场 Y 也满足 $i(Y)(\alpha\wedge(d\alpha)^n)=(d\alpha)^n$(并且这是等价的).它有时候称为 α 的 Reeb 向量场(Reeb vector field).根据 **Darboux 定理**(Darboux theorem)(见 **Pfaff 方程**(Pfaffian equation)),切触形式 α 局部地可写成形式

$$\alpha=dt+\sum p_i dq_i,$$

这里 $(t, p_1, \cdots, p_n, q_1, \cdots, q_n)$ 是 M^{2n+1} 上的局部坐标,在这些坐标中 Reeb 向量场由 $\partial/\partial t$ 给出.

关于上述内容以及切触结构在力学中的作用的进一步细节见[A2]的第五章.在 B. Kostant 和 J. M. Souriau 的量子理论中,辛流形(symplectic manifold)上圆丛的切触结构起了重要作用,见[A3]-[A5].

参考文献

[A1] Abraham, R., Foundations of mechanics, Benjamin. 1967.

[A2] Libermann, P. and Marle, C. M., Symplectic geometry and analytical mechanics, Reidel, 1987.

[A3] Hurt, N., Geometric quantization in action, Reidel, 1983.

[A4] Kostant, B., Quantization and representation theory. Part I: prequantization. Lectures in Modem Anal. and Applications, 3, Springer, 1970.

[A5] Souriau, J. M., Structures des systèmes dynamiques, Dunod, 1969.

潘养廉 译

切触变换 [**contact transformation**; **контактное преобразование**]

在平面中将相切曲线变为相切曲线的一种曲线变换.在空间中,曲面的切触变换可类似地定义.切触变换的一个简单例子是 **Legendre 变换**(Legendre transform).

更一般地,一个切触变换是切触流形(contact manifold)(即由一个形式 η 赋予**切触结构**(contact structure)的流形 M^{2n+1})的一个微分同胚 f,使得 $f^*\eta=\sigma\eta$,这里 σ 是 M^{2n+1} 上的一个非零函数.当 $\sigma=1$ 时,f 称为严格切触变换(strict contact transformation).切触流形上的一个向量场 X 称为切触(或严格切触)无穷小变换(contact (or strict contact) infinitesimal transformation),如果 $L_X\eta=\tilde{\sigma}\eta$(或 $L_X\eta=0$),这里 L_X 是沿 X 的 Lie 导数(Lie derivative).

参考文献

[1] Рашевский, П. К., Геометрическая теория уравнений с частными производными, М.-Л., 1947.

[2] Eisenhart, L. P., Riemannian geometry, Princeton Univ. Press, 1949.

[3] Кон-Фоссен, С. Э., Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом, М., 1959.

[4] Godbillon, G., Géometrie différentielle et mécanique analytique, Hermann, 1969.

[5] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1967, М., 1969, 127-188.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 历史上,切触变换这个名称首先用于将 $\mathbf{R}^3$ 中一个切触元素映为另一个切触元素的"变换".在那个时候,一个切触元素(contact element)被定义成 $\mathbf{R}^3$ 中一个点连同过该点的一张平面.切触变换的一般理论是由 S. Lie 在他的对 Pfaff 形式的简化的研究中引入的(见 **Pfaff 方程**(Pfaffian equation)).这时切触变换是一个映射

$$(z, x_1, \cdots, x_n, p_1, \cdots p_n)\mapsto(z', x_1', \cdots, x_n', p_1', \cdots, p_n')$$

使得 $dz-\sum p_i' dx_i'=f(dz-\sum p_i dx_i)$,$f$ 是某个处处非零的函数.

参考文献

[A1] Libermann, P. and Marle, C.-M., Symplectic geometry and analytical mechanics, Reidel, 1987.

潘养廉 译

容度 [**content**; **содержание**]

【补注】 集合 $A\subset\mathbf{R}^n$ 是(Lebesgue)零容度(content zero)的,如果任给 $\varepsilon>0$,存在有限个闭长方体 $U_1,\cdots,U_m$,使得 $A\subset\bigcup_i U_i$ 且 $\sum_i\mu(U_i)<\varepsilon$,其中的 μ 是 **Lebesgue 测度**(Lebesgue measure).

更一般地,设 S 是一个空间,具有一个子集环 $\mathscr{E}$ 使得 $S=\bigcup_{A\in\mathscr{E}}A$($\mathscr{E}$ 不一定是一个 σ 环,S 也不一定属于 $\mathscr{E}$).设函数 γ 在 $\mathscr{E}$ 上定义,使得对所有的 $A\in\mathscr{E}$ 有 $0\leqslant\gamma(A)<\infty$ 且至少存在一个 $A\in\mathscr{E}$ 有 $\gamma(A)>0$.而且 γ 在 $\mathscr{E}$ 上是可加的.这种函数称为容度,$\gamma(A)$ 即 A 的容度.

$\mathbf{R}^n$ 上的长方体 R 定义为乘积 $I_1\times\cdots\times I_n$.其中的 I_i 是有穷闭区间、开区间或半闭区间.令 $|R|=\prod_i l(I_i)$.$l(I_i)$ 是区间 I_i 的长度.定义 $\mathbf{R}^n$ 中的初等集是长方体的有限并.令 $\mathscr{E}$ 是所有初等集的集合.每个 $A\in\mathscr{E}$ 都可以写成有限个互不相交的长方体的并 $A=\bigcup R_i$,定义 $\gamma(A)=\sum_i|R_i|$.这就定义了 $\mathscr{E}$ 上的一个容度,称为 Jordan 容度(Jordan content).

给定 $\mathscr{E}$ 上的一个容度 γ,对于任意 $A\subset S$,$A\neq\varnothing$,定义

$$\mu^*A=\inf\sum\gamma(A_n),$$

其中的下确界取遍所有使得 $A\subset\bigcup A_i$ $(A_i\in\mathscr{E})$ 的有限和;再令 $\mu^*(\varnothing)=0$.这就定义了 S 上的一个**外测度**(outer measure).

参考文献

[A1] Randolph, J. F., Basic real and abstract analysis, Acad. Press, 1968.

[A2] Rao, M. M., Measure theory and integration, Interscience, 1987.

朱学贤 译

拟切方程 [**contingency equation**; **уравнение в контингенциях**]

关系式

$$D^{*}x(t) \subset F(t, x(t)),$$

其中 $D^{*}x(t)$是向量函数 $x(t)$的拟切(contingency)，即当 $t' \to t$ 时比值

$$\frac{x(t')-x(t)}{t'-t}$$

的所有部分极限的集合，而 $F(t,x)$是依赖于 t 和 x 的，$\mathbf{R}^n$ 中一给定的非空集合(见[1]、[2])．如果 $F(t, x)$是有界闭凸集，即关于点 (t,x)的包含函数是上半连续的，那么拟切方程等价于仿切方程(paratingency equation)(类似于拟切方程定义，但利用比值

$$\frac{x(t')-x(t'')}{t'-t''}, \text{当} t'\to t,\ t''\to t \text{时},$$

见[3])和**微分包含**(differential inclusion)

$$\frac{dx}{dt} \in F(t, x)$$

(见[4])．拟切方程的性质类似于微分包含的性质．

参考文献

[1] Marchaud, A., Sur les champs de demi-cônes et les équations différentielle du premier ordre, *Bull. Soc. Math. France*, **62** (1934), 1－38.

[2] Барбашин, Е. А., Алимов, Ю. И.,《Изв. высших учебн. заведений, Математика》, (1962), 1, 3－13.

[3] Zaremba, S. K., Sur les équations au paratingent, *Bull. Sci. Math.* (2), **60** (1936), 5, 139－160.

[4] Ważewski, T., Sur une condition équivalente à l'équation au contingent, *Bull. Acad. Sci. Polon. Sci. Ser. Math.*, **9** (1961), 12, 865－867.

А. Ф. Филиппов 撰　孙和生 译　陆柱家 校

切锥 [**contingent**; **контингенция**], Euclid 空间的一子集 E 在点 $a \in E$ 处的

起点为 a 的射线 $\overrightarrow{ab}$ 之并(集)：对于每一 $\overrightarrow{ab}$，存在一收敛于 a 的点列 $b_n \in E$，使得射线序列 $\overrightarrow{ab_n}$ 收敛于 $\overrightarrow{ab}$．上述切锥用 contg(E, a)表示．对于一个 m 维可微流形 E，contg(E, a)与 E 在点 a 的 m 维切平面相同．这个概念在函数的微分性质的研究中证实是有用的．如果对平面上的子集 E 的每一点，contg(E, a)都不是整个平面，那么 E 可被划分成可数个位于可求长曲线上的部分．这个定理已被反复推广和加细．例如，位于一 n 维 Euclid 空间的一个具有有限 Hausdorff p 测度的集合，$p=1,\cdots,n-1$，划分成可数个部分，其中之一的 p 阶 Favard 测度为零，而其余的每个部分位于某个 p 维 Lipschitz 曲面上；对于几乎所有的 $x\in E$(在 Hausdorff p 测度意义下) contg(E, a)是一 p 维平面，如果集合 E 的所有变差是有限的，且从第 $p+1$ 个开始为零．

参考文献

[1] Bouligand, G., Introduction à la géometrie infinitésimale directe, Vuibert, 1932.

[2] Saks, S., Theory of the integral, Hafner, 1952 (译自波兰文).

[3] Federer, H., Geometric measure theory, Springer, 1969.

[4] Иванов, Л. Д., Вариации множеств и функций, М., 1975.

Л. Д. Иванов 撰

【补注】 关于切锥(及相关的仿切概念)的进一步论述，可以在 G. Choquet 的专题著作[A1]中找到．切锥在当今的最优化问题中是有用的．

参考文献

[A1] Choquet, G., Outils topologiques et métriques de l'analyse mathématiques, Centre de Documentation Univ. Paris, 1969. Cours rédigé par C. Mayer.

[A2] Aubin, J. P. and Ekeland, I., Applied nonlinear analysis, Wiley (Interscience), 1984.

杨　路、张景中、侯晓荣 译

连续方法 [**continuation method**; **продолжения по параметру метод**]，亦称**参数延拓法**，对参数化族的

把一个给定的问题包含在一个单参数族 $(0\leqslant\alpha\leqslant1)$的问题中，该问题族把给定的问题$(\alpha=1)$和一个已知为可解的问题$(\alpha=0)$联系起来，并研究解对参数 α 的依赖性．这个方法广泛应用于微分方程的理论中．

例如，假定要证明在一适当的 N 维有界区域 D 中二阶线性椭圆算子的 Dirichlet 问题

$$\left.\begin{array}{l} Lu=f, \quad \text{在 } D \text{ 中}, \\ u|_{\partial D}=\varphi, \end{array}\right\} \tag{1}$$

在 Hölder 连续函数类中的可解性，其中

$$Lu=\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{N} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x)u,$$

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \beta|\xi|^2,\ \beta>0,\ \forall \xi\in\mathbf{R}^N,\ x\in D.$$

$$c(x)\leqslant 0;\ a_{ij}, b_i, c\in C^{(n-2,\mu)}(\bar{D}),\ \bar{D}=D\cup\partial D;$$

$$n\geqslant 2;\ \mu>0.$$

引入一族椭圆算子

$$L_\alpha u = \alpha Lu+(1-\alpha)\Delta u,\ 0\leqslant\alpha\leqslant 1,$$

并研究其 Dirichlet 问题

$$\left.\begin{aligned}&L_\alpha u=f, \quad 在 D 中,\\ &u|_{\partial D}=\varphi,\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

设 $\mathfrak{A}$ 是使(2)对任何 $f\in C^{(n-2,\mu)}(\bar{D})$ 和 $\varphi\in C^{(n,\mu)}(\partial D)$ 在 $C^{(n,\mu)}(\bar{D})$ 中唯一可解的全体 $\alpha\in[0,1]$ 的集合.集合 $\mathfrak{A}$ 不是空集,因为由位势理论推得当 $\alpha=0$ 时(即对 Laplace 算子)问题(2)在 $C^{(n,\mu)}(\bar{D})$ 中是唯一可解的.可以证明集合 $\mathfrak{A}$ 在 [0,1] 中既是开的又是闭的,则 $\mathfrak{A}$ 与 [0,1] 重合.因此,$\alpha=1$ 属于 $\mathfrak{A}$ 从而得到(1)是可解的.

连续方法(在解析延拓的情形)是由 C. H. Бернштейн 在一系列文章中提出并发展了的(见[1],[2]).随后,这个方法在线性和非线性微分方程的各种问题中得到了广泛的应用,在那里关于参数的解析延拓的思想为更一般的泛函和拓扑学的原理所补充(见[3]).

参考文献

[1] Bernstein, S. N., *Math. Ann.*, **59** (1904), 20–76.

[2] Бернштейн, С. Н., Собр. соч. 3, М., 1960.

[3] Leray, J. and Schauder, J., *Ann. Ecole Norm. Super.*, **51** (1934), 45–78.

И. А. Шишмарев 撰

【补注】 把一个给定问题,例如一个微分方程或一个最优化的问题嵌入到一族问题中去的思想是相当古老的,并被多次独立地重新发现过.至少可追溯到 H. Poincaré([A1]),事实上这是 Poincaré 特别喜欢的技巧.

近来,这种思想先是在最优化问题而后又在由 H. Scarf 计算 Brouwer 不动点(Brouwer fixed points)的一个算法([A2])开始的经济平衡点计算中多次提出,它们都是建立在剖分过程中为单纯形编号的 Sperner 引理的基础上的([A3]). Scarf 算法(Scarf algorithm)及其他有关的算法很快发展为解方程、求极值和跟踪分歧解的各种算法.

把给定问题嵌入进去的问题族可以看成是该问题的连续形变(deformation)或同伦(homotopy).同伦方法(homotopy method)和同伦连续方法(homotopy continuation method)即由此而得名.也会见到连续性方法(continuity method)和预估校正法(predictor-corrector method)这样的名字.关于本题目的近期文献的选编可在[A4]–[A9]中找到.综述性论文[A4]有一个非常广泛的参考文献目录.大量先前已经知道的有关解方程的算法可以作为同伦延拓法的特殊情形而得到.

把一个问题嵌入到适当的问题族中去这个一般的思想的相当不同的执行是由 R. Bellmann 的不变嵌入(invariant imbedding)方法提供的.

[A10] 中给出了前述的 Dirichlet 问题这个例子的更完全的讨论和证明.

参考文献

[A1] Poincaré, H., Sur les courbes définies par une équation différentielle I (1881), in Oeuvres, Vol. 1, Gauthier-Villars, 1951.

[A2] Scarf, H., The approximation of fixed points of a continuous mapping, *SIAM J. Appl. Math.*, **15** (1967), 1328–1343.

[A3] Curtis Eaves, B., A view of complementary pivot theory (or solving equations with homotopies, in H. O. Peitgen and H. O. Walther (eds.), Functional differential equations and approximation of fixed points, Lecture Notes in Math., Vol. 730, Springer, 1979, 89–111.

[A4] Allgower, E. and Georg, K., Simplicial and continuation methods for approximating fixed points and solutions to systems of equations, *SIAM Review*, **22** (1980), 28–85.

[A5] Curtis Eaves, B., A short course in solving equations, with PL homotopies, in SIAM-AMS Proc., Vol. 9, 1976, 73–143.

[A6] Richter, S. L. and DeCarlo, R. A., Continuation methods: theory and applications, *IEEE Trans. AC*, **28** (1983), 660–665.

[A7] Peitgen, H. O. and Walther, H. O. (eds.), Functional differential equations and approximation of fixed points, Lecture Notes in Math., 730, Springer, 1979.

[A8] Karamurdian, S. (ed.), Fixed points: algorithms and applications, Acad. Press, 1977.

[A9] Wacker, H. (ed.), Continuation methods, Acad. Press, 1978.

[A10] Courant, R. and Hilbert, D., Methods of mathematical physics. Partial differential equations, 2, Interscience, 1965 (译自德文) (中译本: 数学物理方法Ⅱ. 科学出版社, 1977).

叶其孝 译

连续方法(对非线性算子的)[continuation method (for nonlinear operators); продолжения по параметру метод], 亦称**参数延拓法**,对参数化族的近似求解非线性泛函方程的一种方法.这种方法在于通过引进一个取值在一有限区间 $t_0\leqslant t\leqslant t^*$ 的参数 t 把要求解的方程 $P(x)=0$ 拓广成形为 $F(x,t)=0$ 的方程,使得当 $t=t^*$ 时得到原来的方程: $F(x,t^*)=P(x)$,同时方程 $F(x,t_0)=0$ 或者能容易地求解,或者早已知道该方程的一个解 x_0(见[1]–[3]).

拓广了的方程 $F(x,t)=0$ 是对个别的 t 值: $t_0,\cdots,t_k=t^*$ 逐次求解的.对 $t=t_{i+1}$ 的方程的求解是通过某种迭代法(Newton 法,简单迭代,参数变值法,[4],等等)从由解 $t=t_i$ 的方程 $F(x,t)=0$ 得到的解 x_i 开始来实现的.在关于 i 的每一步应用,例如,n 次 Newton

迭代,就导致公式

$$x_{i+1}^{(\nu+1)} = x_i^{(\nu)} - \left[F_x'(x_{i+1}^{(\nu)}, t_{i+1})\right]^{-1} F(x_{i+1}^{(\nu)}, t_{i+1}),$$

$$i = 0, \ldots, k-1;\ \nu = 0, \ldots, n-1,\ x_{i+1}^{(0)} = x_i^{(n)}$$

如果差 $t_{i+1}-t_i$ 充分小,则为保证得到 $t=t_{i+1}$ 时的解 x_{i+1}, x_i 的值可能是一个足够好的保证收敛性的初始近似(见[1],[3],[5]).

在实践中,原来的问题常常自然地依赖于某个参数,该参数就可取作 t.

连续方法用于求解非线性代数方程组和超越方程(见[1],[2]),以及更一般的 Banach 空间中的非线性泛函方程(见[5]—[7]).

连续方法有时称为参数变值直接法(见[2],[6]),也称为直接和迭代参数变值组合法.在这些方法中,通过对参数的微商把构造拓广的方程的解的问题化为求解一个带初值的微分方程问题(Cauchy 问题),用常微分方程的数值积分法来解这个问题.在参数变值直接法中把最简单的 Euler 方法用于该 Cauchy 问题

$$\frac{dx}{dt} = -\left[F_x'(x, t)\right]^{-1} F_t'(x, t),\ x(t_0) = x_0,$$

$F(x, t)=0$ 的解 $x(t)$ 的近似值 $x(t_i)=x_i\ (i=1, \cdots, k)$ 可通过下面的恒等式来决定:

$$x_{i+1} = x_i - (t_{i+1}-t_i)\left[F_x'(x_i, t_i)\right]^{-1} F_t'(x_i, t_i),$$

$$i = 0, \ldots, k-1.$$

x_k 就是要求的原来方程 $P(x)=0$ 的近似解.所有的值或某些值 x_{i+1} 的改进可以通过参数变值迭代法([4])(或 Newton 法)来得到.

拓广方程通常以下述形式

$$F(x, t_{i+1}) = (1-\lambda)F(x^{(0)}, t_{i+1}),\ x^{(0)} = x_{i+1}$$

在一有限区间 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ 上生成,或在其中用 $e^{-\tau}$ 来代替 $1-\lambda$,从而在无穷区间 $0 \leqslant \tau \leqslant \infty$ 上生成.

参数变值法一直用于一大类问题,既用来构造解又用来证明解的存在性(例如,见[3],[4],[6],[7]).

参考文献

[1] Lahaye, E., Sur la résolution des systèmes d'equations transcendantes, *Acad. Roy. Belgique Bull. Cl. Sci. Sér.* 5, **34** (1948), 809–827.

[2] Давиденко, Д. Ф., 《Укр. матем. ж.》, **5** (1953), 2, 196–206.

[3] Ortega, J. M. and Rheinboldt, W. C., Iterative solution of non-linear equations in several variables, Acad. Press, 1970.

[4] Давиденко, Д. Ф., 《Ж. вычисл. матем. и матем. физ.》, **15** (1975), 1, 30–47

[5] Дементьева, А. М., 《Докл. АН СССР》, **201** (1971), 4, 774–777.

[6] Давиденко, Д. Ф., 《Укр. матем. ж.》, **7** (1955), 1, 18–28.

[7] Шидловская, Н. А., 《Уч. зап. ЛГУ》, **271** (1958), 33, 3–17.

Д. Ф. Давиденко 撰

【补注】 见连续方法(continuation method)的补注.

叶其孝 译

连分数 [**continued fraction** 或 **continuous fraction**; **цепная дробь** 或 непрерывная дробь], 亦称连分式

下列形式的表达式:

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{\ddots}{\quad + \cfrac{b_n}{a_n + \cdots}}} \quad (1)$$

也可把表达式(1)写成

$$a_0 + \frac{1|}{|a_1} + \cdots + \frac{1|}{|a_n} + \cdots, \quad (2)$$

其中

$$\{a_n\}_{n=0}^{\omega} \quad (3)$$

和

$$\{b_n\}_{n=1}^{\omega} \quad (4)$$

是有限或无限的复数序列(或函数序列). 序列(3)的连分数定义为下列表达式:

$$a_0 + \frac{b_1|}{|a_1} + \cdots + \frac{b_n|}{|a_n} + \cdots.$$

对于每个连分数(1), 递推方程

$$P_n = a_n P_{n-1} + b_n P_{n-2},$$
$$Q_n = a_n Q_{n-1} + b_n Q_{n-2}$$

以及初始条件

$$b_0 = 1,\ P_{-2} = 0,\ P_{-1} = 1,\ Q_{-2} = 1,\ Q_{-1} = 0$$

定义了两个复数序列 $\{P_n\}_{n=0}^{\omega}$ 和 $\{Q_n\}_{n=0}^{\omega}$. 通常假设序列(3)和(4)是这样的,即对于一切 $n(0 \leqslant n \leqslant \omega+1)$,使得 $Q_n \neq 0$. 分数 $\delta_n = P_n / Q_n$ 即

$$\delta_0 = a_0,\ \delta_1 = a_0 + \frac{b_1}{a_1},\ \delta_2 = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2}}, \ldots$$

称为连分数(1)的 n 阶渐近分数(n-th convergent of

the continued fraction). 这里

$$\delta_n-\delta_{n-1}=\frac{(-1)^{n-1}b_1\cdots b_n}{Q_nQ_{n-1}}.$$

把序列(3)的连分数的第 n 个渐近分数记为

$$[a_0;a_1,\ldots,a_n]$$

是很方便的．这些渐近分数满足下列等式：

$$[a_n;\ldots,a_1]=\frac{Q_n}{Q_{n-1}}\text{，对 } n\geqslant 1,$$

$$[a_n;\ldots,a_0]=\frac{P_n}{P_{n-1}}\text{，对 } a_0\neq 0 \text{ 和 } n\geqslant 0.$$

如果 $\omega=\infty$，且(1)的渐近分数序列收敛于某个极限 l，则连分数(1)称为收敛的(convergent)，数 l 是它的值(value)．如果 $\omega<\infty$，即连分数是有限的，则它的值定义为它的最后一个渐近分数．

如果序列(3)和(4)的各项(a_0可能除外)都是正实数，a_0 是实数，并设 i 为非负整数，则由第 $2i$ 个渐近分数构成的序列 $\delta_0,\delta_2,\delta_4,\cdots$ 是递增的，而由第 $2i+1$ 个渐近分数构成的序列 $\delta_1,\delta_3,\delta_5,\cdots$ 是递减的；这里第 $2i$ 个渐近分数小于第 $2i+1$ 个渐近分数(见[5])．

如果 $\alpha_0,\alpha_1,\cdots$ 是这样的复数序列，使得

$$\alpha_0=a_0+\frac{b_1}{\alpha_1},\quad \alpha_1=a_1+\frac{b_2}{\alpha_2},\ \ldots,$$

则表达式(1)称为数 α_0 的连分数展开(expansion in a continued fraction)．并不是每个连分数都收敛，当把一个数展开为连分数时，这个连分数的值并不总是等于这个数．存在几个判别连分数收敛性的准则(例如，见[3]，[5])：

1)假设 $\omega=\infty$，序列(3)和(4)的各项都是实数，且从某一项开始，对于一切自然数 n，$a_n>0$．如果对于这样的 n，不等式 $a_n-|b_n|\geqslant 1$ 成立，则连分数(1)收敛．

2)假设 $\omega=\infty$，从 a_1 开始，序列(3)的各项都是正数．这时，序列(3)的连分数收敛，当且仅当级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 发散(Seidel 定理(Seidel theorem))．

序列(3)的连分数称为正则的(regular)，如果这个序列的各项(a_0可能除外)都是自然数，a_0 是整数，当 $1\leqslant\omega<\infty$ 时，$a_\omega\geqslant 2$．对于每个实数 r，存在唯一的正则连分数，其值为 r．当且仅当 r 为有理数时，这个连分数是有限的(见[1]，[2]，[4])．把实数 r 展开为正则连分数的算法由下列关系式来定义：

$$\left.\begin{aligned}
&a_0=[r], &&\alpha_1=\frac{1}{r-a_0}\text{，若 } a_0\neq r;\\
&a_1=[\alpha_1], &&\alpha_2=\frac{1}{\alpha_1-a_1}\text{，若 } a_1\neq\alpha_1;\\
&a_2=[\alpha_2],\ \ldots, &&
\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

其中 $[x]$ 表示 x 的整数部分．

由(5)定义的数 a_n 和 α_n，分别称为数 r 的连分数展开式的 n 阶完全商(complete quatient)和不完全商(incomplete quotient)．

大约在 1786 年，J. Lambert 发现了 $\tan x$ 的连分数展开式：

$$\frac{1|}{|1/x}-\frac{1|}{|3/x}-\cdots\frac{1|}{|(2n+1)/x}-\cdots.$$

当假设这个连分数收敛时，A. Legendre 证明：对于 x 的有理值，它的值是无理数．应当提到，A. Legendre 用这种方法证明了数 π 的无理性(见[7])．

L. Euler 在 1737 年发现

$$\frac{1}{2}(e-1)=\frac{1|}{|1}+\frac{1|}{|6}+\frac{1|}{|10}+\frac{1|}{|14}+\cdots.$$

实数 r 是整系数二次多项式的无理根，当且仅当数 r 的连分数展开式的不完全商从某一项开始周期性地重复出现(Euler-Lagrange 定理(Euler-Lagrange theorem)，见[1]和[4])．目前(1984)还不知道三次或更高次的代数数的正则连分数展开式．下述假设还未证明：$2^{1/3}$ 的连分数展开式的不完全商是有界的．

正则连分数是用有理数近似表示实数的十分方便的工具．下述命题成立：

1)如果 $\delta_n=P_n/Q_n$ 和 δ_{n+1} 是数 r 的正则连分数展开式的两个相邻的渐近分数，则有

$$|r-\delta_n|\geqslant|r-\delta_{n+1}|$$

和

$$\left|r-\frac{P_n}{Q_n}\right|\leqslant\frac{1}{Q_nQ_{n+1}}.$$

后者仅当 $r=\delta_{n+1}$ 时等式成立．

2)在数 r 的正则连分数展开式的两个相邻的渐近分数中，至少有一个满足下列不等式：

$$\left|r-\frac{P_n}{Q_n}\right|\leqslant\frac{1}{2Q_n^2}.$$

3)如果 a 和 b 是整数，$b\geqslant 1$，r 是实数，且

$$\left|r-\frac{a}{b}\right|\leqslant\frac{1}{2b^2},$$

则 a/b 是数 r 的正则连分数展开式的一个渐近分数．

4)如果 $\delta_n=P_n/Q_n$ 是数 r 的正则连分数展开式的一个渐近分数，则对于任何整数 a 和 b，由 $b>0$，$\delta_n\neq a/b$ 和

$$\left|r-\frac{a}{b}\right|\leqslant|r-\delta_n|$$

可以推出 $b>Q_n$（最佳逼近定理(theorem on the best approximation)）.

数 π 的正则连分数展开式的前 25 个不完全商是:3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, 2, 1, 1.

数 π 的正则连分数展开式的前 5 个渐近分数是

$$\delta_0=3,\ \delta_1=\frac{22}{7},\ \delta_2=\frac{333}{106},\ \delta_3=\frac{355}{113},\ \delta_4=\frac{103993}{33102}$$

因此,

$$\left|\pi-\frac{22}{7}\right|<\frac{1}{742}\quad 和\quad \left|\pi-\frac{355}{113}\right|<3\cdot 10^{-7}$$

存在连分数的各种推广(例如,见[9]).

参考文献

[1] Бухштаб, А. А., Теория чисел. 2, изд., М., 1966

[2] Венков, Б. А., Элементарная теория чисел, М.-Л., 1937 (英译本: Venkov, B. A., Elementary number theory, Wolters-Noordhoff, 1970).

[3] Марков, А. А., Избранные труды, М.-Л. 1948.

[4] Хинчин, А. Я., Цепные дроби, 4 изд., М.-Л., 1978.

[5] Хованский, А. Н., Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа, М., 1966.

[6] История математики, т.3, М., 1972.

[7] Ueber die Kwadratur des Kreises, 1936.

[8] Perron, O., Die Lehre von den Kettenbrüchen 1-2, Stuttgart, 1954-1957.

[9] Szekeres, G., Multidimensional continued fractions, *Ann. Univ. Soi. Sec. Math.*, **13** (1970), 113-140.

[10] Jones, W. B. and Thron, W. J., Continued fractions, analytic theory and applications, Addison-Wesley, 1980.

В. И. Нечаев 撰

【补注】 表示法(2)是 A. Pringsheim 首先使用的,其他表示法见[A1].

连分数在许多数学分支中起着重要作用,例如在数论中,特别是在 Diophantos 逼近中,这里 $a_i\in\mathbf{Z}$, $b_j=1$; 在遍历理论中,这里 a_i, $b_j\in\mathbf{Z}$; 在计算数学中,这里 a_i, b_j 是有理函数. 连分数的一些著名例子是关于超几何函数的连分数,例如

$$e^z=1+\frac{z|}{|1}-\frac{z|}{|2}+\frac{z|}{|3}-\frac{z|}{|2}+\cdots+$$
$$+\frac{z|}{|2n+1}-\frac{z|}{|2}+\cdots,$$

在这个连分数中,相应的 Q_n 是一些正交多项式. 在数论中,最著名的例子是黄金比(golden ratio)

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1+\frac{1|}{|1}+\frac{1|}{|1}+\cdots.$$

关于收敛性的经典文献是[A1],最新文献除了[10]以外,还有[A2]-[A4]. 某些推广可在[A5]-[A7]中找到. 除[A1]和[A8]以外,下列文献都包含关于最新进展和在 **Padé 逼近**(Padé approximation)、**矩问题**(moment problem)、**正交多项式**(orthogonal polynomials)、**数论**(number theory)和连分数的度量理论(亦见**数的度量理论**(metric theory of numbers))中的应用的广泛的文献目录.

参考文献

[A1] Wall, H. S., Analytic theory of continued fractions, Chelsea, 1973

[A2] Jones, W. B., Thron, W. J. and Waadeland, E. H. (eds.), Analytic theory of continued fractions, Lecture Notes in Math., 932, Springer, 1982.

[A3] Thron, W. J. (ed.), Analytic theory of continued fractions II, Lecture Notes in Math., 1199, Springer, 1986.

[A4] Kraaikamp, C., The distribution of some sequences connected with the nearest integer continued fraction, *Indag. Math.*, **49** (1987), 177-191.

[A5] Brentjes, A. J., Multidimensional continued fractions, CMI, Amsterdam, 1981.

[A6] Скоробогатько, В. Я., Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике, М., 1983.

[A7] Боднар, Д. И., Ветвящиеся цепные дроби, Киев, 1986.

[A8] Hardy, G. H. and Wright, E. M., An introduction to the theory of numbers, Oxford Univ. Press, 1959.

[A9] Henrici, P., Applied and computational complex analysis, 2, Wiley, 1977.

张鸿林 译

连续性 [continuity; непрерывность]

最重要的数学概念之一,通常和映射概念相联系(见**连续函数**(continuous function);**连续映射**(continuous mapping);**连续算子**(continuous operator)). 特别地,人们可以研究,某种代数运算在给定的集合 L 关于这个集合上的拓扑的连续性. 当所研究的运算是连续时,"连续"一词也可应用于集合自身(例如,**连续群**(continuous group)). 连续这个名词还可以在下述意义下使用,即不可能利用连续性去添补某些数学对象,使之(非平凡地)得到拓广,例如,对一个度量空间,在这种意义下人们谈到实数集的连续性.

Л. Д. Кудрявцев 撰 王斯雷 译

连续性公理[continuity axiom; непрерывности аксиома]

以某种方式表示**实数**(real number)集的连续性的公理. 关于实数的连续性公理可以叙述如下,例如利用分割:实数的每个分割都由某个数来定义 (Dedekind 公

理(Dedekind axiom); 利用闭区间套: 每个闭区间套集合都具有一个非空的交(Cantor 公理 (Cantor axiom)); 利用集合的上界和下界: 每个非空上有界的集合都具有一个有限的最小上界, 每个非空下有界的集合都具有一个最大下界 (Weierstrass 公理 (Weierstrass axiom)).

Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】 亦见**分割** (cut); **Dedekind 分割** (Dedekind cut).

张鸿林 译

连续性方程 [**continuity equation**; **неразрывности уравнение**]

流体动力学基本方程之一, 它表述任意体积的运动流体的质量守恒定律. 用 Euler 变量表示, 连续性方程的形式是

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\mathbf{v})\equiv\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}=0,$$

式中 ρ 是流体密度, $\mathbf{v}$ 是给定点上流体速度, $\mathbf{v}_x$, $\mathbf{v}_y$, $\mathbf{v}_z$ 是此速度在三个坐标轴上的投影. 如果流体是不可压缩的 (ρ = 常数), 则连续性方程具有如下形式:

$$\mathrm{div}\mathbf{v}=0 \text{ 或 } \frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0.$$

对于具有横截面积 S 的管道、渠道等中的一维定常流动, 由连续性方程得到此种流动的以下定理: $\rho S\mathbf{v}$ = 常数.

БСЭ - 3 晏名文 译

连续模 [**continuity, modulus of**; **непрерывности модуль**]

连续函数的基本特征之一. 闭区间上连续函数 f 的连续模定义为

$$\omega(\delta,f)=\max_{|h|\leqslant\delta}\max_x|f(x+h)-f(x)|,$$

其中 $\delta\geqslant0$. 连续模的定义是 H. Lebesgue 于 1910 年引进的, 虽然在此之前, 这个概念本质上已经知道了. 假若一个函数 f 的连续模满足条件

$$\omega(\delta,f)\leqslant M\delta^\alpha,$$

其中 $0<\alpha\leqslant1$, 那么称 f 满足 α 阶 **Lipschitz 条件** (Lipschitz condition).

定义在 $\delta\geqslant0$ 上的非负函数 ω 是某个连续函数的连续模, 当且仅当它具备以下一些性质: $\omega(0)=0$, ω 是非减的, ω 是连续的, 并且

$$\omega(\delta+\eta)\leqslant\omega(\delta)+\omega(\eta),\quad \delta,\eta>0.$$

还可以考虑高阶连续模

$$\omega_k(\delta,f)=\max_{|h|\leqslant\delta}\max_x|\Delta_h^kf(x)|,$$

其中,

$$\Delta_h^kf(x)=\sum_{i=0}^k(-1)^{k-i}\binom{k}{i}f(x+ih)$$

是 f 的 k 阶有限差; 也可以考虑任意函数空间中的连续模, 例如在 $[a,b]$ 上 p 幂可积的函数 f 的积分连续模

$$\omega^{(p)}(\delta,f)=\sup_{0\leqslant h\leqslant\delta}\left\{\int_a^{b-h}|f(x+h)-f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p}\quad(*)$$

对于 2π 周期函数, (*) 中积分区间为 $[0,2\pi]$.

参考文献

[1] Zygmund, A., Trigonometric series, 1, Cambridge Univ. Press, 1979.

[2] Ахиезер, Н. И., Лекции по теории аппроксимации, 2 изд., М., 1965 (中译本: Н. И. 阿赫叶惹尔, 逼近论讲义, 科学出版社, 1957).

[3] Дзядык, В. К., Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами, М., 1977.

А. В. Ефимов 撰

【补注】 亦见**光滑模** (smoothness, modulus of). 连续模与光滑模广泛地应用于**逼近论** (approximation theory) 与 Fourier 分析中 (见**调和分析** (harmonic analysis)).

王斯雷 译

连续性定理 [**continuity theorem**; **непрерывности теорема**], 连续性原理 (continuity principle)

命 G 为 $\mathbf{C}^n$ ($n\geqslant2$) 中的一**全纯域** (**domain of holomorphy**), 又命 $S_k\subset G$ 和 $T_k\subset G$, $k=1,2,\cdots$ 为两集合序列, 它们在 G 中有紧闭包, 且在其中极大模原理 (maximum-modulus principle) 对在 G 中全纯的函数 f 成立, 即

$$|f(z)|\leqslant\max_{z\in S_k}|f(z)|,$$

$$|f(z)|\leqslant\max_{z\in T_k}|f(z)|,\ k=1,2,\ldots.$$

于是, 如果 S_k 收敛于某一有界集 S, T_k 收敛于一集 T, 又如果 $T\subset S$ 并且 T 在 S 中有紧闭包, 那么 $S\subset G$ 在 G 中有紧闭包. 如果取一族解析超曲面作为 S_k, 取它们的边界 ∂S_k 作为 T_k, 就得到 Behnke-Sommer 定理 (Behnke-Sommer theorem) (见[1]). 因此可知每一全纯域是伪凸的. 将它应用到一特殊函数, 连续性定理的某些改进称为关于"解析圆盘"的定理. 例如, 解析圆盘上的强定理 (strong theorem on analytic 'discs') 断言如下: 假设在 $\mathbf{C}^{n-1}$ 中给定形如

$$\tilde z(t)=\tilde z_0+\tilde b\lambda(t),\ 0\leqslant t\leqslant1,\ \tilde b\in\mathbf{C}^{n-1},\ \tilde z=(z_2,\ldots,z_n)$$

的 Jordan 曲线. 命 $D(t)$, $0\leqslant t\leqslant1$ 为 z_1 平面上的一族具有如下性质的区域: 对任何紧集 $K\subset D(0)$ 存在一数

$\eta=\eta(K)$使得 $K\subset D(t)$ 对所有 $0\leqslant t<\eta$ 成立．如果 $f(z)$在"圆盘"

$$\{z=(z_1,\tilde{z}):\ z_1\in D(t),\ \tilde{z}=\tilde{z}(t),\ 0<t\leqslant 1\}$$

的所有点和极限"圆盘"

$$\{z=(z_1,\tilde{z}):\ z_1\in D(0),\ \tilde{z}=\tilde{z}(0)\}$$

的一点全纯，那么 $f(z)$ 也在极限"圆盘"的所有点全纯．"解析圆盘"的定理在区域的全纯开拓和构造全纯包络上十分有用(见**全纯包**(Holomorphic envelope))，例如，管状域的全纯包络上的 Bochner 定理，Osgood-Brown 定理，和"边嵌入"，"楔边"，"C-凸包"定理的证明等等．连续性原则的给出可追溯到关于多复变量全纯函数的可去奇点的 **Hartogs 定理**(Hartogs theorem) (1916).

参考文献

[1] Behnke, H. and Thullen, P., Theorie der Funktionen mehrerer komplexen Veränderlichen, Springer, 1970. Revised Edition. Original: 1934.

[2] Владимиров, В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964 (英译本: Vladimirov, V.S., Methods of the theory of functions of several complex variables, M. I. T., 1966).

[3] Шабат, Б.В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 2, М., 1976.

B. C. Владитиров 撰

【补注】 连续性原理也称为 Hartogs 连续性定理(Hortogs Kontinuitätssatz, Hartogs continuity theorem).

参考文献

[A1] Krantz, S. G., Function theory of several complex variables, Wiley, 1982, Chapt. 3.

[A2] Range, R. M., Holomorphic functions and integral representations in several complex variables, Springer, 1986, Chapt. 2.

钟同德 译

迭代法的连续模拟 [continuous analogues of iteration methods; непрерывные аналоги итерационных методов]

一种连续模型，使得研究非线性方程解的存在性问题，借助完善的连续分析工具提出关于迭代法的收敛性和最优性的初步结果，得到这些方法新的类别等成为可能．

可以通过调节(见**调节法**(adjustment method))建立解定常问题的方法与某些迭代法(见[1]，[2])之间的对应关系．例如对具有正定自伴算子 A 的线性方程

$$Au=f \tag{1}$$

的解，知道形如

$$\frac{(u^{k+1}-u^k)}{\tau_k}=-(Au^k-f),\quad u^0=v, \tag{2}$$

的一步迭代法，当 $\tau_k>0$ 充分小时收敛．引进连续时间 t，将量 u^k 看作某函数 $u(t)$ 在 $t=t_k$ 的值，这里

$$t_0=0<t_1<\cdots<t_k<\cdots,\quad t_k\to\infty，当 k\to\infty 时,$$

如果设 $\tau_k=\rho(t_k)\ (t_k-t_{k-1})$，对 $t\geqslant 0$，$\rho(t)>0$ 是连续函数，当 $\Delta t_k=t_{k+1}-t_k\to 0$ 时在(2)中取极限，得到迭代法(2)的连续模拟：

$$\frac{du}{dt}=-\rho(t)(Au-f),\quad u(0)=v. \tag{3}$$

如果当 $t\to\infty$ 时

$$\int_0^t\rho(t)\,dt\to\infty,$$

则 $u(t)$趋于 $u(\infty)$，它是(1)的一个解．

类似地，对函数 $F(u)$极小化用一步梯度迭代法：

$$u^{k+1}=u^k-\tau_k\,\mathrm{grad}\,F(u^k),\quad u^0=v, \tag{4}$$

可联系到连续模拟：

$$\frac{du}{dt}=-\rho(t)\,\mathrm{grad}\,F(u),\quad u(0)=v. \tag{5}$$

这里函数 $\rho(t)$仅影响最速下降曲线的参数化．为了求解(1)，可以设 $F(u)=(Au,u)-2(f,u)$．这时公式(4)取形式(2)，方程(5)取形式(3)．

借助变换，二步迭代法

$$u^{k+1}=u^k-\alpha_k(Au^k-f)-\beta_k(u^k-u^{k-1}) \tag{6}$$

可变成形如

$$2\frac{\left[\dfrac{u^{k+1}-u^k}{\Delta t_k}-\dfrac{u^k-u^{k-1}}{\Delta t_{k-1}}\right]}{t_{k+1}-t_{k-1}}+ \tag{7}$$
$$+\gamma_k\frac{u^{k+1}-u^{k-1}}{t_{k+1}-t_{k-1}}+\mu_k u^k=-\rho_k(Au^k-f),$$

这里量 γ_k,μ_k,ρ_k 和 t_k 依据(6)的参数 α_k 和 β_k (非唯一地)确定．当 $\Delta t_k\to 0$ 时在(7)中取极限，导出连续模拟：

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\gamma(t)\frac{du}{dt}+\mu(t)u=-\rho(t)(Au-f). \tag{8}$$

包含方程如(8)的调整法称为重球法 (method of the heavy sphere) (见[2])．存在迭代法，其连续模拟包含更高阶的微分算子 (见[3])．

得到在迭代法中起连续模拟作用的微分方程的来源可能是连续方法(continuation method)(关于一个参数)(见[4]，[5])．在这个方法中，为了求方程

$$\varphi(u)=0 \tag{9}$$

的解，构造一个依赖于参数 λ 的方程

$$\Phi(u,\lambda) = 0, \tag{10}$$

使得对 $\lambda=0$,(10) 的解:$u(0)=u^0$ 是已知的,以及对 $\lambda=1$,(9)和(10)的解是相同的. 例如,可以取

$$\Phi(u,\lambda) = \varphi(u)-(1-\lambda)\varphi(u^0). \tag{11}$$

通过关于参数微分(10)式,并取 $u=u(\lambda)$,得到关于 $u(\lambda)$的微分方程;对于情形(11),它是

$$\frac{du}{d\lambda} = -\varphi'(u)^{-1}\varphi(u^0). \tag{12}$$

用点列 $\lambda_0=0<\lambda_1<\cdots<\lambda_n=1$ 将区间[0,1]分成 n 部分,并对(12)在点 λ_k 利用数值离散公式(如 Euler 法,Runge - Kutta法等),得到量 $u^k=u(\lambda_k)$之间的递推关系,利用它来构造迭代法的公式. 于是,在应用 Euler 法后,(12)用关系式

$$u^k = u^{k-1}-\Delta\lambda_k\varphi'(u^{k-1})^{-1}\varphi(u^0) \tag{13}$$

替代,这里 $\Delta\lambda_k=\lambda_k-\lambda_{k-1}$,确定了包含内外迭代循环的如下二步迭代法:

$$u_k^i = u_{k-1}^i-\Delta\lambda_k\varphi'(u_{k-1}^i)^{-1}\varphi(u_0^i), \tag{14}$$

$$k=1,\ldots,n;\ u_0^i=y_n^{i-1},\ i=1,2,\ldots,\ u_0^0=u^0.$$

对 $\Delta\lambda_1=1$ 和 $n=1$,这就变为经典的 Newton 法. Newton 迭代法的连续模拟还可以用另外的方式得到:在(11)中,用 $\lambda=1-e^{-t}$ 代替变量. 这时微分方程(12)取如下形式:

$$\frac{du}{dt} = \varphi'(u)^{-1}\varphi(u),\ u(0)=u^0. \tag{15}$$

在点 t_k 应用 Euler 法,(15)式的数值积分导出迭代法

$$u^k = u^{k-1}-\Delta t^{k-1}\varphi'(u^{k-1})^{-1}\varphi(u^{k-1}).$$

当 $\Delta t^{k-1}=1$ 时它与经典 Newton 法相一致.

对数学物理的微分方程边值问题解的迭代法的连续模拟,一般来说,是特殊形式偏微分方程的混合问题(如具有快速振荡系数,或在最高导数前具有小系数).

也见**算法的闭包** (closure of a computational algorithm).

参考文献

[1] Гаврин, М. К.,《Изв. ВУЗов. Математика》, 1958, 5(6), 18 – 31.

[2] Бахвалов, Н. С., Численные методы, 2 изд., т. 1, М., 1975 (英译本: Bakhvalov, N. S., Numerical methods: analysis, algebra, ordinary differential equations, 1, Mir, 1977).

[3] Марчук, Г. И., Лебедев, В. И., Численные методы в теории переноса нейтронов, М., 1971.

[4] Ortega, J. and Rheinboldt, W. C., Iterative solution of non - linear equations in several variables, Acad. Press, 1970.

[5] Давиденко, Д. Ф.,《Ж. вычисл. матем. и матем. физ.》, 15 (1975), 1, 30 – 47.

В. И. Лебедев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Rheinboldt, W. C., Numerical analysis of parametrized nonlinear equations, Wiley, 1986.

郭祥东 译

连续分解 [**continuous decomposition**; **непрерывное разбиение**], 拓扑空间 X 的

由满足下列条件的两两不交的非空集合组成的 X 的覆盖 γ:对任意 $F\in\gamma$ 以及 F 在 X 中的任意邻域 U,存在 F 在 X 中的邻域 V,它包含在 U 中,并且是 γ 中某元素族之并. 分解是连续的,当且仅当 X 到这个分解空间上对应的**商映射** (quotient mapping)是闭的. 空间 X 到空间 Y 上的连续映射 $f:X\to Y$ 是闭的,当且仅当 X 的分解 $\gamma_f=\{f^{-1}(y):y\in Y\}$ 是连续的.

连续分解常出现在**紧空间**(compact space)的理论中. 紧空间到 Hausdorff 空间上的每一个连续映射是闭的. 因此,紧空间 X 到 Hausdorff 空间 Y 上的每个连续映射由点的原象给出 X 的一个连续分解. 同样地,Hausdorff 紧统的分解是连续的,当(且仅当)该分解空间满足 Hausdorff 分离性公理. 由闭集作成的空间的连续分解,其好处是保持正规性和仿紧性. 与此相对照,由闭集作成的度量空间的连续分解空间未必可度量化. 这种情形最简单的例子是仅以一条固定直线为非平凡元素的平面的分解空间.

像一般的分解一样,连续分解是由现有的拓扑空间构造新拓扑空间,以及用比较简单的或更为标准的空间的连续分解空间来表示较为复杂的拓扑空间的一个重要工具. 比如,每个可度量化紧统是 **Cantor 集** (Cantor set)的一个连续分解空间. 每个连通、局部连通的可度量化的紧统可以表示为一个区间的连续分解空间. 连续分解也可以自然地出现在某些特定的构造中,例如,被视为拓扑空间的**射影平面**(projective plane)是通常球面由对径点对构成的连续分解空间. 类似地,从拓扑观点来看,n 维射影空间是在$(n+1)$维 Euclid 空间里 n 维球面由对径点对构成的连续分解空间. 使用这种语言,Möbius 带可以精确地表示为矩形的某个连续分解空间,其他的几何对象也可以用这种方法来构造.

参考文献

[1] Архангельский, А. В., Пономарев, В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М. 1974 (英译本: Arkhangel'skií, A. V. and Ponomarev, V. I., Fundamentals of general topology: problems and exercises, Reidel, 1984).

А. В. Архангельский 撰

【补注】 X 的分解 γ 的空间(space of a decomposition),

以集合γ为基础集,$\alpha\subset\gamma$是开的,当且仅当$\bigcup_{F\in\alpha}F$是X中开集,即它是由等价关系$x\equiv y$当且仅当x,y都属于γ的同一元素所确定的X的商空间.

满足上面条目要求的覆盖γ也称为上半连续分解(upper semi-continuous decomposition).一个等价的定义是:对于每个闭集F,集合$\bigcup\{D\in\gamma:D\cap F\neq\phi\}$是闭的.若对于每个开集$O$,$\bigcup\{D\in\gamma:D\cap O\neq\phi\}$是开的,则称覆盖$\gamma$是下半连续分解(lower semi-continuous decomposition).等价地,γ是下半连续分解,当且仅当相应的商映射是开的(见**开映射**(open mapping)).

有时也用"分拆"这个词代替"分解".

许依群、徐定宥、罗嵩龄 译

连续分布[continuous distribution; непрерывное распределение]

没有原子的概率分布.如果原子只是单点集,那么连续分布与**离散分布**(discrete distribution)(亦见**原子分布**(atomic distribution))是对立的.离散和连续分布一起形成了分布的基本类型.根据C. Jordan的一个定理,每一个概率分布是一个离散分布和一个连续分布的混合.例如,设F是对应于实直线上某一确定分布的分布函数,那么$F=pF_1+(1-p)F_2$就是这样一种混合,其中$0\leqslant p\leqslant 1$,且F_1,F_2分别是离散型和连续型的分布函数.一个连续分布的分布函数是连续函数.在连续分布中,绝对连续分布(absolutely-continuous distributions)占有特殊的地位.可测空间$(\Omega,\mathscr{A})$上关于**参考测度**μ的这类分布P可以利用如下事实来定义,P可以表示成下列形式:

$$\mathrm{P}(A)=\int_A p(x)\mu(dx)$$

这里A是$\mathscr{A}$中的集合,$p\geqslant 0$是Ω上使得$\int_\Omega p(x)\mu(dx)=1$的可测函数.函数$p$称为P关于$\mu$的密度(density)(通常$\mu$是Lebesgue测度且$\Omega=\mathbf{R}^k$).在直线上,这时对应的分布函数$F$具有表示

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(u)du,$$

且这时$F'(x)=p(x)$几乎处处(关于Lebesgue测度)成立.一个分布关于Lebesgue测度是绝对连续的,当且仅当对应的分布函数(作为实变量函数)是绝对连续的.除了绝对连续分布以外,也有这样的连续分布,其负荷集中在一个μ测度为零的集合上.这种分布称为关于给定测度μ是奇异的(见**奇异分布**(singular distribution)).依Lebesgue分解定理,每一个连续分布是两个分布的混合,其中之一关于μ绝对连续,另一个则关于μ奇异.

最重要的(绝对)连续分布有:**反正弦分布**(arcsine distribution);**B分布**(beta-distribution),**Γ分布**(gamma-distribution),**Cauchy分布**(Cauchy distribution),**正态分布**(normal distribution),**均匀分布**(uniform distribution),**指数分布**(exponential distribution),**Student分布**(Student distribution),和χ^2**分布**(chi-distribution).

参考文献

[1] Feller, W., An introduction to probability theory and its applications, 2, Wiley, 1971.

[2] Loéve, M., Probability theory, Princeton Univ. Press, 1963(中译本:M.洛易甫,概率论(上册),科学出版社,1966).

A. B. Прохоров 撰

【补注】 离散分布是所有概率都集中在单点集上的分布.

上面所定义的绝对连续分布P也称为关于μ绝对连续(absolutely continuous with respect to μ).

陈培德 译

连续流[continuous flow; непрерывный поток]

1)**遍历理论**(ergodic theory)中的连续流是指**测度空间**(measure space)(M,μ)的一族模为0的自同构$\{T^t\}$,满足下面的性质:a)对于任意$t,s\in\mathbf{R}$以及所有$x\in M$,可能除去关于x的测度为0的例外集(它可能依赖于t及s),$T^tT^s(x)=T^{t+s}(x)$成立;换言之,$T^tT^s=T^{(t+s)}$(模0);b)对于每个可测集$A\subset M$,对称差的测度$\mu(A\Delta T^tA)$连续地依赖于t.设$\mathfrak{A}$为空间(M,μ)的所有模为0的自同构组成的集合,并且当T与S几乎处处重合时就认为是$\mathfrak{A}$中的同一个元素.假如赋$\mathfrak{A}$以弱拓扑(见[1]),则条件b)意味着,使$t\to T^t$的映射$\mathbf{R}\to\mathfrak{A}$是连续的.

假如(M,μ)为**Lebesgue空间**(Lebesgue space),那么连续流的概念实际上与**可测流**(measurable flow)的概念相同:后者总是连续流(见[2]),而且对于任意连续流$\{T^t\}$,必存在可测流$\{S^t\}$,使得对于一切t,$T^t=S^t$(模0)(见[3];[4]中证明了一个有关的结果,但需参考[5]中的更正).以上任何一个结果之逆与问题的特征以及所用方法有关.

2)名词"连续流"的另外涵义可以用来着重指出**拓扑动力学**(topological dynamics)中的流.在这种情况下,连续流指的是拓扑空间M上的一族同胚$\{T^t\}$,满足条件:$T^t(T^s(x)=T^{t+s}(x)$对于一切$t,s\in\mathbf{R}$和$x\in M$成立;使$(x,t)\to T^tx$的映射$M\times\mathbf{R}\to M$是连续的.

为了避免与1)的混淆,最好把2)的连续流称为拓扑流(topological flow),而把1)的连续流称为度量连续性(metric continuity).

参考文献

[1] Halmos, P. R., Lectures on ergodic theory, Math. Soc

of Japan, 1956.
[2] Hopf, E., Ergodentheorie, Springer, 1970.
[3] Вершик, А. М., 《Изв. АН СССР Сер. матем.》, 29 (1965), 1, 127–136.
[4] Mackey, G. W., Point realizations of transformation groups, *Illinois J. Math.*, 6 (1962), 2, 327–335.
[5] Ramsay, A., Virtual groups and group actions, *Advances in Math.*, 6(1971), 3, 253–322.

Д. В. Аносов 撰 王斯雷 译

连续函数 [**continuous function; непрерывная функция**]

数学分析中的一个基本概念.

设 f 是定义在实数集 $\mathbf{R}$ 的一个子集 E 上的实值函数, 即 $f: E \to \mathbf{R}$. 这时, 称函数 f 在点 $x_0 \in E$ 上是连续的 (continuous at a point $x_0 \in E$), 如果对于任何 $\varepsilon>0$, 都存在一个 $\delta>0$, 使得对于一切满足 $|x-x_0|<\delta$ 的 $x \in E$, 不等式

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

成立. 如果用

$$U(x_0,\ \delta)=(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$$

和

$$V(f(x_0),\ \varepsilon)=(f(x_0)-\varepsilon,\ f(x_0)+\varepsilon)$$

分别表示 x_0 的 δ 邻域和 $f(x_0)$ 的 ε 邻域, 则上面的定义可以重新叙述如下: 称函数 f 在点 $x_0 \in E$ 上是连续的, 如果对于 $f(x_0)$ 的每个 ε 邻域 $V=V(f(x_0),\ \varepsilon)$, 都存在 x_0 的一个 δ 邻域, 使得 $f(U \cap E) \subset V$.

利用极限的概念, 可以说: 函数 f 在点 x_0 上是连续的, 如果在这一点上 f 关于集合 E 的极限存在, 而且这个极限等于 $f(x_0)$:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} f(x) = f(x_0).$$

这等价于

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ x \in E}} \Delta y = 0,$$

其中 $\Delta x = x - x_0 (x \in E)$, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$; 也就是说, 自变量在 x_0 上的无穷小增量对应于函数的无穷小增量.

用序列的极限的术语来说, 函数在点 x_0 上的连续性的定义是: 函数 f 在 x_0 上是连续的, 如果对于每个趋向于 x_0 的点列 $x_n \in E$ $(n=1, 2, \cdots)$, 即 $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, 都有

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0).$$

所有这些关于函数在一点上连续的定义都是等价的.

如果函数 f 在点 x_0 上关于集合 $E \cap \{x: x \geqslant x_0\}$ (或 $E \cap \{x: x \leqslant x_0\}$) 是连续的, 则称函数 f 在点 x_0 上是右连续的 (或左连续的) (continuous on the right (or left) at x_0).

一切基本的**初等函数** (elementary functions) 在其定义域的所有点上都是连续的. 连续函数的一个重要性质是: 连续函数集合在算术运算以及函数的复合运算之下保持封闭. 更确切地说, 如果两个实值函数 $f: E \to \mathbf{R}$ 的 $g: E \to R (E \subset \mathbf{R})$ 在点 $x_0 \in E$ 上是连续的, 则它们的和 $f+g$, 差 $f-g$, 积 fg, 以及商 f/g ($g(x_0) \neq 0$, 这时, 它在集合 E 和 x_0 的某个邻域之交内显然有定义), 在 $x_0 \in E$ 上也是连续的. 如上所述, 如果函数 $f: E \to \mathbf{R}$ 在点 $x_0 \in E$ 上是连续的, 而函数 $\varphi: D \to \mathbf{R} (D \subset \mathbf{R})$ 满足 $\varphi(D) \subset E$, 因而合成 $f \circ \varphi$ 有意义, 并且存在点 $t_0 \in D$, 使得 $\varphi(t_0) = x_0$, 又函数 φ 在点 t_0 上是连续的, 则复合函数 $f \circ \varphi$ 在点 t_0 上也是连续的, 因此, 这时

$$\lim_{t \to t_0} f[\varphi(t)] = f\left[\lim_{t \to t_0} \varphi(t)\right] = f[\varphi(t_0)],$$

也就是说, 以这种意义下, 取极限的运算和应用于连续函数的运算可以交换次序. 由连续函数的这些性质可知, 不仅基本初等函数, 并且任意初等函数, 在其定义域内都是连续的. 在取一致收敛的极限过程中, 连续性也保持不变: 如果函数序列 $\{f_n\}$ 在集合 E 上一致收敛, 并且每个函数 f_n 在点 $x_0 \in E$ 上是连续的, 则极限函数

$$f = \lim_{n \to \infty} f_n$$

在点 x_0 上也是连续的.

如果函数 $f: E \to \mathbf{R}$ 在集合 E 的每一点上都是连续的, 则称 f 在集合 E 上是连续的 (continuous on the set E). 如果 $x_0 \in E_1 \subset E$, 函数 f 在点 x_0 上是连续的, 则函数 f 在集合 E_1 上的限制在点 x_0 上也是连续的. 反之, 一般不成立. 例如, **Dirichlet 函数** (Dirichlet function) 无论是在有理数集合上还是在无理数集合上的限制都是连续的, 但是, Dirichlet 函数本身在实数集合上是不连续的.

在区间上连续的函数, 是重要的一类单变量实值连续函数. 它们具有下列性质.

Weierstrass 第一定理 (Weierstrass first theorem): 在一个闭区间上连续的函数, 在这个区间上是有界的.

Weierstrass 第二定理 (Weierstrass second theorem): 在一个闭区间上连续的函数, 在这个区间上具有最大值和最小值.

Cauchy 介值定理 (Cauchy's intermediate value theorem): 在一个闭区间上连续的函数, 在这个区间上取两端点函数值之间的任何值.

反函数定理 (inverse function theorem): 在一个区间上连续的和严格单调的函数具有单值的反函数, 它也是定义在一个区间上, 并且在该区间上是连续的和严格单调的.

Cantor 定理 (关于一致连续性的) (Cantor theorem

(on uniform continuity)): 在一个闭区间上连续的函数,在这个区间上是一致连续的.

任何在一个闭区间上连续的函数,在这个区间上都能用代数多项式以任意精确度一致地逼近它. 在区间 $[0, 2\pi]$ 上连续的任何函数 f, 如果 $f(0)=f(2\pi)$, 则在 $[0, 2\pi]$ 上都能用三角多项式以任意精确度一致地逼近它(见关于函数逼近的 **Weierstrass 定理**(Weierstrass theorem)).

连续函数的概念可以推广到更一般的函数形式,首先是推广到多变量函数的情况. 如果把 E 理解为 n 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 的子集,把 $|x-x_0|$ 理解为两点 $x\in E$, $x_0\in E$ 之间的距离,把 $U(x_0, \delta)$ 理解为点 x_0 在 $\mathbf{R}^n$ 中的 δ 邻域, 把

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

理解为 $\mathbf{R}^n$ 中点列的极限,则连续函数的上述定义在形式上保持不变. 多个变量 $x_1,\cdots,x_n$ 的函数 $f: E\to\mathbf{R}$ $(E\subset\mathbf{R})$, 如果在点 $x_0=(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})\in E$ 上是连续的,那么也称为在点 x_0 上关于全体变量 $x_1,\cdots,x_n$ 同时是连续的. 这与对各个变量分别是连续的多变量函数是不同的. 函数 $f: E\to\mathbf{R}(E\subset\mathbf{R}^n)$ 称为在点 x_0 上,譬如说,对变量 x_1 是连续的,如果函数 f 在集合

$$E \cap \{x=(x_1, \ldots, x_n): x_2=x_2^{(0)}, \ldots, x_n=x_n^{(0)}\}$$

上的限制在点 $x_1^{(0)}$ 上是连续的,也就是说,如果单变量 x_1 的函数 $f(x_1, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})$ 在点 $x_1^{(0)}$ 上是连续的. 即使函数 $f: E\to\mathbf{R}(E\subset\mathbf{R}^n, n\geqslant 2)$ 在点 x 上分别对每个变量 $x_1,\cdots, x_n$ 都是连续的,那么在这一点上关于全体变量也未必是同时连续的.

连续函数的定义可以直接过渡到复值函数的情况. 只须把上面定义中的 $|f(x)-f(x_0)|$ 解释为复数 $f(x)-f(x_0)$ 的模,把

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

解释为复平面上的极限.

上面这些定义,都是以某一拓扑空间 X 为定义域,在某一拓扑空间 Y 中取值的更一般的连续函数 f 的概念的特例(见**连续映射**(continuous mapping)).

单变量实值函数的许多性质,都可推广到拓扑空间之间的连续映射的情况. 前面提到的Weierstrass 定理的推广为: 在 Hausdorff 空间中紧拓扑空间的连续象是紧的. 关于在闭区间上的连续函数的 Cauchy 介值定理的推广为: 在拓扑空间中连通子集的连续象也是连通的. 严格单调连续函数的反函数定理的推广为: 一个紧统到一个 Haustorff 空间上的连续一对一映射是一个同胚. 关于一致收敛的连续函数序列的极限的定理的推广为: 如果 $f_n: X\to Y$ 是拓扑空间 X 到度量空间 Y 的一致收敛的(在点 $x_0\in X$ 上)连续的序列,则极限映射 $f=\lim_{n\to\infty} f_n$ 也是连续的(在点 $x_0\in X$ 上). 关于在闭区间上连续的函数的逼近的 Weierstrass 定理的推广为 **Stone - Weierstrass 定理**(Stone -Weierstrass theorem).

参考文献

[1] Александров, П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977.

[2] Колмогоров, А. Н., Фомин, С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981 (中译本: A. H. 柯莫果洛夫, C. B. 佛明, 函数论与泛函分析初步, 高等教育出版社, 1958).

[3] Никольский, С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1-2, М., 1975 (英译本: Nikol'skiĭ, S. M., A course of mathematical analysis, 1-2, Mir, 1977).

[4] Ильин, В. А., Позняк, Э. Г., Основы математического анализа, 3 изд., ч. 1, М., 1971 (Il'in, V. A. and Poznyak, E. G., Fundamentals of mathematical ayalysis, 1-2, Mir, 1982).

Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】 上述论题几乎可在任何一本实分析引论中找到. 一切定理的证明,例如见[A5], 第三章.

参考文献

[A1] Apostol, T. M., Mathematical analysis, Addison-Wesley, 1957.

[A2] Bartle, R. G., The elements of real analysis, Wiley, 1976.

[A3] Hardy, G. H., A course of pure mathematics, Cambrige Univ. Press, 1975.

[A4] Rudin, W., Principles of mathematical analysis, Me-Graw-Hill, 1976.

[A5] Stromberg, K., An introduction to classical real analysis, Wadsworth, 1981.

[A6] Boas, R. P. jr., A primer of real functions, Math. Assoc. Amer., 1960.

张鸿林 译 蒋止新 校

连续泛函 [continuous functional; непрерывный функционал]

把拓扑空间 X(它通常也是向量空间)映射到 **R** 或 **C** 中的**连续算子**(continuous operator)(**连续映射**(contituous mapping)). 因此,对于任意算子的连续性定义和准则对于泛函仍保持成立. 例如,

1) 为使泛函 $f: M\to\mathbf{C}$(其中 M 是拓扑空间 X 的子集)在点 $x_0\in M$ 上连续,必须对于任何 $\varepsilon>0$, 存在 x_0 的邻域 U, 使得 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ 对于 $x\in U$ 成立(泛函的连续性定义);

2) 在分离拓扑向量空间的紧集上连续的泛函在该集合上有界, 且达到它的上、下确界(**Weierstrass 定理**(Weierstrass theorem));

3) 因为每个非零线性泛函把 Banach 空间 X 映射

为整个 **R** 或(**C**)．所以非零连续线性泛函是开映射，即任何开集 $G\subset X$ 的象是 **R**(或 **C**)的开集．

В. И. Соболев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Taylor, A. E. and Lay, D. C., Introduction to functional analysis, Wiley, 1980.

史树中 译

连续函数空间 [**continuous functions, space of; непрерывных функций пространство**]

由拓扑空间 X 上的有界连续函数 $f: X\to \mathbf{C}$ 所组成的、范数为 $\|f\|=\sup_{x\in X}|f(x)|$ 的赋范空间 $C(X)$．$C(X)$ 中的序列 f_n 的收敛意味着一致收敛．空间 $C(X)$ 是有单位元的交换 **Banach 代数** (Banach algebra)．如果 X 是紧的，那么每个连续函数 $f: X\to\mathbf{C}$ 是有界的，因而，空间 $C(X)$ 就是 X 上的所有连续函数的空间．

当 $X=[a,b]$ 是实数的闭区间时，$C(X)$ 由 $C[a,b]$ 来表示．按照关于连续函数可用多项式逼近的 **Weierstrass 定理** (Weierstrass theorem)，所有非负整数幂函数的集合 $1, x, x^2, \cdots$，是 $C[a,b]$ 中的完全系．(这意味着这些幂函数的线性组合，即多项式，在 $C[a,b]$ 中处处稠密．) 因此，$C[a,b]$ 是可分的；它也具有基，例如，函数的 **Faber-Schauder 系** (Faber-Schauder system) 就形成 $C[a,b]$ 中的基．在 $C[a,b]$ 中的紧性准则是由对应的 Arzelá 定理 (Arzelá theorem) 给出的：为使函数 $f\in C[a,b]$ 的某个族在 $C[a,b]$ 中是相对紧的，其充要条件为这个族一致有界和等度连续．这条定理可推广到一个度量紧统 X 到另一个度量紧统 Y 的连续映射的度量空间 $C(X,Y)$ 的情形．为使空间 $C(X,Y)$ 的一个闭集 A 是紧的，其充分必要条件为 A 中的映射是等度连续的．空间 $C(X,Y)$ 中两个映射 f 和 g 间的距离由下式给出：

$$\rho(f,g)=\sup_{x\in X}\rho(f(x),g(x)).$$

参考文献

[1] Александров, П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977 (中译本：П. С. 亚历山大罗夫，集与函数的泛论初阶，上册，商务印书馆，1954；下册，高等教育出版社，1955).

[2] Колмогоров, А. Н., Фомин, С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981 (中译本：A. H. 柯尔莫哥洛夫，C. B. 佛明，函数论与泛函分析初步，卷一，高等教育出版社，1958).

Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】 Arzelá 定理也称为关于紧度量空间 X 上的函数的 Ascoli-Arzelá 定理 (Ascoli-Arzelá theorem)．$C(X)$ 中的函数序列 $\{f_n\}$ 是相对紧的 (relatively compact) (即集合 $\{f_n\}$ 的闭包是紧的)，只要该序列是一致有界的 (也称作等度有界的 (equibounded))，即 $\sup_n\sup_x|f_n(x)|<\infty$，以及是(按 n)等度连续的，即

$$\lim_{\delta\to 0}\sup_{\substack{n,\\ \operatorname{dist}(x,x')<\delta}}|f_n(x)-f_n(x')|=0.$$

参考文献

[A1] Bourbaki, N., Elements of mathematics. General topology, Addison-Wesley, 1966, Chap. 10 (译自法文).

[A2] Yosida, K., Functional analysis, Springer, 1978 (中译本：吉田耕作，泛函分析，人民教育出版社，1980).

[A3] Vulikh, B. Z., Introduction to functional analysis, Pergamon, 1963 (译自俄文).

史树中 译

连续函子 [**continuous functor; непрерывный функтор**]

"与极限可交换的函子"的概念的同义词．设 $\mathfrak{K}$ 与 $\mathfrak{C}$ 为有极限的范畴．一个 1 位共变函子 $F_1\ \mathfrak{K}\to\mathfrak{C}$ 称为连续的 (continuous)，如果对于任何图 $J:\mathfrak{D}\to\mathfrak{K}$ 都有 $F(\lim J)=\lim JF$．这里的 $\mathfrak{D}$ 是一个任意的小图概形．更具体地，上述等式的意义如下：如果 $(A;\mu_D, D\in\mathfrak{D})$ 是图 J 的极限，而 $\mu_D: A\to J(D)$ $(D\in \mathrm{Ob}\ \mathfrak{D})$ 是出现在极限定义中的态射，那么 $(F(A);\ F(\mu_D),\ D\in \mathrm{Ob}\ \mathfrak{D})$ 是图 $JF:\mathfrak{D}\to\mathfrak{C}$ 的极限．

一个函子 $F:\mathfrak{K}\to\mathfrak{C}$ 是连续的，当且仅当它与任意一族对象之积可交换，也可与任何态射对的核可交换．从 $\mathfrak{K}$ 到集合的范畴的每个基本函子 $H_A(X)=H_{\mathfrak{K}}(A,X)$ 都是连续的．

М. Ш. Цаленко 撰

【补注】

参考文献

[A1] MacLane, S., Categories for the working mathematician, Springer, 1971.

周伯埙 译

连续群 [**continuous group; непрерывная группа**]

空间 $\mathbf{R}^n$ 或 $\mathbf{C}^n$ 上一些光滑或解析变换构成的群，这些变换光滑地或解析地依赖于一些参数．在 Lie 群理论的基础工作 (S. Lie, H. Poincaré, E. Cartan, H. Weyl 和其他人) 中考虑的就是这种连续群．当所依赖的参数只有有限多个时，连续群称为有限的，它对应的近代概念为有限维 **Lie 群** (Lie group)．当参数表现为函数时，就称之为无限连续群，它对应的近代概念为变换**伪群** (pseudo-group)．当前 (1988) "连续群"这个术语常指**拓扑群** (topological group) ([2])．

参考文献

[1] Lie, S. and Scheffers, G., Vorlesungen über Transformationsgruppen, Teubner, 1893.

[2] Понтрягин, Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973 (中译本：Л. С. 邦德列雅金，连续群(上、下)，科学出版社，1978).

[3] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Lie groups and Lie algebras, Addison-Wesley, 1975 (译自法文).

А Л Онищик 撰　许以超 译　石生明 校

连续格 [**continuous lattice**; **непрерывная решетка**]

【补注】 一种类型的**完全格** (complete lattice), 最初是 D. S. Scott 以这个名称对它进行研究的 ([A1], [A2]), 它的例子见于代数、分析和拓扑的许多领域. 连续格通常是借一个辅助关系来定义, 那是一个可以定义在任何完全格 A 中的各向低于关系 (way-below relation). 称元素 b 各向低于元素 a (记作 $b \ll a$), 如果对 A 的任一具有 $\sup S \geqslant a$ 的有向子集 S, 总有 $s \in S$, 使得 $s \geqslant b$. 所有各向低于 a 的元素组成一个理想 $\Downarrow(a)$ (实际上是所有满足 $\sup I \geqslant a$ 的理想 I 之交); 若对于每个 $a \in A$ 都有 $\sup \Downarrow(a) = a$, 就称 A 是连续的. 因此, 连续格是一个**偏序集** (partially ordered set), 其中每个子集都有上确界, 并且, 每个元素都是所有各向低于它的元素的上确界. 完全格中的元素 a, 当且仅当 $a \ll a$ 时, 才是紧的 (compact), 或有限的 (finite); 由此得出**代数格** (algebraic lattice) 是连续的, 事实上, 连续格可以刻画作代数格在保持有向上确界的映射下的收缩核. 连续格还可以用方程的形式来刻画: 它们正是那些满足如下的完全分配律

$$\inf_{i \in I} \sup_{j \in J_i} a_{i,j} = \sup_{f \in F} \inf_{i \in I} a_{i, f(i)}$$

(其中 F 是由选择函数 $I \to \bigcup_{i \in I} J_i$ 所构成的集合) 的完全格, 这里集合 $\{a_{i,j} : j \in J_i\}$ 对每个 i 都是 (上) 有向的. 特别地, **完全分配格** (completely distributive lattice) 是连续的; 反之, 可以证明, 如果 A 是 (有限) 分配完全格, 并且 A 与 A^{op} 都是连续的, 则 A 是完全分配的.

若 L_1 和 L_2 都是连续格, 则由所有从 L_1 到 L_2, 且保持上有向集的上确界的函数组成的集合 $[L_1, L_2]$, 关于点态偏序是个连续格. 连续格与这种函数组成的范畴, 是个 Descartes 闭范畴 (Cartesian closed category) (见**闭范畴** (closed category)).

在连续格的研究中, 有两种重要的内涵拓扑. 一个完全格 A 上的 Scott 拓扑 (Scott topology), 是以这种 $U \subseteq A$ 作为它的开集, 即 U 是上集 (upper set) (由 $a \in U$ 与 $a \leqslant b$ 可得 $b \in U$), 并且 U 不被有向上确界所进入 (由 S 是有向的与 $\sup S \in U$, 可得 $S \cap U \neq \phi$). 二完全格之间的函数, 在 Scott 拓扑下是连续的, 当且仅当它保持有向上确界; 因此, A 的 Scott 开子集正是那些以 Scott 连续映射 $A \to \{0, 1\}$ 为特征函数的子集. 赋以 Scott 拓扑的连续格, 正是在 T_0 拓扑空间**范畴** (category) 中的内射对象 (关于子空间的包含, 见**内射对象** (injective object)) ([A1]); 这又等价于: 它们是 Sierpinski 空间 (Sierpinski space) (赋以 Scott 拓扑的二元格 $\{0, 1\}$) 的幂的收缩核. 第二种内涵拓扑, 即 Lawson 拓扑 (Lawson topology), 它的开集子基为 Scott 开集和主滤子 (即集合 $\{b \in A: b \geqslant a\}$, $a \in A$) 的余集. 这是个 Hausdorff 拓扑 (不同于 Scott 拓扑), 且又是紧拓扑, 在此拓扑下, 二元交运算 $A \times A \to A$ 是连续的; 此外, 具有 Lawson 拓扑的连续格可以刻画作那样的紧 Hausdorff 拓扑交半格, 即对它们映于单位区间 $[0, 1]$ 内的同态所成的连续半格能把点分开 (这种半格有时称作 (紧) Lawson 半格 (Lawson semi-lattice)) ([A2], [A3]). 由此又得到连续格的另一个纯格论的刻画: 除同构不计外, 它们是 $[0, 1]$ 的幂集中的这种子集, 即关于有向上确界与任意下确界是封闭的.

在由**拓扑空间** (topological space) 的所有开集所成的格中, 容易见到, 若存在一紧集 K, 使得 $U \subseteq K \subseteq V$, 则有关系 $U \ll V$ 成立; 由此得知一个**局部紧空间** (locally compact space) (或者局部拟紧空间) 中的开集格是连续的. 反之, (有限) 分配的连续格正是局部紧拓扑空间中的开集所成的格 ([A4]). 局部紧空间中开集格的连续性, 与函数空间的良好性质密切相关, 对于后者, 要求定义域空间是局部紧的 ([A5], [A6]).

通过自然态射 $[L, L] \to L$ 的迭代和使用反向极限的构造, Scott 把任一连续格嵌入一个连续格 D_∞, 后者自然同构于 $[D_\infty, D_\infty]$. 于是在这种连续格 D_∞ 中的每个元素 f 可作为定义域的一个自映射, 倘若自映射是范畴中的态射, 则逆定理也成立. 作为一个推论, $f(f)$ 型的自作用得以有效地定义. 因此, 连续格 D_∞ 都是 λ 演算 (λ-calculus) 的模型.

连续格概念的一个推广是连续前有序集的概念 ([A7]). 进一步推广到连续范畴 (continuous categories), 也已经被研究 ([A8]). 定义连续前有序集 (continuous poset), 是在连续格的定义中, 以较弱的假定: "所有的非空上有向集有上确界, 以及所有的集合 $\{x : x \ll y\}$ 都是上有向的", 来代替 L 中所有子集都有上确界这一要求.

对于连续前有序集, 有 **Понтрягин 对偶** (Pontryagin duality) 性型理论. Hausdorff 空间 X 中, 由开子集所成的格 $\mathscr{O}(X)$, 当且仅当 X 是局部紧时, 才是个连续格. 在这种情形下, 它的 Понтрягин 对偶是由紧子集所成的集合, 并且以集合的反向包含作为序关系.

范围 (domain) 是一个连续前有序集, 在其中, 首先, 每个元素都是紧元的上确界, 其次, 存在可数多个紧元, 最后, 每个有上界的集合都有上确界. 范围在高级程序语言的语义学中有应用; 这方面的介绍可见 [A14] 与 [A15].

连续格理论的一个详细论述由 [A9] 给出, 一个较精简的介绍载于 [A10] 的第七章. 文献 [A11] 讨论这一内容的某些新近的发展, 并且包含直到 1985 年为止有关连续格的大量文献.

连续格是 Dana S. Scott 所引入的 ([A1], [A12]),

用来作为计算的一个抽象理论的基础，利用这个理论，使得一个"计算"通过"有限逼近"来逐步逼近.

不应当把连续格与连续几何(continuous geometries)相混淆，后者是一类全然不同的完全格. 关于连续几何的概念，见**正交模格**(orthomodular lattice).

参考文献

[A1] Scott, D. S., Continuous lattices, in Toposes, algebraic geometry and logic, *Lecture Notes in Math.*, Springer, **274** (1972), 97–136.

[A2] Lawson, J. D., Topological semilattices with small semilattices, *J. Lond. Math. Soc.* (2), **1** (1969), 719–724.

[A3] Hofmann, K. H. and Siralka, A. R., The algebraic theory of Lawson semilattices, *Diss. Math.*, **137** (1976), 1–54.

[A4] Hofmann, K. H. and Lawson, J. D., The spectral theory of distributive continuous lattices, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **246** (1978), 285–310.

[A5] Day, B. J. and Kelly, G. M., On topological quotient maps preserved by pullbacks or products, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **67** (1970), 553–558.

[A6] Isbell, J. R., General function spaces, products and continuous lattices, *Math. Proc. Cambridge Philos Soc.*, **100** (1986), 193–205.

[A7] Markowsky, G., A motivation and generalization of Scott's notion of a continuous lattice in Continuous lattices, Lecture Notes in Math., **871** (1981), 298–307.

[A8] Johnstone, P. T. and Joyal, A., Continuous categories and exponentiable toposes, *J. Pure Appl. Alg.*, **25** (1982), 255–296.

[A9] Gierz, G., Hofmann, K. H., Keimel, K., Lawson, J. D., Mislove, M. and Scott, D. S., A compendium of continuous lattices, Springer, 1980.

[A10] Johnstone, P. J., Stone spaces, Cambridge Univ. Press, 1982.

[A11] Hoffmann, R. E. and Hofmann, K. H. (eds.), Continuous lattices and their applications, Dekker, 1985.

[A12] Scott, D. S., Outline of a mathematical theory of computation, in Proc. 4-th Annual Princeton Conf. on Information Sci. and Systems, Princeton Univ. Press, 1970, 169–176.

[A13] Banaschewski, B. and Hoffmann, R. E (eds.), Continuous lattices, Lect. Notes in Math. 871, Springer, 1981.

[A14] Schmidt, D., Denotational semantics, An Introduction, Allyn & Bacon, 1986.

[A15] Stoy, J. E., Denotational semantics, The Scott-Strachey approach to programming language theory, MIT, 1979.

戴执中 译

连续映射[**continuous mapping; непрерывное отображение**]

从拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 中的映射 $f:X\to Y$，使对任一点 $x_0\in X$ 和它的象 $f(x_0)$ 的任一邻域 $V=V(f(x_0))$，存在 x_0 的邻域 $U=U(x_0)$，使 $f(U)\subset V$. 这个定义是实值函数连续性的邻域定义的另一种说法(见**连续函数**(continuous function)). 有很多连续性的等价定义. 例如，映射 $f:X\to Y$ 是连续的，当且仅当下列条件之一成立:

a) Y 中任一开集 G 的原象 $f^{-1}(G)$ 是 X 中的开集.

b) Y 中任一闭集 F 的原象 $f^{-1}(F)$ 是 X 中的闭集.

c) 对任一集合 $A\subset X$, $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$ (闭包的象包含在象的闭包中).

连续函数的概念，早已由B. Bolzano和A. L. Cauchy作过精确叙述，并在19世纪数学中起着重要作用. 无处可微的Weierstrass函数，"Cantor阶梯"以及Peano曲线指出必须讨论连续性的更特殊情形. 当考虑更一般对象——拓扑空间——的连续映射时，选择特殊类型的映射的必要性变得更为迫切. 人们会提到下列重要类型的连续映射: 拓扑映射或**同胚**(homeomorphism), **完满映射**(perfect mapping), **闭映射**(closed mapping), **开映射**(open mapping), **商映射**(quotient mapping). 若 $f:X\to Y$ 和 $g:Y\to Z$ 是两个连续映射，则它们的复合 $g\circ f:X\to Z$，即映射 $X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}Z$ 也是连续的. 任一恒等映射 $I_X:X\to X$ 显然是连续的. 于是，拓扑空间和连续映射构成一个范畴.

拓扑学的目的之一是对空间和映射分类: 它的本质在于下面所精选的三个有密切联系的基本问题: 1) 在什么情况下，某个确定类 $\mathscr{A}$ 的每个空间，在属于类 $\mathscr{L}$ 的连续映射下能够被映射为类 $\mathscr{B}$ 中的某个空间? 2) 由什么内在的性质能够刻画属于类 MC 的空间，该空间是包含在类 M 的连续映射下类 C 中的空间的象? 3) 设 $\mathrm{Hom}(\mathscr{A},\mathscr{B})$ 是连续映射集，它们的定义域是类 $\mathscr{A}$ 中的空间，而值域是类 $\mathscr{B}$ 中的空间，且设 $\mathscr{L}$ 是另一类映射. 类 $\mathrm{Hom}(\mathscr{A},\mathscr{B})\cap\mathscr{L}$ 的映射具有哪些性质?

特别地，这些一般叙述包含下列问题. 在一类或另一类映射下，从一个空间变换到它的象或它的原象时，哪些拓扑性质保持不变? 1) 任一 n 维空间(在维数 dim 的意义下)能本质地映射到 n 维立方体上(见**本质映射**(essential mapping)). 2) 点态可数基在完满(甚至在双因子)映射下被保持. 3) 设 $\mathscr{A}$ 是具有可数基的零维空间类，$\mathscr{B}$ 是具有可数基的 n 维空间类，则类 $\mathrm{Hom}(\mathscr{A},\mathscr{B})$ 中每个闭映射 f 至少是 $(n+1)$ 重的.

这类的第一个特定问题早在半个多世纪以前就解决了. 例如，任意紧统都可表示为Cantor完满集的连续象(Александров 定理(Aleksandrov theorem)); 具有可数基的度量空间被刻画为无理数空间的子空间的开连续象(Hausdorff 定理(Hausdorff theorem));

局部连通连续统被描述为一个区间的连续象．这些问题的解决，不仅回答了一些熟知空间之间的相互关系问题，而且也导致一些有趣的新空间类的出现．例如，二进紧统、仿紧 p 空间，完满 n 维空间及伪紧空间．

作为函数论基础的实值连续函数，即从拓扑空间到 **R** 的连续映射的概念，在一般拓扑学里也起着重要作用．这里首先必须提到的是 **Урысон 引理**（Urysohn lemma）、关于从正规空间的闭子集的连续函数扩张的 Brouwer - Урысон 定理（Brouwer - Urysohn theorem），**完全正则空间**（completely - regular space）的 A. H. Тихонов 定义，和 **Stone-Weierstrass 定理**（Stone - Weierstrass theorem）．这些研究和其他研究开创了连续函数环的理论，它的方法在一般拓扑学中已变得十分丰富．

维数理论的本质部分是通过一类或另一类映射，变换到象或原象时空间的维数特征的性状的研究．其中，ε 位移、ε 映射、ω 映射、本质映射、有限对多重映射、可数对多重映射、零维映射、n 维映射等起着重要作用．这里，连续映射的方法导致了出发点完全不同的一般拓扑领域之间的相互充实和相互联系．诸如具有直观几何意义的维数理论和抽象特征的基数不变量理论．

维数的特征之一是从闭子集到 n 维球的连续映射扩张的可能性．这是映射扩张定理的变形之一，如同和它紧密联系的不动点定理一样，在现代数学的各分支，诸如拓扑、代数、函数论、泛函分析和微分方程中是极其重要的．

研究得最好的连续映射类型之一是**完满不可约映射**（perfect irreducible mapping）．正则空间的**绝对形**（absolute）上的定理刺激了这个领域里研究的整个进程．特别地，绝对形的概念已扩张到所有 Hausdorff 空间类．和连续映射的概念密切相关，出现了 θ 邻近的概念，它能给出任意紧统的所有完满连续原象的内在描述．不可约连续映射理论到所有 Hausdorff 空间类的推广，说明连续映射对非正则空间的研究是不适当的，而在这个情形下考虑 θ 连续映射更为自然．

从所有单变量或多变量的数值函数类中选择一致连续函数成为导致**一致拓扑**（uniform topology）概念的研究的一个起点．

某类连续映射成为收缩核、样条和（下）同调论的理论基础．**多值映射**（multi - valued mapping）理论的各个方面在现代数学中起着主要的作用．有关 Euclid 空间的连续映射的一些问题由于它们包含了丰富的思想而引人入胜．

参考文献

[1] Александров, П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977.

[2] Bourbaki, N., Elements of mathematics, General topology, Addison - Wesley, 1966（译自法文）.

[3] Kelley, J. L., General topology, Springer, 1975（中译本：J. L. 凯莱，一般拓扑学，科学出版社，1982）.

[4] Архангельский, А. В., Пономарев, В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974（英译本：Arkhangel'skiĭ, A. V. and Ponomarev, V. I., Fundamentals of general topology: problems and exercises, Reidel, 1984）.

[5] Александрян, Р. А., Мирзаханян, Э. А., Общая топология, М., 1979.

В. В. Федорчук 撰

【补注】一个映射称为 n **重的**（n - fold），如果它的每个纤维最多有 n 个值（即最多由 n 个点组成）．

上面提到的 Brouwer - Урысон **定理**（Brouwer-Urysohn theorem）一般称为 Tietze - Урысон **定理**（Tietze - Urysohn theorem）．关于度量空间是 H. Tietze 证明的，关于正规空间是 П. С. Урысон 证明的．

局部连通连续统是单位区间的连续象这一陈述，通常称为 Hahn - Mazurkiewicz **定理**（Hahn - Mazurkiewicz theorem）．

关于连续函数环更多的内容在 [A1] 中可以找到．

参考文献

[A1] Gillman, L. and Jerison, M., Rings of continuous functions, V. Nostrand - Reinhold, 1960.

方嘉琳 译

连续算子 [continuous operator; непрерывный оператор]

一个拓扑空间 X（一般说来它也是向量空间）的子集 M 到一个同样类型的空间 Y 中的连续映射 A，明确地说，一个映射 $A: M \to Y (M \subset X)$，在点 $x_0 \in M$ 处是连续的，指对于点 Ax_0 的任何邻域 $V \subset Y$，有 x_0 的邻域 $U \subset X$，使得 $A(M \cap U) \subset V$；一个映射 $A: M \to Y$ 在集合 M 上是连续的指它在 M 的每个点处是连续的．

为了一个算子 $A: M \to Y$ 在 M 上是连续的，必须且只须，对于每个开（闭）集 $H \subset Y$，完全逆象 $A^{-1}(H)$ 是合 X 中一个开（闭）集在 M 上的迹，即 $A^{-1}(H) = M \cap G$，这里 G 是 X 中的开（闭）集．对于连续算子，链法则成立：设 $A: M \to Y (M \subset X)$ 在 M 上（或在 $x_0 \in M$ 处）是连续的，又设 $B: N \to Z (N \subset Y)$ 在 N 上（或在 $y_0 \in N$ 处）是连续的．如果 $Q = M \cap A^{-1}(N)$ 是非空的（或 $y_0 = Ax_0$），那么 $B \circ A$ 在 Q 上（或在 x_0 处）是连续的．

当 X 与 Y 是拓扑向量空间，A 是一个定义于线性子空间 $L \subset X$ 上且取值于 Y 中的线性连续算子时，那么 A 在 L 的某个点（例如原点）的连续性蕴涵 A 在整个 L 上的连续性．在拓扑向量空间 X 的一个子流形 L 上的连续算子在 L 上是有界的，即任何有界集 $N \subset L$ 的象在 Y 中是有界的．如果 X 与 Y 是可分的，那么 N 的紧性蕴涵 $A(N)$ 的紧性．

一个算子 A 在 M 上是一致连续的(uniformly continuous),指对于原点的任何邻域 $V\subset Y$, 存在原点的一个邻域 $U\subset X$, 使得 $x-y\in U$ 蕴涵 $Ax-Ay\in V$. 在拓扑向量空间的一个线性子流形上的线性连续算子必在这个子流形上是一致连续的.

除了连续性之外,还引入一个算子的可数连续性的概念. 一个算子 A: $M\to Y$ 在 $x_0\in M$ 处是可数连续的(countably continuous), 指对于任何序列 $x_n\to x_0$, $\{x_n\}\subset M$, 有 $Ax_n\to Ax_0$. 对于可度量化的空间,连续性与可数连续性一致.

参考文献

[1] Колмогоров, А. Н., Фомин, С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981 (中译本: A. H. 柯尔莫戈罗夫, C. B. 福明, 函数论与泛函分析初步, 高等教育出版社, 1957).

[2] Канторович, Л. В., Акилов, Г. И., Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977 (中译本: Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, 泛函分析, 高等教育出版社, 上下册, 1982).

В. И. Соболев 撰

【补注】 在西方文献中,倾向于把术语"算子"保留为向量空间之间的一个映射. 见[A1], [A2].

参考文献

[A1] Dunford, N. and Schwartz, J. T., Linear operators, General theory, 1, Interscience, 1958.

[A2] Taylor, A. E. and Lay, D. C., Introduction to functional analysis, Wiley, 1980.

李炳仁 译 王声望 校

连续表示[continuous representation; непрерывное представление]

拓扑群(半群、代数) X 在拓扑向量空间 E 中的线性表示 π, 使得 $E\times X$ 到 E 内的映射 $\varphi:(\xi,x)\to\pi(x)\xi$ ($\forall\ \xi\in E,\ x\in X$) 是连续映射. 若映射 φ 关于 ξ 及 x 分别为连续的, 那么在某些情形(例如, 当 X 为局部紧群, 而 E 为 Banach 空间时), φ 自动地关于 (ξ,x) 为连续映射, 所以 π 为连续表示.

А. И. Штерн 撰

【补注】

参考文献

[A1] Warner, G., Harmonic analysis on semi-simple Lie groups, 1, Springer, 1972.

许以超 译 石生明 校

连续截面 [continuous section; непрерывное сечение]

拓扑空间 X 到 Y 的连续映射 $f: X\to Y$ 的象 $f(X)$ 上的一个连续映射 $h: f(X)\to X$, 使得 $f\circ h$ 是 $f(X)$ 上的恒等映射.

М. И. Войцеховский 撰 罗嵩龄、许依群、徐定宥 译

表示的连续系列[continuous series of representations; непрерывная серия представлений], 表示的主系列(principal series of representations)

出现在局部紧群 G 的**正则表示**(regular representation)分解中, 但不属于该群的**表示的离散系列**(discrete series of representations)的不可约酉表示族. 如果 G 为实半单 Lie 群, $G=KAN$ 为 G 的**岩沢分解**(Iwasawa decomposition), M 为 K 中 A 的中心化子, 则 G 的表示的非退化连续主系列是由群 $B=MAN$ 的在 N 上平凡的有限维不可约酉表示诱导的不可约酉表示族.

表示的补(或退化)连续系列: 局部紧群 G 的出现在**表示的补系列**(complementary series of representations)(或**表示的退化系列**(degenerate series of representations))中, 且不是孤立点(作为 G 的对偶空间中的子集)的不可约酉表示族构成表示的补(或退化)连续系列. 表示的非退化连续主系列的解析开拓是由 B 的所有可能的在 N 上平凡的有限维不可约表示所诱导的 G 的表示族(一般而言,非酉表示). 这个族在实半单 Lie 代数的表示论和这类群上的调和分析中扮演了决定性的角色;特别, G 在 Hilbert 空间中的任意完全不可约表示无穷小地等价于表示的非退化连续主系列的解析开拓的表示之一的某个商表示的子表示. 亦见 Lie 群的**无穷维表示**(infinite-dimensional representation).

参考文献

[1] Гельфанд, И. М., Наймарк, М. А., Унитарные представления классических групп, М.-Л., 1950.

[2] Кириллов, А. А., Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978 (英译本: Kirillov, A. A., Elements of the theory of representations, Springer, 1976).

[3] Warner, G., Harmonic analysis on semi-simple Lie group, 1-2, Springer, 1972.

А. И. Штерн 撰

【补注】 在西方文献中,常常用主系列这个术语来代替非退化连续主系列. 注意上面的 $B=MAN$ 是极小抛物子群(minimal parabolic subgroup). 有时也说(广义)主系列表示为: 设 G 为连通半单矩阵群, $P\subseteq G$ 为尖顶(不必极小)抛物子群, 取定 Langlands 分解(Langlands decomposition) $P=MAN$, 其中 N 为幂么根基, A 为向量群. 设 δ 为 M 的离散系列表示, ν 为 A 的(非酉)特征标. 诱导表示

$$\operatorname{Ind}_P^G(\delta\otimes\nu\otimes 1)\ (\text{正规归纳})$$

称为广义主系列表示(generalized principal series representation). 当 ν 为酉的, 这些表示在 G 的 Harish-Chandra 的 Plancherel 公式(Plancherel formula)中出现. 上面一段末尾中提到的结果通常称为子商定理(subquotient theorem): G 的任何不可约可容许表示能标准地实现为一个广义主系列表示的子商.

参考文献

[A1] Knopp, A. W., Representation of semisimple groups,

Princeton Univ. Press, 1986.

[A2] Vogan, jr. D. A., Representations of real reductive Lie groups, Birkhäuser, 1981.

许以超 译　石生明 校

连续集 [continuous set; непрерывное множество]

(全)**序集** (ordered set) X, 它的每个真分割都是 Dedekind **分割**(Dedekind cuts), 即任何一个把 X 分成两个非空子集 X_1 和 X_2 的分割, 只要 X_1 的每个元素都小于 X_2 的每个元素, 则或者是 X_1 有一个极大元而 X_2 无极小元, 或者是 X_1 无极大元但 X_2 有一个极小元.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 于是连续集是**条件完全格** (conditionally - complete lattice), 它是稠密全序. 在西方文献中, 不使用"连续集"这个词.

戴执中 译

连续统 [continuum; континуум]

非空连通紧 Hausdorff 空间 (见**紧空间** (compact space)). 一个连续统称为蜕化的, 如果它是由一点组成的. 可度量化连续统类是特别重要的. 连续统的例子有: 闭线段, 圆, 凸多胞形等. Hausdorff 紧统 (X,ρ) (即具有度量 ρ 的可度量化紧统) 是连续统当且仅当对每一对点 $a,b\in X$ 及任意 $\varepsilon>0$, 存在连接这些点的有限 ε 链, 即 X 中的点列 $\{x_n\}_{n=1}^{k}$ 使 $x_1=a, x_k=b$ 且 $\rho(x_n,x_{n+1})<\varepsilon$. 具有一个公共点的两个连续统的并是连续统. 连续统的拓扑积是连续统, 连续统的连续象是连续统, Hausdorff 紧统的连通分支是连续统, 连续统的递减序列的交是连续统. 连续统不能分解为非空不相交闭集的可数并 (Sierpiński 定理 (Sierpiński theorem)).

每一局部连通度量连续统是闭区间的连续象 (Hahn - Mazurkeiwicz 定理 (Hahn - Mazurkeiwicz theorem)). 非蜕化的连续统在它的两点间是不可约的 (irreducible), 如果没有真子连续统包含这两点. 任意两点间不可约的连续统称为不可约连续统 (irreducible continuum). 每个局部连通不可约连续统是简单弧, 即同胚于区间.

一个不可约连续统称为不可分解的 (indecomposable), 如果它不能表示为两个真子连续统的和; 称为遗传不可分解的 (hereditarily indecomposable), 如果此连续统本身及它的所有子连续统都是不可分解的. 连续统是不可分解的, 当且仅当它含有三点, 使它们在任二者之间是不可约的; 所有遗传不可分解可度量化连续统是同胚的.

参考文献

[1] Kuratowski, K. Topology, 2, Acad. Press, 1968 (译自法文).

П. С. Александров, Л. Г. Замбахидзе 撰　方嘉琳 译

连续统的基数 [continuum, cardinality of the; континуума мощность]

基数(cardinal number) $\mathfrak{c}=2^{\aleph}$, 即自然数集的所有子集所组成的集合之基数. 下述集合具有连续统的基数: 1) 所有实数的集合 $\mathbf{R}$; 2) 区间 $(0,1)$ 中所有点的集合; 3) 上述区间中所有无理数的集合; 4) 空间 $\mathbf{R}^n$ 的所有点的集合, 其中 n 是一正整数; 5) 所有超越数的集合; 6) 实变量的所有连续函数的集合. 连续统的基数不能被表示为较小基数的可数和. 对于满足 $2\leqslant\alpha\leqslant\mathfrak{c}$ 的任一基数 α, 有

$$\alpha^{\aleph_0}=\mathfrak{c}.$$

特别地, 有

$$2^{\aleph_0}=3^{\aleph_0}=\cdots=\aleph_0^{\aleph_0}=\aleph_1^{\aleph_0}=\mathfrak{c}^{\aleph_0}=\mathfrak{c}.$$

连续统假设 (continuum hypothesis) 陈述为: 连续统的基数是第一个不可数的基数, 亦即

$$\mathfrak{c}=\aleph_1.$$

参考文献

[1] Kuratowski, K. and Mostowski, A., Set theory, North - Holland, 1968.

Б. А. Ефимов 撰　张锦文 译

连续统假设 [continuum hypothesis; континуум - гипотеза]

由 G. Cantor (1878) 提出的一个假设, 是说连续统 $\mathbf{R}$ 的每个无穷子集或者与自然数集对等或者与 $\mathbf{R}$ 自身对等. 一个等价的陈述是 (使用**选择公理** (axiom of choice)):

$$2^{\aleph_0}=\aleph_1$$

(见**阿列夫** (aleph)). 把这一等式推广到任意基数上就得到所谓广义连续统假设 (generalized continuum hypothesis): 对任意序数 α, 都有

$$2^{\aleph_\alpha}=\aleph_{\alpha+1}. \qquad (1)$$

如果不用选择公理, 广义连续统假设就陈述为下列形式:

$$\forall k\,\neg\exists m\,(k<m<2^k), \qquad (2)$$

其中 k,m 表示无穷基数. 由式 (2) 可推出选择公理和式 (1), 而式 (1) 和选择公理也蕴涵式 (2).

在 D. Hilbert 提出的一系列著名问题中, 第一个问题就是证明 Cantor 连续统假设 (连续统问题 (problem of the continuum)). 在传统的集合论方法的框架中没有解决这个问题. 一些数学家们确信连续统问题在原则上是不可解的. 只有在发现将数学概念归结为集合论概念的方法之后, 只有在阐明用集合论语言

叙述的而且可以作为现实生活中遇到的数学证明基础的公理之后，只有把逻辑推演方法形式化之后，才能给出一个精确的命题，然后来解决连续统假设的形式不可解性的问题．形式不可解性应理解为：在 Zermelo-Fraenkel 系统 ZF 中既不存在连续统假设的推演，也不存在它的否定式的推演．

假定 ZF 系统是相容的，K. Gödel 在 1939 年建立了广义连续统假设的否定式在加选择公理的 ZF 系统(ZFC 系统)中的不可证明性(**Gödel 构造集** (Gödel constructive set))．假定 ZF 系统是相容的，P. Cohen 在 1963 年证明了不能从 ZFC 公理系统推出连续统假设(从而也不能推出广义连续统假设)(见**力迫法** (forcing method))．

这些关于连续统问题的结果是最终的吗？这个问题的回答依赖于对 ZF 系统相容性的认识，更重要的是，依赖于对下述经验事实的认识，即每一种有意义的数学证明(传统经典数学的)一旦出现，就都能在 ZFC 系统中充分地表示．这个事实不能证明，甚至也不能精确描述，这是由于每次修正都会引起涉及该修正的充分性的类似问题．

用模型论语言来说，Gödel 和 Cohen 构造的 ZFC 的模型中有

$$2^k = \begin{cases} m & \text{若 } k<m, \\ k^+ & \text{若 } k \geqslant m, \end{cases}$$

其中 m 是预先给定的任意的不可数正则基数，k^+ 是第一个比 k 大的基数．在 ZFC 的不同模型中函数 2^k 的可能的性质是什么呢？

众所周知，对于正则基数 k，这个函数只需满足下列条件

$$k \leqslant k' \to 2^k \leqslant 2^{k'}, \quad k < \mathrm{cf}(2^k),$$

其中 $\mathrm{cf}(m)$ 是与 m 共尾的最小的**基数** (cardinal number)．对于奇异(即非正则)基数 k，函数 2^k 的值依赖于它在较小基数处的性质．例如，若对每一 $\alpha<\omega_1$ 式(1)都成立，则它对 $\alpha=\omega_1$ 也成立．

参考文献

[1] Cohen, P. J., Set theory and continuum hepothesis, Benjamin, 1966.

[2] Baumgartner, J. E. and Prikry, K., Singular cardinals and the generalized continuum hypothesis, *Amer. Math Monthly.*, **84** (1977), 2, 108－113.

В. Н Грицин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Jech, T., Set theory, Acad. Press, 1978.

[A2] Kunen, K., Set theory, An introduction to independence proofs, North - Holland, 1980.

张锦文，赵希顺 译

围道积分法 [**contour integration, method of; контурного интегрирования метод**]

见**复积分法** (complex integration, method of)．

压缩映射原理 [**contracting - mapping principle; сжимающих отображений принцип**]

一个定理，断言完全度量空间 (X, ρ)（或这样的空间的一个闭子集）到它自身的映射 f 的**不动点** (fixed point) 的存在性与唯一性，如果对任何的 x', x''，不等式

$$\rho(f(x'), f(x'')) \leqslant q\rho(x', x'') \tag{1}$$

成立，这里 q 为某个固定的常数，$0<q<1$．这个原理被广泛应用于解的存在性与唯一性的证明中，不仅对形如 $f(x)=x$ 的方程适用，对形如 $f(x)=y$ 的方程也适用，后者通过改变方程为等价的方程 $\tilde{f}(x)=x$ 来实现，其中 $\tilde{f}(x)=x\pm(f(x)-y)$．

本原理应用的方式通常如下：首先从 f 的性质出发，找出一个闭集 $M\subset X$、通常为一个闭球，使得 $f(M)\subset M$，然后证明 f 在这个集上是一个压缩映射．此后，从任意一个元 $x_0\in M$ 出发，构作序列 $\{x_n\}$，$x_n=f(x_{n-1}), n=1, 2, \cdots$，$x_n$，均属于 M，它收敛于某个元 $\tilde{x}\in M$．这将是方程 $f(x)=x$ 的唯一解，而 x_n 则是逼近解的序列．

一般地说，条件(1)不能改变成

$$\rho(f(x'), f(x'')) < \rho(x', x''). \tag{2}$$

可是，如果这个条件在一个紧集 K 上满足而 f 将 K 映射到 K 自身，那么它保证了 f 的唯一的不动点 $\tilde{x}\in K$ 的存在性．

下面的压缩映射原理的推广成立．仍设 f 映射完全度量空间 X 到 X 之中，并设对于 $\alpha\leqslant\rho(x', x'')\leqslant\beta$，有

$$\rho(f(x'), f(x'')) \leqslant q(\alpha, \beta)\rho(x', x''),$$

这里对于 $0<\alpha\leqslant\beta<\infty$，有 $0<q(\alpha, \beta)<1$，那么 f 在 X 中有唯一的不动点．

参考文献

[1] Колмогоров, А. Н., Фомин. С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981(中译本：А. Н. 柯尔莫戈罗夫，С. В. 福明，函数论与泛函分析初步，高等教育出版社，1957).

[2] Красносельский, М. А. [и др.], Приближенное решение операторных уравнений, М., 1969.

[3] Люстерник, Л. А., Соболев, В. И., Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965(中译本：Л. А. 刘斯铁尔尼克，В. И. 索伯列夫，泛函分析概要(第二

版),科学出版社, 1985).

[4] Треногин, В. А., Функциональный анализ, М., 1980.

В. И. Соболев 撰

【补注】 这个原理也称为压缩原理(contraction principle)或 Banach 不动点定理(Banach fixed-point theorem). 它为 S. Banach 在 [A1] 中所证明. 本条末段所说的推广称为 Красносельский 意义下的广义压缩映射(generalized contraction mapping)([A5],[A6]). 对于压缩映射思想的这个推广及其他的推广,见[A4], Chapt. 3.

参考文献

[A1] Banach, S., Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leurs application aux équations integrales, *Fund. Math.*, **3** (1922), 7-33.

[A2] Rudin, W., Principles of mathematical analysis, McGraw-Hill, 1953 (中译本: W. 卢丁, 数学分析原理, 人民教育出版社, 1979).

[A3] Willard, S., General topology, Addison-Wesley, 1970.

[A4] Istrǎtescu, V. I., Fixed point theory, Reidel, 1981.

[A5] Красносельский, М. А., Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, М., 1956. (英译本: Krasnosel'skii, M. A., Topological methods in the theory of nonlinear integral equations, MacMillan, 1964).

[A6] Красносельский, М. А., Положительные решения операторных уравнений, М., 1962 (英译本: Krasnosel'skii, M. A., Positive solutions of operator equations, Noordhof, 1964).

李炳仁 译 王声望 校

收缩 [contraction; сжатие], 亦称压缩.

平面的一种仿射变换, 在收缩之下, 每个点按照与其纵坐标成比例的距离, 平行于 y 轴向 x 轴移位. 在 Descartes 坐标系中, 收缩由如下关系给出:

$$x' = x,\ y' = ky,\ k>0.$$

空间的平行于 z 轴, 向 xy 平面的收缩, 由如下关系给出:

$$x' = x,\ y' = y,\ z' = kz,\ k>0.$$

Н. В. Реверук 撰

【补注】 更经常地, 收缩定义为缩减距离的**度量空间的变换**(transformation of a metric space). 上面定义的概念在西方文献中没有专门的名称, 但有时称之为压缩(compression). 杨 路、张景中、侯晓荣 译

压缩 [contraction; сжатие], 压缩算子 (contracting operator; contractive operator)

Hilbert 空间 H 到 Hilbert 空间 H_1 的一个有界线性映射 T, 满足 $\|T\|\leqslant 1$. 当 $H=H_1$ 时, 一个压缩算子 T 称为完全非酉的(completely non-unitary), 指它在任何非零的 T 约化子空间上不是一个酉算子. 例如, 单侧移位(对比于双侧移位, 后者是酉的)是这样的算子. 联系于 H 上的每个压缩算子 T, 有唯一的到 T 约化子空间中的正交分解 $H=H_0\oplus H_1$, 使得 $T_0=T|_{H_0}$ 是酉的, $T_1=T|_{H_1}$ 是完全非酉的. $T=T_0\oplus T_1$ 称为 T 的典范分解(canonical decomposition).

H 上给定的压缩算子的一个膨胀(dilation)是一作用于某个更大的 Hilbert 空间 $K\supset H$ 上的有界算子 B, 使得 $T^n=PB^n$, $n=1,2,\cdots$, 这里 P 是 K 到 H 上的正交射影. Hilbert 空间 H 中的每个压缩算子有在某个空间 $K\supset H$ 上的酉膨胀 U, 此外, 在如下的意义下它是极小的, K 是 $\{U^nH\}_{n=-\infty}^{\infty}$ 的闭线性张成空间 (Szökefalvi-Nagy 定理 (Szökefalvi-Nagy theorem)). 通过谱理论定义的极小酉膨胀及其函数, 允许人们对于压缩算子构造一种函数演算. 这本质上已对开单位圆盘 D 中的有界解析函数 (Hardy 空间 H^∞) 做到了. 定义完全非酉压缩算子 T 属于 C_0 类, 如果有一个函数 $u\in H^\infty$, $u(\lambda)\neq 0$, 使得 $u(T)=0$. C_0 类包含于压缩算子 T 的 C_{00} 类之中(指当 $n\to\infty$ 时, $T^n\to 0$, $T^{*n}\to 0$). 对每个 C_0 类的压缩算子, 有所谓极小函数(minimal function) $m_T(\lambda)$(即是一个内函数 $u\in H^\infty$, 在 D 中 $|u(\lambda)|\leqslant 1$, 在 D 的边界上几乎处处有 $|u(e^{it})|=1$) 使得 $m_T(T)=0$, 并且 $m_T(\lambda)$ 是所有其他的具有同样性质的内函数的因子. 一个压缩算子 T 的极小函数 $m_T(\lambda)$ 在 D 中的零点集, 再与沿弧其上 $m_T(\lambda)$ 可作解析延拓的弧的并在单位圆周中的余集一起, 与谱 $\sigma(T)$ 相同. C_0 类压缩算子极小函数的概念, 允许人们把这类压缩算子的函数演算推广到 D 中某些亚纯函数.

不仅对于单个的压缩算子, 也对于离散的压缩算子半群 $\{T^n\}(n=0,1,\cdots)$ 以及连续的压缩算子半群 $\{T(s)\}$ $(0\leqslant s\leqslant\infty)$, 已经得到了关于酉膨胀的定理.

如同对于**耗散算子**(dissipative operator), 也对压缩算子, 构造了一种特征算子值函数的理论及基于此的一个函数模型, 由此可研究压缩算子的构造及谱、极小函数与特征函数之间的关系(见[1]). 由 Cayley 变换

$$A = (I+T)(I-T)^{-1},\quad 1\notin\sigma_p(T),$$

一个压缩算子 T 与一个极大的增生算子 A (即 A 使得 iA 是一个极大的耗散算子)有关. 在此基础上, 可建立对称算子 A_0 的耗散扩张 B_0 (相应地, 保守算子 iA_0 的 Philips 耗散扩张 iB_0) 的理论.

对压缩算子已发展了相似性, 拟相似性及单胞性的理论, 压缩算子的理论紧密相关于平稳随机过程的预报理论及散射理论. 特别地, Lax-Philips 图式([2])可看作 C_{00} 类压缩算子的 Szökefalvi-Nagy-Foias 理论的连续相似.

参考文献

[1] Szökefalvi - Nagy, B. and Foias, C., Harmonic analysis of operators in Hilbert space, North - Holland, 1970.

[2] Lax, P. D. and Philips, R. S., Scattering theory, Acad. Press, 1967.

И. С. Иохвидов 撰

【补注】 算子 T 的一个约化子空间 (reducing subspace) 是一个闭子空间 K, 使得有一个余 K', 即 $H=K\oplus K'$, 而 K 与 K' 在 T 之下都不变, 即 $T(K)\subset K$, $T(K')\subset K'$.

参考文献

[A1] Гохберг, И. Ц., Крейн, М. Г., Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовой пространстве, М., 1967 (英译本: Gohberg, I. C. and Krein, M. G., Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators, Amer. Math. Soc., 1970).

[A2] Гохберг, И. Ц., Крейн, М. Г., Теория вольтерровых операторов в гильбертовой пространстве и её приложения, М., 1967 (英译本: Gohberg, I. C. and Krein, M. G., Theory and applications of Volterra operators in Hilbert space, Amer. Math. Soc., 1970).

李炳仁 译 王声望 校

Lie 代数的收缩 [contraction of a Lie algebra; сжатие алгебры Ли]

Lie 代数的**形变** (deformation) 的逆运算. 令 $\mathfrak{g}$ 是一个有限维实 Lie 代数, $\{c_{ij}^k\}$ 是它关于一个取定的基 $e_1, \cdots, e_n$ 的结构常数集, $A(t)\ (0<t\leqslant 1)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的非奇异线性变换群中的一条曲线, 且 $A(1)=E$. 令 $e_i(t)=A(t)e_i$, 又令 $c_{ij}^k(t)$ 是 $\mathfrak{g}$ 关于基 $\{e_i(t)\}$ 的结构常数. 如果当 $t\to 0$ 时 $c_{ij}^k(t)$ 趋于某一极限 $c_{ij}^k(0)$, 那么由这些常数关于原始的基所定义的代数 $\bar{\mathfrak{g}}$ 称为原来代数 $\mathfrak{g}$ 的一个收缩 (contraction). 收缩 $\bar{\mathfrak{g}}$ 也是一个 Lie 代数, 而且 $\mathfrak{g}$ 可以通过 $\bar{\mathfrak{g}}$ 的一个形变而得到. 如果 $\mathfrak{g}$ 是一个 Lie 群 G 的 Lie 代数, 那么对应于 $\bar{\mathfrak{g}}$ 的 Lie 群 $\bar{G}$ 称为群 G 的一个收缩 (contraction of the group G).

虽然 $\dim\mathfrak{g}=\dim\bar{\mathfrak{g}}$, 但是一般说来这两个代数不同构. 例如, 若 $A(t)=tE$, 那么 $c_{ij}^k(t)=tc_{ij}^k\to 0$, 因此对于这个收缩来说, 极限代数总是交换的. 这个例子的自然推广如下: 令 $\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个子代数, $\mathfrak{b}$ 是 $\mathfrak{a}$ 的一个余子空间, 又令 $[\mathfrak{a},\mathfrak{b}]\subseteq\mathfrak{b}$ 且对于每一个 $v\in\mathfrak{a}$ 来说, $A(t)v=v$, 对每个 $v\in\mathfrak{b}$ 来说, $A(t)v=tv$. 此时在极限代数里 $\mathfrak{b}$ 变成 $\bar{\mathfrak{g}}$ 的一个交换理想同时 $\mathfrak{a}$ 里的乘法和 $\mathfrak{a}$ 在 $\mathfrak{b}$ 上的作用保持不变.

特别地, 令 G 是 Lorentz 群, $\mathfrak{g}$ 是它的 Lie 代数而 $\mathfrak{a}$ 是与三维空间的旋转所构成的子群相对应的子代数. 那么所描述的 $\mathfrak{g}$ 的收缩给出了 Galilei 群 $\bar{G}$ (见 **Galilei 变换** (Galilean transformation); **Lorentz 变换** (Lorentz transformation)) 的 Lie 代数. 因此 Lorentz 代数是 Galilei 代数的一个形变, 而且可以证明, Galilei 代数的复化没有其他形变; 在实的情形下, Galilei 代数也是正交 Lie 代数 so(4) 的一个收缩. 由 Lorentz 代数得出 Galilei 代数的一个等价的方法是把 Lorentz 代数定义为保持 Minkowski 型 $x^2+y^2+z^2-c^2t^2$ 不变的代数, 然后令光速趋于 ∞. 只要 $c<\infty$, 所产生的代数就与 $\mathfrak{g}$ 同构. 类似地, 对 Poincaré 代数 (非齐次 Lorentz 代数) 施行形变, 就可能得到常曲率空间的运动的 de Sitter 代数 so(4,1) 和 so(3,2). 相应地, 令曲率趋于 0, 就得到作为 de Sitter 群的收缩的 Poincaré 群.

这些代数之间的联系可以推广到表示上. 如果, 象所述的例子里那样, 有一个矩阵 $A(0)=\lim_{t\to\infty}A(t)$, 那么对任何 $x\in\bar{\mathfrak{g}}$, $\mathfrak{g}$ 的每个表示 S 通过以下公式生成收缩代数的一个表示 $\bar{S}$:

$$\bar{S}(x)=S(A(0)x),$$

一般说来, 逆运算 (表示的形变) 是不可能的.

参考文献

[1] Barut, A. and Raczka, R., Theory of group representations and applications, PWN, 1977.

[2] Inönü, E. and Wigner, E. P., On the contraction of groups and their representations, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **39** (1953), 510 - 524.

[3] Saletan, E. J., Contraction of Lie groups, *J. Math. Phys.*, **2** (1961), 1 - 22; 742.

А. К. Толпыго 撰 郝钢新 译

表示的收缩 [contraction of a representation; сужение представления], 到不变子空间上的

群 X 的表示 π 到子群 Y (代数 X 的表示到子代数 Y) 上的收缩是群 (代数) Y 的表示 ρ, 对所有 $y\in Y$, 它由公式 $\rho(y)=\pi(y)$ 定义. 表示 π 的收缩也称为表示 π 到不变子空间或到子群或到子代数上的限制 (或简化) (restriction (or reduction) of the representation). 若 π 是连续表示, 则 π 的收缩也是连续的.

А. И. Штерн 撰

【补注】 人们更常说表示的限制和表示的简化. 更精确地, 若 $\rho: X\to\mathrm{End}(V)$ 是群、代数, …, 的表示, 而 Y 是子群, 子代数 …, 则 ρ 可限制到 Y. 其次, 设 W 是 V 的一个不变子空间, 则 ρ 诱导了 X 和 (Y) 在 W 中的表示, 而产生该表示的一个子表示; 有时把它称为表示到不变子空间的简化. 表示的收缩 (contraction of a representation) 更经常用于下述情况. 考虑一个代数 A (或群) 在某个环 R 的 R 模 V 中的表示 $\rho_0: A\to\mathrm{End}(V)$. 设存在 A 在 $R[[t]]$ 上的表示 ρ_t, $\rho_t(a): V[[t]]=V\otimes_R R[[t]]\to V[[t]]$, 使得 $\rho_t \bmod t=\rho_0$ (即 $\rho_t(a)=\rho_0(a) \bmod t$, 对所有 a). 这里的 $V[[t]]$ 表示系数在 V 中的 t 的幂级数的模. 于是表示 ρ_0 称为 ρ_t 的收缩 (contraction), ρ_t 称为 ρ_0 的形变 (deformation). 直观上, ρ_t 是以 t 作为参数的表示的 (无穷小) 族. 更一般地, 还考虑同时将代

数 A 形变的情况，于是有 $R[[t]]$ 上的代数 A_t 使 $A \cong A_0 = A_t \otimes_{R[[t]]} R$ 及 A_t 在 $R[[t]]$ 上的表示 ρ_t．参见**形变**(deformation)．

石生明 译　许以超 校

张量的缩并 [contraction of a tensor; свертка тензора]

张量代数的一种运算，它使得分量为 $a_{j_1 \cdots j_q}^{i_1 \cdots i_p}(p, q \geqslant 1)$ 的张量对应于张量

$$b_{j_1 \cdots j_{q-1}}^{i_2 \cdots i_p} =$$
$$= a_{j_1 \cdots j_{q-1} 1}^{1 i_2 \cdots i_p} + a_{j_1 \cdots j_{q-1} 2}^{2 i_2 \cdots i_p} + \cdots + a_{j_1 \cdots j_{q-1} n}^{n i_2 \cdots i_p} =$$
$$= a_{j_1 \cdots j_{q-1} \alpha}^{\alpha i_2 \cdots i_p}$$

(这里的缩并是关于指标对 i_1, j_q 进行的)．类似地可以定义张量关于任意上、下指标对的缩并．p 次共变与 p 次反变张量的 p 重缩并是一个不变量．因此，分量为 a_j^i 的张量的缩并是一个不变量 a_i^i，称为张量的迹(trace of the tensor)，记为 $\mathrm{Sp}(a_j^i)$ 或 $\mathrm{tr}\, a_j^i$．两个张量乘积的缩并是这个乘积关于其中一个因子的上标与另一个因子的下标的缩并．

А. Б. Иванов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Rashewski, P. K. [P. K. Rashevskii], Riemannsche Geometrie und Tensoranalyse, Deutsch. Verlag Wissenschaft., 1959 (译自俄文).　龚明鹏 译

压缩算子 [contraction operator; сжимающий оператор]

【补注】范数 $\leqslant 1$ 的赋范空间(normed space)上的**算子**(operator).

压缩半群 [contraction semi-group; сжатая полугруппа]

Banach 空间 E 中线性算子的单参数**强连续半群**(strongly-continuous semi-group) $T(t)$, $0 \leqslant t < \infty$, $T(0) = I$, 并且 $\|T(t)\| \leqslant 1$. 在 E 中稠定的算子 A 是压缩半群的生成算子(generating operator)(生成元(generator)), 当且仅当对所有 $\lambda > 0$ 满足 Hille-吉田(Yosida)条件：

$$\|(A - \lambda I)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\lambda}$$

换言之，一个稠定算子 A 是一个压缩半群的生成元，当且仅当 A 是一个极大的**耗散算子**(dissipative operator).

Hilbert 空间中的压缩半群已被详细地研究过，压缩半群的特殊形式是等距半群(semi-group of isometries)($\|Tx\| = \|x\|$)，酉半群(uniatry semi-groups)($T^*(t) = T^{-1}(t)$)，自伴半群(self-adjoint semi-groups)($T^*(t) = T(t)$)以及正规半群(normal semi-groups)($T^*(t)T(t) = T(t)T^*(t)$)．代替生成元 A 而使用其 Cayley 变换 $B = (A + I)(A - I)^{-1}$(上生成元(cogenerator))有时是方便的．结果是，一个半群是等距半群、酉半群、自伴半群或正规半群，当且仅当上生成元分别是等距算子、酉算子、自伴算子或正规算子．

一个压缩半群称为完全非酉的(completely non-unitary)，如果它在任何不变子空间中的限制不是酉的．对于一个完全非酉的半群及任何 $x, y \in H$，有 $(T(t)x, y) \to 0$(当 $t \to \infty$)．为了一个压缩半群是完全非酉的，只须它是稳定的，即对 $x \in H$，当 $t \to \infty$ 时，有 $\|T(t)x\| \to 0$.

对每个压缩半群 $T(t)$，有一个到 $T(t)$ 不变子空间中的正交分解 $H = H_1 \oplus H_2$，使得所给半群在 H_1 上是酉的，而在 H_2 上是完全非酉的．

如果 $T(t)$ 是在 Hilbert 空间 H 中的一个压缩半群，则有一个包含 H 作为子空间的更大的 Hilbert 空间 $\widetilde{H}$，及在 $\widetilde{H}$ 中的酉群 $U(t)$，$-\infty < t < \infty$，使得 $T(t) = PU(t)$(对 $t \geqslant 0$)，这里 P 是 $\widetilde{H}$ 到 H 上的正交射影．群 $U(t)$ 称为半群 $T(t)$ 的一个酉膨胀(unitary dilation)．如果要求 $\widetilde{H}$ 是集合 $\bigcup U(t)H$ $(-\infty < t < \infty)$ 的闭线性张成空间，则当不计同构时，这个膨胀是唯一确定的(一个极小膨胀(minimal dilation))．

设 N 是一个 Hilbert 空间，$L_2(\mathbf{R}, N)$ 为所有具平方可积范数的可测 N 值函数 $f(s)(s \in \mathbf{R})$ 的 Hilbert 空间．在这个空间中，可以定义双侧移位的酉群 $(U(t)f)(s) = f(s - t)$．类似地，在空间 $L_2(\mathbf{R}_+, N)$, $\mathbf{R}_+ = (0, \infty)$ 中可以定义单侧移位的半群：

$$(U(t)f)(s) = \begin{cases} f(s-t) & 对\ 0 \leqslant t < s, \\ 0 & 对\ t > s. \end{cases}$$

每个等距完全非酉半群同构于 $L_2(\mathbf{R}_+, N)$ 上的单侧移位，N 为某个适当的空间．

如果 $T(t)$ 是一个完全非酉的压缩半群，$U(t)$ 是它的极小酉膨胀，那么在 $\widetilde{H}$ 的某个不变子空间上(但若 $T(t)$ 是稳定的，则在整个 $\widetilde{H}$ 上)，这个群同构于双侧移位的群．对于非线性算子的压缩半群，见**非线性算子半群**(semi-group of non-linear operators).

参考文献

[1] Davies, E. B., One-parameter semigroups, Acad. Press, 1980.
[2] Szökefalvi-Nagy, B. and Foias, C., Harmonic analysis of operators in Hilbert space, North-Hlland, 1970.

С. Г. Крейн 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hille, E. and Phillips, R., Functional analysis and semi-groups, Amer. Math. Soc., 1957 (中译本：E. 希尔，R.S. 菲利浦斯，泛函分析与半群，上海科学技术出版社，1964).

[A2] Pazy, A., Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations, Springer, 1983.

李炳仁 译 王声望 校

矛盾(公式) [**contradiction**; **противоречие**], 不相容性(公式)(inconsistency)

纯(狭义)谓词演算语言的一个公式 φ, 它在这个语言的所有模型中都是假的. 一个公式 φ 是矛盾的, 当且仅当 $\neg\varphi$ 在纯谓词演算中可以推导出来.

В. Н. Гришин 撰 卢景波 译 王世强 校

矛盾律 [**contradiction, law of**; **противоречия закон**]

一个逻辑定律: 没有一个命题能使它和它的否定同时成立. 在命题演算的语言中, 矛盾律可以表示为

$$\neg(A\ \&\ \neg A).$$

这个公式在古典的以及在直觉主义的构造**命题演算**(constructive propositional calculus)中都可以推导出来(亦见**命题演算**(propositional calculus)).

В. Н. Гришин 撰 卢景波 译 王世强 校

逆步自同构 [**contragredient automorphism**; **контрагредиентный автоморфизм**], 对环 A 的右模 M 的自同构 φ 的

与 φ 的逆自同构伴随的左 A 模 M^*($*$标志对偶或伴随模)的自同构 $\varphi^\vee$. 更一般地, 若 ψ 是一个右 A 模 M_1 和右 A 模 M_2 之间的同构, 则 ψ 的逆步同构(contragredient isomorphism)是从左 A 模 M_1^* 到左 A 模 M_2^* 上的同构, 且它与 ψ 的逆同构伴随. 设 $\langle\ ,\ \rangle_1$ 和 $\langle\ ,\ \rangle_2$ 分别是 $M_1\times M_1^*$ 和 $M_2\times M_2^*$ 上的典型双线性型, 则对于 $x\in M_1$ 及 $y\in M_1^*$ $\psi^\vee$ 由下式定义:

$$<\psi(x),\psi^\vee(y)>_2\ =\ <x,y>_1.$$

若 M_1 和 M_2 都有有限基, 则 ψ 是 $\psi^\vee$ 的逆步同构.

设 A 是有单位元的环, M 是具有有限基的右 A 模, φ 是 M 的自同构. 又设 X 是 φ 在固定基底下的矩阵(这个矩阵是可逆的). 那么, 在对偶基底下, 逆步同构 $\varphi^\vee$ 的矩阵为

$$X^\vee=({}^TX)^{-1}={}^T(X^{-1})$$

(这里 T 指转置). 矩阵 $X^\vee$ 称为可逆矩阵 X 的逆步矩阵(contragredient matrix).

参考文献

[1] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Algebra: Modules. Rings. Forms. 2, Addison-Wesley, 1975, Chapt. 4; 5; 6 (译自法文).

В. Л. Попов 撰

【补注】 也用对偶模和对偶自同构代替伴随模和伴随自同构. 见**伴随模**(adjoint module), **自同构**(automorphism).

冯绪宁 译

逆步表示 [**contragredient representation**; **контрагредиентное представление**], 群 G 在线性空间 V 上的表示 φ 的

群 G 在 V 的对偶空间 V^* 中的表示 φ^*, 它由下列规则定义:

$$\varphi^*(g)=\varphi(g^{-1})^*$$

对所有 $g\in G$ 成立, 其中 $*$ 表示取伴随.

更一般地, 若 W 与 V 是同一个域 k 上的线性空间, $(\ ,\ )$ 是在 $V\times W$ 上(配对)且取值在 k 中的非退化**双线性型**(bilinear form), 则 G 在 W 中的表示 ψ 称为对于型 $(\ ,\ )$ 逆步于表示 φ, 如果

$$(\varphi(g)x,\ y)=(x,\ \psi(g^{-1})y)$$

对所有 $g\in G$, $x\in V$ 及 $y\in W$ 成立.

例如, 若 G 是有限维空间 V 上的一般线性群, 则 G 在 V 上固定秩的共变张量空间中的自然表示逆步于 V 上同秩的反变张量空间中的自然表示.

令 V 在 k 上是有限维的, (e) 是它的基, 而 (f) 是 V^* 中与 (e) 对偶的基, 则对 G 中任何元 g, $\varphi^*(g)$ 在基 (f) 下的矩阵是由 $\varphi(g)$ 在基 (e) 下的矩阵取逆且转置. 若 φ 不可约, 则 φ^* 也是. 若 G 是具有 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的 Lie 群, 而 $d\varphi$ 和 $d\psi$ 是代数 $\mathfrak{g}$ 的分别由 G 在空间 U 和 W 中的两个表示 φ 和 ψ 所诱导出的表示, 又设 φ 和 ψ 对于配对 $(\ ,\ )$ 是逆步的, 则

$$(d\varphi(X)(x),\ y)=-(x,\ d\psi(X)y)\qquad(*)$$

对所有 $X\in\mathfrak{g}$, $x\in V$ 及 $y\in W$ 成立. Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的满足 $(*)$ 的表示也称为对于 $(\ ,\ )$ 的逆步表示.

进而假设 G 是复连通且单连通的半单 Lie 群, φ 是它在向量空间 V 中的有限维不可约表示. 表示 φ^* 的权(见 **Lie 代数表示的权**(weight of representation of a Lie algebra))与 φ 的权是反向的, φ^* 的最低权与 φ 的最高权反向(见关于**最高(权)向量的 Cartan 定理**(Cartan theorem)). 表示 φ 与 φ^* 等价, 当且仅当在 V 上有在 $\varphi(G)$ 下不变的非零双线性型. 若这样的型存在, 则它必定非退化且对称或反对称. 表示 φ^* 的最高权的数值标记可由 φ 的数值标记的集合经置换而得到, 该置换是由 G 的单根系 Δ 的 Dynkin 图的下述自同构 ν 所诱导的:

a) ν 把 Δ 的每个连通分支 Δ_i $(i=1,\cdots,l)$ 变成自己;

b) 若 Δ_i 的型为 A_r, D_{2r+1} 或 E_6, 则 ν 在 Δ_i 上的限制为 Δ_i 的自同构群中唯一的二阶元素; 其余的情况, ν 在 Δ_i 上的限制是恒等变换.

参考文献

[1] Наймарк, М. А., Теория представлений групп, М., 1976 (英译本: Naimark, M. A., Theory of group representations, Springer, 1982)

[2] Кириллов, А. А., Элементы теории представлений, М., 1972 (英译本: Kirillov, A. A., Elements of the theory of representations, Springer, 1976).

[3] Желобенко, Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1970 (英译本: Zhelobenko, D. P., Compact Lie groups and their representations, Amer. Math. Soc., 1973).

[4] Винберг, Э. Б., Онищик, А. Л., Семинар по алгебраическим группам и группам Ли., 1967/68, М., 1969 (英译本: Vinberg, E. B. and Onishchik, A. L., Seminar on algebraic groups and Lie groups, 1967/68, Springer).

В. Л. Попов 撰

【补注】 设$\Lambda\in\mathfrak{h}^*$是表示φ的最高权,则Λ的数值记号的集合 (set of numerical marks) 就是整数的有序集$(k_1,\cdots,k_r)$, $k_i=\Lambda(h_i)$见 **Cartan 定理** (Cartan theorem). 特别地, 它可作为 Dynkin 图上相应结点的标号.

石生明 译 许以超 校

换质换位律 [**contraposition, law of; контрапозиции закон**]

一个逻辑法则, 按照这个法则, 如果一个命题蕴涵另一个命题, 那么后者的否定蕴涵前者的否定:

$$(A\supset B)\supset(\neg B\supset\neg A).$$

换质换位律在古典逻辑和构造性逻辑中都被采用.

С. К. Соболев 撰 卢景波 译 王世强 校

相反定理 [**contrary theorem; противоположная теорема**]

把最初给定的一个定理的条件和结论用它们的否定来代替, 并交换它们所在位置而得到的定理.

【补注】 相反定理通常称为换质换位定理 (contrapositive theorem). 在形式上这样一个定理的形状是: "如果非B, 那么非A". 它是由给定的定理"如果A, 那么B"经"换质换位"而得(即交换结论(B)和条件(A)的位置, 并且分别用其否定代替).

卢景波 译 王世强 校

对照 [**contrast; контраст**], 比较 (comparison)

向量$\theta=(\theta_1,\cdots,\theta_k)^T$与给定向量$c=(c_1,\cdots,c_k)^T$的内积$\theta^T\cdot c$, 其中$c_1+\cdots+c_k=0$. 例如, 两一维正态分布的未知数学期望$\theta_1$和$\theta_2$之差为$\theta_1-\theta_2=(\theta_1,\theta_2)(1,-1)^T$, 因而是一个对照, 在方差分析中常要考虑**多重比较** (multiple comparison) 问题. 该问题涉及有关若干个对照的数值之假设的检验.

参考文献

[1] Scheffé, H., Analysis of variance, Wiley, 1959.

М. С. Никулин 撰

【补注】 当θ的各分量加上同一常数时, 对照不变. 因此, 对照不依赖于有任意性的"总水平". 在某些安排之下, 这可以是一个极大的便利.

陈希孺 译

反变张量 [**contravariant tensor; контравариантный тензор**], 价$r\geqslant1$的

$(r,0)$型张量, 即域K上向量空间E的r重张量积

$$T^r(E)=E\otimes\cdots\otimes E$$

的元素. 空间$T^r(E)$关于同价反变张量的加法及它们关于数量乘法构成域K上一个向量空间. 设E是具有基$e_1,\cdots,e_n$的有限维向量空间. 这时$T^r(E)$的维数为n^r; $T^r(E)$的基可以由形如

$$e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r},\quad 1\leqslant i_1,\ldots,i_r\leqslant n$$

的所有反变张量给出. 任意的反变张量$t\in T^r(E)$可以表成形式

$$t=t^{i_1\cdots i_r}e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}.$$

诸数$t^{i_1\cdots i_r}$称为t关于E中基$e_1,\cdots,e_n$的坐标 (coordinates) 或分量 (components). 当按公式

$$e'_j=a^i_je_i$$

变换E中的基时, t的分量按所谓的反变律

$$t'^{j_1\cdots j_r}=b^{j_1}_{i_1}\cdots b^{j_r}_{i_r}t^{i_1\cdots i_r},\quad a^i_jb^k_i=\delta^k_j$$

变化.

当价r等于1时, 反变张量等同于一个向量, 即E的一个元素; 当$r\geqslant2$时, 反变张量可以按一定的方式与从E的对偶空间E^*的r重直积

$$(E^*)^r=E^*\times\cdots\times E^*$$

到K内的r重线性映射联系起来. 为此只须取r重线性映射$\tilde{t}$在$(e^{i_1},\cdots,e^{i_r})\in(E^*)^r$处的值(其中$e^1,\cdots,e^n$是$E^*$中对偶于$e_1,\cdots,e_n$的基, 即$e^i(e_j)=\delta^i_j$)为反变张量$t$的分量, 反之亦然. 基于此, 反变张量有时又直接定义为$(E^*)^r$上的多重线性泛函.

И. Х. Сабитов 撰

【补注】 更一般地, 设A是有单位元的交换环且E是A上的酉模. 这时r重张量积$\otimes^rE$的元素称为r阶反变张量 (r-contravariant tensors) 或r价反变张量 (contravariant tensors of valency r) 或r阶反变张量 (contravariant tensors of order r). "阶为r的反变张量"一语也用来表示光滑流形M上的r阶反变张量场 (contravariant tensor field); 参见**张量丛** (tensor bundle). 对每个$x\in M$, 这个场对应于M在x处切空间的r重张量积$\otimes^rT_xM$个元素. 在环与模情形下, 这样的张量场恰是环$A=$

$C^{\infty}(M;\mathbf{R})$上 TM (即向量场)的截面模$\Gamma(M,TM)$的 r 阶反变张量,这里 A 是由 M 上的光滑函数组成的环.

参考文献

[A1] Bourbaki, N., Elements of Mathematics. Algebra: Algebraic structures. Multilinear algebra, Addison-Wesley, 1974, Chapt. 3 (译自法文).

[A2] Marcus, M., Finite-dimensional multilinear algebra, M. Dekker, 1973, Part 1.

[A3] Spain, B., Tensor calculus, Oliver & Boyd, 1970.

龚明鹏 译

反变向量 [**contravariant vector**; **контравариантный вектор**]

当对偶(或共轭)空间(见**伴随空间** (adjoint space)) E^*同向量空间 E 一起考虑时 E 的元素的名称. 这时, E^*的元素称为共变向量(见**共变向量** (covariant vector)).

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 词"向量"或词组"反变向量"也用于表示一个向量场. 亦见**向量空间上的张量** (tensor on a vector space); **反变张量** (contravariant tensor); **张量丛** (tensor bundle).

陈公宁 译

控制函数 [**control function**; **управляющая функция**], 控制(control)

出现在下面微分方程中的函数 $u(t)$:

$$\dot{x}=f(t,x,u),\ x(t_0)=x_0,\ f:\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^n, \quad (1)$$

函数值在每一时刻可任意选取.

一般地, $u(t)$ 的变化的值域对每一 t 受到限制

$$u(t)\in U, \quad (2)$$

这里 U 是 $\mathbf{R}^m$ 中的一个闭集. 一个控制称为容许的 (admissible), 若对每一 t 它满足(2). 不同的容许控制 $u(t)$ 决定都从初始点 X_0 出发的相应的不同轨道.

如果给定一个泛函

$$J(x,u)=\int_{t_0}^{t_1}f^0(t,x,u)\,dt \quad (3)$$

和一个关于轨道右端于 t_1 的边界条件:

$$x(t_1)\in X_1, \quad (4)$$

其中 X_1 是 $\mathbf{R}^n$ 中的某集合(在特殊情况下, 是一个点) 则可以提出一个确定最优控制 $u(t)$ 的问题, 它给出问题(1)−(4)中的泛函的一个最优值. 与最优控制函数的定义有关的问题, 已在最优控制理论和变分法中讨论了(见[1], [2]).

与被称为相变量(phase variables)(或相坐标(phase coordinates))的变量 $x=(x^1,\cdots,x^n)$不同, 控制 $u=(u^1,\cdots,u^m)$ 在方程(1)中没有出现导数. 因此, (1)不仅对于连续的, 而且对于分段连续(甚至对于可测)的控制 $u(t)$, 都是有定义的. 此外, 对每一个分段连续控制 $u(t)$, 方程(1)定义一个连续的分段光滑的轨道 $x(t)$.

对绝大部分问题来说, 在分段连续函数类中存在一个最优控制. 但是, 会遇到一些问题, 其中最优控制不是分段连续的, 而是属于 Lebesgue 可测函数类. 在这些情况中, 最优控制有无限多不连续点, 凝聚于某一个点, 例如凝聚于 k ($k>1$) 阶奇异曲面的进入点(见**最优奇异模态** (optimal singular regime)).

在最优控制理论领域里, 表述为 Понтрягин 极大值原理的必要条件, 是对最一般的情况证明的, 其中所研究的最优控制函数被假定为可测的(特别地, 它可以是分段连续的或连续的).

依据极大值原理, 为了使 $u(t)$ 成为一个最优控制 (在使泛函(3)极小的情况下), 对每一时刻 t, 控制必须使 Hamilton 函数

$$H(t,x,\psi,u)=\sum_{i=0}^{n}\psi_i f^i(t,x,u)$$

在 U 上取极大值, 其中 $\psi=(\psi_0,\psi_1,\cdots,\psi_n)$ 为共轭向量函数, 由以下共轭方程组定义:

$$\dot{\psi}_i=-\frac{\partial H}{\partial x_i},\ i=1,\ldots,n,\ \psi_0=\text{常数}\leqslant 0.$$

在变分法中, 存在一个类似的极大值原理, 容许定义"自由"函数, 它受到的约束是由 Euler 方程和 Weierstrass 必要条件给出的.

使泛函(3)成为极小的最优 Lebesgue 可测控制存在的充分条件为: 对每个 t 及 x, 右端向量值的集合 $\{f(t,x,U)\}$ (当控制 u 在其值域 U 上的所有容许值上取值时就得到这个集合), 在 $\mathbf{R}^n$ 内是凸的, 而且被积函数取值的集合的最大下界 $\inf\{f^0(t,x,U)\}$ 作为 u 的函数是下凸的. 如果这条件不满足, 可能会出现极小化的控制序列 $u_n(t)$ 并不收敛的情况, 甚至在可测函数类中也不收敛. 在这些情况中, 可以说, 有滑动(或松弛)最优模态(控制). 一个滑动最优控制可以在严格意义下在与原问题密切联系的问题中视为一个奇异最优控制(见**最优滑动模态** (optimal sliding regime)).

利用在最优控制理论和变分法中建立起的最优性的充分必要条件, 就可以在所考虑的问题中定义最优控制函数和相应的最优相轨道. 为建立最优控制已有几种不同的数值方法(见**变分学的数值方法** (variational calculus, numerical method of)).

在更一般的情况中, 控制函数可依赖于几个自变量. 在这种情况下, 可以说控制是具有分布参数的控制函数.

参考文献

[1] Понтрягин, Л. С., Математическая теория оптимальных процессов, 2 изд., М., 1969.

[2] Bliss, G. A., Lectures on the calculus of variations, Chicago Univ. Press, 1947.

[3] Валнярский, И. Б., 《Ж. вычислит. матем. и матем. физ.》, 7 (1967), 2, 259－283.

[4] Бутковский, А. Г., Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами, М., 1965.

И. Б. Валнярский 撰

【补注】 式(1)可以给予两种解释. 或者 t_1 是固定的且状态 X 应于 t_1 时刻属于 X_1, 或者 t_1 隐含于定理之中, 就是说必存在一 t_1 使得 $x(t_1)\in X_1$.

在西方文献中相变量及相坐标一般指的就是状态变量(state variables)及状态坐标(state coordinates). Понтрягин 极大值原理能给出作为时间函数的最优控制函数 $u(t)$ 的必要条件. 这有时被称为开环控制(open-loop control), 以区别于闭环控制(closed-loop control), 此处最优控制还被认为是状态的函数: $u(t, x(t))$.

标准教材有 [A1], [A2].

参考文献

[A1] Bryson, A. E. and Ho, Y. C., Applied optimal control, Hemisphere, 1975.

[A2] Fleming, W. H. and Rishel, R. W., Deterministic and stochastic optimal control, Springer, 1975.

【译注】 相变量及相坐标是一种特殊的状态变量及状态坐标, 此时以下关系成立: $x_1=x$, $x_2=\dot{x}_1=\dot{x}$, $x_3=\dot{x}_2=\ddot{x}$, $\cdots$, $x_n=\dot{x}_{n-1}=x^{(n-1)}$.

高为炳 译

控制系统 [control system; управляющая система]

控制论中的核心概念之一. 它是一个有确定结构的对象, 同时具有某些功能, 反映它的信息处理的特征. 与控制系统有关的许多概念只用数学语言是不能完全解说清楚的. 所以,为了阐明这些概念, 需要给它们一些直觉的解释. 下面是一些实际控制系统的(日常所见的)例子.

神经组织是由神经元组成的结构, 实现将外界来的刺激转换为对某一器官产生的作用.

电子计算机是由许多元件联接而成的,并能完成一系列基本指令.

化学分子是由一定的原子构型所刻画的, 并且具有许多有趣的性质(由一定分子结构的实物的性质, 如颜色和其他物质形态等).

由棋盘上棋子位置和对局者可能走的棋步所决定的棋局.

由字母按文法规则(句法)组成, 且具一定的意义(语义)的俄文句子.

上述对象中, 每一个均显示出一个结构(模式)和一定的性质或功能. 在将这些对象视为控制系统时, 我们有兴趣的主要是它们的行为-功能特性,而对内部性质的细节并不加注意. 因此, 两个控制系统在某种意义上只要它们有相同的行为和相同的功能, 我们就不把它们看成是两个不同的系统.

控制系统概念的数学发展在于使行为概念和功能概念精确化, 以及考虑信息流和控制系统各部分配置的其他细节. 控制系统的第一个构造应回溯到 1955年(见[1]). 其后出现了其他较特殊类型的控制系统, 如 А. А. Марков的因果关系网络(见[2]), Н. П. Бусленко的聚集体(见[3])等. 控制系统的完整定义是在 [1] 中建立的. 这个定义包括所有已知定义为其特例. 鉴于控制系统精确定义的复杂性, 下面先对四个基本要素给出一个简要的描述: 模式, 信息, 坐标和功能.

一个控制系统的模式(scheme of a control system)由其诸元件的某种联接表现出来, 而每一元件又与给定的记忆相联系, 在其中形成一所谓的基本子模式. 处于某一有限(或可数)集内的记忆的状态确定了控制系统的记忆中的信息. 模式的联接则是由元件的一组坐标(也在有限或可数集内)所表征的. 最后, 控制系统的功能(function of a control system)决定了发生于某一时刻(确定地或随机地)且属于某一离散(最多是可数)的尺度控制系统的可能变换. 这些变换能改变记忆中的信息(改变状态的参数), 能实现控制系统的运动(改变元件的坐标), 或者能改变模式(结构)以及它的功能(行为).

例子表明模式与功能在控制系统中可能有各种各样的含义. 正是由于这一事实, 控制系统才能用适当的方式来描述物理系统, 也就是说,保持它们的功能性质和它们的结构(模式). 因此, 控制系统成为系统建模的有力工具, 在建模时不仅对象的功能而且它的模式都能充分精确地复制出来.

由于给定的控制系统的每一基本子模式实际上定义了一个基本控制系统, 因此初始的控制系统可以视为某一个复杂系统, 或者是由许多基本控制系统组成的. 这就是我们为什么不说定义控制系统的概念, 而只说如何使它更精确的原因. 这里一个控制系统被认为是由其他一些没有被定义的基本系统所组成的. 有必要指出, 控制系统概念的外延不但适合于简单的离散变换, 而且也适合于具有复杂功能和结构的对象. 这就使得有可能描述一个计算机, 机器人, 具有变结构的自适应系统, "学习"系统等等.

作为控制论中研究的初始的物理系统的数学模型, 控制系统具有许多特征. 首先, 它们是具有离散本性的对象. 它的结构, 坐标, 信息, 功能, 以及时间都是离散性的. 对于要求进行控制论研究的控制系统, 它

的特点就更加复杂了．这种复杂性表现在控制系统含有大量的元件，复杂的元件间的联接结构，大量复杂的记忆(因而复杂的信息流)，以及复杂的行为．一般地说，实际对象可以按多种方式视为控制系统．一个控制系统的综合，决定于基本控制系统的选择，并可以按不同"递阶性"加以实现．这样，一个控制系统具有相对性的特点．选择不同层次的基本控制系统的可能性，使我们得以将初始控制系统看成是由一些控制系统按递阶形式构成的系统，其中基本控制系统位于其最高层，相对基本的控制系统位于其次最高层．在这种情况下,可以说控制系统具有一个递阶结构．

最后指出，通常一个控制系统并不能完全精确地描述原始对象，而总是带有一定的误差，因此我们应将它当作是对象的一个近似．

曾经有人力图将控制系统的概念扩展到连续对象上．其结果使我们得到"连续"控制系统，以及"连续离散"控制系统．此外，相关的对象在动力学系统理论及调节理论中也已经得到研究．在离散及连续控制系统之间有一些相似之处，但更多的还是相异之处．根本的差异在于：一个离散控制系统描述一个信息处理过程，而一个连续控制系统则描述一个"能量"过程．

依据建模对象的不同，控制系统的研究总是按一个个特殊类型进行的．选择建模对象的类型应有以下考虑：a) 它们的数目应小；b) 它们应该互不相同；c) 它们应包括最常见的普通类型；d) 它们应提供如下可能性，使得在给定类型的基础上可以构造出其他类型的控制系统．下面列举各种类型的建模对象．

1) 有一定基的**逻辑代数**(algebra of logic)的公式，它是由 Boole **函数**(Boolean function)实现的(特别是析取范式)．

2) 有一定基的**功能元图**(diagram of functional elements)以及一个 Boole 函数系统的实现．

3) 一种由Boole函数矩阵实现的**触点模式**(contact scheme)．

4) 在某一自动机上实现从"输入"序列到"输出"变换的自动机(见**有限自动机** (automaton, finite))．

5) 实现**可计算函数** (computable function)的算子算法．

对一个建模对象，它的特征是任一控制系统 U 完全由其模式(结构)Σ 及功能 Φ 所定义，亦即由二元组 (Σ,Φ) 所定义．这里 $U=(\Sigma,\Phi)$．另一方面，对任一建模对象类 $\mathfrak{U}$，都存在一个函数 Φ 使得 $\Phi=\varphi(\Sigma)$，即功能单值地确定于模式．此外，φ 是一个可计算的函数．在此情况中，建模对象类的每一个元都可以用另一方式来刻画．令 $\mathfrak{S}=\{\Sigma\}$ 及 $\mathscr{F}=\{\Phi\}$，这里 $(\Sigma,\Phi)\in\mathfrak{U}$．类 $\mathfrak{U}$ 完全由给定的集合 $\mathfrak{S}$ 与 $\mathscr{F}(m)$ 决定，因而也完全由计算 φ 的算法 A 所决定．

控制系统理论的基本问题是围绕以下三个问题展开的(见[4])：**综合问题**(synthesis problem)，控制系统的**等价变换**(equivalent transformations)问题，以及它们的可靠性问题(见**控制系统的可靠性和检查** (reliability and inspection of control systems))．对不同的建模对象类的这些问题所得到的结果比较表明，在表述相应的定理中存在明显的规律性，而且在所述定理的证明方法之间可观察到相似性；对于较复杂的控制系统的定理的证明常常对应着较简单情况下相应定理的证明．

参考文献

[1] Яблонский, С. В., 《Проблемы кибернетики》, 1959, 2, 7－38.

[2] Марков, А. А., в сб., Кибернетика, мышление, жизнь, М., 1964.

[3] Бусленко, Н. П., 《Изв. АН СССР. Сер. технич. кибернетика》, 1963, 5, 7－18.

[4] Ляпунов, А. А., Яблонский, С. В., 《Проблемы кибернетики》, 1963, 9, 5－22.

С. В., Яблонский 撰

【补注】 [A1] 给出一个连续或离散控制系统的数学定义的参考文献．

参考文献

[A1] Kalman, R. E., Falb, P. L. and Arbib, M. A., Topics in mathematical system theory, McGraw-Hill, 1969.

高为炳 译

受控随机过程 [**controlled stochastic process**; **управляемый случайный процесс**]

一种随机过程，在它追踪某个目标的发展进程中，它的概率特征可以受到改变(受控)，这个目标通常是极小化(或极大化)一个代表控制品质的泛函(控制目标)．依赖于如何规定这一过程或依赖于控制目标的性质，产生了各种类型的受控过程．获得最大进展的是当过程的发展完全被控制者所观测时的受控跳跃(或阶梯) Марков 过程与受控扩散过程理论．在部分观测(不完全数据)情形下，也发展了相应的理论．

受控跳跃 Марков 过程(controlled jump Markov process)．这是一种连续时间且有逐段常值轨道的受控随机过程，其无穷小特征受控制选择的影响．对这种过程的结构，通常作如下规定(见[1]，[2])：1) 状态的 Borel 集 E；2) 控制的 Borel 集 A，当过程处于状态 x 时的一个容许控制集 $A(x)$，$A=\bigcup A(x)$，且 $\{(x,a):a\in A(x),x\in E\}\in\mathscr{B}(E\times A)$ ($\mathscr{B}(M)$ 表示 Borel 集 M 的 Borel 子集的 σ 代数)，而在某些情形下，还规定一个可测的选择器 $a=\alpha(x)\in A(x),x\in E$；3) 一个跳跃测度，它表达为定义在 $t\geqslant 0,x\in E,a\in A(x)$ 及 $\Gamma\in\mathscr{B}(E)$ 上的一个转移函数 $q(a,t,x,\Gamma)$，使得对每一 $\Gamma\in\mathscr{B}(E)$，q 是 (a,t,x) 的 Borel 函数，对每一 (a,t,x)，q 关于 Γ 是可列

可加的;此外,对 $x\notin\Gamma$, q 是有界的, $q(a,t,x,\Gamma)\geqslant 0$,且 $q(a,t,x,E)>0$. 粗略地说, $q(a,t,x,\Gamma)dt$ 是当 $x_t=x$ 且施加控制作用 a 时过程在时间区间 $[t,t+dt]$ 内跳入集 Γ 中的概率.

设 $\Omega=D([0,\infty),E)$ 是所有取值于 E 的逐段常值右连续函数 $\omega=x_{[0,\infty)}=(x_t)_{t\geqslant 0}$ 组成的空间, $N_t(N_{t-})$ 是 Ω 上使函数 $x_s=x_s(\omega)(s\leqslant t(s<t))$ 为可测的最小 σ 代数,且令 $N=N_\infty$. 定义在 $(0,\infty)\times\Omega$ 上,有值 $\alpha_t(\omega)\in A(x_t(\omega))$,即关于族 $\{N_{t-}\}$ 循序可测的任何函数 $\alpha_t(\omega)$, 称为一个(自然)**策略** (strategy) (或**控制** (control)). 从这个定义推出 $\alpha_t(\omega)=\alpha(x_{[0,t)})$,其中 $x_{[0,t)}=(x_s)_{0\leqslant s<t}$. 如果 $\alpha_t(\omega)=\alpha(t,x_{t-})$, 其中 $\alpha(t,x)$ 为 $(0,\infty)\times E$ 上的 Borel 函数且 $\alpha(t,x)\in A(x)$, 则称 α 为 Марков **策略** (Markov strategy) 或 Марков **控制** (Markov control), 又若 $\alpha(t,x)=\alpha(x)$, 则称之为**平稳策略** (stationary strategy) 或**平稳控制**(stationary control). 用 $\mathfrak{A}_E$, $\mathfrak{A}_M$ 和 $\mathfrak{A}_S$ 分别表自然, Марков 和平稳策略类. 鉴于从 $A(x)$ 中做一可测选择的可能性,类 $\mathfrak{A}_S$ (从而 $\mathfrak{A}_M$ 和 $\mathfrak{A}_E$) 是非空的. 若 q 是有界的,则对任何 $x\in E$ 及 $\alpha\in\mathfrak{A}_E$, 可以在 (Ω,N) 上构造唯一的概率测度 P_x^α, 使 $\mathrm{P}_x^\alpha\{x_0=x\}=1$, 且对任何 $t'\geqslant t\geqslant 0$, $\Gamma\in\mathscr{B}(E)$, 有

$$
\left.
\begin{aligned}
&\mathrm{P}_x^\alpha\{\tau>t'\mid N_t\}= \\
&=\exp\left[\int_t^{t'} q(\alpha(x^*_{[0,s)}),s,x_t,E)\,ds\right]\quad(\text{a.e. }\mathrm{P}_x^\alpha),\\
&\mathrm{P}_x^\alpha\{x_\tau\in\Gamma\mid N_t(\tau)\}= \\
&=-\frac{q(\alpha(x^*_{[0,\tau)}),\tau,x_t,\Gamma)}{q(\alpha(x^*_{[0,\tau)}),\tau,x_t,E)}\quad(\text{a.e. }\mathrm{P}_x^\alpha),
\end{aligned}
\right\}\tag{1}
$$

其中 $\tau=\tau(t,\omega)$ 是 t 之后的首跳时刻, $N_t(\tau)$ 是 Ω 中包含 N_t 且使 τ 为可测的最小 σ 代数,当 $0\leqslant u\leqslant t$ 时 $x_u^*=x_u$, 当 $u>t$ 时 $x_u^*=x_t$. 随机过程 $\{(x_t)_{t\geqslant 0},\mathrm{P}_x^\alpha\}$ 就是一个受控跳跃 Марков 过程. 受控跳跃 Марков 过程的控制 **Марков 性** (Markov property) 在于,从一个已知的"现在" x_t, 其"过去" $(x_u)_{u<t}$ 仅通过策略 α 进入(1)式右边. 对于任一策略 $\alpha\in\mathfrak{A}_E$, 过程 $(x_t)_{t\geqslant 0}$ 一般并不是 Марков 过程,但如果 $\alpha\in\mathfrak{A}_M$,则得到一 Марков 过程;若更有 $\alpha\in\mathfrak{A}_S$, 且 q 不依赖于 t, 则得到一个有跳跃概率密度等于 $q(\alpha(x),x,\Gamma)$ 的时齐 Марков 过程. 过程的控制就在于从策略类中选择一个策略.

一个典型的控制问题是极大化某个泛函

$$
v^\alpha(x)=\mathrm{E}_x^\alpha\left[\int_0^T f^{\alpha_t}(t,x_t)\,dt+g(x_T)\right],\tag{2}
$$

其中 $f^a(t,x)$ 与 $g(x)$ 分别是 $A\times[0,\infty)\times E$ 和 E 上的有界 Borel 函数,而 T 为一确定的正数. 只要定义适当的函数 f 与 g 并引进虚拟状态, 一大类包含形如 $h^{\alpha_t}(\tau,x_{\tau-},x_\tau)$ 的项(τ 为跳跃时刻)并容许过程中断或停止的泛函,都可化成(2)的形式. 所谓价值函数 (value function) 是指函数

$$
v(x)=\sup_{\alpha\in\mathfrak{A}_E}v^\alpha(x),\quad x\in E.\tag{3}
$$

策略 α 称为 **ε 最优的** (ε-optimal), 如果对所有 $x\in E$ 有 $v^\alpha(x)\geqslant v(x)-\varepsilon$; 称为 **$\mu$ 几乎处处 ε 最优的** (μ-a.e. ε-optimal), 如果此不等式对 E 上测度 μ 而言的几乎所有 x 成立. 一个 0 最优策略则简称为最优策略 (optimal strategy). 现在,在如上描述的模型中将区间 $[0,\infty)$ 缩短为 $[t,\infty)$, 且在如前运用记号 A, E_x^α 及 $v(x)$ 的相似意义下运用相应的记号 $A(t)$, $\mathrm{E}_{t,x}^\alpha$ 及 $v(t,x)$. 把过程的跳跃依次看作一个受控离散时间 Марков 链的每一步,就可以建立起类 $\mathfrak{A}_E$ 中 μ 几乎处处 ε 最优策略的存在性,且获得 v 的下述可测性: $\{(t,x):v(t,x)>c\}$ 是一个解析集. 这使人们有可能应用**动态规划** (dynamic programming) 的思想而导出关系式

$$
v(t,x)=\sup_{\alpha\in\mathfrak{A}_E(t)}\mathrm{E}_{t,x}^\alpha\left[\int_t^{\tau_1} f^{\alpha_s}(s,x_s)\,ds+v(\tau_1,x_{\tau_1})\right],\tag{4}
$$

其中 $\tau_1=\min(\tau(t),t')$, $0\leqslant t<t'\leqslant T$ (Bellman 原理的一个变形). 当 $t'\downarrow t$ 时,由(4)与(1)可得 **Bellman 方程** (Bellman equation)

$$
-\frac{\partial v(t,x)}{\partial t}=\tag{5}
$$

$$
=\sup_{a\in A(x)}\left[f^a(t,x)+\int_E v(t,y)q(a,t,x,dy)\right]\quad(\text{a.e.})
$$

价值函数 $v(t,x)$ 是 $[0,T]\times E$ 上唯一的有界函数,依 t 绝对连续,且满足(5)及条件 $v(T,x)=g(x)$. 方程(5)可以用逐步逼近的方法来求解. 当 $\alpha\in\mathfrak{A}_M$ 时,从关于 Марков 过程 $(x_t)_{t\geqslant 0}$ 的 **Колмогоров 方程** (Kolmogorov equation) 推出: 若(5)中的上确界由一可测函数 $a=\alpha(t,x)$ 达到,则此 Марков 策略 α 是最优的. 由此可建立最优 Марков 策略在半连续模型(其中 A, q, f 与 g 满足定义的紧性与连续性条件)中的存在性,这特别适用于有穷模型(E 与 A 为有穷集). 在任意的 Borel 模型中,利用**可测选择定理** (selection theorems) 可以断定,对任何 $\varepsilon>0$, μ 几乎处处 ε 最优 Марков 策略的存在性. 在可数模型中则可获得 ε 最优的 Марков 策略. 这些结果可部分地推广到 $T=\infty$ 以及函数 f 与 g 为无界的情形,但一般而言 Марков 策略的充分性,即 Марков 策略在类 $\mathfrak{A}_E$ 中的最优性尚未得到证明.

对于f与g不依赖于t的时齐模型，可以与(2)平行地考虑泛函

$$v^{\alpha}(x) = \mathsf{E}_x^{\alpha}\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} f^{\alpha_t}(x_t)\,dt, \qquad (6)$$

$$v^{\alpha}(x) = \lim_{T\to\infty} \mathsf{E}_x^{\alpha}\frac{1}{T}\int_0^T f^{\alpha_t}(x_t)\,dt. \qquad (7)$$

并且进一步提出类$\mathfrak{A}_S$的充分性的问题. 如果$\lambda>0$且Borel函数$f^a(x)$是有界的，则对于泛函(6)，方程(5)变成

$$\lambda v(x) = \sup_{a\in A(x)}\left[f^a(x)+\int_E v(y)q(a,x,dy)\right]. \qquad (8)$$

这个方程与关于离散时间的类似问题的Bellman方程是一致的，且它有唯一的有界解. 如果(8)中的上确界由$a=\alpha(x)(\alpha\in\mathfrak{A}_S)$达到，则$\alpha$是最优的. 类似于上面的结果，也可以得到关于$\mathfrak{A}_S$中$\varepsilon$最优策略的存在性的结果. 对于准则(7)，仅仅对有穷与遍历受控跳跃Марков过程的特殊形式以及离散时间的类似情形，获得了完全的结果：可以选择$\alpha\in\mathfrak{A}_S$和E上的函数g，使α同时对所有的T关于准则(2)是最优的，从而关于准则(7)也是最优的.

受控扩散过程(controlled diffusion process). 这是一种取值于d维Euclid空间E_d的连续受控随机过程，它包含一项对某一外加的**Wiener过程**(Wiener process)的**随机微分**(stochastic differential). 受控扩散过程的理论是作为确定性受控系统理论的一种推广而产生的，后者由如下形式的方程表示：$dx_t=b(\alpha_t,s+t,x_t)dt$, $t\geqslant 0$，其中x_t为系统的状态，α_t为控制参量.

作为受控扩散过程的一种严格描述，我们采用伊藤随机微分方程的语言. 设$(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$为一完全概率空间，$\{\mathcal{F}_t: t\geqslant 0\}$为含于$\mathcal{F}$中的一族上升的完全$\sigma$代数，令$w_t=(w_t^i: i=1,\cdots,d_1)$为一定义在$(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$上的$d_1$维$\{\mathcal{F}_t\}$Wiener过程(即对每一$i$, w_t^i是1维连续的标准Wiener过程，过程$w_t^1,\cdots,w_t^{d_1}$是独立的，对每个t, i, w_t^i为$\mathcal{F}_t$可测，且对$t,h\geqslant 0$，随机变量$\{w_{t+h}^i-w_t^i: i=1,\cdots,d_1\}$独立于$\mathcal{F}_t$). 令$A$为一可分度量空间. 对于$\alpha\in A$, $t\geqslant 0$, $x=(x^i: i=1,\cdots,d)\in E_d$，假设给定了两个函数$\sigma(\alpha,t,x)$, $b(\alpha,t,x)$，其中$\sigma(\alpha,t,x)$为$(d\times d_1)$维矩阵而$b(\alpha,t,x)$为d维向量. 又假设σ, b是α, t, x的Borel函数，对x满足Lipschitz条件而其中常数不依赖于α, t，且$|\sigma^{ij}(\alpha,t,0)|$与$|b^i(\alpha,t,0)|$为有界的. 任一取值于$A$且关于$\{\mathcal{F}_t\}$为循序可测的过程$\alpha_t=\alpha_t(\omega)$ $(t\geqslant 0, \omega\in\Omega)$称为一个**策略**(strategy)(或**控制**(control))；$\mathfrak{A}$表示所有策略的集. 对每一$s>0$, $x\in E_d$, $\alpha\in\mathfrak{A}$，伊藤随机微分方程

$$dx_t = b(\alpha_t, s+t, x_t)dt + \sigma(\alpha_t, s+t, x_t)dw_t, \qquad (9)$$
$$x_0 = x$$

存在唯一的解(**伊藤定理**(Itô theorem)). 用$x_t^{\alpha,s,x}$记这个解，称为**受控扩散过程**(controlled diffusion process)或**扩散型受控过程**(controlled process of diffusion type)；它由策略$\alpha=\alpha_t$的选择而受到控制，除$\mathfrak{A}$中的策略外，还可考虑其他的策略类. 令$C([0,\infty),E_d)$为$[0,\infty)$上取值于E_d的连续函数的空间. 半轴$[0,\infty)$可解释为时间t的值集. $C([0,\infty),E_d)$的元记作$x_{[0,\infty)}$. 又设N_t为$C([0,\infty),E_d)$子集的最小σ代数，使当$s\leqslant t$时空间$C([0,\infty),E_d)$中的坐标函数x_s均为可测. 一个取值于A的函数$\alpha=\alpha_t(x_{[0,\infty)})$称为在点$(s,x)$容许的**自然策略**(natural strategy)或**自然控制**(natural control)，如果它关于$\{N_t\}$为循序可测，且对$\alpha_t=\alpha_t(x_{[0,\infty)})$，方程(9)至少存在一个关于$\{\mathcal{F}_t\}$为循序可测的解. 所有在$(s,x)$容许的自然策略构成的集记为$\mathfrak{A}_E(s,x)$，其中由所有形如$\alpha_t(x_t)$的自然策略组成的子集记为$\mathfrak{A}_M(s,x)$，称为在点$(s,x)$容许的**Марков策略**(Markov strategy)或**Марков控制**(Markov control)集. 可以说，一个自然策略确定一个在t时刻基于过程x_r在时间区间$[0,t]$上的观测的方程，而一个Марков策略则确定一个仅基于过程在t时刻的观测的方程. 对$\alpha\in\mathfrak{A}_E(s,x)$(甚至对$\alpha\in\mathfrak{A}_M(s,x)$)，(9)的解不必唯一. 因此，对每一$s\geqslant 0$, $x\in E_d$, $\alpha\in\mathfrak{A}_E(s,x)$，可任意固定(9)的一个解，记为$x_t^{\alpha,s,x}$.

然后，利用公式$\beta_t(\omega)=\alpha_t(x_{[0,\infty)}^{\alpha,s,x}(\omega))$定义一个嵌入$\mathfrak{A}_E(s,x)\subset\mathfrak{A}$，其中$x_t^{\beta,s,x}=x_t^{\alpha,s,x}$几乎处处成立.

控制的目的通常是极大化或极小化轨道$x_t^{\alpha,s,x}$的某一泛函的期望. 问题的一般提法如下. 在$A\times[0,\infty)\times E_d$上定义Borel函数$C^{\alpha}(t,x)\geqslant 0$及$f^{\alpha}(t,x)$，在$[0,\infty)\times E_d$上定义Borel函数$g(t,x)$. 对$\alpha\in\mathfrak{A}$, $s\geqslant 0$, $x\in E_d$，用τ_Q记$(s+t, x_t^{\alpha,s,x})$首次从$Q\subset[0,\infty)\times E_d$越出的时刻，令

$$\left.\begin{aligned} \varphi_t^{\alpha,s,x} &= \int_0^t C^{\alpha_r}(s+r, x_r^{\alpha,s,x})\,dr, \\ v^{\alpha}(s,x) &= \\ = \mathsf{E}_{s,x}^{\alpha}&\left[\int_0^{\tau_Q} e^{-\varphi_t} f^{\alpha_t}(s+t,x_t)\,dt + g(s+\tau_Q, x_{\tau_Q})e^{-\varphi_{\tau_Q}}\right],\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

其中期望符号的指标α, s, x意味着它们是按期望符号的需要而引进的. 由此引出的问题是要确定一个极大化$v^{\alpha}(s,x)$的策略α，以及确定**价值函数**(value function)

$$v(s,x) = \sup_{\alpha\in\mathfrak{A}} v^{\alpha}(s,x). \qquad (11)$$

使$v^{\alpha}(s,x) \geqslant v(s,x) - \varepsilon$的策略 α, 称为关于点$(s,x)\in$最优的(ε-optimal). 最优的(optimal)则是指 0 最优策略. 如果在(11)中集 $\mathfrak{A}$ 由 $\mathfrak{A}_E(s,x)$ ($\mathfrak{A}_M(s,x)$) 代替,则相应的最小上界用$v_{(E)}(s,x)$($v_{(M)}(s,x)$)来标记. 因为包含关系 $\mathfrak{A}_M(s,x)\subset\mathfrak{A}_E(s,x)\subset\mathfrak{A}$ 成立,由此推得 $v_{(M)}(s,x)\leqslant v_{(E)}(s,x)\leqslant v(s,x)$. 在适当宽的假设下(见[3]), 已知有$v_{(E)}=v$ (例如,当 σ, b, c, f, g 依(α,x)连续,且对每一 t,当把α视为参数时,这些函数依 x 等度一致连续,又对所有α, t, x,函数f, c, g的绝对值以$K(1+|x|)^m$为界,其中K, m不依赖于α, t, x, 即有此结论). 至于在一般情形下等式$v_{(M)}=v$成立的问题,尚未解决.动态规划思想的一个形式的应用就是将这些结果化为所谓的 Bellman 原理:

$$v(s,x) = \sup_{\alpha\in\mathfrak{A}} \mathsf{E}^{\alpha}_{s,x}\left[\int_0^{\tau} e^{-\phi_t} f^{\alpha_t}(s+t,x_t)\,dt + v(s+\tau,x_{\tau})e^{-\phi_{\tau}}\right], \qquad (12)$$

其中 $\tau^{\alpha,s,x}$是任意定义的不超过$\tau_Q^{\alpha,s,x}$的停时(见 **Марков** 时(Markov moment)). 若在(12)中用$t\wedge\tau_Q=\min(t,\tau_Q)$代替 τ, 同时对$v(s+\tau,x_{\tau})e^{-\varphi_{\tau}}$应用伊藤公式, 则通过不太严格的讨论后,可得 Bellman 方程:

$$\sup_{\alpha\in A}(L^{\alpha}v+f^{\alpha}) = 0, \qquad (13)$$

其中

$$L^{\alpha}v = \frac{\partial v}{\partial s} + a^{ij}(\alpha,s,x)\frac{\partial^2 v}{\partial x^i\partial x^j} + b^i(\alpha,s,x)\frac{\partial v}{\partial x^i} - c^{\alpha}(s,x)v, \qquad (14)$$

而这里的指标i, j是约定为从 1 到 d 求和的;矩阵 a 则由下式定义:

$$a(\alpha,s,x) = (a^{ij}(\alpha,s,x)) = \frac{1}{2}\sigma(\alpha,s,x)\sigma^*(\alpha,s,x).$$

Bellman 方程在受控扩散过程理论中起着核心的作用,因为往往它的一个在边界∂Q上等于g的足够"好"的解就是价值函数,而若 $\alpha=\alpha^0(s,x)$ 对每一(s,x)达到(13)中的最小上界,且$\alpha_t^0=\alpha^0(s_0+t,x_t)$是在$(s_0,x_0)$容许的 Марков 策略,则策略$\alpha^0=\{\alpha_t^0\}$在点$(s_0,x_0)$处是最优的. 由此有时可以证得$v_{(M)}(s_0,x_0)=v(s_0,x_0)$.

这些结果的严格证明会遇到严重的困难,它们是与方程(13)的非线性特征相联系的,因为一般该方程是一个非线性退化抛物型方程. 最简单的情形是,(13)为一非退化拟线性方程(矩阵 a 不依赖于 α 且在 Q 中一致非退化). 这时,对 Q, a, b, c, f, g 再加上某些限制,可以利用拟线性抛物型方程理论的结果证明(13)在 Hölder 函数类中的可解性,从而基于(13)的解给出一个构造 ε 最优策略的方法. 类似的方法可用于一维情形(见[3]), 此时设$Q=(-\infty,\infty)\times(r_1,r_2)$, a, b, c, f, g 是有界的且不依赖于 s, 且 a 有一致的正下界. 在此情形下,(13)简化为(r_1,r_2)上的二阶拟线性方程,使$\dfrac{\partial v}{\partial s}=0$, 而(13)可以由它的最高阶导数$v_{xx}$解出. 甚至当$Q=(-\infty,\infty)\times D$(其中 D 为 2 维区域), 而 a, b, c, f, g 仍不依赖于 s 时,微分方程论的方法也有助于(13)的研究(见[3]). 此时,如同先前的情形,允许 a 依赖于 α. 与此有关还可提及 Hamilton - Jacobi 方程($a\equiv 0$)的情形,它也可以用微分方程论的方法进行研究(见[5]).

用随机过程论的方法可以证明, 若 $Q=(-\infty,T)\times E_d(T\leqslant\infty)$,在对 σ, b, c, f, g 加以某些平滑性假定的更一般的情形下,价值函数 v 满足方程(13)(见[3]).

与受控运动问题一道,还可以考虑受控过程对于一人或二人的最优停止问题,例如,对$\alpha\in\mathfrak{A}$及任意停时τ,极大化形如下式的价值泛函:

$$v^{\alpha,\tau}(s,x) = \mathsf{E}^{\alpha}_{s,x}\left[\int_0^{\tau_Q\wedge\tau} e^{-\phi_t} f^{\alpha_t}(s+t,x_t)\,dt + g(s+\tau_Q\wedge\tau, x_{\tau_Q\wedge\tau})e^{-\phi_{\tau_Q\wedge\tau}}\right].$$

与受控扩散过程理论有关的,还有受控部分观测过程以及随机过程的控制问题,其中控制是从相应于扩散型过程的某个给定的测度类中选择一个$(C([0,\infty),E_d),N_{\infty})$上的测度来实现的(见[3],[4],[6],[7],[8]).

参考文献

[1] Гихман, И. И., Скороход, А. В., Управляемые случайные процессы, К., 1977 (英译本: Gikhman, I. I. and Skorokhod, A. V., Controlled stochastic processes, Springer, 1977).

[2] Ющкевич, А. А., 《Теория вероятностей и ее применения》, 25 (1980), 247−270.

[3] Крылов, Н. В., Управляемые процессы диффузионного типа, М., 1977 (英译本: Krylov, N. V., Controlled diffusion processes, Springer, 1980).

[4] Fleming, W. H. and Rishel, R. W., Deterministic and stochastic optimal control, Springer, 1975.

[5] Кружков, С. Н., 《Матем. сб.》, 98 (1975), 3, 450−493.

[6] Липцер, Р. Ш., Ширяев, А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974 (中译本: Р. Ш. 里普切尔,

A. H. 史里亚耶夫,随机过程统计,宇航出版社,1987).

[7] Wonham, W. M., On the separation theorem of stochastic control, *SIAMJ. Control*, 6(1968), 312–326.

[8] Davis, M. H. A., The seperation principle in stochastic control via Girsanov solutions, *SIAM J. Control and Optimization*, 14(1976), 176–188.

Н. В. Крылов　А. Н. Ширяев　А. А. Юшкевич 撰

【补注】 上述的 Bellman 方程(方程 (5), (13))有时又称为 Bellman - Hamilton - Jacobi 方程 (Bellman - Hamilton - Jacobi equation).

受控扩散过程又被定义为某一 Euclid 空间中的受控随机过程,其测度容纳一对某个独立于控制的 Wiener 过程的 Radon - Nikodym 导数 (Radon - Nikodym derivative).

在受控随机过程理论中除上述内容外,还有许多重要课题. 受控阶梯(跳跃)过程由于缺乏重要应用因而意义不大. 下面的评注力求从更广的角度对待这个主题,同时指出某些近期的技巧上的改进.

离散时间受控过程(controlled processes in discrete time). 它们通常由如下的状态转移方程所规定:

$$x_{t+1}=f(x_t,\ u_t,\ w_t),\ t=0,\ 1,\ \cdots. \qquad (A1)$$

这里 x_t 是时刻 t 的状态, u_t 是控制, 而 w_t 是一给定的独立同分布、且其共同分布函数为 F 的随机变量序列. 如果初始状态 x_0 独立于 $\{w_t: t\geqslant 0\}$, 而控制 u 具有 Марков 性, 即 $u\in\mathfrak{A}_M$, $u_t=u(t,\ x_t)$, 那么由(A1)定义的过程 x_t 是 Марков 过程. 控制目标通常是极小化费用函数(cost function):

$$J_{N,u}(x)=\mathsf{E}_x\left[\sum_{t=0}^{N-1}\beta^t c(x_t,\ u_x)+\beta^N\Phi(x_N)\right].$$

步数 N 可以为有穷或无穷; $\beta\in(0,\ 1]$ 为折扣因子(discount factor). 带终端费用 φ 的一步费用为

$$T_u\varphi(x)=c(x,\ u)+\beta\mathsf{E}_x\varphi(x_1)=$$
$$=c(u,\ x)+\beta\int\varphi(f(x,\ u,\ w_0))dF(w_0).$$

定义

$$T\varphi(x)=\inf_u T_u\varphi(x);$$

则动态规划 (dynamic programming)原理表明

$$\inf_{u\in\mathfrak{A}_M} J_{N,U}(x)=T^n\Phi(x),$$

其中 $T^2\Phi=T(T\Phi)$, 等等, 而最优控制 $u_t^*(x)$ 是使

$$T_U\cdot T^{N-t-1}\Phi(x)=\inf_u T_u T^{N-t-1}\Phi(x)$$

的 u 值. 在无穷极限情形 ($N=\infty$), 可以预料: 当 $\beta<1$ 时会有

$$\inf_{u\in\mathfrak{A}_M} J_{\infty,u}(x)=\lim_{N\to\infty}T^N\Phi(x)=: J^*(x),$$

且 J^* 将满足 Bellman 泛函方程(Bellman functional equation)

$$J^*(x)=TJ^*(x).$$

离散时间控制的一般理论就是研究在何种条件下, 上述类型的结果可严格加以证实. 一般而言, 收缩性 ($\|T_u\varphi-T_u\psi\|\leqslant\rho\|\varphi-\psi\|$, $\rho<1$) 或单调性 ($T_u\varphi\leqslant\varphi$) 的条件是必需的. 如果 c, f, φ 仅仅是 Borel 函数, $T\varphi$ 不必是可测的. 但是, 如果这些函数是下半解析的, 则 $T\varphi$ 也是下半解析的, 而且可以证明普遍可测的 ε 最优策略的存在性. [A1], [A2] 是这一理论的优秀参考文献.

Bellman 方程的粘滞解. 回到受控扩散问题(9), (10), Bellman 方程(A1)可以表示为

$$F(D^2v,\ Dv,\ v,\ x)=0, \qquad (A2)$$

其中 $(Dv)_i=\partial v/\partial x^i$, $(D^2v)_{ij}=\partial v/\partial x^i\partial x^j$, 而 F 与(13)的左边相一致. 如正文所指出的那样, 要判定由(12)定义的价值函数在何种意义下(如果存在)满足(A2), 是一件困难的事. 在[A3]中对一阶方程引进的 Bellman 方程的粘滞解的概念, 提供了此问题的一个解答. 函数 $v\in C(Q)$ 称为(A2)的一个粘滞解(viscosity solution), 如果对所有 $\varphi\in C^2(Q)$, 在 $v-\varphi$ 的任何局部极大点有

$$F(D^2\varphi,\ D\varphi,\ v,\ x)\leqslant 0,$$

在 $v-\varphi$ 的任何局部极小点有

$$F(D^2\varphi,\ D\varphi,\ v,\ x)\geqslant 0.$$

注意(A2)的任何 C^2 解都是粘滞解, 同时如果一粘滞解在某点 x_0 处是 C^2 的, 则(A2)将在 x_0 处满足. 可以在很一般的条件下证明, 如果(12)中的价值函数 v 是连续的, 则它是(A2)的粘滞解. 这一结果的证明可参考[A14], 且包括使 v 为连续的条件及其他有关粘滞解的唯一性与正则性的结果.

概率方法. 受控扩散理论与偏微分方程有紧密的联系. 但是, 关于最优控制的存在性及随机极大原理(见下)的最一般结果, 可以用纯概率方法求得. 对于扩散模型(9), 当 σ 不依赖于 α 且 $a=\sigma\sigma^*$ 为一致正定时, 这一方法表述如下. 在此情形下, 对任一反馈控制 ($\alpha_t=\alpha(t,\ x_{[0,t]})$) 可以定义(9)的一个弱解(weak solution); 用 A_F 表示这种控制的集合, 且用 E^α 表示当 $\alpha\in A_F$ 时对 x 的样本空间测度求期望. 假设极大化支付(亦见增益函数(gain function))为

$$\mathsf{E}^\alpha\left[\int_0^T f(x_t,\ \alpha_t)dt+g(x_T)\right],$$

其中 T 为一固定时刻. 定义

$$W_t = \operatorname{ess}\sup_{\alpha\in A_T} \mathrm{E}^{\alpha}\left[\int_t^T f(x_s,\alpha_s)ds + g(x_T)|\mathscr{F}_t\right],$$

其中 $\mathscr{F}_t=\sigma\{x_s: 0\leqslant s\leqslant t\}$. 再由下式定义一纯量过程 (M_t^{α}):

$$M_t^{\alpha}=\int_0^t f(x_s,\alpha_s)ds+W_t.$$

由此, M_t^{α} 是在给定控制选择及到 t 时为止的过程发展的条件下, 其总体支付(total pay-off)的最大期望值. 可以证明, M_t^{α} 恒为上鞅(见鞅(martingale)), 且当且仅当 α 为最优时, M_t^{α} 为鞅. M_t^{α} 有 Doob-Meyer 分解(Doob-Meyer decomposition) $M_t^{\alpha}=N_t^{\alpha}-A_t^{\alpha}$, 其中 N_t^{α} 为鞅, 而 A_t^{α} 为连续增过程. 所以 α 为最优的当且仅当 $A_t^{\alpha}\equiv 0$. 由鞅表示定理(martingale representation theorem) (见鞅(martingale)), N_t^{α} 恒可表成如下形式:

$$N_t^{\alpha}=\int_0^t p_s'\sigma(x_s)dw_s^{\alpha},$$

其中 w^{α} 是出现在(9)式带控制 (α_t) 的弱解中的 Wiener 过程. 容易证明, p_s 不依赖于 α, 且对 $\alpha_1,\alpha_2\in A_T$, A^{α_1} 与 A^{α_2} 之间有关系式

$$A_t^{\alpha_2}=A_t^{\alpha_1}+\int_0^t(H_s^{\alpha_1}-H_s^{\alpha_2})ds,$$

其中

$$H_s^{\alpha}=p_s'b(x_s,\alpha_s)+f(x_s,\alpha_s).$$

由此立即得到一个极大值原理(maximum principle): 若 α_1 为最优的, 则 $A^{\alpha_1}=0$; 但 A^{α_2} 是增加的, 所以必然有 $H_s^{\alpha_1}\geqslant H_s^{\alpha_2}$ 几乎处处成立, 它表明

$$p_s'b(x_s,\alpha_s^1)+f(x_s,\alpha_s^1)=\max_{\alpha}\{p_s'b(x_s,\alpha)+f(x_s,\alpha)\}. \quad (A3)$$

还可得到一个存在性定理(existence theorem): 因为 p_s 对所有控制都是相同的, 于是可取

$$\alpha_s^*=\arg\max_{\alpha}[p_s'b(x_s,\alpha)+f(x_s,\alpha)]$$

来构造一个最优控制 α^*. 类似的技巧还可应用于非常一般的受控随机微分系统(不只是受控扩散)以及最优停止与脉冲控制问题(见下). 一般的参考文献有[A5], [A6]. 这一理论的某些部分已用**非标准分析**(non-standard analysis)的方法加以研究(见[A7]).

随机最大值原理(stochastic maximum principle). 上述的必要条件(A3)并不是一个真的最大值原理, 因为其中的"伴随变量" p_t 仅仅是隐含地表出的. 在[A8]及其他文献中证明, 在相当宽的条件下, p_t 由下式给出:

$$p_t'=\mathrm{E}^{\alpha_1}\left[\int_t^T f_x(x_s,\alpha_s^1)\Psi(s,t)ds+g_x(x_T)\Psi(T,t)|\mathscr{F}_t\right],$$

其中 α^1 是一个最优控制, 而 $\Psi(s,t)$ 是当控制为 α^1 时相应于(9)的线性化或导数系统的基本解, 即它满足

$$d\Psi(t,s)=b_x(x_t,\alpha_t^1)\Psi(t,s)dt+\sigma_x(x_t)\Psi(t,s)dW_t^{\alpha^1},$$

$$\Psi(s,s)=\text{单位元}.$$

由此给出随机最大值原理, 其形式直接模仿确定性最优控制理论的**Понтрягин 最大值原理**(Pontryagin maximum principle).

脉冲控制(impulse control). 在许多重要应用中, 控制并非连续实施, 而一系列的"干预"是在孤立的时刻进行的. 脉冲控制理论就是这类问题的数学形式. 设 $X=(\Omega,\mathscr{F}_t,\mathrm{P}_x,x_t)$ 为状态空间 E 上的时齐 Марков 过程, 其中 $\Omega=D_E[0,\infty)$ (右连续且有左极限的 E 值函数的集合). 令 T_t 为其相应的半群: $T_t\varphi(x)=\mathrm{E}_x\varphi(x_t)$, 一个受控过程 (y_t) 可非严格地定义如下. 策略 S 是随机时间 τ_n 和状态 ξ_n 的序列 $(\tau_n,\xi)_{n\geqslant 1}$, 其中 τ_n 是严格增加的. (y_t) 开始于某一固定点 x, 随之是 (x_t) 的一个直到时刻 τ_1 的实现. 在 τ_1, (y_t) 的位置被移至 $y_{\tau_1}=\xi_1$, 然后再随之以 (x_t) 的一个始于 ξ_1 的实现, 直到时刻 τ_2; 如此等等. 承载 (y_t) 的一个"滤过的"概率空间 $(\hat{\Omega},G_t,\mathrm{P})$ 以这样的方式来构造: 使 (y_t) 适应于 G_t (见**最优随机过程**(optimal random process)), 且对每个 k, τ_k 为 G_t 停时而 ξ_k 为 G_{τ_k} 可测. 用极小化某一费用函数 J_S 的语言来陈述优化问题是比较方便的, J_S 一般取如下形式:

$$J_s(x)=\mathrm{E}_x\left[\int_0^{\infty}e^{-\beta t}f(y_t)dt+\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\beta\tau_k}c(y_{\tau_k-},y_{\tau_k})\right].$$

假设 $\beta>0$, 而 $f,c\geqslant c_0>0$; 这样就排除了在有限时间区间内多于有穷次"干预"的那些策略. 价值函数是

$$v(x)=\inf_S J_S(x).$$

由

$$M\varphi(x)=\inf_{\xi}[c(x,\xi)+\varphi(\xi)]$$

定义算子 M. 当 E 为紧空间且 x_t 为 **Feller 过程**(Feller process)时可以证明([A9]), v 是连续的, 且 v 是满足如下两不等式的最大连续函数:

$$v\leqslant Mv, \quad (A4)$$

$$v\leqslant e^{-\beta t}T_tv+\int_0^t e^{-\beta s}T_sf\,ds. \quad (A5)$$

最优策略 (τ_k^*,ξ_k^*) 是

$$\tau_k^*=\inf\{t\geqslant\tau_{k-1}^*: v(y_t)=Mv(y_t)\},$$

$$\xi_k^*=\arg\min_{\xi}Mv(y_{\tau^*-}).$$

于是, 状态空间 E 划分为一个延续集(continuation set), 其中 $v<Mv$; 一个干预集(intervention set), 其

中 $v=Mv$. 此外, v 是如下方程的唯一解:

$$v(x)=\inf_{\tau} \mathsf{E}_x\left[\int_0^{\tau} e^{-\beta s}f(x_s)ds+e^{-\beta\tau}Mv(x_\tau)\right], \quad (A6)$$

其中下确界是对所有 $\mathscr{F}_t$ 停时 τ 的集合来取的. 这表明了脉冲控制与最优停止(optimal stopping)之间的紧密联系: (A6)是过程 (x_t) 的、含隐障碍(implicit obstacle) Mv 的最优停止问题. 对右过程(right process)也得到了类似的结果([A6], [A10]); 且其中的可测性质更加精细. 脉冲控制的解析理论也有丰富成果. 设 $v\in\mathscr{D}(A)$, 其中 A 是 (x_t) 的微分生成元, 由(A5)得

$$Av-\beta v+f\geqslant 0. \quad (A7)$$

此外, 在每一 x 处, (A4), (A7)至少有一个等号成立, 即

$$(Av(x)-\beta v(x)+f(x))(Mv(x)-v(x))=0,\ x\in E. \quad (A8)$$

方程(A4), (A7), (A8)刻画了 v, 而且对于扩散过程(即当 A 为二阶微分算子时), 已用拟变分不等式(quasi-variational inequality)方法进行了广泛的研究([A11]). 并获得了存在性与正则性.

应用非扩散模型的控制 运筹学(operations research)中的许多应用问题(例如排队系统或存储控制)涉及非扩散随机模型的最优化. 这是正文所述的跳跃过程的推广, 它们考虑跳跃之间的非常值轨道以及各种类型的边界性态. 对这类问题, 已经为创建一个统一的理论进行了多种尝试: 分段确定性的 Марков 过程(piecewise-deterministic Markov process) ([A12]), Марков 决策漂移过程(Markov decision drift process) ([A13], [A14]). 对连续控制与脉冲控制, 以及离散化方法与计算技巧, 都已进行了研究.

部分观测过程的控制 (control of partially-observed processes). 除了近期的若干重要进展外, 这一主题远未完全解决. 它是与非线性滤波(non-linear filtering)理论密切关联的. 考虑一个如(9)中的受控扩散, 其中的控制必须基于由下式给出的纯量过程 (y_t) 的观测:

$$dy_t=h(x_t)dt+dw_t^0 \quad (A9)$$

((w_t^0) 是另一独立的 **Wiener 过程** (Wiener process), 而 h, 譬如说, 是有界的), 且具有极大化的支付泛函形如

$$J(\alpha)=\mathsf{E}\left[\int_0^T f(x_s,\alpha_s)ds+g(x_T)\right],$$

问题可陈述如下. 设 (w_t, y_t) 是某一概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P}_0)$ 上相互独立的 Wiener 过程, $\mathscr{Y}_t$ 是 (y_t) 的自然滤子. 容许控制集 A_Y 是所有适应于 $\mathscr{Y}_t$ 的 A 值过程 (α_t). 在标准条件下, 对 $\alpha\in A_Y$, (9)有唯一的强解(strong solution). 现在, 在 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上由下式定义一个测度(measure) P:

$$\frac{dP}{dP_0}=\exp\left[\int_0^T h(x_t)dy_t-\frac{1}{2}\int_0^T h^2(x_s)ds\right].$$

由 Гирсанов 定理(Girsanov theorem), P 是一个概率测度(probability measure), 而 $dw_t^0:=dy_t-h(x_t)dt$ 是测度 P 下的 Wiener 过程. 因此 (x_t, y_t) 在 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上满足(9)和(A9). 对任何函数 φ, 置 $\pi_t(\varphi):=\mathsf{E}\{\varphi(x_t)|\mathscr{Y}_t\}$. 根据 Kallianpur-Striebel 公式(Kallianpur-Striebel formula). $\pi_t(\varphi)=\sigma_t(\varphi)/\sigma_t(1)$, 其中 1 表函数 $1(x)=1$, 而

$$\sigma_t(\varphi)= =\mathsf{E}_0\left[\varphi(x_t)\exp\left[\int_0^t h(x_s)dy_s-\frac{1}{2}\int_0^t h^2(x_s)\,ds\right]\Big|\mathscr{Y}_t\right].$$

σ_t 可认为是给定 $\mathscr{Y}_t$ 时 x_t 的非正规化条件分布; 它满足 Zakai 方程(Zakai equation)

$$d\sigma_t(\varphi)=\sigma_t(L^{\alpha}\varphi)dt+\sigma_t(h\varphi)dy_t, \quad (A10)$$

其中 L^{α} 由(14)置 $c^{\alpha}\equiv 0$ 给出. 由**条件数学期望**(conditional mathematical expectation)的性质推出, $J(\alpha)$ 可表为:

$$J_0(\alpha)=\mathsf{E}_0\left[\int_0^T\hat{f}(\sigma_t,\alpha_t)dt+\hat{g}(\sigma_t)\right],$$

其中 $\hat{g}(\sigma_t):=\sigma_t(g)$, 而 $\hat{f}(\sigma_t,\alpha_t):=\sigma_t(f(\cdot,\alpha_t))$. 这表明, 部分观测问题(9)与(A9), 等价于概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{Y}_t,\mathsf{P}_0)$ 上的完全观测问题(A10)与(A11), 其中受控过程是测度值扩散 σ_t. 最优控制的存在性问题已被广泛研究. 结果似乎是, 仅当某种形式的随机化被引进时, 最优控制是存在的; 见[A7], [A15], [A16]. 除此之外, 极大值原理已经得到([A17], [A18]), 同时着手了 Bellman 方程的某些预备性研究([A19]).

参考文献

[A1] Bertsekas, D. P. and Shreve, S. E., Stochastic optimal control: the discrete-time case, Acad. Press, 1978.

[A2] Dynkin, E. B. and Yushkevich, A. A., Controlled Markov processes, Springer, 1979.

[A3] Crandall, M. G. and Lions, P. L., Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **277** (1983), 1–42.

[A4A] Lions, P. L., Optimal control of diffusion processes and Hamilton-Jacobi-Bellman equations Part I, *Comm. Partial Differential Eq.*, **8** (1983), 1101–1134.

[A4B] Lions, P. L., Optimal control of diffusion processes and Hamilton-Jacobi-Bellman equations Part

Ⅱ, *Comm. Partial Differential Eq.*, **8** (1983), 1229 − 1276.

[A5] Elliott, R. J., Stochastic calculus and applications, Springer, 1982.

[A6] El Karoui, N., Les aspèctes probabilistes du contrôle stochastique, Lectures Notes in Math., 876, Springer, 1980.

[A7] Albeverio, S., Fenstad, J. E., Høegh - Krohn, R. and Lindstrøm, T., Nonstandard methods in stochastic analysis and mathematical physics, Acad. Press, 1986.

[A8] Haussmann, U. G., A stochastic maximum principle for optimal control of diffusions, Pitman, 1986.

[A9] Robin, M., Contrôle impulsional des processus de Markov, Univ. Paris IX, 1978. Thèse d'Etat.

[A10] Lepeltier, J. P. and Marchal, B., Théorie générale du contrôle impulsionel Markovien, *SIAM. J. Control and Optimization*, 22 (1984), 645 − 665.

[A11] Bensoussan, A. and Lions, J. L., Impulse control and quasi - variational inequalities, Gauthier - Villars, 1984.

[A12] Davis, M. H. A., Piecewise - deterministic Markov processes: a general class of non - diffusion stochastic models, *J. Royal Statist. Soc.* (*B*), **46** (1984), 353 − 388.

[A13] van der Duyn Schouten, F. A., Markov decision drift processes. CWI, Amsterdam, 1983.

[A14] Yushkevich, A. A., Continuous - time Markov decision processes with intervention, *Stochastics*, **9** (1983), 235 − 274.

[A15] Fleming, W. H. and Paradoux, E., Optimal control for partially - observed diffusions, *SIAM J. Control and Optimization*, **20** (1982), 261 − 285.

[A16] Borkar, V. S., Existence of optimal controls for partially - observed diffusions, *Stochastics*, **11** (1983), 103 − 141.

[A17] Bensoussan, A., Maximum principle and dynamic programming approaches of the optimal control of partially - observed diffusions, *Stochastics*, **9** (1983), 169 − 222.

[A18] Haussmann, U. G., The maximum principle for optimal control of diffusions with partial information, *SIAM J. Control and Optimization*, **25** (1987), 341 − 361.

[A19] Beneš, V. E. and Karatzas, I., Filtering of diffusions controlled through their conditional measures, *Stochastics*, **13** (1984), 1 − 23.

[A20] Bertsekas, D. P., Dynamic programming and stochastic control, Acad. Press, 1976.

[A21] Kushner, H. J., Stochastic stability and control, Acad. Press, 1967.

[A22] Striebel, C., Optimal control of discrete time stochastic systems, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 110, Springer, 1975.

[A23] Lions, P. L., On the Hamilton - Jacobi - Bellman equations, *Acta Appl. Math.*, **1** (1983). 17 − 41.

[A24] Robin, M., Long - term average cost control problems for continuous time Markov processes. A survey, *Acta Appl. Math.*, **1** (1983), 281 − 299.

潘一民 译

几乎必然收敛 [**convergence, almost - certain** (或 **almost-sure**); **сходимость почти наверное**], 以概率 1 收敛 (convergence with probability one)

在某一概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$ 上定义的随机变量序列 $X_1, X_2, \cdots$ 按下列方式定义的,向某一随机变量 X 的收敛: $X_n \xrightarrow{as} X$ (或 $X_n \to X$, P 几乎必然), 如果

$$\mathrm{P}\{\omega: |X_n(\omega) - X(\omega)| \to 0\} = 1, \quad \omega \in \Omega.$$

在数学分析中, 这种收敛形式称为几乎处处收敛 (almost - everywhere convergence). **依概率收敛** (convergence in probability) 可由几乎必然收敛推出.

B. И. Битюцков 撰

【补注】 亦见**收敛性的类型** (convergence, types of); **概率测度的弱收敛** (weak convergence of probability measures); **分布(的收敛)** (distribution, convergence of).

史树中 译

几乎处处收敛 [**convergence, almost - everywhere; сходимость почти всюду**]

见**收敛性的类型** (convergence, types of).

离散收敛 [**convergence, discrete; сходимость дискретная**]

格形式的函数和算子在对应空间中的收敛性. 设 E, F, E_n, F_n ($n \in \mathbf{N} = \{1, 2, \cdots\}$) 是 Banach 空间, $P = \{p_n\}$ 和 $Q = \{q_n\}$ 是线性算子 (连结映射) 系, $p_n: E \to E_n$, $q_n: F \to F_n$, 且有下列性质: 对于所有 $x \in E$, $y \in F$, $n \in \mathbf{N}$,

$$\| p_n x \| \to \| x \|, \quad \| q_n y \| \to \| y \|$$

成立,

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{A} & F \\ p_n \downarrow & & \downarrow q_n \\ E_n & \underset{A_n}{\rightarrow} & F_n. \end{array}$$

一个序列 $\{x_n\}_{n \in N' \subset \mathbf{N}}$ ($x_n \in E_n$):

a) 离散收敛(或P收敛)于$x\in E$, 如果$\|x_n-p_nx\|\to 0(n\in N')$;

b) 为离散紧的(discretely compact)(或P紧的(P-compact)), 如果对于每个无限集$N''\subset N'$, 存在无限集$N'''\subset N''$, 使得子列$\{x_n\}_{n\in N'''}$离散收敛.

一个算子$A_n: E_n\to F_n$的序列$\{A_n\}_{n\in N}$:

a) 离散收敛(或PQ收敛)于算子$A: E\to F$, 如果对于任何P收敛序列$\{x_n\}$, 关系式

$$x_n\xrightarrow{P}x\ (n\in\mathbf{N})\Rightarrow A_nx_n\xrightarrow{Q}Ax\ (n\in\mathbf{N}) \qquad (1)$$

成立;

b) 紧收敛于A, 如果除(1)外, 下列条件满足: $x_n\in E_n$, $\|x_n\|\leqslant$常数$(n\in\mathbf{N})\Rightarrow\{A_nx_n\}$是$Q$紧的;

c) 正则(或正常)收敛于A, 如果除(1)外, 下列条件满足: $x_n\in E_n$, $\|x_n\|\leqslant$常数, $\{A_nx_n\}$是Q紧的$\Rightarrow\{x_n\}$是P紧的;

d) 稳定收敛于A, 如果除(1)外, 下列条件满足: 存在$A_n^{-1}\in L(F_n,E_n)$使得$\|A_n^{-1}\|\leqslant$常数 $(n\leqslant n_0)$.

设A和A_n是有界线性算子, 那么$A_n\to{}^{PQ}A$, 当且仅当$\|A_n\|\leqslant$常数$(n\in\mathbf{N})$以及对于E中的某个稠密子集的每个点x, 有$\|A_np_nx-q_nAx\|\to 0$.

对于有界线性算子A和A_n, 下列条件等价:

1) $A_n\xrightarrow{PQ}A$(稳定地), $AE=F$;

2) $A_n\xrightarrow{PQ}A$(正则地), $Ax=0\Rightarrow x=0$, 且算子$A_n(n\geqslant n_0)$是指数为零的 Fredholm 算子;

3) $A_n\xrightarrow{PQ}A$(稳定且正则地).

如果这些条件之一满足, 那么A^{-1}和A_n^{-1}(对于充分大的n)存在, 且$A_n^{-1}\xrightarrow{QP}A^{-1}$(稳定且正则地). 条件1), 2)和3)的满足, 可以解释为对于方程$Ax=y$和$A_nx_n=y_n$的收敛定理: 如果1), 2)或3)满足, 那么$y_n\xrightarrow{Q}y$蕴涵下列收敛性:

$$x_n=A_n^{-1}y_n\xrightarrow{P}A^{-1}y=x$$

且其收敛速率可估计为

$$c_1\|A_np_nx-y_n\|_{F_n}\leqslant\|x_n-p_nx\|_{E_n}$$
$$\leqslant c_2\|A_np_nx-y_n\|_{F_n}.$$

在证明逼近方法的收敛性时, 1)和2)用得最多. 把适当的函数空间选作为E和F, 而把函数转换为它们在格点上的值的算子选作为p_n和q_n.

参考文献

[1] Stummel, F., Discrete Konvergenz linearer Operatoren Ⅰ, *Math. Ann.*, **190** (1972), 45–92; Ⅱ, *Math. Z.*, **120** (1971), 231–264.

[2] Вайникко, Г. М., в кн., Итоги науки и техники, Математический анализ, **16** (1979), 5–53.

[3] Vainikko, G. M. (Г. М. Вайникко), Funktionalanalysis der Diskretisierungsmethoden, Teubner, 1976 (译自俄文).

Г. М. Вайникко 撰 史树中 译

依分布收敛 [convergence in distribution; сходимость по распределению]

定义在某个概率空间$(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$上的随机变量序列$X_1, X_2,\cdots$向一个随机变量$X$的依下述方式定义的收敛: $X_n\xrightarrow{d}X$, 如果对任何有界连续函数f,

$$\mathsf{E}f(X_n)\to\mathsf{E}f(X), \text{当} n\to\infty \text{时}, \qquad (*)$$

这种收敛形式之所以称为依分布收敛, 是因为条件(*)等价于分布函数$F_{X_n}(x)$在每一使$F_X(x)$为连续的点x处收敛于$F_X(x)$.　　В. И. Битюцков 撰

【补注】 亦见**收敛的类型**(convergence, types of); **分布的收敛**(distributions, convergence of).

这是针对实值随机变量的特殊名称, 一般称为**概率测度的弱收敛**(weak convergence of probability measures)(定义同(*), 但X_n, X在可能更一般的空间中取值).　　潘一民 译

依测度收敛 [convergence in measure; сходимость по мере]

见**收敛性的类型**(convergence, types of).

依范数收敛 [convergence in norm; сходимость по норме]

赋范向量空间X中的序列$\{x_n\}$收敛于元素x, 定义如下: $x_n\to x$, 如果

$$\|x_n-x\|\to 0, \text{当} n\to\infty \text{时}.$$

这里, $\|\cdot\|$是X中的范数.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 亦见**收敛性的类型**(convergence, types of).

张鸿林 译

依概率收敛 [convergence in probability; сходимость по вероятности]

定义在某个概率空间$(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$上的随机变量序列$X_1, X_2,\cdots$向一个随机变量$X$的依下述方式定义的收敛: $X_n\xrightarrow{\mathsf{P}}X$, 如果对任何$\varepsilon>0$,

$$\mathsf{P}\{|X_n-X|>\varepsilon\}\to 0 \text{ 当 } n\to\infty \text{ 时}$$

在数学分析中, 这种收敛形式称为依测度收敛(convergence in measure). 从依概率收敛可推出**依分布收敛**(convergence in distribution).　　В. И. Битюцков 撰

【补注】 亦见概率测度的弱收敛 (weak convergence of probability measures);收敛的类型 (convergence, types of); 分布收敛 (distributions, convergence of).

潘一民 译

p 阶平均收敛 [convergence in the mean of order p; сходимость в среднем порядка p]

见收敛性的类型 (convergence, types of).

依变差收敛 [convergence in variation; сходимость по вариации]

见分布的收敛 (distributions, couvergence of).

收敛区间 [convergence interval; интервал сходимости], 具有实中心的幂级数的

自变量的具有如下性质的实值(开)区间: 在区间的每一点该幂级数收敛, 而在区间外每一非边界点处级数发散.

БСЭ-3 杨维奇 译

收敛乘子 [convergence multipliers; сходимости множители], 函数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ 的

一些数 $\lambda_n(n=0, 1, 2, \cdots)$, 即使得级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n u_n(x)$ 在可测集 X 上几乎处处收敛, 其中 $u_n(x)$ 是在 X 上定义的数值函数.

例如, 对于属于 L_1 的函数的 Fourier 三角级数, 数 $\lambda_n=1/\ln n(n=2, 3, \cdots)$ 是收敛乘子 (λ_0 和 λ_1 可以任意选取), 也就是说, 如果 $f\in L_1[-\pi, \pi]$, 其 Fourier 三角级数是

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

则级数

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{\ln n}$$

在整个实轴上几乎处处收敛. 如果 $f\in L_p[-\pi,\pi]$ $(p>1)$, 则其 Fourier 三角级数本身几乎处处收敛(见 **Carleson 定理** (Carleson theorem)).

Л. Д. Кудрявцев 撰 张鸿林 译

测度的收敛 [convergence of measures; сходимость мер]

概率论中的一个概念, 它取决于测度空间的拓扑. 这里所谓测度是指定义在某空间 X 的子集所成的 σ 代数 $\mathfrak{B}$ 上, 或更一般地, 定义在负荷 (charger) 的空间 $\mathfrak{M}(X, \mathfrak{B})$ 上的实或复的可数加性集函数 $\mu=\{\mu(A): A\in B\}$. 由负荷空间 $\mathfrak{M}(X, \mathfrak{B})$ 中有界负荷 (即满足条件 $\sup|\mu(A)|<\infty$, $A\in\mathfrak{B}$) 构成的子空间 $\mathfrak{M}^b(X, \mathfrak{B})$ 是最常用的拓扑.

1) 在 $\mathfrak{M}^b(X, \mathfrak{B})$ 中, 引入范数

$$\|\mu\| \equiv \operatorname{Var}\mu = \sup_{A\in\mathfrak{B}}(|\mu(A)|+|\mu(X\setminus A)|),$$

$$\mu\in\mathfrak{M}^b(X, \mathfrak{B}),$$

它称为负荷 μ 的变差 (variation of the charge μ). 在此范数下, 负荷序列 μ_n 当 $n\to\infty$ 时收敛于某负荷 $\mu\in\mathfrak{M}^b(X, \mathfrak{B})$ 的收敛性, 称为依变差收敛 (convergence in variation).

2) 在 $\mathfrak{M}^b(X, \mathfrak{B})$ 中要考虑通常的弱拓扑. 在这种拓扑下 (弱收敛 (weak convergence)), 负荷列 μ_n 收敛于 μ $(\mu_n\to\mu, n\to\infty)$ 意味着, 对于 $\mathfrak{M}^b(X, \mathfrak{B})$ 上的每个连续线性泛函 F, 成立着 $F(\mu_n)\to F(\mu)$ $(n\to\infty)$. 这种收敛等价于负荷列有界 ($\sup_n\|\mu_n\|<\infty$), 并且对于所有的 $A\in\mathfrak{B}$, 数列 $\mu_n(A)\to\mu(A)$ $(n\to\infty)$. 负荷列 $\mu_n(n=1, 2, \cdots)$ 的弱收敛蕴含着积分的收敛: $\int_X f(x)d\mu_n\to\int_X f(x)d\mu$ $(n\to\infty)$, 其中 f 是 X 上关于 σ 代数 $\mathfrak{B}$ 可测的有界函数.

3) 当 X 为拓扑空间且 $\mathfrak{B}=\mathfrak{B}(X)$ 为它的 Borel σ 代数时, 另一种称为 $\mathfrak{M}^b(X, \mathfrak{B})$ 上的弱拓扑 (或称窄拓扑) 也要考虑. 这是使形如

$$F_f(\mu) = \int_X f(x)\,d\mu$$

的泛函连续的最弱拓扑, 其中 f 是 X 上任意的有界连续函数. 它比上面的拓扑弱; 关于这种拓扑, 负荷列 μ_n 的收敛性, $\mu_n\to\mu$ $(n\to\infty)$ (弱收敛 (weark convergence) 或窄收敛 (narrow convergence)) 等价于数列 $\mu_n(A)\to\mu(A)$ $(n\to\infty)$ 的收敛性, 其中 $A\in\mathfrak{B}(X)$ 为满足 $\mu(\partial A)=0$ 的任意 Borel 集, 而 $\partial A=\bar{A}\cap(\overline{X\setminus A})$, $\bar{A}$ 为 A 的闭包.

4) 假如 X 为局部紧拓扑空间 (而 $\mathfrak{B}=\mathfrak{B}(X)$ 为 Borel σ 代数), 那么 $\mathfrak{M}^b(X, \mathfrak{B})$ 中还有一种所谓的宽拓扑: 负荷序列 $\mu_n\to\mu$ $(n\to\infty)$ 的收敛 (宽收敛, wide convergence) 是指泛函序列 $F_f(\mu_n)\to F_f(\mu)$ $(n\to\infty)$ 的收敛, 其中 f 为连续且具有紧支集的任意函数. 这种拓扑弱于 $\mathfrak{M}^b(X, \mathfrak{B})$ 中的弱拓扑. 类似的拓扑还可以自然地定义于更广的空间 $\mathfrak{M}_{loc}^b(X, \mathfrak{B})$ 上, 后者是局部有界负荷 μ 构成的空间, 即负荷满足: 对每点 $x\in X$, 总有邻域 U, 使得 $\sup|\mu(A)|<\infty$, $A\subset U$, $A\in\mathfrak{B}(X)$.

参考文献

[1] Bourbaki, N., Elements of mathematics, Integration, Addison-Wesley, 1975, Chapt. 6; 7; 8 (译自法文).

[2] Dunford, N. and Schwartz, J. T., Linear operators. General theory, I. Interscience, 1958.

[3] Billingsley, P., Convergence of probability measures, Wiley, 1968.

Р. А. Минлос 撰 王斯雷 译 郑维行 校

收敛性(的类型) [convergence, types of; сходимость]

数学分析的基本概念之一,它表示一个数学对象具有极限(limit). 在这种意义下,可以考虑元素序列的收敛性,级数的收敛性,无穷乘积的收敛性,连分式的收敛性,积分的收敛性等等. 例如,在研究某些数学对象,并用较简单的对象近似它们时,就出现了收敛性的概念. 譬如,为了计算一个圆的面积,就用到了这个圆的内接正多边形面积的序列;为了近似计算函数积分,就用分段线性函数,或者更一般地,用样条(spline)来近似,等等. 在元素集合上引进收敛性概念,可以说是数学分析的肇始.

I. **序列的收敛性**(convergence of sequences). 在同一个元素集上,依照所研究的问题不同可以引入不同的集合元素的收敛性概念. 收敛性概念在解各种方程(代数方程、微分方程、积分方程等等)时,尤其在求它们的近似数值解时起着非常重要的作用. 例如,应用**序列逼近法**(sequential approximation, method of)可以得到一个收敛于给定的常微分方程之解的函数序列,同时证明了在给定的特殊条件下解的存在性,并且提供了一种能够计算出具有所需精确度的解的方法. 对于常微分方程和偏微分方程,存在适合于运用近代计算机求数值解的各种收敛的差分法.

假设在集合 X 中引进了其元素序列的收敛性的概念,也就是说,在所有给定序列的全体的范围内定义了一个类,其中每个成员(member)称为一个收敛序列(convergent sequence),而每个收敛序列对应 X 中某个元素,称为这个序列的极限. 此时集合 X 本身称为收敛空间(space with convergence).

序列收敛性的概念常常要求具有下述性质:

1) X 的每个元素序列至多能有一个极限;

2) 每个平稳序列 $\{x, x, \cdots\}$ $(x \in X)$ 均收敛,并且元素 x 就是它的极限;

3) 收敛序列的每个子序列也收敛,并且与全序列有相同的极限.

当这些条件都具备时,空间 X 常称为在 Fréchet 意义下的收敛空间(space with convergence in the sense of Fréchet). 任何 Hausdorff 空间,因而任何度量空间,特别是任何**可数赋范空间**(countably-normed space),进而任何赋范空间(虽然不是每个半赋范空间),都是这种空间的例子. 在完全度量空间中,为使一个序列收敛,其充分必要条件为:它是一个基本序列.

在 Fréchet 意义下收敛的不可度量化空间的一个例子是定义在数轴 $\mathbf{R}$ 上的所有实函数的空间,其中序列 $f_n: \mathbf{R} \to \mathbf{R}(n=1,2,\cdots)$ 的收敛性表示对每个固定的 $x \in X$,它是收敛的.

如果对于在 Fréchet 意义下的收敛空间 X 中的每个子集 $A \subset X$,定义其闭包 $\bar{A}$ 为 A 中点列的极限点的全体,那么可以证明 X 不是拓扑空间,因为每个集合 A 的闭包 $\bar{A}$ 的闭包 $\bar{\bar{A}}$ 在给定的定义下不一定等于 $\bar{A}$.

如果在同一个集合上引进两种收敛性定义,并且如果每一个在第一种定义下收敛的序列在第二种定义下也收敛,则称第二种收敛性强于第一种. 在每个收敛空间 X 中,可以引进一种较强的收敛性,使得 X 对于上述闭包运算生成一个拓扑空间,或更简捷地说,每个收敛空间可以嵌入到一个由相同点所形成的拓扑空间中去.

在每个拓扑空间中,已经定义了其点列收敛性的概念,但一般地说,这个定义对于描述该空间中任意集合的闭包,即确定集合的接触点是不够的. 因此,它还不足以完全地描述给定空间的拓扑. 为了得到这种可能性,又引进了广义序列收敛性的概念.

一个偏序集 $\mathfrak{A}=(\mathfrak{A}, \geqslant)$ 称为**有向集**(directed set),如果对于任何两个元素,存在一个元素位于二者之后. 从有向集 $\mathfrak{A}$ 到集合 X 中的映射 $f: \mathfrak{A} \to X$ 称为 X 中的一个**广义序列**(generalized sequence),一个网(net)或一个定向(directionality). 拓扑空间 X 中的一个广义序列 $f: \mathfrak{A} \to X$ 称为在 X 中收敛于点 x_0,如果对 x_0 的每个邻域 U,存在一个 $\alpha_0 \in \mathfrak{A}$,使对所有的 $\alpha \geqslant \alpha_0, \alpha \in \mathfrak{A}$,有 $f(\alpha) \in U$. 这时就说广义序列 $f: \mathfrak{A} \to X$ 的极限存在,并且等于 x_0;记作 $\lim_{\mathfrak{A}} f(\alpha) = x_0$.

采用这些术语,拓扑空间 X 中一个集合的闭包可以描述如下:为使点 x 属于集合 $A \subset X$ 的闭包 $\bar{A}$,其充分必要条件是:A 中的某一广义点列收敛于 x;为使一个拓扑空间是 Hausdorff 空间,其充分必要条件是:它的每个广义点列至多有一个极限.

借助于广义序列的收敛性也有可能描述拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 中的映射 F 的连续性准则:为使映射 F 在点 $x_0 \in X$ 处连续,其充分必要条件是:对于每个满足 $\lim_{\mathfrak{A}} f(\alpha) = x_0$ 的广义序列 $f: \mathfrak{A} \to X$,条件 $\lim_{\mathfrak{A}} F(f(\alpha)) = F(x_0)$ 成立.

II. **数值序列和数值级数的收敛性**(convergence of sequences and series of numbers). 说明收敛性概念的最简单的例子是:收敛的数值序列(convergent sequences of numbers),即具有有限极限的复数序列 $\{Z_n\}$;收敛的数值级数(convergent series of numbers),即部分和序列收敛的级数. 收敛的数值序列和级数常被用来获得各种估计,在数值方法中,它们用于函数值及常数值的近似计算. 在这类问题中,重要的是需要知道已知序列收敛于其极限的"速度". 例如,数 π 可以表示为下面两种级数的和的形式:

$$\pi = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1},$$

$$\pi=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\left[\frac{4}{5^{2n-1}}-\frac{1}{239^{2n-1}}\right].$$

显然,为了足够精确地近似计算数 π,利用第二个公式(Machin 公式(Machin formula))是适宜的,因为使用第二个公式,只要计算级数较少的项就可以达到同样的精确度.

为了比较两个级数的收敛性,可以用下面的定义. 设给定两个非负项收敛级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n,\quad a_n\geqslant 0,\tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n,\quad b_n\geqslant 0,\tag{2}$$

并设 $\alpha_n=\sum_{k=1}^{\infty}a_{n+k}$, $\beta_n=\sum_{k=1}^{\infty}b_{n+k}$ 为它们的 n ($n=1,2,\cdots$)阶余项. 称级数(1)收敛快于级数(2),或等价地称级数(2)收敛慢于级数(1),如果当 $n\to\infty$ 时,$\alpha_n=o(\beta_n)$,也就是说,如果存在零序列$\{\varepsilon_n\}$,使得 $\alpha_n=\varepsilon_n\beta_n$, $n=1,2,\cdots$.

如果级数(1)与(2)发散,并且 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$, $\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}b_k$ 为它们的 n ($n=1,2,\cdots$)阶部分和, 如果当 $n\to\infty$ 时,$\sigma_n=o(S_n)$, 则称(1)发散快于(2),或称(2)发散慢于(1).

对于每个非负项收敛级数,存在一个收敛更慢的非负项级数,而对每个发散级数,存在一个发散更慢的级数. 有一些方法,可以将给定的收敛级数变成比它收敛更快的级数,而不改变它的和. 例如,可以用 **Abel 变换**(Abel transformation)做到这一点.

除了上述级数和的通常概念之外,还有另一些更为一般的和的定义,它们是以不同的级数求和法为基础的. 利用这些方法,可以构造出由级数的项组成的某些序列以代替部分和序列. 当部分和序列发散时,这些序列可能收敛. 这些序列的极限称为级数的广义和(generalized sums).

更快收敛与更快发散的概念在广义积分中也要用到,在那里,加快积分收敛性(发散性)的最普通的方法之一就是分部积分法. 另外还有平均广义积分法,它类似于级数求和法,并使得对某些发散积分给出一种广义收敛性定义成为可能.

Ⅲ. 函数级数与函数序列的收敛性(convergence of series and sequences of functions). 对于函数序列

$$f_n: X\to Y,\quad n=1,2,\ldots,\tag{3}$$

在关于集合 X 和 Y 相应的假设之下,不同的收敛性概念有着不同的具体解释. 如果 Y 是一个拓扑空间,并且序列(3)对每一个固定的点 $x\in X$ 收敛,则称它为在集合 X 上(点态)收敛((point-wise) convergent). 如果 Y 是一个一致空间(特别地,一个度量空间或拓扑群),则能够引进一致收敛序列(见**一致收敛**(uniform convergence))的概念.

设 $X=(X,S,\mu)$ 是一个测度空间(即 X 是一个集合,S 是 X 的子集的一个 σ 代数,μ 是 S 上一个实值测度),设 $Y=\overline{\mathbf{R}}=\mathbf{R}\cup\{+\infty\}\cup\{-\infty\}$ 是实数 $\mathbf{R}$ 的扩张集, 且设函数

$$f_n: X\to\overline{\mathbf{R}},\quad n=1,2,\ldots\tag{4}$$

是几乎处处有限且可测的.

序列(4)称为几乎处处收敛(almost-everywhere convergent)于函数 $f: X\to\overline{\mathbf{R}}$, 如果存在一个测度为零的集合 $X_0\subset X$,使得函数(4)在集合 $X\setminus X_0$ 上的限制在此集合上收敛于 f 在其上的限制. 如果序列(4)几乎处处收敛于函数 f,则这个函数也是几乎处处有限且可测的. 序列的几乎处处收敛性与一致收敛性之间的桥梁是 **Егоров 定理**(Egorov theorem)建立的.

序列(4)称为在集合 X 上依测度收敛(converge in measure)于可测函数 $f: X\to\overline{\mathbf{R}}$,如果对于任何 $\varepsilon>0$,满足条件

$$\lim_{n\to\infty}\mu\{x\in X:\ |f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\}=0.$$

如果序列(4)几乎处处收敛于函数 f,且 $\mu(X)<\infty$,则它也依测度收敛于 f. 而如果序列(4)依测度收敛于 f,则存在(4)的一个子序列几乎处处收敛于 f.

对于函数 $f: X\to\overline{\mathbf{R}}$,设

$$\|f\|_p=\left\{\int_X|f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p},\quad 1\leqslant p<+\infty,\tag{5}$$

$$\|f\|_\infty=\operatorname*{ess\,sup}_{x\in X}|f(x)|,\tag{6}$$

且设 $L_p(X)$ 是满足

$$\|f\|_p<+\infty,\quad 1\leqslant p\leqslant\infty\tag{7}$$

的函数 f 的空间. 这些空间通常称为 Lebesgue 空间(Lebesgue spaces). 在满足条件(7)的函数关于测度 μ 的等价类上,泛函 $\|\cdot\|_p$ 是一个范数(见**依范数收敛**(convergence in norm)).

如果序列(4)依范数(6)收敛于一个函数,则它几乎处处收敛于这个函数. 如果序列 $f_n\in L_p(X)$ ($n=1,2,\cdots$)依范数 $\|\cdot\|_p$ ($1\leqslant p\leqslant+\infty$)收敛于一个函数 $f: X\to\overline{\mathbf{R}}$,则 $f\in L_p(X)$, 并且称给定的序列在空间 $L_p(X)$ 中收敛于 f. 依范数 $\|\cdot\|_p$ ($1\leqslant p\leqslant+\infty$)的收敛也称为在空间 $L_p(X)$ 中的强收敛(strong convergence), 或者当 $1\leqslant p\leqslant+\infty$ 时称为 p 阶平均收敛(convergence in the mean of order p); 说得更详细些,当 $p=1$ 时,称为平均收敛(convergence in the mean),而当 $p=2$ 时,称

为均方收敛(convergence in the sense of the quadratic mean). 均方收敛函数序列的例子是空间 $L_2[-\pi,\pi]$ 中函数的 Fourier 级数的部分和序列.

如果序列(4)在 $L_p(X)$ $(1\leq p<+\infty)$ 中收敛于一个函数 f, 则它在集合 X 上依测度收敛于 f, 因此也可能从(4)中挑出一个子序列,使得它在 X 上几乎处处收敛于 f. 如果 $1\leq p\leq q\leq+\infty$, $\mu(X)<+\infty$, 且序列(4)在 $L_q(X)$ 中收敛,则它也在 $L_p(X)$ 中收敛.

函数 $f_n\in L_p(X)$ $(1<p<+\infty)$ 的序列(4)称为在 $L_p(X)$ 中弱收敛(weakly convergent)于函数 $f\in L_p(X)$, 如果对每一个函数 $g\in L_q(X)$, 其中 $p^{-1}+q^{-1}=1$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_X[f_n(x)-f(x)]g(x)\,dx=0.$$

如果序列 $f_n\in L_p(X)$ $(n=1,2,\cdots)$ 在 $L_p(X)$ $(1<p<+\infty)$ 中强收敛, 则它也弱收敛于同一个函数; 但是, 在 $L_p(X)$ 中弱收敛序列不一定是强收敛的. 例如, 函数序列 $\sin nx$ $(n=1,2,\cdots)$ 在 $L_2[-\pi,\pi]$ 中弱收敛于零,但不是强收敛的. 事实上,对每个函数 $g\in L_2[-\pi,\pi]$ 积分

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\sin nx\,dx$$

是 g 关于函数系 $\{\sin nx\}$ 的 Fourier 系数, 因此当 $n\to\infty$ 时趋于零;但是 $\|\sin nx\|_2=\sqrt{\pi}$ $(n=1,2,\cdots)$.

几乎处处收敛、或依测度收敛、或在 $L_p(X)$ 中强或弱收敛的函数序列的极限,就完全测度 μ 而言,是在关于 μ 等价的意义下唯一确定的函数.

Lebesgue 空间 $L_p(X)$ 的推广包括了 Никольский 空间(Nikol'skiĭ space); **Orlicz 空间**(Orlicz space); **Соболев 空间**(Sobolev space)和其他一些空间.

强收敛与弱收敛的概念可以推广到包括更一般的空间,特别是赋范线性空间.

在广义函数理论中还出现其他一些函数序列收敛性概念. 例如,设 D 是一个测试函数空间,它由具有紧支集的无穷次可微函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 所组成. 序列 $f_n\in D$ $(n=1,2,\cdots)$ 称为在空间 D 中收敛于 f, 如果存在一个区间 $[a,b]$, 使所有函数 f_n $(n=1,2,\cdots)$ 及 f 的支集均包含在其中,而函数 f_n 本身及其所有导函数序列 $\{f_n^{(k)}\}$ 在 $[a,b]$ 上分别一致收敛于 $f^{(k)}$ $(k=0,1,2,\cdots)$. 在广义函数的 Fourier 变换的研究中,考察另一些收敛的测试函数空间.

上面所讲的收敛性的不同形式在数学分析的许多问题的研究中将会用到. 利用一致收敛的概念,能够描述在取极限的过程中保持连续性的条件. 例如,如果 X 是一个拓扑空间, Y 是一个度量空间,序列(3)的各项在 X 中连续,并且序列(3)在 X 上一致收敛,则极限函数也在 X 上连续. 借助几乎处处收敛或依 p 次平均收敛的概念,能够描述在积分号下取极限的条件. 如果 X 是一个具有测度 μ 的空间, $Y=\bar{\mathbf{R}}$, 序列 $f_n\in L_1(X)$ $(n=1,2,\cdots)$ 在 X 上几乎处处收敛,并且存在函数 $F\in L_1(X)$, 使得对几乎所有的 $x\in X$, 及所有的 $n=1,2,\cdots$, 不等式 $|f_n(x)|\leq F(x)$ 成立,则

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n(x)\,dx=\int_X\left[\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right]dx. \tag{8}$$

如果 $\mu(X)<+\infty$, $f_n\in L_p(X)$ $(n=1,2,\cdots,1<p<+\infty)$, 且序列 $\{f_n\}$ 在 $L_p(X)$ 中弱(强)收敛,则公式(8)成立.

在概率论中,对于随机变量序列,几乎处处收敛说成"几乎必然(或殆必然)收敛"(依概率1收敛(convergence with probability one))(见**几乎必然收敛**(convergence, almost - certain)); 依测度收敛说成**依概率收敛**(convergence in probability); 还用到**依分布收敛**(convergence in distribution)的概念.

函数序列收敛性概念的一种推广是关于某个拓扑空间的函数族的某一参数的收敛性.

古代数学家(Euclid, Archimedes)在用级数求面积和体积时就使用过收敛性的概念. 他们用穷竭法进行推理,实际上已经能够证明级数的收敛性."收敛性"这个词是1668年由 J. Gregory 在圆盘及双曲扇形面积算法的研究中对于级数引进的. 17世纪的数学家对于他们使用的级数的收敛性通常已经有相当清晰的概念,但是他们没有给出这种收敛性的现代意义下的严格证明. 到了18世纪,发散级数的使用在数学分析中变得更为广泛(特别是在 L. Euler 的著作中). 这一方面导致出现许多在收敛性的清晰理论未发展之前,无法排除的误解和错误,另一方面,促使发散级数求和法近代理论雏型产生. 研究级数收敛性的严格方法是19世纪由 A. L. Cauchy, N. H. Abel, B. Bolzano, K. Weierstrass 及其他一些人建立的. 一致收敛性概念在 Abel (1826), P. Seidel (1847−1848), G. Stokes (1847−1848) 以及 Cauchy (1853) 的著作中均已述及,并于19世纪50年代末在 Weierstrass 的数学分析讲座中开始系统地使用. 在函数论、泛函分析和拓扑学的发展中,收敛性概念得到了进一步的扩充.

参考文献

[1] Александров, П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977.

[2] Колмогоров, А. Н., Фомин, С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981 (中译本: A. H. 柯莫果洛夫, C. B. 佛明, 函数论与泛函分析初步,高等教育出版社, 1956).

[3] Kelley, J. L., General topology, Springer, 1975 (中译本: J. L. 凯莱,一般拓扑学,科学出版社, 1982).

[4] Ильин, В. А., Позняк, Э. Г., Основы математического анализа, ч. 1, 3 изд., М., 1971, ч. 2, 2 изд., М., 1980 (英译本: Il'in, V. A. and Poznyak, E. G., Fundam-

entals of mathematical analysis, 1-2, Mir, 1982).
[5] Кудрявцев, Л. Д., Курс математического анализа, т. 1-2, М., 1981.
[6] Никольский, С. М., Курс математического ананиза, 2 изд., т.1-2, М., 1975 (英译本: Nikol'skiĭ, S. M., A course of mathematical analysis, 1-2, Mir, 1977).

Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】 使(8)成立的命题一般称为 Lebesgue 控制收敛定理 (Lebesgue dominated convergence theorem).

关于基本序列 (fundamental sequence) 的概念见 **Cauchy 序列** (Cauchy sequence).

零序列(null sequence)是收敛于 0 的序列. 非负可测函数 $g: X \to \mathbf{R}$ ((X,μ) 是一个测度空间) 的本质上确界 (essential supremum) 是使

$$\mu(g^{-1}((\alpha, \infty]))=0$$

的所有 $\alpha \in \mathbf{R}$ 的集合 S 的下确界 (如果 $S=\phi$, 则取 $\inf S=\infty$). 在 X 上的任意(复值)可测函数 f 的本质上确界 $\|f\|_\infty$ 是 $|f|$ 的本质上确界 (见 [A2]).

参考文献

[A1] Halmos, P. R., Measure theory, V. Nostrand, 1950 (中译本: P. R. 哈尔摩斯, 测度论, 科学出版社, 1958).
[A2] Rudin, W., Real and complex analysis, McGraw-Hill, 1974 (中译本: W. 鲁丁, 实分析和复分析, 人民教育出版社, 1981).

罗嵩龄、许依群、徐定宥 译

依概率 1 收敛 [convergence with probability one; сходимость с вероятностью единица]

见几乎必然收敛 (convergence, almost - certain).

连分数的渐近分数 [convergent of a continued fraction; подходящая дробь]

见连分数 (continued fraction).

逆定理 [converse theorem; обратная теорема]

一个定理,其前提是原定理(正定理)的结论,其结论是原定理的前提. 逆定理的逆定理是原定理(正定理),因此,正定理和逆定理是互逆的.

逆定理等价于正定理的相反定理, 即把正定理的前题和结论分别换为其否定而得到的定理. 所以, 正定理等价于逆定理的相反定理,即这个定理断言: 如果正定理的结论不成立,则它的前题也不成立. 众所周知的"反证法",恰好就是用逆定理的相反定理的证明来代替正定理的证明. 两个互逆定理的成立意味着: 其中任何一个定理的前题成立,不仅仅是其结论成立的充分条件,而且是必要条件. 亦见**定理** (theorem); **必要和充分条件** (necessary and sufficient conditions).

БСЭ-3 张鸿林 译

凸分析 [convex analysis; выпуклый анализ]

介于分析与几何之间的一个数学分支, 它的研究对象是凸函数(见**凸函数(实变量的)** (convex function (of a real variable))、**凸泛函** (convex functional) 和**凸集** (convex set)). 凸分析的基础是 H. Minkowski 建立的 ([1], [2]). 他创立了凸几何, 即有限维空间中凸集的几何. 凸几何的许多概念在泛函分析中达到登峰造极的地步. W. Fenchel 的研究开辟了凸分析的新舞台, 其中涉及凸泛函的详尽研究. 把凸分析陈述为一个独立的数学分支发生在 20 世纪 50-60 年代. 凸分析的概念与方法在数学的各分支中找到了广泛的应用,例如极值问题的理论,特别是凸规划与古典变分法,以及数学物理,整函数论,数理统计等等.

凸分析的基本概念有**极线** (polar), **次微分** (subdifferential) 和**共轭函数** (conjugate function). 凸分析的定理把配极、取下微分和共轭等运算同凸集、凸函数上的代数、集合论、排序等运算联系起来. 另外的研究专题包括集合与它们的配极集,函数与它们的共轭函数,集合与齐次凸函数之间等等所有可能的对偶关系.

参考文献

[1] Minkowski, H., Geometrie der Zahlen, Chelsea, reprint, 1953.
[2] Minkowski, H., Theorie der konvexen körper, insbesondere Begründung ihres Oberflächenbegriffs, Gesamm. Abh., Vol. 2, Teubner, 1911, 131-229.
[3] Fenchel, W., On conjugate convex functions, *Canad. J. Math.*, 1 (1949) 73-77.
[4] Rockafellar, R. T., Convex analysis, Princeton Univ. Press, 1970.

В. М. Тихомиров 撰

【补注】 凸分析中一个非常重要的概念是对偶性.

关于凸分析的近代发展见标准的书[A1]. 关于凸分析的各种应用以及它们和几何的其他部分的密切关系(例如边界结构、几何测度论、优化论等), 见出色的综合报告和书 [A2]-[A5].

参考文献

[A1] Marti, J. T., Konvexe Analysis, Birkhäuser, 1977.
[A2] Schneider, R., Boundary structure and curvature of convex bodies, in J. M. Wills and P. M. Gruber (eds.): Contributions to geometry, Birkhäuser, 1979.
[A3] Gale, D., Klee, V. and Rockafellar, R. T., Convex functions on convex polytopes, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 28 (1968), 867-873.
[A4] Kuhn, H. W. and Tuckner, A. W., Nonlinear programming, in Proc. 2nd Berkley Symp. Math. Stat and Probab., Univ. Calif. Press, 1951.
[A5] Federer, H., Geometric measure theory, Springer, 1969.

虞言林 译

凸体 [convex body; выпуклое тело]

Euclid空间或其他拓扑向量空间中具有内点的闭(有限或无限)**凸集**(convex set). 张鸿林 译

凸锥 [convex cone; выпуклый конус]

从一点(凸锥的顶点)出发的射线构成的**凸体**(convex body)V. 这个定义把V等同于全空间的情况排除在外. 凸锥的概念包括二面角和半空间等概念作为其特殊情况. 凸锥有时指的是这个锥体的表面.

Е. В. Шикин 撰 张鸿林 译

凸域 [convex domain; выпуклая область]

具有内点的**凸集** (convex set).

凸函数 [convex function; выпуклая функция], 复变量的

在单位圆盘$E=\{z:|z|<1\}$内正则单叶且把单位圆盘映射成某个**凸域** (convex domain)的函数

$$w=f(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots.$$

正则单叶函数$w=f(z)$是凸函数, 当且仅当$|z|=r\ (0<r<1)$的象曲线在点$f(z)$的切线随着z在该圆周上穿行而作同方向回转. 下面的不等式给出$f(z)$的凸性的一个必要充分条件:

$$\operatorname{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}>0,\quad z\in E. \tag{1}$$

另一方面, $f(z)$是凸函数当且仅当它可以作如下参数表示:

$$f(z)=c_0+c_1\int_0^z\exp\left[-2\int_{-\pi}^{\pi}\ln(1-e^{-i\theta}\zeta)\,d\mu(\theta)\right]d\zeta, \tag{2}$$

其中$\mu(\theta)$是$[-\pi,\pi]$上的非减实值函数, 满足

$$\int_{-\pi}^{\pi}d\mu(\theta)=1.$$

c_0和c_1是复常数, $c_1\neq 0$. 公式(2)可以看成圆盘E到凸多边形的映射函数的**Christoffel-Schwarz 公式** (Christoffel-Schwarz formula)的一种推广.

设S^0是E中满足规范化条件$c_0=f(0)=0$, $c_1=f'(0)=1$的所有凸函数组成的函数族; 设S_p^0, $p=1,2,\cdots$, 是S^0的子族, 它由把E映射为w平面上关于原点$w=0$为p折旋转对称的凸域之函数组成, $S_1^0=S^0$. 类S_p^0在E内的紧集上关于一致收敛拓扑是紧的. 它们的积分表示式, 特别是关于S^0的公式(2), 使得有可能建立求解类S_p^0中极值问题的变分方法[2], [3], [4], [5].

S^0的最基本的极值性质可用下列精确不等式描述:

$$|c_n|\leqslant 1,\quad n=2,3,\ldots,$$

$$\frac{|z|}{(1+|z|)}\leqslant|f(z)|\leqslant\frac{|z|}{(1-|z|)},$$

$$\frac{1}{(1+|z|)^2}\leqslant|f'(z)|\leqslant\frac{1}{(1-|z|)^2},$$

$$|\arg f'(z)|\leqslant 2\arcsin|z|,\quad z\in E.$$

函数的辐角理解为当$\operatorname{Re}z=0$时取值为零的分支. 在所有这些估计式中唯有对于函数$f(z)=z/(1-\varepsilon z)$, $|\varepsilon|=1$, 等号成立. 对于族S_p^0, $p=1,2,\cdots$, 关于区域$B_r(f)=\{w=f(z):|z|<r\}$的边界$\partial B_r(f)$在点$f(z)$处的曲率$K(r)$同$\partial B_r(f)$的原象即圆周$|z|=r$在点z处的曲率$1/r$之比值K_r的精确界限也可得到. 圆盘$|w|<1/2$包含于区域$B_1(f)$, $f\in S^0$, 并且该圆盘的半径不能再增大, 除非对此族函数增添限制条件. 若$f(z)\in S^0$, 则单叶函数$g(z)=zf'(z)$是E内的星形函数, 即把E映射成关于坐标原点的星形区域.

类S^0的推广与修改以及它的子类的例子有: 在$|z|>1$内单叶, 在$1<|z|<\infty$内正则, 并把$|z|>1$映射成具有凸余集的区域的Σ^0族函数$F(z)=z+d_0+d_1z^{-1}+\cdots$; 满足某种形式的规范化条件的环$r<|z|<R$内正则函数类$S^0(r,R)$, 该类中每一函数$F(z)$把该圆环单叶映射成一个区域, 使得它的有界余分支是凸集, 并且该区域与这个余分支的并也是凸集; S_p^0中在点$z=0$邻域内的Taylor级数具有实系数的函数类S_{pr}. 凸函数的概念也可以推广到多值函数(见[2]的附录).

具有独特意义的是凸函数的如下推广[6]: 圆盘E内的正则函数$w=f(z)=z+c_2z^2+\cdots$被称为是近于凸的(close-to-convex), 如果存在E上凸函数$\varphi(z)$, $\varphi(0)=0$, 在E内处处有

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{f'(z)}{\Phi'(z)}\right\}>0,\quad z\in E.$$

已证明这一函数类K的所有函数$f(z)$单叶, 且已发现函数$f(z)$属于K的一些必要充分条件. 借助于Stieltjes积分, 函数$f(z)\in K$的参数表示为

$$f(z)=\int_0^z\left[\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+e^{i\varphi}e^{-i\theta}\zeta}{1-e^{-i\theta}\zeta}\,d\alpha(\theta)\right]\times$$

$$\times\exp\left[-2\int_{-\pi}^{\pi}\ln(1-e^{-i\theta}\zeta)\,d\mu(\theta)\right]d\zeta.$$

其中$|\varphi|<\pi$, $\alpha(\theta)$和$\mu(\theta)$是非减实值函数, 满足

$$\int_{-\pi}^{\pi}d\alpha(\theta)=\int_{-\pi}^{\pi}d\mu(\theta)=1.$$

族K中包含有凸函数, 星形函数和别的函数. **Bieberbach 猜想** (Bieberbach conjecture) $|c_n|\leqslant n$ 对函

数 $f(z)\in K$ 成立．已知有下列精确估计：

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2}\leqslant|f(z)|\leqslant\frac{|z|}{(1-|z|)^2},$$

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3}\leqslant|f'(z)|\leqslant\frac{1+|z|}{(1-|z|)^3},$$

$$|\arg f'(z)|\leqslant 4\arcsin|z|,\quad z\in E.$$

函数的辐角理解为当 $z=0$ 时取零值的分支．在所有这些估计式中等号仅对于函数 $f(z)=z/(1-\varepsilon z)^2(|\varepsilon|=1)$ 才成立．从几何的观点来说，K 类函数 $f(z)$ 以如下事实为特征：f 把圆盘 E 映射成区域 $D(f)$，它的外部 $C\bar{D}(f)$ 可以用从该区域的边界点出发的射线 L 填满，$L\subset C\bar{D}(f)$．近于凸函数的概念可以推广到多值函数 [7]．

参考文献

[1] Привалов, И. И., Введение в теорию функций комплексного переменного, 11 изд., М., 1967（中译本：И. И. 普里瓦洛夫，复变函数引论，高等教育出版社，1956）．

[2] Голузин, Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966（中译本：Г. М. 戈鲁辛，复变函数的几何理论，科学出版社，1956）．

[3] Зморович, В. А., О некоторых вариационных.《Укр. матем. журн.》, 4 (1952), 3, 276－298.

[4] Александров, И. А., Черников, В. В.,《Сиб. матем. ж.》, 4 (1963), 2, 261－267.

[5] Зморович, В. А.,《Матем. сб.》, **32** (1953), 3, 633－652.

[6] Kaplan, W., Close-to-convex schlicht functions, *Michigan Math. J.*, **1** (1952), 169－185

[7] Styer, D., Close-to-convex multivalued functions with respect to weakly starlike functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **169** (1972), 105－112.

И. А. Александров, Ю. Д. Максимов 撰

【补注】“精确估计”这个词表示一个估计式不可能再改善(在复分析中常用)．

对于 E 内任意的(规范化)单叶函数，Bieberbach 猜想已被证实，见 **Bieberbach 猜想** (Bieberbach conjecture) 及其参考文献．

杨维奇 译

凸函数(实变量的) [convex function (of a real variable); выпуклая функция (действительного переменного)]

定义在某区间上满足条件

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\tag{1}$$

的函数，其中 x_1 与 x_2 为区间上的任意两点．条件的几何意义是，函数 f 的图象的任意一条弦的中点或者位于图象上方，或者就在图象上．如果对所有 x_1 与 x_2，不等式(1)的等号不成立，则称 f 是严格凸的(strictly convex)．函数 $x^p\ (p\geqslant1)$，$x\ln x\ (x>0)$ 以及函数 $|x|$ (对所有 x) 都是凸函数的例子．假如不等式(1)中的不等号反向，则函数 f 称为是凹的(concave)．在开区间上可测的凸函数都是连续的．存在着不连续的凸函数，但它们是非常不规则的；若函数 f 在区间 (a,b) 上是凸的，且在 (a,b) 内某区间上有上界，那么它在 (a,b) 上是连续的．所以不连续的凸函数在任意的内部区间上都是无界的，而且是不可测的．

假如函数 f 在某区间上连续，而且它的图象上的每条弦(除了端点以外)至少含有一点位于图象上方或就在图象上，那么 f 是凸的．从而根据条件(1)，对于连续函数，当有限个质点分布在函数的图象上时，这些质点的重心必定位于图象上方或者就在图象上：对于任意 n 个数 $p_k>0\ (k=1,\cdots,n,\ n$ 是任意的)，**Jessen 不等式** (Jessen inequality) 成立：

$$f\left(\frac{\sum_{k=1}^{n}p_kx_k}{\sum_{k=1}^{n}p_k}\right)\leqslant\frac{\sum_{k=1}^{n}p_kf(x_k)}{\sum_{k=1}^{n}p_k}.\tag{2}$$

假如不等式(2)对于某个函数 f 成立，其中 x_1、x_2 位于某个区间，$p_1>0$，$p_2>0$ 是任意两个正数，那么函数 f 是连续的，而且在该区间内当然也是凸的．连续凸函数的图象上的任意一条弦，或者与该段弧重合，或者除了端点以外，全部位于图象上方．这表明，一个连续凸函数，如果在每一个区间上都不是线性的，那么不等式(1)与(2)对于任意一组相互不等的自变量的值，严格的不等号都成立，这就是说，f 是严格凸的．

一个连续函数是凸的，当且仅当平面上位于该图象上方的点集，即它的**母图** (supergraph) 是一个**凸集** (convex set)．定义在区间 (a,b) 上的连续函数 f 是凸的充要条件为，对于图象上的每一点，至少有一条过该点的直线(称为支撑线(supporting line))，位于图象的下方或部分地与图象重合，也就是说，对于每一点 $x_0\in(a,b)$，存在 $k=k(x_0)$，使得

$$f(x_0)+k(x-x_0)\leqslant f(x)\tag{3}$$

对一切 $x\in(a,b)$ 成立．

开区间上的连续凸函数不可能有严格的局部极大值．如果函数 f 在开区间 (a,b) 上连续而且是凸的，那么在区间的每一点 x_0，都存在有限的左导数 $D_-f(x_0)$ 和右导数 $D_+f(x_0)$；而且 $D_-f(x_0)\leqslant D_+f(x_0)$；此外，如果数 $k=k(x_0)$ 满足条件(3)，则不等式 $D_-f(x_0)\leqslant k(x_0)\leqslant D_+f(x_0)$ 成立．函数 $D_-f(x)$ 和 $D_+f(x)$ 是非减的，而且可能除了可数个点以外，$D_-f(x)=D_+f(x)=f'(x)$，所以 f 在这些点上是可微的．在 (a,b) 内的任意闭区间上，函数 f 满足 Lipschitz 条件，从而是绝对连续的．因此可以建立下面的凸性判别准则：连续函数是凸的，当且

仅当它是非减函数的不定积分.

设 f 是某区间上的可微函数,那么它在此区间上(严格)凸的充要条件是,它的导函数非减(递增). 在连续凸函数图象上的函数可微点,存在唯一的支承线——过该点的切线. 另一方面,假如对于区间上可微函数图象上的每一点,图象在该点的切线,在该点的某邻域内位于图象下方(切点自身除外),那么函数是严格凸的;如果它位于图象的下方,或部分地与图象重合,则它仅仅是个凸函数.

设函数 f 在某区间上二次可微, 那么它在该区间上为凸的充要条件是,它的二阶导数在区间上非负 (此定理不仅对二阶普通导数成立,而且对于二阶对称导数也正确). 假如函数在区间的每点都有正的二阶导数,则它在此区间上严格凸.

当函数 f_i 均在 (a,b) 上凸且 $P_i>0$ $(i=1,\cdots,n)$ 时,函数

$$f=\sum_{i=1}^{n}p_if_i$$

在该区间上凸;此外,只要有一个 f_i 是严格凸的, f 就是严格凸的.

有多种形式将凸的概念推广到多元函数. 例如,设函数 $y=f(x^1,\cdots,x^n)$ 是定义在 n 维仿射空间 E^n 的凸子集 M 上的函数. 函数 f 称为凸的(convex),是指(1)式对所有的点 $x_1\in M$ 和 $x_2\in M$ 成立,其中 x_1+x_2 表示 n 维向量 x_1 与 x_2 之和. 一元凸函数的若干性质相应地可推广到多元凸函数;例如,不等式(2)仅对连续凸函数才成立.一个连续函数是凸的,当且仅当空间 E^{n+1} 中位于它图象上方的点集是凸的.

定义在凸区域 G 上的连续函数 f 是凸的,当且仅当对于 G 的每一点 x, 存在一个线性函数

$$l(y)=a_1y^1+\cdots+a_ny^n+b,$$

使得

$$f(x)=l(x),\ f(y)\geqslant l(y),\ y\in G. \tag{4}$$

由方程式 $l(y)=0$ 定义的超平面称为支撑超平面(supporting hyperplane).

假若函数 f 在 G 内连续可微, 那么条件(4)等价于条件

$$f(y)-f(x)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(x)}{\partial x^i}(y^i-x^i)\geqslant 0,\ \ x,y\in G.$$

假若 f 二次可微,则条件(4)等价于函数的第二微分,即二次型

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f(x)}{\partial x^i\partial x^j}\xi^i\xi^j$$

对一切 $x\in G$ 都是非负的.

凸函数概念向多元函数的另一种重要推广是次调和函数(subharmonic function)的概念,凸函数的概念,还可以自然地推广到在无限维线性空间中相应子集上定义的函数;见**凸泛函**(convex functional).

参考文献

[1] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Functions of a real variable, Addison - Wesley, 1976, Chapt. 1. Section 4 (译自法文).

[2] Zygmund, A., Trigonometric series, 1-2, Cambridge Univ. Press, 1979, Chapt. 1.

[3] Кудрявцев, Л. Д., Математический анализ, 2 изд., т. 1, М., 1973, гл. 1.

[4] Натансон, И. П., Теория функций вещественной переменной, 3 изд., М., 1974, гл. 10 (中译本: И. П. 那汤松, 实变函数论,高等教育出版社,1958).

[5] Никольский, С. М., Курс математического анализа, М., 1973, гл. 5 (英译本: Nikol'skii, S. M., A course of mathematical analysis, 1-2, Mir, 1977, Chapt. 5).

[6] Hardy, G. H., Littlewood, J. E. and P'olya, G., Inequalities, Cambridge Univ. Press, 1934, Chapt. 3 (中译本: G. H. 哈代等,不等式, 科学出版社, 1965).

Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】 在区间 I 上的实值函数 f 的凸性条件,经常用条件

$$f((1-\alpha)x+\alpha y)\leqslant(1-\alpha)f(x)+\alpha f(y) \tag{*}$$

来定义,其中 $x,y\in I$ 而 $0\leqslant\alpha\leqslant 1$. 这意味着 f 在 I 内是连续的. 对于可测函数 f, 条件(1)与(*)是等价的. 满足条件(1)的函数 f 又称为中点凸的(midpoint convex).

参考文献

[A1] Stromberg, K., Introduction to classical real analysis, Wadsworth, 1981, 199-206; 334.

[A2] Barbu, V. and Precopanu, Th., Convexity and optimization in Banach spaces, Reidel, 1986, Chapt. 2.

王斯雷 译

凸泛函 [convex fuctional; выпуклый функционал]

定义在线性向量空间上的、其**母图**(supergraph)为**凸集**(convex set)的泛函. 在凸集 A 上不取值 $-\infty$ 的泛函 f 在 A 上是凸的, 当且仅当不等式

$$f((1-\alpha)x+\alpha y)\leqslant(1-\alpha)f(x)+\alpha f(y), \tag{*}$$

$$x,y\in A,\ 0\leqslant\alpha\leqslant 1,$$

成立. 如果不等号反向, 那么泛函 f 称为凹的(concave). 把凸泛函变为凸泛函的运算包括加法 $(f_1+f_2)(x)=f_1(x)+f_2(x)$, 与正数的相乘, 取上界

$$(f_1\vee f_2)(x)=\max(f_1(x),f_2(x)),$$

以及下确界卷积

$$(f_1 \oplus f_2)(x) = \inf_{x_1+x_2=x}(f_1(x_1)+f_2(x_2)).$$

在某一点 x 的一个邻域中上有界的凸泛函在该点是连续的．如果一个凸泛函在某一点 x 是有限的，那么它在该点的任何方向上有(有限的或无限的)导数．局部凸线性拓扑空间中的闭凸泛函(即有闭凸上图的泛函)可用对偶方式来刻画：这样的泛函是受控于它的仿射函数的最小上界．这种对偶性使得有可能对每个凸泛函联系一个对偶对象——共轭泛函

$$f^*(x^*) = \sup_x(\langle x^*, x\rangle - f(x)).$$

凸泛函的性质、对这种泛函的运算、凸泛函及其共轭间的相互关系等是在**凸分析** (convex analysis) 中研究的．

参考文献

[1] Birnbaum, Z. W. and Orlicz, W., Ueber die Verallegemeinerrung des Begriffes der zueinander konjugierter Potenzen, *Studia Math.*, 3 (1931), 1−67.

[2] Hardy, G. H., Littlewood, J. E. and Pólya, G., Inequalities, Cambridge Univ. Press, 1934 (中译本：G.H.哈代等，不等式，科学出版社，1965).

[3] Красносельский, М. А., Рутицкий, Я. Б., Выпуклые функции и пространства Орлича, М., 1958 (中译本：M. A.克拉斯诺西尔斯基，Я.Б.鲁季茨基，凸函数和奥尔里奇空间，科学出版社，1962).

[4] Fenchel, W., On conjugate convex functions, *Canad. J. Math.*, 1 (1949), 73−77.

[5] Rockafellar, R.T., Convex analysis, Princeton Univ. Press, 1970.

В. М. Тихомиров 撰　史树中 译

凸对策 [convex game；выпуклая игра]

一种有非空局中人集 A 的 n 人**非合作对策** (non-cooperative game)，对于每个局中人 $i\in A$，这种对策的纯策略集 X_i 是凸集，而支付函数(见**增益函数** (gain function)) $K_i(x_1, \cdots, x_n)$ 对所有值 x_k $(k\neq i)$，关于 $x_i\in X_i$ 是凹的．如果在凸对策中所有局中人的支付函数是连续的，而纯策略集都是紧的，那么存在一个平衡点，使集合 A 中的局中人都运用纯策略．一个凸对策称为有限的 (finite)，是指每个 X_i 是紧的，且包含在某个 Euclid 空间 E^m 中，而其支付函数 K_i 都是多线性的．特别地，一个有限零和凸对策可用三元组 $\langle R, S, K\rangle$ 来刻画，其中 $R\subset E^m$, $S\subset E^n$，且函数 K 有下列形式：

$$K(r, s) = \sum a_{ij} r_i s_j,\quad r_i\in R,\quad s_j\in S.$$

如果 μ 和 ν 分别是局中人 I 和 II 的最优策略的集合的维数，而 ρ 是矩阵 $\|a_{ij}\|$ 的秩，那么 $\mu+\nu\leqslant m+n-\rho$．因此，如果矩阵 $\|a_{ij}\|$ 是非退化的，那么 $\mu+\nu\leqslant\max(m, n)$．有限凸对策与退化(可分)对策(见**退化对策** (degenerate game)) 密切相关．

设 $\Gamma=\langle X, Y, K\rangle$ 是单位正方形上的零和对策(见**单位正方形上的对策** (game on the unit square))，其中支付函数对每个 $y\in Y$ 关于 $x\in X$ 是凹的，且在正方形 $X\times Y$ 中连续．局中人 I 将有最优纯策略 $x_0\in X$，而局中人 II 将有最优测度(混合策略)，其支集至多由两个点组成．这样，在凸对策中就有可能得到有关不属于集合 A 的局中人的策略性质的某些信息．单位正方形上的凸对策的自然推广是**广义凸对策** (generalized convex games)，它是由下述事实来定义的：对于某个 n，不等式 $\partial^n K(x, y)/\partial x^n\leqslant 0$ 对于 $x\in X$, $y\in Y$ 成立．在这种情形下，如果规定对于线段的端点赋以权为 1/2，那么局中人 I 有其支集至多由 $n/2$ 个点所组成的最优测度，而局中人 II 将有其支集至多由 n 个点所组成的最优测度．

参考文献

[1] Nikaido, H. and Isoda, K., Note on non-cooperative convex games, *Pacific J. Math.*, 5 (1955), 807−815.

[2] Dresher, M. and Karlin, S., Solution of convex games as fixed points, in H. W. Kuhn and A. W. Tucker (eds.), Contributions to the theory of games, Vol. 2, Princeton Univ. Press, 1953, 75−83.

[3] Bohnenblust, H. F., Karlin, S. and Shapley, L. S., Games with continuous, convex pay-off, in H. W. Kuhn and A. W. Tucker (eds.), Contributions to the theory of games, Vol. 1, Princeton Univ. Press, 1950, 181−192.

Г. Н. Дюбин 撰

【译注】 凸对策不一定总是指非合作对策．在**合作对策** (cooperative game) 理论中同样也有凸对策概念．

史树中 译

凸包 [convex hull；выпуклая оболочка]，集合 M 的

包含 M 的最小**凸集** (convex set)，也是包含 M 的所有凸集之交．集合 M 的凸包记做 conv M．在 Euclid 空间 E^n 中，凸包是以不同方式分布在 M 上的质量的重心的所有可能位置的集合．凸包的每一点是集中在至多 $n+1$ 个点上的质量的重心 (Carathéodory 定理 (Carathéodory theorem))．

凸包的闭包称为闭凸包 (closed convex hull)．它是所有包含 M 的闭半空间的交，或者就是 E^n．凸包的边界中不与 M 邻接的那部分有一个可展超曲面的局部结构．在 E^n 中一个有界闭集 M 的凸包是 M 的端点的凸包(M 的端点是指 M 中不是任何包含在 M 中的线段的内点的点)．

除 Euclid 空间外，凸包通常是在局部凸线性拓扑空间 L 内考虑．在 L 中一个紧集 M 的凸包是它的端点的闭凸包 (Крейн-Мильман 定理 (Krein-Mil'man theorem))．

参考文献

[1] Edwards, R. E., Functional analysis: theory and applications, Holt, Rinehardt, Winston, 1965.

[2] Phelps, R. R., Lectures on Choquet's theorem, v. Nostrand, 1966.

В А Залгаллер 撰 虞言林 译

凸度量 [**convex metric**; **выпуклая метрика**]

二维流形 M 上满足某种凸性条件的**内度量**(internal metric). 更确切地说, 设 l 和 m 是两条从某点 $O\in M$ 出发的最短线; X 和 Y 是这两条线上的点; x,y 分别是从 O 到 X 和 Y 的距离; z 是 X 和 Y 之间的距离; 并设 $\gamma(x,y)$ 是以 x,y,z 为边的平面三角形中边 z 的对角. 那么, 度量(在点 O)的凸性条件是指: 如果 $0<x\leqslant x_0$, $0<y\leqslant y_0$ 是一对区间, 使得与这两个区间中任意两个值对应的点 X 和 Y 都能用最短线连接, 那么 $\gamma(x,y)$ 在任何这样的一对区间上是非增函数(即, 如果 $x_1\leqslant x_2$, $y_1\leqslant y_2$, 那么 $\gamma(x_1,y_1)\geqslant\gamma(x_2,y_2)$). 一个内度量是凸度量, 当且仅当它是一个曲率非负的度量. 一个凸曲面的度量是凸度量. 反之, 任何一个具有凸度量的二维流形能成为一个凸曲面(Александров 定理(Aleksandrov theorem)).

参考文献

[1] Александров, А. Д., Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, М.-Л., 1948.

М И Войцеховский 撰 潘养廉 译

凸算子 [**convex operator**; **выпуклый оператор**]

见**凹算子与凸算子** (concave and convex operators).

凸多边形 [**convex polygon**; **выпуклый многоугольник**]

由有限条直线段组成的折线所包围的平面**凸集**(convex set). 其边界本身有时也称为凸多边形. 一个凸多边形是有限个闭半空间的交集.

М. И Войцеховский 撰 虞言林 译

凸多面体 [**convex polyhedron**; **выпуклый многогранник**]

Euclid 空间 E^n 中有限多个点的**凸包**(convex hull). 这样的凸多面体是有限多个闭半空间的有界交集. 无限凸多面体是指有限个闭半空间的交, 且它至少包含一条射线. 空间 E^n 习惯上也当做一个凸多面体. 在这个意义上凸多面体是有限个点与射线的闭凸包. 一个凸多面体的维数是包含它的空间 E^n 的最小维数.

凸多面体是**凸集**(convex set)的特殊情形. 作为半空间的交集的凸多面体是由一组线性不等式来刻画的, 因而可以用代数工具来研究它. 凸多面体上线性型极小化的方法构成了**线性规划**(linear programming)的主题.

一个凸多面体有有限多个面(faces)(凸多面体与支撑超平面的交集). 凸多面体的每一个面是一个较低维数的凸多面体. 面的面也是原多面体的面. 一维面称为棱(edges); 零维面称为顶点(vertices). 一个有界凸多面体是它的顶点的凸包.

在**凸曲面**(convex surface)的理论中, 一个凸多面体的边界, 有时是这样的边界的一部分, 也称为一个凸多面体([1]). 在后面这种情形, 可以谈论具有边界的凸多面体. 在初等几何中, 把多面体定义为用多边形以特定方式构成的图形([2]), 然后把凸多面体定义为一个多面体, 并且它位于它的任何一个 $n-1$ 维面所在的平面之一侧.

一个有界的 n 维凸多面体的顶点数不少于 $n+1$. 最简单的是一个单形(simplex), 它有 $n+1$ 个顶点. 任何一个有界凸多面体可以剖分为一些具有相邻公共面的单形.

在 Euclid 空间 E^3 中有五个正凸多面体: 正四面体, 正立方体, 正八面体, 正十二面体和正二十面体. 有关它们的性质及它们的类似物见**正多面体**(regular polyhedra), **半正多面体**(semi-regular polyhedra), 关于具有特别的结构特性的凸多面体见**等角多面体和等面多面体**(isogons and isohedra), **全对称多面体**(zonohedron). 特别类型的多面体, 即**基多面体**(stereohedron), **平行多面体**(parallelohedron), **平面基多边形**(planigon)都和空间的正规剖分有关.

凸多面体的面的网络结构的可能类型未详尽研究过. 设 f_k 是一个有界 n 维凸多面体的 k 维面的个数, 则有 Euler 关系式(Euler relation)

$$f_0-f_1+\cdots+(-1)^{n-1}f_{n-1}=1+(-1)^{n-1};$$

这有一个拓扑的特性: 对球面 S^{n-1} 的任意一个分成单纯胞腔的剖分, 它都成立. 如果 $n=3$, 对于球面 S^2 上任何一个连通的面网络, 当它不形成二面的和自交的胞腔时, 就可以在 Euclid 空间 E^3 中找到一个凸多面体具有这样的网络结构(Steinitz 定理(Steinitz theorem)). 如果 $n>3$, 一个凸多面体的网络结构就没有如球面可能的剖分那样地任意([3]). 涉及面的网络结构, 棱的数目或总长度等等特定的极值问题是可以对凸多面体类提出的([4]).

用凸多面体逼近凸体, 是通用的研究方法. **混合体积理论**(mixed-volume theory)中的许多结果, 具有固定参量的凸曲面的存在性定理, 唯一性定理, 稳定性定理, 以及解 **Monge-Ampère 方程**(Monge-Ampère equation)的一个几何方法已经是用这种方法得到的. 这个方法的有效性在于下列事实: 凸多面体是由有限个数据来确定的; 关于它的一般性定理能简单地陈述; 并且综合研究方法适用于凸多面体.

凸多面体的大部分理论已在曲面论的范围内叙述

([1])，在 Euclid 空间 E^3 中两个以相同次序有相等的面的有界凸多面体可以用一个位移使它们重合(Cauchy 定理(Cauchy theorem))．在 E^n 中，对于满足下列关系的 $\mathbf{n}_i$，$S_i>0$：

$$\sum_{i=1}^{N}\mathbf{n}_iS_i=0,\quad N\geqslant n+1,$$

存在唯一(差一个位移)的一个凸多面体以 $\mathbf{n}_i$ 为单位外法向量以 S_i 为面的面积 (Minkowski 定理(Minkowski theorem))．一个平面多边形的粘合物，如果它同胚于球面，并使得围绕它的每一顶点粘合在一起的角的和小于或等于 2π，则必等距于 E^3 中一个凸多面体，并且这个凸多面体在差一个位移下是唯一的(Александров 定理(Aleksandrov theorem))．E^n 中两个凸多面体可以用位移使之重合，如果对于每一个法向量 $\mathbf{n}$、以 $\mathbf{n}$ 为外法向量的两个对应面不可能经位移使其中之一变为另一个面的一部分而不重合．对于从一个点出发的一组射线 l_i 和一组数 $\omega_i>0$，除了差一个位似外，存在唯一一个凸多面体，使得它们第 i 个顶点在射线 l_i 上，并且这个顶点的曲率为 ω_i．

参考文献

[1] Александров, А. Д., Выпуклые многогранники, М.-Л., 1950.

[2] Fejes Toth, L., Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum, Springer, 1972.

[3] Энциклопедия элементарной математики, кн. 4, Геометрия, М., 1963.

[4] Grünbaum, B., Convex polytopes, Interscience, 1967.

В. А. Залгаллер 撰

【补注】 近来术语凸多胞形(convex polytope)更常用来描述 E^n 中有限多点的凸包．于是凸多面体(convex polyhedron)就是凸多面域的边界(见本条第四段第一行)．有限多个半空间之交称为多面体集(polyhedral set)，它不必是有界的． 虞言林 译

凸规划 [convex programming; выпуклое программирование]

数学规划 (mathematical programming) 的一个分支，它研究求解由等式和不等式组确定的凸集上的凸函数的极小化问题的理论和方法．存在相当复杂的凸规划理论，求解此领域中的问题的各种各样的方法也已得到发展，对于许多凸规划的迭代法，其收敛性的先验估计已经建立．**二次规划** (quadratic programming) 是凸规划的分支之一．

参考文献

[1] Еремин, И. И., Астафьев, Н. Н., Введение в теорию линейного и выпуклого программирования, М., 1975.

[2] Карманов, В. Г., Математическое программирование, М., 1975.

[3] Zangwill, W. I., Nolinear programming: a unified approach, Printice-Hall, 1969.

[4] Polak, E., Computational methods in optimization: a unified approach, Acad. Press, 1971.

В. Г. Карманов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Rockafellar, R. T., Convex analysis, Princeton Univ. Press, 1970.

[A2] Stoer, J. and Witzgall, C., Convexity and optimization in finite dimensions, 1, Springer, 1970.

史树中 译

凸序列 [convex sequence; выпуклая последовательность]

满足下列条件的实数序列 $\{a^n\}$ $(n=0,1,2,\cdots)$：

$$2a_n\leqslant a_{n-1}+a_{n+1},\quad n=1,2,\ldots. \qquad (*)$$

设

$$\Delta a_n=a_n-a_{n+1},\quad \Delta^2a_n=\Delta a_n-\Delta a_{n+1}.$$

条件(*)可以写成

$$\Delta^2a_n\geqslant 0,\quad n=0,1,\ldots.$$

条件(*)的几何意义是：(x,y) 平面上的具有角点 $x=n$，$y=a_n$ 的折线是凸的．如果序列 $\{a_n\}$ 是凸的和有界的，则

1) 这个序列是非增的，因而收敛于一个有限的极限；

2) $\lim_{n\to\infty}n\Delta a_n=0$；

3) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\Delta^2a_n=a_0-\lim_{n\to\infty}a_n$．

如果当 $x\geqslant 0$ 时 $f(x)$ 是**凸函数(实变量的)** (convex function (of a real variable))，则序列 $a_n=f(n)$ $(n=0,1,2,\cdots)$ 是凸的． Л. Д. Кудрявцев 撰 张鸿林 译

凸集 [convex set; выпуклое множество], Euclid 空间或任意一个向量空间中的

一个集合，只要它包含某两个点，它就包含连接这两点的线段．任何一族凸集之交本身也是一个凸集．

包含一给定凸集的平面(即仿射子空间)的最小维数称为这个凸集的维数．一个凸集的闭包(即在这个凸集中加进所有边界点的结果)给出一个相同维数的凸集．凸集理论的主题是研究凸体(convex bodies)，它是有限的(即有界的) n 维闭凸集．如果不规定有界性，那么所讲的是无限凸体．如果不规定维数是 n，那么所讲的就是退化的凸体或较低维数的凸体了．

一个凸体同胚于一个闭球体．一个不含直线的无限凸体同胚于一个半空间．可是包含一条直线的无限

凸体是柱体，这个柱体有一个凸的(可能是无限的)截面.

过凸集的边界上每一点，至少有一张超平面使得这个凸集位于由此超平面所确定的两个闭半空间之一．这样的超平面和半空间就称为在给定边界点处是支撑的(supporting)．闭凸集是它的支撑半空间的交．有限个闭半空间的交是一个凸多面体．凸体的面(faces)是它与支撑超平面的交．一个面是一个低维的凸体．凸体也看做为它自己的 n 维面．与多面体不同，一个面的面未必是原凸体的面．

与凸体上每一个边界点 x 相联系的有：一个开切锥，它是由从 x 出发经过凸体内点的射线组成的；一个闭切锥，它是开切锥的闭包；一个切锥面，它是开切锥的边界．前两个锥是凸的．

凸体的边界点可由它所属于的面的最小维数来分类，也可由此点处支撑平面集的维数来分类．零维面的点称为顶点．凸体的端点是那些不在属于凸体的线段的内部的点．各类点有多少，各类面的方向集的大小是正在研究的问题．例如支撑超平面不唯一的点在边界上的 $(n-1)$ 维面积为零．落在边界上的直线段的方向构成的集合在空间的所有方向中是零测度的．

每一个不属于凸体的点被一张超平面同凸体严格地分隔开来，使得点与凸体分属于不同的开半空间．两个不相交的凸集为一张超平面分隔，使它们落在不同的闭半空间内．这种分隔性质对无穷维向量空间中的凸集也成立．

一个凸体 F 伴随着一个支撑函数(support function) $H: E^n\to E^1$，它是用方程 $H(u)=\sup\{ux: x\in F\}$ 来定义的，其中 ux 是内积．函数 $H(u)$ 是正齐一次的：$H(\alpha u)=\alpha\cdot H(u)$，对于 $\alpha>0$；并且它还是凸的：

$$H(u+v)\leqslant H(u)+H(v).$$

具有这两个性质的函数都是某个唯一的凸体的支撑函数．给出支撑函数是给出凸体的主要方法之一．

如果坐标原点位于凸体的内部，可以引入距离函数 $D: E^n\to E^1$ 如下：对 $u\neq 0$，令

$$D(u)=\inf\left\{\alpha: \frac{u}{\alpha}\in F\right\},$$

并令 $D(0)=0$．这也是一个确定凸体 F 的正齐一次凸函数．两个凸体称为互为配极的(polar)(或对偶的(dual))，如果其中一个的支撑函数是另一个的距离函数．对偶凸体的存在性与 E^n 的自对偶性有关．

如果凸体 F 关于坐标原点是对称的，那么函数 $\rho(u,v)=D(u-v)$ 是一个度量．这就是 Minkowski 空间(有限维 Banach 空间)的度量，F 起着单位球体的作用．类似地，在无穷维 Banach 空间中的单位球体是一个凸集．空间的性质与这个球体的几何有关，特别地和边界上不同类型点的出现有关([3])．

凸体可以看做边界上所有的点或其中某些点的凸包(convex hull)．

存在一些准则用来判断一个集合(或某族中的任一个集合)是不是凸的．例如，如果 E^3 中的一个 C^2 光滑闭曲面，在所有点处有非负的 Gauss 曲率，那么这个曲面是一个凸体的边界．如果 E^3 中一个紧集 F 与任何一张置 F 于一个半空间内的平面的交集是单连通的，则 F 是凸的([4])．

有许多办法在一个凸体的集合中引进度量，该集合包含退化的凸体，但不包含空的凸体．Hansdorff 度量是最常用的一个(见**凸集的度量空间**(convex sets, metric space of))．在这个度量下，每一个凸体可以用凸多面体逼近，也可以用由 $P(x_1,\cdots,x_n)\leqslant 0$ 定义的凸体来逼近，这里的 P 是坐标的一个多项式，在边界的所有点上有正的主曲率．

凸体总有有限的体积(按 Jordan 意义)，它等同于凸体的 n 维 Lebesque 测度．凸体的边界有有限的 $(n-1)$ 维面积．在这样一种情形下引进面积的各种方法都是等价的．体积以及边界的面积(在 Hausdorff 度量下)连续地依赖于凸体．

混合体积理论(mixed - volume theory)与凸体的线性组合 $\Sigma\lambda_i F_i$ 的体积对系数 λ_i 的依赖性的研究有关，混合体积不仅包含体积和边界的面积，同时也包含许多其他的与凸体有关的泛函([5])，例如沿不同的方向向 k 维平面投影的 k 维体积及其平均值．这个理论的主要结果是混合体积之间的各种不等式，包含**经典等周不等式**(isoperimetric inequality, classical)．

凸体关联着一些简单的图形．例如，每一个凸体有一个唯一最大的(相对于体积而言)内接椭球体和一个最小的外切椭球体([6])．有一些准则用来刻画凸体集合中的球体，椭球体和中心对称的凸体([1]，[2])，关于凸集族的定理构成凸集理论中一个特殊的课题([6])．

凸集理论的意义在于它的方法和结果的直观性，一般性以及对光滑性的解析要求的不依赖性(非光滑的凸体常常是极值问题的解)．

参考文献

[1] Bonnesen, T. and Fenchel, W., Theorie der konvexen Körper, Springer, 1934.

[2] Valentine, F., Convex sets, McGraw - Hill, 1964.

[3] Day, M. M., Normed linear spaces, Springer, 1958.

[4] Бураго, Ю. Д., Залгаллер, В. А., Достаточные признаки выпуклости, Записки научных семинаров Ленинградского отделения матем. ин - та, 45 (1974), 3 – 53.

[5] Hadwiger, H., Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie, Springer, 1957.

[6] Danzer, L., Grünbaum, B. and Klee, V., Helly's theorem and its relatives, in Proc. Symp. Pure Math., Vol. 7 (Convexity), Amer. Math. Soc., 1963, 101 − 180.

Ю. Д. Бураго, В. А. Залгаллер 撰

【补注】 E^n 中凸集 X 的极化集直接地定义为 $X^* = \{u \in E^n : ux \leq 1,\ 对\ x \in X\}$. 于是 X 的支撑函数也定义为 $H(u) = \inf\{\rho > 0 : u \in \rho X^*\}$. 类似地，距离函数是 $D(x) = \sup\{ux : u \in X^*\}$. 给定距离函数 $D(x)$ 之后，对应的闭凸集定义为 $X = \{x \in E^n : D(x) \leq 1\}$.

参考文献

[A1] Eggleston, H. G., Convexity, Cambridge Univ. Press, 1969.

虞言林 译

凸集的线性空间 [convex sets, linear space of ; выпуклых множеств пространство (линейное)]

元素为局部凸线性拓扑空间中的**凸集** (convex set) 对 (X, Y) 的等价类的空间. 凸集对 (X, Y) 被处理为 "差" $X - Y$, 且由定义，凸集对 (X_1, Y_1) 和 (X_2, Y_2) 等价是指 $X_1 + Y_2 = X_2 + Y_1$, 其中集合的加法被理解为向量和的闭包. 在凸集的线性空间中可以引入加法、减法、数乘和拓扑，并使得这个空间变为局部凸拓扑空间. 也可引入半序的概念，它类似于集合的包含关系. 凸集的线性空间也在非局部凸线性空间中予以研究.

参考文献

[1] Пинскер, А. Г., Пространство выпуклых множество локально выпуклого пространства, 《Тр. Ленингр. инж - экон. ин - та》, 63 (1966), 13 − 17.

В. А. Залгаллер 撰 史树中 译

凸集的度量空间 [convex sets, metric space of ; выпуклых множеств пространство]

Euclid 空间 E^n 中紧致**凸集** (convex set) 的集合，并带有 Hausdorff 度量

$$\rho(F_1, F_2) = \sup_{\substack{x \in F_1, \\ y \in F_2}} \{\rho(x, F_2), \rho(y, F_1)\}.$$

这个空间是有界紧的 (见 **Blaschke 选择定理** (Blaschke selection theorem)). 关于凸集的度量空间的类似物 (其他的度量化，非紧集，集类，其他的初始空间) 见[1].

参考文献

[1] Grünbaum, B., Measures of symmetry for convex sets, in Proc. Symp. Pure Math., Vol. 7 (Convexity), Amer. Math. Soc., 1963, 233 − 270.

В. А. Залгаллер 撰

【补注】 凸集的度量空间 (特别是用对称差度量来度量化的) 在凸几何的分析基础中起着根本的作用. 在 [A1], [A3], [A2] 中给出的凸几何新的重要结果指出了一条一般的公理化途径.

参考文献

[A1] Gruber, P., Approximation of convex bodies, in P. Gruber and J. M. Wills (eds.): Convexity and its applications, Birkhäuser, 1983, 131 − 162.
[A2] Hadwiger, H., Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie, Springer, 1957.
[A3] McMullen, P. and Schneider, R., Valuations on convex bodies, Birkhäuser, 1983, 170 − 247.

虞言林 译

凸子群 [convex subgroup ; выпуклая подгруппа]

(偏) **序群** (ordered group) G 的子群 H, 在所给的序关系下，是 G 的**凸子集** (convex subset). 正规凸子群恰是偏序群的保序同态的核. **可序群** (orderable group) 的子群，如果对于每个全序都是凸的，就称作绝对凸子群 (absolutely convex subgroup); 如果只对于某个全序是凸的，则称作相对凸子群 (relatively convex subgroup). 可序群中所有非平凡的相对凸子群之交是绝对凸子群；所有真相对凸子群的并也是绝对凸子群. 无挠 Abel 群不含非平凡的绝对凸子群. 完全可序群 G 的子群 H 成为绝对凸子群，当且仅当对任意元 $g \notin H, a \in H$, 交 $S(g) \cap S(ga)$ 是非空的，这里 $S(x)$ 表 G 中含 x 的极小不变子半群. **格序群** (lattice - ordered group) 的凸 l 子群 H 总是孤立的 (isolated). 即对于任何自然数 n, 由 $x^n \in H$ 可得出 $x \in H$.

参考文献

[1] Кокорин, А. И., Копытов, В. М., Линейно упорядоченные Группы, М., 1972.
[2] Fuchs, L., Partially ordered algebraic systems, Pergamon, 1963.

А. И. Кокорин, В. М. Копытов 撰 戴执中 译

凸子集 [convex subset ; выпуклое подмножество], 偏序集的

包含任意二元素 a, b, 同时也包含整个区间 (见**区间与线段** (interval and segment)) $[a, b]$ 的子集.

Л. А. Скорняков 撰

【补注】 一个不涉及区间概念的定义是：偏序集的子集 A 是凸的，若 $a \leq b \leq c$, 且 $a, c \in A$, 则 $b \in A$.

在实直线上 (带有通常的序), 凸子集正是连通子集 (按通常的拓扑). 这对于更一般的有序拓扑空间 (ordered topological space) 不一定成立. 但如果给偏序集以区间拓扑 (见**序拓扑** (order topology)), 则连通子集是凸子集.

戴执中 译

凸曲面 [convex surface ; выпуклая поверхность]

Euclid 空间 E^3 中一个**凸体** (convex body) 的边界上的一个区域 (连通的开集). 一个凸体的整个边界称为一个完全凸曲面 (complete convex surface). 如果凸体是有限的 (有界的), 那么完全凸曲面称为闭的

(closed)．如果凸体是无限的，那么完全的凸曲面称为无限的(infinite)．一个无限的凸曲面同胚于一个平面或一个圆柱面．在后一情形下，它本身是一个柱体．最简单一类的凸体是凸多面体，即有限个半空间的交．凸多面体的表面由凸多边形构成，它也称为**凸多面体**(convex polyhedron)．

凸曲面的近代理论主要是由苏联几何学家 A. Д. Александров 及其学派发展起来的，不过，该理论中个别的结果早就知道了．比如，闭凸多面体的刚性已由 A. L. Cauchy 所证明．H. Liebman 和 W. Blaschke 证明了闭凸曲面是刚性的．H. Minkowski 证明了具有指定 Gauss 曲率的闭凸曲面的存在性，H. Weyl 勾画了具有给定度量的闭凸曲面的存在性问题的解答．这个解答后为 H. Lewy 所完善．S. E. Cohn-Vossen 证明了正则闭凸曲面是可唯一确定的．

对于一个凸曲面 F 上每一个点 X，自然地对应着一个锥 $V(X)$，它是曲面 F_n 在 $n\to\infty$ 时的极限，这里的 F_n 是从 F 经过一个关于点 X，以 n 为系数的位似变换而得到的．这个锥称为切锥(tangent cone)．根据切锥的形状，把凸曲面上的点分为锥顶点、脊点和光滑点．如果在这个点处的切锥是非退化的，则这个点称为锥顶点(conical point)．另一方面，如果切锥退化为二面角或一张平面，则这个点就分别称为脊点(ridge point)或光滑点(smooth point)．从某种意义上来讲，凸曲面上的非光滑点是例外的．事实上脊点集是零测度的，而锥顶点集至多是可数的．

凸曲面序列的收敛概念定义如下：一列凸曲面 F_n 收敛于凸曲面 F，如果任意开集 D 同时与 F 及所有 F_n（其中 $n>N(D)$）相交或不定．任何一凸曲面可以表为凸多面体的极限．凸曲面的无限集合表现出重要的紧致性，即从任何一列不趋于无限的完全凸曲面，总可抽出一个收敛的子序列，以一个凸曲面为极限，这个凸曲面可能退化(为一双层平面区域，一条直线，一条半直线，或一线段)．

凸曲面上任意两点可以用曲面上一条可求长的曲线连接起来．凸曲面上连接两给定点的曲线长度的最大下界称为这两点在曲面上的距离(distance)，凸曲面上一条曲线称为最短曲线(shortest curve)，如果它的长度在曲面上所有与之共端点的曲线的长度中为最小．凸曲面上任意一点都有一个邻域，使得其内的任意两点皆可用曲面上的最短曲线连接．完全的凸曲面上任意两点皆可用最短曲线连接．凸曲面上的最短曲线在其上每一点有一个右半切线和一个左半切线．凸曲面上最短曲线的一个重要性质是不重叠性(non-overlapping property)．这就是说，两条最短曲线只能以下列方式彼此相处：它们没有公共点；它们有一个公共点；它们有两个公共点并且这两点是它们的端点；一条最短曲线是另一条的一部分；或者它们沿一线段重合，这线段的一个端点是一条最短曲线的端点而另一个端点是第二条最短曲线的端点．凸曲面上的度量有凸性(convexity property)（见**凸度量**(convex metric)）．在点 O 处两条最短曲线 γ 与 γ' 之间的角(angle)是角 $\alpha(X,X')$ 在 $X,X'\to O$ 时的极限，其中 X,X' 分别是 γ,γ' 上的点．对于出发于一公共点的两条最短曲线，如此定义的角是存在的．由于最短曲线的不重叠性，从点 O 出发的两条最短曲线 γ 和 γ' 把 O 点的邻域分为两个扇形．令 V 是其中的一个扇形．将这个扇形中的一组最短曲线按照自 γ 向 γ' 移动时它们出现的顺序进行编号，得到 $\gamma_1,\cdots,\gamma_n$．令 $\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是邻接的最短曲线 γ 和 γ_1，γ_1 和 $\gamma_2,\cdots,\gamma_n$ 和 γ' 之间的角．扇形 V 的角(angle of the sector)则是角之和 $\alpha_0+\cdots+\alpha_n$ 的最小上界，其中 γ_i 取遍扇形 V 内的所有最短曲线．扇形的角等于 O 点处最短曲线的半切线在切锥的平展面上的角度．以点 O 为顶点的互补扇形的角之和不依赖于所取的特定的最短曲线，它称为 O 点处的完全角(complete angle)．凸曲面上任意一点处的完全角不会大于 2π．

内(内蕴的)曲率(internal (intrinsic) curvature)和外(外在的)曲率(external (extrinsic) curvature)的概念对凸曲面已有定义了．内曲率 ω 起先是对基本集来定义的．基本集是指点，开的最短线和三角形．三角形(triangle)是一个区域，它同胚于圆盘并为三条最短线所围，如果 M 是一个点，θ 是曲面在 M 点处的完全角，则 $\omega(M)=2\pi-\theta$．如果 M 是一条开的最短线，即端点除外的最短线，则 $\omega(M)=0$．如果 M 是一个开三角形，即除去边与顶点的三角形，则 $\omega(M)=\alpha+\beta+\gamma-\pi$，其中 α,β,γ 是三角形的角．接着对初等集定义曲率，其中初等集是两两不相交的基本集的集合论的和(并集) $M=\sum_{k=1}^{n}B_k$．对于这样的集合 $\omega(M)=\sum\omega(B_k)$，任何一个闭集的内曲率定义为包含该闭集的初等集的内曲率的最大下界．最后，任意一个集的内曲率定义为含于其内的闭集的内曲率的最小上界．在凸曲面上如此定义的内曲率是 **Borel 集**(Borel set)环上的一个完全加性函数．凸曲面上一个集合的外曲率定义为这个集合在**球面映射**(spherical map)下的象的面积(Lebesque 测度)．它对凸曲面上所有 Borel 集都有定义，并且同内曲率相等．

如果一个二维流形的任何两点之间的距离 $\rho(X_1,X_2)$ 等于在这个流形上连接 X_1 和 X_2 的曲线的长度的最大下界，则这个流形上的度量 ρ 称为内度量(internal metric)．连接 X_1 和 X_2 的曲线 $X(t)(0\leqslant t\leqslant 1)$ 的长度定义为和

$$\sum\rho(X(t_{k-1}),X(t_k)),\quad 0\leqslant t_1<t_2<\cdots\leqslant 1$$

的最小上界．令 γ 和 γ' 是具有内度量的流形上自 O 点

出发的两条曲线．在曲线上取点 X 和 X'，并构造以 $\rho(O,X)$，$\rho(O,X')$，$\rho(X,X')$ 为边长的平面三角形．这个三角形中边 $\rho(X,X')$ 的对角 $\alpha(X,X')$ 的下极限称为曲线 γ 与 γ' 在 O 点的夹角(angle between the curves)．显见，这个角总是存在的，流形上一个度量称为凸度量(convex metric)，如果以最短线为边的任意三角形的角之和不小于 π．在这个意义上讲凸曲面的度量是凸的．凸曲面论中主要结果之一是一个内凸度量在凸曲面上的可实现性定理．于是具有内凸度量的完全流形可以用一个完全的凸曲面来实现．

右旋度(right rotation)和左旋度(left rotation)推广了**测地曲率**(geodesic curvature)的积分，它是对凸曲面上曲线引进的．设 γ 是凸曲面上任意一条不相自交的曲线，它以 A, B 为端点．在 γ 上选定一个方向，构造一列以 A, B 为端点的简单测地折线 γ_n，位于曲线 γ 的右半邻域内并且收敛于 γ，令 $\alpha_{n,m}$ 是 γ_n 与 γ 围成的区域的边界上折线 γ_n 的交接处形成的各个扇形的角．又令 α 和 β 是折线 γ_n 与 γ 在端点处形成的扇形的角．当 $\gamma_n \to \gamma$ 时，$\alpha+\beta+\sum_m(\pi-\alpha_{n,m})$ 的极限称为右旋度(right rotation)．这个极限总是存在的，只要曲线 γ 在端点处有确定的方向，即有半切线．并且它不依赖于折线序列的选取．左旋度(left rotation)可类似地定义．一条闭曲线的旋度则利用在它的合适一侧逼近它的闭折线来定义．**Gauss - Bonnet 定理**(Gauss - Bonnet theorem)可推广到凸曲面情形．事实上，如果凸曲面上一条闭曲线是一个同胚于圆盘的区域的边界，那么区域的曲率与围成区域的曲线在区域一侧的旋度之和是 2π．

等距变换(isometric transformation)是凸曲面的一个变形，在此变形下曲面要保持凸性，并且它的度量要保持不变，即曲面上点之间的距离保持不变．一个等距变换称为平凡的(trivial)，如果它可归结为整个曲面的一个 Euclid 运动，或者是一个运动，和镜面反射的合成．没有非平凡等距变换的曲面称为唯一确定的(uniquely defined)，闭凸曲面和具有全曲率 2π 的无限凸曲面是唯一确定的．全曲率小于 2π 的无限凸曲面可以经受相当任意的非平凡等距变换．所有凸曲面都有非平凡的局部等距变换，即凸曲面上每一点皆有一个邻域容许有这样一种变换．

研究凸曲面的等距变换的最重要工具是粘合定理(glueing theorem)．按照这个定理，当一个完全的流形 D 由一些等距于凸曲面的区域 D_k 组成时，如果下列条件满足，则它本身等距于一个凸曲面：区域 D_k 的边界有有界变差的旋度；边界上等长的线段是等同的；在等同边界的任意的线段上旋度之和是非负的；区域 D_k 的边界在任一公共点处扇角之和不超过 2π．关于凸曲面非平凡等距变换的可能性的定理通常利用粘合一个平面区域到一凸曲面而得到，这时上面条件满足．

对于一般的凸曲面，面积(area)的概念是对任意 Borel 集引入的．首先对由最短线围成的简单集(测地多边形)引入面积．这个多边形有一个好的剖分 T_n 使得三角形的边小于 $1/n$．对于这个剖分的每一个三角形，我们造一个与它有等长的边的平面三角形，取这种三角形面积之和 S_n．由此发现，不管多边形如何剖分，当 $n\to\infty$ 时，面积和 S_n 总是趋于一个确定的极限．这个极限被取为多边形的面积．接着用测度论的办法来确定闭、开及一般 Borel 集的面积．凸曲面的面积是 Borel 集合环上一个完全加性函数．

一个凸曲面在区域 D 上的特定曲率(specific curvature)是区域的曲率和它的面积比．如果一个凸曲面在所有区域上的特定曲率介于两正数之间，则这曲面是光滑的，并且是严格凸的．凸曲面在一给定点 X 处的 Gauss 曲率(Gaussian curvature)是向 X 收缩的区域的特定曲率的极限．如果 Gauss曲率存在，则它是曲面上点的连续函数．如果凸曲面上某一 Gauss 曲率存在，那么在这曲面上可引进测地极坐标并且将曲面的线元表为

$$ds^2 = dr^2 + G(r,\theta)d\theta^2.$$

系数 G 用来以下列公式确定Gauss 曲率

$$K = -\frac{(\sqrt{G})_{rr}}{\sqrt{G}}.$$

一个凸曲面称为正则的(regular)，如果它在每个点的一个邻域中由一个解析表达式 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$ 确定，其中 $\mathbf{r}(u,v)$ 是正则的(即充分高次可微的)向量值函数，满足条件 $\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\neq 0$．凸曲面的度量称为正则的(regular)，如果它用线元

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

来确定，其中系数是正则的函数．正则的凸曲面显然有一个正则度量，因为

$$E = \mathbf{r}_u^2,\quad F = \mathbf{r}_u\mathbf{r}_v,\quad G = \mathbf{r}_v^2$$

逆命题通常不对．例如一个二面角上有一个正则的甚至解析的度量，这是因为它等距于平面，但是它不是正则的曲面．尽管如此，如果一个凸曲面的度量是正则的，它的Gauss曲率又是正的，那么这曲面是正则的．事实上如果线元的系数是 n 次可微的($n\geqslant 2$)，那么曲面至少是 $n-1$ 次可微的．

凸曲面的理论也可以在常曲率空间中建立．如同在 Euclid 空间的情形一样，凸曲面是一个凸体边界上的一个区域．常曲率空间中凸曲面理论的许多结果的陈述和证明如同 Euclid 空间的情形．但是在各自的结果之间也可能存在本质的差别，例如，在 Лобачевский

空间中，完全的凸曲面可以同胚于球面上任何一个连通的开集.

参考文献

[1] Minkowski, H., Volumen und Oberfläche, *Math. Ann.*, **57** (1903), 447 − 495.

[2] Weyl, H., Ueber die Bestimmung einer geschlossenen konvexen Fläche durch ihr Linienelement, *Vierteljahrschrift Naturforsch. Gesell. Zurich*, 3 (1916), 2, 40 − 72.

[3] Кон - фоссен, С. Э., 《Успехи матем. наук》, 1(1936), 33 − 76.

[4] Александров, А. Д., Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, М. - Л., 1948 (中译本: А. Д. 亚历山大洛夫, 凸面的内蕴几何学, 科学出版社, 1962).

[5] Погорелов, А. В., Внешняя геометрия выпуклых поверхностей, М., 1969 (英译本: Pogorelov, A. V., Extrinsic geometry of convex surfaces, Amer. Math. Soc., 1973).

А. В. Погорелов 撰

【补注】 设 C 是 E^3 中一个凸体. 在 C 的边界上点 x 处的一个支撑超平面是一张平面，它经过这个点并且不包含 C 的内点. 设 F 是一个围成 C 的凸曲面，又设 $x \in F$. 对 C 在 x 处的每个支撑平面，考虑它的与 C 的内点相交的半空间(支撑半空间). x 处所有支撑半空间的交是一个闭锥. 这个锥的边界是 x 点处的切锥.

关于凸曲面的刚性(rigidity) 概念见形变(deformation) 和无穷小形变 (infinitesimal deformation). Cohn - Vossen 定理(Cohn - Vossen theorem)说: 如果 F_1 是一个闭的三次连续可微曲面，具有正 Gauss 曲率，并且等距于另一个同样的曲面 F_2，那么 F_1 就全等于 F_2 或它的镜象. 这里的全等是指一个曲面由另一曲面经过外围空间 E^3 中一个 Euclid 运动而得到的，见[5], p.120.

一个凸曲面 F 称为在凸曲面的类 K 中是单型的 (monotypic)，如果 K 中任意等距于 F 的曲面必全等于 F. 于是就有，单型定理(monotypy theorem)：两个等距的闭凸多面体是全等的. 同样也有，任意的等距于闭凸多面体的凸曲面(不必是一个多面体)实际上就全等于这个多面体(S. P. Olovyanishnikov, 1941).

参考文献

[A1] Busemann, H., Convex surfaces, Interscience, 1958.

[A2] Schneider, R., Boundary structure and curvature of convex bodies, in J. M. Wills and P. M. Gruber (eds.): Contributions to geometry, Birkhäuser, 1979.

虞言林 译

凸性 [convexity ; выпуклость]

用于许多数学分支的一个术语，表示一些特性，它们是 Euclid 空间 E^n 中凸集(convex set)的某些性质的推广. 许多研究方法的实用性是同术语"凸性"有关的.

下列两个基本的定义在 E^n 中几乎是等价的. 一个集合是凸的(convex)：1)如果它是一些开的半空间之交；或者 2)如果它包含两个任意的点，则它就包含连接这两点的线段. 凸性的这两个定义都适用于向量空间 L 的情形.

定义 2)可以推广到包括具有测地线的空间(在联络的空间；局部紧度量空间，特别是 Riemann 与 Finsler 空间)中的集合. 测地线起着线段的作用，但是如果两点间能够用非唯一的测地线或最短线连接的话，那么凸性的概念就分成好几个可能的含义. 特别地在 Riemann 几何中，用到了下列修改过的凸性([1], [2])：(1)如果 M 中任意两点能用唯一的一条最短线连接，且这条最短线包含在 M 中，则称集合 M 是凸的(convex)；(2)如果 M 中每一个点有一个在 M 中的邻域，这个邻域按(1)的意义讲是凸的，那么称 M 是局部凸的(locally convex)；(3) 如果任意两个点可以用至少一条 M 中的最短线连接起来，那么称 M 是弱凸的(weakly convex)；(4)如果连接 M 中任意两点的测地线皆在 M 中，那么称 M 是绝对凸的 (absolutely convex).

E^n 中一个 n 维凸体(convex body)的边界(或边界的一部分) 称为一个凸超曲面(convex hypersurface). 如果 $n=3$，那么它又称为凸曲面(convex surface)；如果 $n=2$，那么它又称为凸曲线(convex curve).

对于一个单实变量函数而言，凸性是指它的母图(supergraph)的凸性(见**凸函数(实变量的)**(convex function (of a real variable))). L 中泛函 f 的凸性用类似的方式来定义(见 **凸泛函**(convex functional)).

关于 L 中的凸集，人们可以谈论集合族 $\mathfrak{A}$ 的凸性：$\mathfrak{A}$ 是凸的，如果对于 $M_1, M_2 \in \mathfrak{A}$，$0 \leqslant \alpha \leqslant 1$，有 $(1-\alpha)M_1+\alpha M_2 \in \mathfrak{A}$. 在凸族 $\mathfrak{A}$ 上可以定义凸(与凹)泛函 $\Phi(M)$. 泛函 Φ 的凸性(convexity of a functional)定义为:

$$\Phi((1-\alpha)M_1+\alpha M_2) \leqslant (1-\alpha)\Phi(M_1)+\alpha\Phi(M_2).$$

凸性一词用于单叶复变函数时有一个特别的意义，即将单位圆盘映射到一个凸域上的性质(见**凸函数(复变量的)**(convex function (of a complex variable))).

一个紧统 M 的 R 凸性(R - convexity)是指每一个距 M 小于 R 的点有 M 中唯一的一个最近点. 这是 E^n 中凸性的推广，在[4], [5] 中有讨论.

在线性微分算子的理论中，凸性一词与同调群的一些性质有关([6]). 这是与用一个超曲面从区域内部切触边界的可能性有联系的，这里说的超曲面有一些主曲率是正的. 在多复变函数论中全纯凸性(holomorphic convexity)起着重要的作用，它同从内部用解析曲面切触区域边界的不可能性有关([7]). 全纯凸性是

K凸性的一个特别情形([7])．人们可以将许多已知的凸性性质转移到 K凸性的概念上来．

H凸性(H-convexity)的观念用于凸分析．它是凸函数用一族线性函数的上确界表达的可能性的推广([8])．

在度量空间的理论中，一个(Menger 意义下的)度量的凸性(convexity of a metric)定义如下：对任意 $x \neq y$，存在第三点 z，使得 $\rho(x,y)=\rho(x,z)+\rho(z,x)$([9])．一个集合 M 的 d 凸性(d-convexity)是指：当 $x, y \in M$ 时，还要求上述的 z 属于 M．在有序空间中，凸性的定义是很类似的(见**凸子群**(convex subgroup))．

几乎每一种凸性的定义都对应着一个局部凸的概念，但是对于局部凸拓扑向量空间来说，"局部凸"一词有特殊的意义，即对每一个点存在一个凸邻域的基系．

参考文献

[1] Gromoll, D., Klingenberg, W. and Meyer, W., Riemannsche Geometrie im Grossen, Springer, 1968.

[2] Александров, А. Д., Залгаллер, В. А., Двумерные многообразия ограниченной кривизны [Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 63], М., 1962 (英译本: Alcksandrov, A. D. and Zalgaller, V. A., Intrinsic geometry of surfaces, Tansl. Math. Monogr., Amer. Math. Soc., 1967).

[3] Hadwiger, H., Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie, Springer, 1957.

[4] Federer, H., Curvature measures, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **93** (1959), 418－491.

[5] Решетняк, Ю. Г., 《Матем. сб.》, **40** (1956), 381－398.

[6] Паламодов, В. П., Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, М., 1957 (英译本: Palamodov, V. P., Linear differential operators with constant coefficients, Springer, 1970).

[7] Владимиров, В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964 (英译本: Vladimirov, V. S., Methods of the theory of functions of several complex variables, M. I. T., 1966).

[8] Кутателадзе, С. С., Рубинов, А. М., 《Успехи матем. наук》, **27** (1972), 3, 127－176.

[9] Danzer, L., Grünbaum, B. and Klee, V. L., Helly's theorem and its relatives, Proc. Symp. Pure Math., 7, Amer. Math. Soc., 1963, 101－180.

Ю. Д. Бураго, В. А. Залгаллер 撰

【补注】 对于大多数而不是所有的集合而言，定义1)和2)是等价的．例如，在2)意义下不包含某固定点的最大凸集不满足1)．一个明显的例子是空间 $K=([0,1]\times[0,1])\setminus(\{1\}\times[\frac{1}{2},1])$，即去掉半条棱的单位方形．这个空间 K满足2)，但不满足1)．

一个度量 ρ 的凸性的最常用的定义是：对于任意 $x \neq y$, $x, y \in M$, 以及任意 $0<\lambda<1$，存在一个 $z \in M$，使得

$$\rho(x,z)=\lambda\rho(x,y),$$

$$\rho(z,y)=(1-\lambda)\rho(x,y).$$

关于凸性的一般结果可在[A1], [A6]中找到．凸性在优化理论，变分问题和数几何中也起着重要的作用(见[A2], [A3], [A5], [A7]和[A8])．

关于全纯凸性见 **Stein 流形**(Stein manifold)．"K凸"一词也用来表示一个集合这样的性质：它的每个连通分支是凸的([A4])．关于 K凸曲面(K-convex surface)的概念见**嵌入流形几何学**(geometry of imbedded manifolds)．

参考文献

[A1] Alfsen, E. M., Compact convex sets and boundary integrals, Springer, 1971.

[A2] Marti, J. T., Konvexe Analysis, Birkhäuser, 1977.

[A3] Rockafellar, R.T., Convex analysis, Princeton Univ. Press, 1969.

[A4] Valentine, F. A., Convex sets, McGraw-Hill, 1964.

[A5] Ekeland, I. and Teman, R., Convex analysis and variational problems, North-Holland, 1976.

[A6] Choquet, G., Lectures on analysis, 1－3, Benjamin, 1969 (译自法文).

[A7] Lekkerkerker, C. G. and Gruber, P. M., Geometry of numbers, North-Holland, 1987 (revised ed.).

[A8] Barbu, V. and Precupanu, Th., Convexity and optimization in Banach spaces, Reidel, 1986.

虞言林 译

对数凸性 [convexity, logarithmic; выпуклость логарифмическая]

定义在区间上非负函数 f 的下述性质：若对于区间中任意两点 x_1 与 x_2，以及满足 $p_1+p_2=1$ 的任意数 $p_1>0$，$p_2>0$，不等式

$$f(p_1x_1+p_2x_2)\leqslant f^{p_1}(x_1)\cdot f^{p_2}(x_2)$$

成立，则称 f 为对数凸的(logarithmically convex)．假如一个函数是对数凸的，那么它或者恒等于0，或者是严格正的且 $\ln f$ 为**凸函数(实变量的)**(convex function (of a real variable))．

Л. Д. Кудрявцев 撰 王斯雷 译

凸性半径 [convexity radius; выпуклости радиус] 函数的凸性极限(convexity limit of a function)

被函数 f 映射成**凸域**(convex domain)的那些球 $\{x:\rho(x,x_0)<r\}$ 的半径 $r>0$ 的最小上界；此处 f 定义在具有度量 $\rho(x_1,x_2)$ 的度量空间的一个区域 D 上，并取值于一个线性空间．关于区域 D 的某个映射函数类 $\mathfrak{M}$ 在点 $x_0 \in D$ 的凸性半径 $R(x_0)$ 定义为数值

$$R(x_0) = \inf\{R(x_0, f): f \in \mathfrak{M}\}.$$

若 f 是 Euclid 空间 E^n 的仿射映射，$n \geq 2$，则 $R(x_0, f) = \infty$. 关于复平面上单位圆盘 $E = \{z : |z| < 1\}$ 的所有标准化单叶共形映射 $w = f(z)$ ($f(0)=0$, $f'(0)=1$) 所组成的类 $\mathfrak{M}$，其凸性半径等于 $R(z_0) = 2 - \sqrt{3 + |z_0|}$；若再要求区域 $\{w : w = f(z), z \in E\}$ 满足凸性条件，即对于凸函数子类，则有 $R(z_0) = 1 - |z_0|$ (见**凸函数** (**复变量的**) (convex function (of a complex variable))). 亦见**单叶函数** (univalent function).

参考文献

[1] Голузин, Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966 (中译本: Г. М. 戈鲁辛，复变函数的几何理论，科学出版社，1956).

[2] Александров, И. А., 《Докл. АН СССР》, **116** (1957), 6, 903–905.

[3] Marx, A., Untersuchungen uber schlichte Abbildungen, *Math. Ann.*, **107** (1932), 40–67.

И. А. Александров 撰　杨维奇 译

卷积 [**convolution**; **свертка**]，属于 $L(-\infty, \infty)$ 的函数 f 和 g 的

由下式定义的函数 $h(x)$:

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy;$$

它用符号 $f * g$ 来表示. 函数 $f*g$ 几乎处处有定义，且也属于 $L(-\infty, \infty)$. 卷积具有乘法运算的基本性质，即对于 $L(-\infty, \infty)$ 中的任何三个函数，

$$f * g = g * f,$$

$$(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) * g = \alpha_1 (f_1 * g) + \alpha_2 (f_2 * g),\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R},$$

$$(f * g) * h = f * (g * h)$$

成立. 因此，具有通常的加法和数乘法、具有卷积运算作为元素的乘法并且具有范数

$$\|f\| = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$$

的 $L(-\infty, \infty)$ 成为一个 **Banach 代数** (Banach algebra) (对于这个范数有 $\|f * g\| \leq \|f\| \cdot \|g\|$). 如果 $F[f]$ 表示函数 f 的 Fourier 变换，那么

$$F[f * g] = \sqrt{2\pi} F[f] F[g],$$

这可用来解决一系列应用问题.

这样，如果一个问题已被归结为下列形式的积分方程:

$$f(x) = g(x) + \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y) f(y) dy, \qquad (*)$$

其中

$$g(x) \in L_2(-\infty, \infty),\ K(x) \in L(-\infty, \infty),$$

$$\sup_x |F[K](x)| < \frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

那么，假定 $f \in L(-\infty, \infty)$，对 (*) 运用 Fourier 变换就得到

$$F[f] = F[g] + \sqrt{2\pi} F[f] F[K].$$

因此，

$$F[f] = \frac{F[g]}{1 - \sqrt{2\pi} F[K]},$$

且由 Fourier 逆变换可求得 (*) 的解为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F[g](\zeta) e^{-i\zeta x}}{1 - \sqrt{2\pi} F[K](\zeta)} d\zeta.$$

函数卷积的性质在概率论中有重要应用. 如果 f 和 g 分别是相互独立的随机变量 X 和 Y 的概率密度，那么 $(f * g)$ 是随机变量 $X + Y$ 的概率密度.

卷积运算可推广到**广义函数** (generalized function). 如果 f 和 g 是广义函数，且其中至少有一个具有紧支集，φ 是一个基本函数空间的函数，那么 $f * g$ 定义为

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \langle f(x) \times g(y),\ \varphi(x+y) \rangle,$$

其中 $f(x) \times g(y)$ 是 f 和 g 的直积，即它是两个独立变量的基本函数空间上的由下式定义的泛函:

$$\langle f(x) \times g(y),\ u(x, y) \rangle = \langle f(x),\ \langle g(y), u(x, y) \rangle \rangle,$$

其中 $u(x, y)$ 是任何具有紧支集的无限次可微函数.

广义函数的卷积也满足交换律，且对每一自变量是线性的；如果三个广义函数中至少有两个是有紧支集的，那么它也满足结合律. 下列等式成立:

$$D^\alpha (f * g) = D^\alpha f * g = f * D^\alpha g,$$

其中 D 是微分算子，α 是任何多重指标，

$$(D^\alpha \delta) * f = D^\alpha f,$$

特别是，$\delta * f = f$，这里 δ 表示 δ 函数. 又如果 f_n ($n = 1, 2, \cdots$) 是广义函数，且满足 $f_n \to f_0$，同时，存在紧集 K，使得

$$K \supset \operatorname{supp} f_n,\ n = 1, 2, \cdots,$$

那么

$$f_n * g \to f_0 * g.$$

最后，如果 g 是具有紧支集的广义函数，f 是缓增广义函数，那么可对 $f * g$ 运用 Fourier 变换，且又得到

$$F[f * g] = \sqrt{2\pi}\ F[f]\, F[g].$$

广义函数的卷积被广泛地应用于求解偏微分方程的边值问题. 例如，Poisson 积分可写成下列形式:

$$U(x,t)=\mu(x) * \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/4t},$$

它是对于无限长杆的热传导方程的解，其中初始温度 μ 不仅可以是通常的函数，也可以是广义函数.

无论是对于通常的函数还是对于广义函数，卷积的概念都能以自然的方式照搬到多变量情形；这时上述的 x 和 y 都必须看作 $\mathbf{R}^n$ 中的向量，而不是看作实数.

参考文献

[1] Владимиров, В. С., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1981.

[2] Гельфанд, И. М., Шилов, Г. Е., Обобщенные функции и действия над ними, М., 1958 (中译本：И. М. 盖尔芳特、Г. Е. 希洛夫，广义函数，I，广义函数及其运算，科学出版社，1965).

[3] Titchmarsh, E. C., Introduction to the theory of Fourier integrals, Oxford Univ. Press, 1948.

В. И. Соболев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Kecs, W., The convolution product and some applications, Reidel & Ed. Academiei, 1982.

史树中 译

对合变换［**convolution transform**；**свертки преобразование**］

形式为

$$F(x)=\int_{-\infty}^{\infty} G(x-t)f(t)dt$$

的积分变换．函数 G 称为对合变换的核（kernel of the convolution transform）．对于一些特殊类型的核 G，经过适当的变量置换以后，对合变换成为单侧 **Laplace 变换**（Laplace transform）、**Stieltjes 变换**（Stieltjes transform）或 **Meijer 变换**（Meijer transform）．对合变换的反演通过关于位移为不变的无限阶线性微分算子来实现.

对于某些类型的广义函数也可定义对合变换（见[2]）.

参考文献

[1] Hirschman, I. I. and Widder, D. V., The convolution transform, Princeton Univ. Press, 1955.

[2] Брычков, Ю. А., Прудников, А. П., Интегральные преобразования обобщенных функций, М., 1977.

Ю. А. Брычков，А. П. Прудников 撰　张鸿林 译

合作对策［**cooperative game**；**кооперативная игра**］

由三元组 $\langle I, v, H\rangle$ 定义的非策略对策（见**对策论**（games, theory of）），其中 I 是一个集合（通常是有限集），其元素称为局中人（player），子集 $K\subset I$ 称为联盟（coalition），v 是定义在联盟集上的实值函数，称为对策的特征函数（characteristic function），而 H 是被称为分配（imputation）的向量 x_I（其分量 x_i 对应 I 中的局中人 i）的子集．合作对策首先是由 J. von Neumann 在 1928 年作为（非合作）对策的合作理论中的工具引入的.

在合作对策的经典理论中，取

$$H=\left\{x_I: \sum_{i\in I} x_i=v(I),\ x_i\geqslant v(\{i\})\ (i\in I)\right\}.$$

在集合 H 上，引入分配关于联盟 $K\subset I$ 的优势（dominance）（偏好）二元关系 $\succ_K$：

$$x_I\succ_K y_I \Leftrightarrow \sum_{i\in K} x_i\leqslant v(K),$$

$$x_i>y_i\quad(i\in K).$$

如果 $x_I\succ_K y_I$ 对于某个 $K\subset I$ 成立，就记作 $x_I\succ y_I$．分配的最优性概念是通过这种优势关系来陈述的.

合作对策理论内容意义重大的部分在于：精心建立最优性概念，对于合作对策的各种特殊类证明它们的可实现性，以及实际求出这种实现．与合作对策相联系的已经展开研究的最优性原理有以下几种：以 von Neumann - Morgenstern 解（N - M 解，见**对策论中的解**（solution in game theory））的形式可实现的双重（即，内外）稳定性；不可优分配（见**对策论中的核心**（core in the theory of games））；关于恐吓的稳定性；在最大不充分性的极小化意义下的稳定性（见**对策论中的稳定性**（stability in game theory））；完善性（见 **Shapley 向量**（Shapley vector））；等等.

在合作对策类中引入代数运算导致合作对策的演算（calculus of cooperative games）和在这些运算与各种最优性原理之间的内在关系的研究．下面叙述的合作对策的各种特殊类已经受到特别的关注.

简单对策（simple games）是特征函数 v 恰好取两个值（通常是 0 和 1）的合作对策；这里，$v(K)$ 达到最大值的联盟 K 称为赢家（winning）．简单对策的特例是加权强对策（weighted majority game），其中联盟 K 为赢家是指 $\sum_{i\in K} w_i>c\sum_{i\in I} w_i$，其中 $w_i(i\in I)$，$c\in(1/2,1)$ 是确定的常数.

平衡对策（balanced game）是其特征函数满足下列条件的合作对策：如果联盟族 $\mathfrak{K}$ 和非负数 $\lambda_K(K\in\mathfrak{K})$ 使得

$$\sum_{K\in\mathfrak{K}}\lambda_K\chi_K(i)=\chi_I(i),\ 对一切\ i\in I,$$

这里当 $i\in K$ 时，$\chi_K(i)$ 等于 1，否则等于 0，那么

$$\sum_{K\in\mathfrak{K}}\lambda_K v(K)\leqslant v(I),$$

平衡对策,且只有平衡对策,有非空 c 核心(见**对策论中的核心** (core in the theory of games)).

凸对策 (convex game) 是对于 $K, L\subset I$ 特征函数满足

$$v(K)+v(L) \leqslant v(K\bigcup L)+v(K\bigcap L) \qquad (*)$$

的合作对策,在凸对策中,c 核心非空,且重合于唯一的 N - M 解. 如果一个合作对策是严格凸的 (即,不等式 $(*)$ 是严格的),那么 Shapley 向量(值)是 c 核心的重心.

定额对策 (quota - game) 是其特征函数 v 符合下列条件的合作对策: 存在向量 $\omega\in(\omega_i)_{i\in I}$ 使得 $\sum_{i\in I}\omega_i=v(I)$ 以及 $v(\{i,j\})=\omega_i+\omega_j$ 对于任何两个局中人 $i, j\in I(i\neq j)$ 成立.

市场对策 (market game) 是由一个市场(market)生成的合作对策; 所谓市场是指一个系统

$$<I, \mathbf{R}^m_+, \{u^i(x^i)\}_{i\in I}, \{a^i\}_{i\in I}>,$$

其中 I 是(有 m 种商品的)市场的参预者集, $a^i\in\mathbf{R}^m_+$ 是第 i 个参预者的初始商品丛, $u^i(x^i)$ 是第 i 个参预者的定义在 $\mathbf{R}^m_+$ 上的效用函数. 在这样的市场的基础上,一个合作对策构造如下, 其中

$$H = \left\{y_I: y_I=u^i(x^i)\ (i\in I),\right.$$

$$\left.x^i\in\mathbf{R}^m_+\ (i\in I),\ \sum_{i\in I}x^i=\sum_{i\in I}a^i\right\},$$

而特征函数定义为

$$v(K) = \max\left\{\sum_{i\in K}u^i(x^i):\ x^i\in\mathbf{R}^m_+\ (i\in K),\ \sum_{i\in K}x^i=\sum_{i\in K}a^i\right\}.$$

经典的合作对策理论已经沿着各个不同的方向得到推广(亦见**无原子对策** (non - atomic game)).

无旁支付的对策 (games without side payments) 是由三元组 $\langle I, v, H\rangle$ 定义的非策略对策,其中 v (不同于经典的合作对策)是对于每一个联盟 K 对应着向量 x_I 的一个集合 $v(K)$ 的函数,这个向量的集合满足下列条件: 1) $v(K)$ 是闭凸集; 2) 如果 $x_I\in v(K)$, $y_i\leqslant x_i(i\in K)$, 那么 $y_I\in v(K)$; 3) 如果 $S\bigcap K=\phi$, 那么 $v(S)\bigcap u(K)\subset v(S\bigcap K)$; 4) $v(K)\neq\phi$ 对于所有 $K\subset I$ 成立; 5) $x_I\in v(I)$ 当且仅当 $x_I\leqslant y_I$ 对于某个 $y_I\in H$ 成立. 在无旁支付的对策中的优势定义如下: $x_I\succ y_I$ 是指存在非空联盟 $K\subset I$, 使得

$$x_i > y_i\ (i\in K) \quad 且 \quad x_I\in v(K).$$

划分函数形式的对策 (game in partition function form) 是由局中人集 I 和函数 v 定义的非策略对策, 这个函数 v 使集合 I 的每个划分 $\mathscr{P}=(P_1, \cdots, P_n)$ 对应着一个向量 $v^{\mathscr{P}}=(v^{\mathscr{P}}(P_1), \cdots, v^{\mathscr{P}}(P_n))$. 联盟 K 本身可以保证的最大支付由公式 $u(K)=\min_{\mathscr{P}\in K}v^{\mathscr{P}}(K)$ 来确定. 划分函数形式的对策中的分配定义为满足下列条件的向量 x_I: $x_i\geqslant u(\{i\})\ (i\in I)$; $\sum_{i\in I}x_i=\sum_{S\in\mathscr{P}}v^{\mathscr{P}}(S)=\|\mathscr{P}\|$ 对于某个 $\mathscr{P}$ 成立. 分配 x_I 关于联盟 K 优于分配 y_I 是指: 1) $x_i>y_i\ (i\in K)$; 2) $\sum_{i\in K}x_i\leqslant u(K)$; 3) 存在 $\mathscr{P}$, 使得 $K\in\mathscr{P}$ 且 $\sum_{i\in I}x_i=\|\mathscr{P}\|$.

参考文献

[1] Neumann, J. von and Morgenstern, O., Theory of games and economic behavior, Princeton Univ. Press, 1953 (中译本: 约翰·冯·诺依曼, 奥斯卡·摩根斯特恩, 竞赛论与经济行为, 科学出版社, 1963).

[2] Воробьев, Н. Н., 《Успехи мат. наук》, 25 (1970), 2, 81－140.

[3] Rosenmüller, I., The theory of games and markets, North - Holland, 1981 (译自德文).

Н. Н. Воробьев, А. И. Соболев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Friedman, J. W., Oligopoly and the theory of games, North - Holland, 1977.

[A2] Szép, J. and Forgó, F., Introduction to the theory of games, Reidel, 1985.

史树中 译

坐标方式的下降法 [**coordinate - wise descent method; метод координатно - образного спуска**]

仅基于被极小化函数的值的一种多变量函数的极小化方法. 这种方法在函数不可微或导数的计算量太大时适用. 下面叙述坐标方式的下降法对于在集合

$$X = \{\mathbf{x}=(x^1, \ldots, x^n):\ a_i\leqslant x^i\leqslant b_i,\ i=1, \ldots, n\}$$

上的函数 $F(\mathbf{x})$ 极小化的应用, 这里 a_i 和 b_i 是给定的数, $a_i<b_i$, 但并不排除全部或某些 $a_i=-\infty$ 或 $b_i=+\infty$. 设 $\mathbf{e}_i=(0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$ 是一个坐标向量, 它的第 i 个坐标为 1, 其余的坐标为零. 规定一个初始逼近 $\mathbf{x}_0\in X$, $\alpha_0>0$. 假定对于某个 $k\geqslant0$, 第 k 次逼近 $\mathbf{x}_k\in X$ 已知, 且 $\alpha_k>0$. 取 $\mathbf{p}_k=\mathbf{e}_{i_k}$, 其中 $i_k=k-n[k/n]+1$, 而 $[a]$ 是 a 的整数部分. 那么

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{p}_{n-1} = \mathbf{e}_n,$$

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{p}_{2n-1} = \mathbf{e}_n,$$

$$\mathbf{p}_{2n} = \mathbf{e}_1, \ldots,$$

即完成坐标向量 $\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n$ 的循环选择. 首先验证条件

$$\mathbf{x}_k-\alpha_k\mathbf{p}_k \in X, \quad F(\mathbf{x}_k+\alpha_k\mathbf{p}_k) < F(\mathbf{x}_k) \qquad (1)$$

是否满足. 如果 (1) 满足, 那么设 $\mathbf{x}_{k+1}=\mathbf{x}_k+\alpha_k\mathbf{p}_k$, $\alpha_{k+1}=\alpha_k$. 另一方面, 如果 (1) 不满足, 那么验证条件

$$\mathbf{x}_k - \alpha_k \mathbf{p}_k \in X,\quad F(\mathbf{x}_k - \alpha_k \mathbf{p}_k) < F(\mathbf{x}_k). \tag{2}$$

如果(2)满足,那么设 $\mathbf{x}_{k+1}=\mathbf{x}_k-\alpha_k\mathbf{p}_k$, $\alpha_{k+1}=\alpha_k$. 如果条件(1)和(2)都不满足,那么就设 $\mathbf{x}_{k+1}=\mathbf{x}_k$,

$$\alpha_{k+1} = \begin{cases}\lambda\alpha_k & 对\ i_k = n,\ \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k-n+1}, \\ \alpha_k & 对\ i_k \neq n\ 或\ \mathbf{x}_k \neq \mathbf{x}_{k-n+1}, \end{cases} \tag{3}$$

$$或\ 0 \leqslant k \leqslant n-1,$$

这里 λ 是下降法的参数, $0<\lambda<1$. 条件(3)意味着如果在包含所有坐标向量 $\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n$ 的以 α_k 为步长的 n 次迭代的一个单循环中,条件(1)与条件(2)中至少有一个满足,那么步长 α_k 不减,且至少在下一个 n 次迭代的循环中保持不变;另一方面,如果无论是(1)还是(2)在相继的 n 次迭代中都不满足,那么步长 α_k 减小.

设 $F(\mathbf{x})$ 在 X 上是凸的和连续可微的,且集合 $\{\mathbf{x}\in X: F(\mathbf{x})\leqslant F(\mathbf{x}_0)\}$ 是有界的,而 α_0 是正数. 那么下降法(1)－(3)收敛,即

$$\lim_{k\to\infty} F(\mathbf{x}_k) = \inf_{\mathbf{x}\in X} F(\mathbf{x}),$$

而序列 $\{\mathbf{x}_k\}$ 收敛于 $F(\mathbf{x})$ 在 X 中的极小点集. 如果 $F(\mathbf{x})$ 在 X 上不可微,那么下降法不一定收敛([1],[2]).

参考文献

[1] Васильев, Ф. П., Численные методы для решения экстремальных задач, М., 1980.

[2] Карманов, В. Г., Математическое программирование, М., 1975.

Ф. П. Васильев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Zangwill, W. L., Nonlinear programming, a unified approach, Prentice - Hall, 1969.

史树中 译

坐标[coordinates; координаты]

用来说明(或确定)在一个总体(一个集合 M)中,例如平面或曲面上、空间中、流形上,某种元素(点)的位置的数或量. 在数学和物理学的不同分支中,坐标的名称是不同的. 例如,向量空间中元素(向量)的坐标称为其分量,集合之积中元素的坐标称为各因子上的投影;相对论中坐标系称为参考系等等. 在很多情况下,不可能在整个集合上引入充分合理且方便的全局坐标(例如,与平面不同,球面上的点就不能和数对建立连续的一一对应),但可以引入局部坐标的概念,如在流形论中便是如此.

坐标的集合构成了一个坐标系(coordinate system)(或参考系(reference system))或一个坐标卡(chart),其坐标与集合 M 中的元素构成一一对应关系,这是坐标方法(coordinate method)的基础,其起源一般可追溯到 P. Fermat(1636)和 R. Descartes(1637)的工作. 可是,早在公元前二、三世纪,珀加(Perga)的 Apollonius 就已用现在所谓的坐标(这一术语是由 G. Leibniz 于 1694 年给出的)定义了二次曲线,尽管 Apollonius 的坐标没有数值. 到了公元二世纪,Ptolemy 在他的《地理学》(Geography)中已开始把数值坐标用于纬度和经度. 14 世纪, N. Oresme 把坐标用于平面来构作图形,并用术语经度和纬度表示了现在所谓的横坐标和纵坐标.

避免"无中生有"地引入坐标,以保持理论的"纯粹性",此类尝试未证明其本身的正确性(例如,由 Ch. von Staudt(1847)提出的**射影坐标**(projective coordinates)综合构造法,证明可被简单代数等价物所替代,这导致了可除环上射影几何的概念). 然而,这一思想仍在继续,可称之为引入坐标的内在方法(以区别于"无中生有"强加坐标的外来方法),它基于计算目标的位置而配之以关于某些预先选择的标准子集的坐标,这种子集如曲线、曲面等(相应称坐标曲线(coordinate curves)、坐标曲面(coordinate surfaces),等等). 这特别适用于其定义涉及数的集合(如度量空间及向量空间),并因此适用于很广泛的有实际重要性的数学对象;这说明了为什么这种方法是如此流行.

线性坐标在有关点的坐标系(点坐标(point coordinates))中具有特殊的位置. 对于这种坐标,其坐标曲线是直线,比如 **Descartes 直角坐标系**(Cartesian orthogonal coordinate system),三角形坐标系(见**四面体坐标**(tetrahedral coordinates)),**重心坐标**(barycentric coordinates)和**射影坐标**(projective coordinates). 坐标曲线不都是直线的坐标系即为曲线坐标. 曲线坐标用于平面上(如**极坐标**(polar coordinates);**椭圆坐标**(elliptic coordinates);**抛物线坐标**(parabolic coordinates);**双极坐标**(bipolar coordinates))和曲面上(**测地坐标**(geodesic coordinates);**等温坐标**(isothermal coordinates)等等). 人们在使用满足各种条件的曲线网时,引入了许多特殊类型的曲线坐标系,这种坐标系中最重要的一类是**正交系**(orthogonal system),其坐标曲线相交成直角.

平面(或曲面)上各种类型的坐标,可以推广到(三维)空间. 例如,从平面极坐标可以产生空间极坐标的概念(**球面坐标**(spherical coordinates)或**柱面坐标**(cylinder coordinates));从平面双极坐标可以导出**圆环坐标**(toroidal coordinates)、**双柱面坐标**(bicylindrical coordinates)以及空间双极坐标的概念;从平面椭圆坐标可以产生空间**椭球坐标**(ellipsoidal coordinates)的概念.

为考虑简单明了起见,有时我们不采用那些熟知类型的坐标形式,其中组成一集合中点的坐标的量的个数等于该集合的维数. 同样的考虑,在个别点

上，坐标映射可以不是一一的(例如，极坐标就是这种情形).

在所考虑的流形 M 不同胚于 Euclid 空间中一区域的情况下，有时用多余坐标(redundant coordinates)是方便的，这时候坐标个数大于 M 的维数．这种坐标通常是**齐次坐标**(homogeneous coordinates).

常说的直线、平面以及其他几何对象的坐标，就是指某空间的坐标，其中的"点"是直线、平面等等(例如见 **Grassmann 流形**(Grassmann manifold))．因为，根据**对偶原理**(duality principle)，在二维几何中，点与直线是等价的，所以就有可能引入说明直线和平面位置的坐标．例如，**切线坐标**(tangential coordinates).

坐标法不仅对作为使推理算法化(把它化为计算)的手段，而且对新的事实和关系的发现(例如，通过使用坐标，Euclid 几何的相容性化成了算术的相容性)都是有用的．而且尽管许多数学分支，像 Riemann 几何，能够以一种"无坐标"的形式来表达，但是它们的结果大多都是利用坐标法得到的，或者 —— 更精确地 —— 通过对手边的特殊问题选择合适的坐标系而得到的(例如，力学中某些问题的意义是借助于特殊坐标来判明的，与其相关的变量是"分离的").

М. И. Войцеховский　А. Б. Иванов 撰
杨　路、张景中、侯晓荣 译

上积 [**coproduct**；**копроизведение**]，范畴中一族对象的一种概念，它用态射的语言来描述(范畴上类似于)模的直和或集合的离散并的构造．设 $A_i(i\in I)$是范畴 $\mathfrak{K}$ 中的一族带下角标的对象．一个对象 S，连同一些态射 $\sigma_i: A_i\to S$，称为族 $A_i(i\in I)$的上积(coproduct)，如果对任何一族态射 $\alpha_i: A_i\to X(i\in I)$，存在唯一的一个态射 $\alpha: S\to X$，使 $\sigma_i\alpha=\alpha_i(i\in I)$．态射 σ_i 都称为上积的嵌入(imbeddings of the coproduct)；上积记作 $\prod^*_{i\in I}A_i(\sigma_i)$，$\prod^*_{i\in I}A_i$，或在 $I=\{1,\cdots,n\}$ 时，记作 $S=A_1*\cdots*A_n$．在上积的定义中的态射 α 常常表以 $\prod^*_{i\in I}\alpha_i$ 或 $(*)_{i\in I}\alpha_i$．在同构的意义下，一族对象的上积是唯一定义的；它是可结合的，也是可交换的．上积是**范畴中一族对象的积**(product of a family of objects in a category)的对偶概念．

空族对象(即没有对象)的上积为范畴的左零(始对象)．在一个 Abel 范畴中，上积常称为族 $A_i(i\in I)$的直和(direct sum of the family)，并记作$\sum_{i\in I}A_i$，或者在 $I=\{1,\cdots,n\}$的情况下，写成 $A_1+\cdots+A_n$．在结构集的范畴的大多数情况下，一族对象的上积与此族的自由积相重合，并作为规律需要特殊描述．因此，在群范畴中，其上积是群的自由积，在模范畴中，上积是模的直和，等等．

在有零态射的范畴中，如果 $S=\prod^*_{i\in I}A_i(\sigma_i)$是一个上积，则存在唯一确定的态射 $\pi_i: S\to A_i$，使 $\sigma_i\pi_i=1_{A_i}$，$\sigma_i\pi_j=0$．在一个Abel 范畴中，有限个对象的上积与积是同一个对象．

参考文献

[1] Цаленко, М. Ш., Шульгейфер, Е. Г., Основы теории категорий, М., 1974.

М. Ш. Цаленко 撰

【补注】 在不一定是 Abel 范畴的情况下，一族对象的上积也常称为一族对象的和(sum of a family of objects)或一族对象的直和(direct sum of a family of objects)．常用的记号是 $\coprod_{i\in I}A_i$，$\sum_{i\in I}A_i$，与$\bigoplus_{i\in I}A_i$.

参考文献

[A1] Popescu, N., Abelian categories with application to rings and modules, Acad. Press, 1973.

[A2] Adámek, J., Theory of mathematical structures, Reidel, 1983.

周伯埙 译

对策论中的核心 [**core in the theory of games**；**ядро в теории игр**]

所有不可优形势的集合，即形势集 C，使得对于任何形势 $s\in S$，$c\in C$ 和联盟 $K\in\mathfrak{N}$，**优势**(domination) $s\succ_K c$ 不可能成立．核心的基本类型如下：

1) 核心 (core)．由分配组成的集合 $c(v)$，任何其他分配都不优于它的分配；核心重合于对于任何联盟 S 都满足$\sum_{i\in S}x_i\geqslant v(S)$的分配的集合．如果 $c(v)\neq\phi$，且 von Neumann - Morgenstern 解 (见**对策论中的解**(solution in game theory))存在，那么$c(v)$含于任何 von Neumann - Morgenstern 解中．

2) 核 (kernel)．个体上合理的布局$(x,\mathfrak{B})$的集合$k(v)$(见**对策论中的稳定性** (stability in game theory))，它使得下列不等式对于任何 $i,j\in B\in\mathfrak{B}$成立：

$$\left[\max_{S\in\tau_{ij}}e(S,x)-\max_{S\in\tau_{ji}}e(S,x)\right]x_j\leqslant 0,$$

这里$e(S,x)=v(S)-\sum_{k\in S}x_k$，而 τ_{ij}是包含局中人 i 但不包含局中人 j 的联盟集．核 $k(v)$ 含于M_1^i稳定集中．

3) 核子(nucleolus)．同定义在分配集上的拟序(quasi-order)$\prec_v$有关的极小分配 $n(v)$，这里 $x\prec_v y$ 当且仅当向量 $\theta(x,v)=(\theta_1(x,v),\cdots,\theta_n(x,v))$按字典排列顺序在向量 $\theta(y,v)$前，其中

$$\theta_i(x,v)=\max_{|\mathfrak{U}|=i}\min_{S\in\mathfrak{U}}e(S,x),$$

对于任何有非空分配集的对策，核子$n(v)$存在且唯一．在合作对策中，核子含于核中．

参考文献

[1] Воробьев, Н. Н., «Успехи матем. наук», 25 (1970), 2, 103－107.

А. И. Соболев 撰

【补注】 上面定义的所有三个概念的俄文词 ядро(核)是一样的,但这些概念可用对应的英文字母作前缀来区别(对于 core 是"c - ядро",对于 kernel 是"k - ядро",而对于 nucleoulus 是"n - ядро").这三个概念并不共有许多性质.

对于 c 核心见[A1],[A7],对于 k 核心见[A2],而对于 n 核心见[A3].[A4],[A5]是一般参考文献.[A6]还涉及数理经济学以及对策核心的概念在那种框架中的作用.

参考文献

[A1] Bondareva, O. N., Certain applications of the methods of linear programming to the theory of cooperative games, *Probl. Kibernet*, **10** (1963), 119-139(俄文).

[A2] Maschler, M. and Davis, M., The kernel of a cooperative game, *Naval Res. Logist. Quart.*, **12** (1965), 223-259.

[A3] Schmeidler, D., The nucleolus of a characteristic function game, *SIAM J. Appl. Math.*, 17 (1969), 1163-1170.

[A4] Owen, G., Game theory, Acad. Press, 1982.

[A5] Szép, J. and Forgó, F., Introduction to the theory of games, Reidel, 1985.

[A6] Rosenmüller, J., Cooperative games and markets, North-Holland, 1981(译自德文).

[A7] Shapley, L. S., On balanced sets and cores, *Naval Res. Logist. Quart.*, **14** (1967), 453-460.

史树中 译

Cornish - Fisher 展开 [Cornish - Fisher expansion; Корниша - Фишера разложение]

一个(接近标准正态)分布的分位数用标准正态分布的相应分位数按一小参数的幂的渐近展开.它曾由 E. A. Cornish 和 R. A. Fisher([1])加以研究.如果 $F(x, t)$ 是依赖于参数 t 的分布函数,$\Phi(x)$ 是具有参数 $(0, 1)$ 的标准正态分布函数,且当 $t \to 0$ 时 $F(x, t) \to \Phi(x)$,那么,在对 $F(x, t)$ 施加某些假定下,函数 $x = F^{-1}[\Phi(z), t]$ (F^{-1} 为 F 的反函数)的 Cornish - Fisher 展开有如下形式:

$$x = z + \sum_{i=1}^{m-1} S_i(z) t^i + O(t^m), \tag{1}$$

其中 $S_i(z)$ 是 z 的多项式.类似地,可以定义函数 $z = \Phi^{-1}[F(x, t)]$ (Φ^{-1} 为 Φ 的反函数)依 t 的幂的 Cornish-Fisher 展开:

$$z = x + \sum_{i=1}^{m-1} Q_i(x) t^i + O(t^m), \tag{2}$$

其中 $Q_i(x)$ 是 x 的多项式.公式(2)是由展开 Φ^{-1} 为关于点 $\Phi(x)$ 的 Taylor 级数,再用 Edgeworth 展开式而得到的.公式(1)则是(2)的反演.

如果 X 是有分布函数 $F(x, t)$ 的随机变量,则变量 $Z = Z(X) = \Phi^{-1}[F(X, t)]$ 有标准正态分布,且从(2)式可推出,当 $t \to 0$ 时,$\Phi(x)$ 逼近变量

$$\bar{Z} = X + \sum_{i=1}^{m-1} Q_i(X) t^i$$

的分布函数,优于它逼近 $F(x, t)$.如果 X 有零期望与单位方差,则展开式(1)的头几项有如下形式:

$$x = z + [\gamma_1 h_1(z)] + [\gamma_2 h_2(z) + \gamma_1^2 h_3(z)] + \cdots,$$

其中 $\gamma_1 = \kappa_3 / \kappa_2^{3/2}$, $\gamma_2 = \kappa_4 / \kappa_2^2$, κ_r 为 X 的 r 阶半不变量,$h_1(z) = \frac{1}{6} H_2(z)$, $h_2(z) = \frac{1}{24} H_3(z)$, $h_3(z) = -\frac{1}{36} \cdot [2H_3(z) + H_1(z)]$,而 $H_r(z)$ 是 Hermite 多项式,它们由如下关系定义:

$$\varphi(z) H_r(z) = (-1)^r \frac{d^r \varphi(z)}{dz^r} \quad (\varphi(z) = \Phi'(z)).$$

有关服从 Pearson 分布族极限律的随机变量的展开,可见[3].亦见**随机变量变换**(random variables, transformations of).

参考文献

[1] Cornish, E. A. and Fisher, R. A., Moments and cumulants in the specification of distributions, *Rev. Inst. Internat. Statist.*, **5** (1937), 307-320.

[2] Kendall, M. G. and Stuart, A., The advanced theory of statistics. Distribution theory, Griffin, 1969.

[3] Большев, Л. Н., 《Теория вероятн. и ее примен.》, **8** (1963), 129-155.

В. И. Пагурова 撰

【补注】 关于利用 Edgeworth 展开(亦见 **Edgeworth 级数** (Edgeworth series))获得(2)的方法,亦见[A1].

参考文献

[A1] Bickel, P. J., Edgeworth expansions in non parametric statistics, *Ann. Statist.* 2 (1974), 1-20.

[A2] Johnson, N. L. and Kotz, S., Distributions in statistics. Continuous distributions, 1, Houghten Mifflin, 1970.

潘一民 译

Cornu 螺线 [Cornu spiral; корню спираль], 回旋曲线 (clothoid)

超越平面曲线之一(见图),其自然方程是

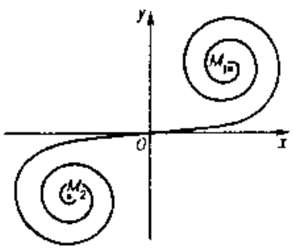
$$r = \frac{a}{s},$$

其中 r 是曲率半径,a = 常数,s 是弧长.Cornu 螺线的参数方程是

$$x = \int_0^t \cos \frac{s^2}{2a} ds, \quad y = \int_0^t \sin \frac{s^2}{2a} ds,$$

右边的积分是绕射理论中熟知的 **Fresnel 积分** (Fresnel integrals).Cornu 螺线与水平坐标轴相切于坐标原

点. 渐近点是 $M_1(\sqrt{\pi a}/2,\ \sqrt{\pi a}/2)$ 和 $M_2(-\sqrt{\pi a}/2,\ -\sqrt{\pi a}/2)$.



Cornu 螺线有时也称为 Euler 螺线(Euler spiral), 因为 L. Euler(1744)首先发现这一曲线. 从 A. Cornu 的工作(1874)开始,Cornu 螺线在光的绕射研究中得到广泛的应用.

参考文献

[1] Jahnke, E., Emde, F. and Lösch, F., Tafeln höheren Funktionen, Teubner, 1966.

Д Д Соколов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Lawrence, J. D., A catalog of special plane curve, Dover, reprint, 1972.

张鸿林 译

对射变换[correlation; корреляция], 对偶(duality)

具有同一有限维数的射影空间之间的双射 κ, 它使得 $S_p\subset S_q$ 蕴含 $\kappa(S_q)\subset\kappa(S_p)$. 在对射变换之下, 子空间和的象是各子空间象的交; 反过来, 子空间交的象是各子空间象的和. 特别, 一个点的象是一个超平面, 反之亦然. 从除环 K 上的一个射影空间 $\Pi_n(K)$ 到除环 L 上的一个射影空间 $\Pi_n(L)$ 的对射变换存在的充要条件是, 存在一个反同构(anti-isomorphism) $\alpha: K\to L$, 即一个满足 $\alpha(x+y)=\alpha(x)+\alpha(y)$, $\alpha(xy)=\alpha(y)\alpha(x)$ 的双射. 在这种情况下, $\Pi_n(L)$ 与 $\Pi_n(K)$ 对偶. 具有自对射变换(即到其自身的对射变换)的空间的例子: 实射影空间($K=\mathbf{R}$, $\alpha=\mathrm{id}$), 复射影空间($K=\mathbf{C}$, $\alpha: z\to\bar z$)和四元数射影空间($K=\mathbf{H}$, $\alpha: z\to\bar z$).

一个配极(polarity)是满足 $\kappa^2=\mathrm{id}$ 的一个自对射变换 κ. 除环 K 上的一个射影空间 $\Pi_n(K)$ 上容许有一个配极, 当且仅当 K 容许有一个对合反自同构(involutory anti-automorphism), 即一个满足 $\alpha^2=\mathrm{id}$ 的反自同构 α.

如果对任一点 $P\in W$ 有 $P\subset\kappa(P)$, 则称子空间 W 是关于自对射变换 κ 的一个零子空间(null subspace); 如果 $W\subset\kappa(W)$, 则称 W 是严格迷向的(strictly isotropic). 任何严格迷向子空间是零子空间. 一个关于其整个空间是零空间的配极, 称为一个零配极(null polarity)或辛配极(symplectic polarity)(亦见配极(polarity)).

把除环 K 上的射影空间 $\Pi_n(K)$ 看作 K 上(左)线性空间 K^{n+1} 的线性子空间的集合. K^{n+1} 上的一个半双线性型(semi-bilinear form)是一个映射 $f: K^{n+1}\times K^{n+1}\to K$, 它与 K 的一个反自同构 α 一起满足

$$f(x+y,z)=f(x,z)+f(y,z),$$
$$f(x,y+z)=f(x,y)+f(x,z),$$
$$f(kx,y)=kf(x,y),$$
$$f(x,ky)=f(x,y)\alpha(k).$$

特别, 如果 K 是一个域且 $\alpha=\mathrm{id}$, 那么 f 就是一个双线性型. 一个半双线性型称作非退化的(non-degenerate), 是指对所有的 x(或 y), $f(x,y)=0$ 蕴含 $y=0$(或 $x=0$). 任何一个 $\Pi_n(K)$ 上的自对射变换 κ, 可以用一个非退化的半双线性型 f 按如下方式表达: 对 K^{n+1} 的一个子空间 V, 它的象是 V 关于 f 的正交补:

$$\kappa(V)=\{y\in K^{n+1}: f(x,y)=0,\ 对一切\ x\in V\}$$

(Birkhoff-von Neumann 定理(Birkhoff-von Neumann theorem)([2])). κ 是一个配极, 当且仅当 f 是自反的(reflexive), 即 $f(x,y)=0$ 蕴含 $f(y,x)=0$. 用 K 的一个适当元素乘以 f, 按下述两种形式, 可以得到任何一个自反非退化半双线性型 f 以及相应的自同构 α:

1) α 是一个对合, 即 $\alpha^2=\mathrm{id}$, 且

$$f(y,x)=\alpha(f(x,y)).$$

这时, 若 $\alpha=\mathrm{id}$(因而 K 必是域), 则称 f 是对称的(symmetric); 若 $\alpha\neq\mathrm{id}$, 则称 f 是 Hermite 的(Hermitian).

2) $\alpha=\mathrm{id}$(因而 K 是域)且

$$f(y,x)=-f(x,y).$$

这样的 f 称为是反对称的(anti-symmetric).

一个对射变换的特例如下. 设 $\Pi_n(K)$ 是除环 K 上的一个射影空间, 除环 K^O 为 K 中元素的集合, 且与 K 有相同的加法, 但其乘法定义为

$$x\cdot y=yx.$$

$\alpha: x\to x$ 是一个从 K 到 K^O 的反同构, 它定义了从 $\Pi_n(K)$ 到 $\Pi_n(K^O)$ 的典范对射. (左)射影空间 $\Pi_n(K^O)$, 等同于右射影空间 $\Pi_n(K)^*$, 即 $n+1$ 维右向量空间 K^{n+1} 的线性子空间的集合, 是 $\Pi_n(K)$ 的(典范)对偶空间(见射影代数(projective algebra), Π_n 的构造).

М. И. Войцеховский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Baer, R., Linear algebra and projective geometry, Acad. Press, 1952.

[A2] Birkhoff, G. and Neumann, J. von, The logic of quantum mechanics, *Ann. of Math.*, 37 (1936), 823–843.

[A3] Dieudonné, J., La géométrie des groupes classiques, Springer, 1963.

[A4] Hughes, D. R. and Piper, F. C., Projective planes, Springer, 1972.
杨 路、张景中、侯晓荣 译

相关系数 [**correlation coefficient**; **корреляции коэффициент**]

两随机变量的联合分布的数字特征,表示它们之间的一种关系. 具数学期望 $a_1=\mathrm{E}X_1$ 和 $a_2=\mathrm{E}X_2$ 及非零方差 $\sigma_1^2=\mathrm{D}X_1$ 和 $\sigma_2^2=\mathrm{D}X_2$ 的两随机变量 X_1 和 X_2, 其相关系数 $\rho(X_1,X_2)$ 定义为

$$\rho(X_1,X_2)=\frac{\mathrm{E}(X_1-a_1)(X_2-a_2)}{\sigma_1\sigma_2}.$$

简单地说, X_1 和 X_2 的相关系数就是规则化变量 $(X_1-a_1)/\sigma_1$ 和 $(X_2-a_2)/\sigma_2$ 的**协方差** (covariance). 相关系数对于 X_1,X_2 是对称的. 且在原点及刻度改变时保持不变. 在任何情况下有 $-1\leqslant\rho\leqslant1$. 相关系数作为相依性的可能指标之一的重要性, 在于下述的性质: 1) 若X_1 和X_2 独立, 则 $\rho(X_1,X_2)=0$ (其逆未必真). 相关系数为 0 的随机变量称为不相关的. 2) $|\rho|=1$, 当且仅当随机变量间的依赖关系为线性的:

$$X_2=\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(X_1-a_1)+a_2.$$

把 ρ 解释为一个相依性指标的困难,在于等式 $\rho=0$ 对独立和非独立的随机变量都可成立. 在一般情况下,独立性的一个充分必要条件是**最大相关系数** (maximal correlation coefficient) 为零. 因此, 相关系数未能穷尽随机变量间所有类型的依赖关系,它仅是线性相依的一种度量而已. 这一线性相依程度可刻画如下: 随机变量

$$\hat{X}_2=\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(X_1-a_1)+a_2$$

给出 X_2 的一个依 X_1 的线性表示, 它在下述意义之下是最好的:

$$\mathrm{E}(X_2-\hat{X}_2)^2=\min_{c_1,c_2}\mathrm{E}(X_2-c_1X_1-c_2)^2;$$

亦见**回归** (regression). 作为若干个随机变量之间相关的刻画, 有**偏相关系数** (partial correlation coefficient) 和**多重相关系数** (multiple correlation coefficient). 关于检验独立假设的方法以及使用相关系数去研究相关性, 见**相关(统计学中的)** (correlation (in statistics)).

А. В. Прохоров 撰 陈希孺 译

相关函数 [**correlation function**; **корреляционная функция**], 实随机过程 $\{X(t):t\in T\}$ 的变元 t,s 的函数, 定义为

$$B(t,s)=\mathrm{E}[X(t)-\mathrm{E}X(t)][X(s)-\mathrm{E}X(s)].$$

要相关函数有定义, 必须假定对任何 $t\in T$, 过程 $X(t)$ 有有限的二阶矩 $\mathrm{E}X(t)^2$. 这里参数 t 在实直线的某一子集 T 内变动. t 常被解释为时间, 虽然对随机场, 其中 T 为一有限维空间之子集, 也可给出完全类似的相关函数定义. 若 $X(t)=[X_1(t),\cdots,X_n(t)]$ 为一多维随机过程 (随机函数), 则其相关函数定义为取矩阵为值的函数

$$B(t,s)=\|B_{ij}(t,s)\|_{i,j=1}^n,$$

其中

$$B_{ij}(t,s)=\mathrm{E}[X_i(t)-\mathrm{E}X_i(t)][X_j(s)-\mathrm{E}X_j(s)]$$

是过程 $X_i(t),X_j(t)$ 的**联合相关函数** (joint correlation function).

相关函数是随机过程的一个重要特征. 若 $X(t)$ 为 **Gauss 过程** (Gaussian process), 则其相关函数 $B(t,s)$ 及其均值 $\mathrm{E}X(t)$ (即其一、二阶矩) 唯一地决定了其有限维分布, 因而唯一地决定了整个过程. 在一般情况下, 要完全描述一个随机过程, 前两阶矩是不够的. 例如, $B(t,s)=e^{-a(t-s)}$ 同时既是一个轨道为连续的平稳 Gauss 过程的相关函数, 又是所谓**电报信号** (telegraph signal) (即一取两个值 ±1 的平稳 Марков 点过程) 的相关函数. 然而, 相关函数确实决定了一个过程的若干重要性质; 所谓的二阶性质 (即用二阶矩表述的性质). 出于这个原因, 也由于其相对简单, 在随机过程的理论及其应用中, 常用到相关方法 (见**相关图** (correlogram)).

当 $|t-s|\to\infty$ 时相关下降的速度及性状, 提供了过程的遍历性的概念. 这种或那种形式的有关相关下降速度的条件, 在随机过程的极限定理中出现. 象均方连续和可微这类局部二阶性质, 对过程的局部行为提供了有用 (尽管极为粗糙) 的刻画. 在 Gauss 过程的情况下, 通过相关函数去研究轨道性质已达到相当深度 (见**样本函数** (sample function)). 随机过程理论最完善的分支之一, 是线性外推和过滤的理论, 它对过程的预测和逼近提供了优良的线性程序: 这个理论是基于相关函数的知识.

相关函数的一个特征性质是, 它是正定的:

$$\sum_{i,j=1}^n c_i\bar{c}_jB(t_i,t_j)\geqslant0,$$

对任何 n, 任何复数 $c_1,\cdots,c_n$ 及任何 $t_1,\cdots,t_n\in T$ 成立. 在宽平稳过程中的最重要的情况, $B(t,s)$ (仅) 依赖于变元之差: $B(t,s)=R(t-s)$. 它是正定的这个条件成为

$$\sum_{i,j=1}^n c_i\bar{c}_jR(t_i-t_j)\geqslant0.$$

如果 $R(t)$ 还在 $t=0$ 处连续(换句话说,过程 $X(t)$ 为均方连续),则

$$R(t) = \int e^{it\lambda} F(d\lambda),$$

这里 $F(d\lambda)$为一个正有限测度,当 $T=(-\infty,\infty)$ 时 λ 跑遍整个实直线(连续时间情况),或者当$T=\{\cdots,-1,0,1,\cdots\}$ 时,λ 跑遍区间 $[-\pi,\pi]$ ("离散时间"情况). 测度 $F(d\lambda)$ 理解为随机过程的谱测度(spectral measure). 这样就可以证明:一平稳随机过程的相关和谱性质为紧密相联的;例如,当 $t\to\infty$ 时相关的下降速度相应于谱密度 $f(\lambda)=F(d\lambda)/d\lambda$ 的光滑程度.

在统计力学中,相关函数这个词也用于所考虑的系统中位于点 $X_1,\cdots,X_m$ 处的 m 个不同质点的联合概率密度 $\rho(x_1,\cdots,x_m)$. 这些函数的全体唯一地决定了相应的离散随机场.

参考文献

[1] Doob, J. L., Stochastic processes, Chapman and Hall, 1953.

[2] Loève, M., Probability theory, Princeton Univ. Press, 1963.

[3] Гихман, И. И., Скороход, А. В., Введение в теорию случайных процессов, М., 1965 (英译本: Gikhman, I. I. and Skorokhod, A. V., Introduction to the theory of stochastic processes, Saunders, 1969).

A. C. Холево 撰　陈希孺 译

关联函数 [correlation function; корреляционная функция],统计力学中的

描述粒子或粒子群相互影响以及所讨论的系统的亚系统的相互作用的效应的函数.

在经典统计力学中,关联函数 $G_2(1,2)$, $G_3(1,2,3)$, $\cdots$ 由关系式

$$F_2(1,2) = F_1(1)F_1(2)+G_2(1,2),$$

$$F_3(1,2,3) = F_1(1)F_1(2)F_1(3)+F_1(1)G_2(2,3)+$$

$$+F_1(2)G_2(1,3)+F_1(3)G_2(1,2)+G_3(1,2,3),\ \ldots$$

所定义,其中函数自变量中的符号 $1,2,\cdots$ 相应标记第 1 个,第 2 个,$\cdots$ 粒子的坐标 $\mathbf{r}$ 和动量 $\mathbf{p}$ 的集合,而 $F_s(1,\cdots,s)$ 是约化分布函数

$$F_s(1,\ldots,s) = V\left[1-\frac{1}{N}\right]\cdots$$

$$\cdots\left[1-\frac{s-1}{N}\right]\int D_t\, d(s+1)\cdots dN,$$

其中 V 是系统的容积、N 是粒子数,$D_t=D_t(1,\cdots,N)$ 是时间 t 相空间中的分布函数,并已归一化使有

$$\int D_t(1,\ldots,N)\,d1\cdots dN = 1.$$

D_t 因时间的变化由 Liouville 方程 $\partial Dt/\partial t=\Lambda Dt$ 所表征,其中 Λ 是不显式依赖于时间的 Liouville 算子. 一般都讨论 Λ 是一个可加部分和一个表征粒子的相互作用的双粒子部分之和的情况:

$$\Lambda = \sum_{1\leq j\leq N}\Lambda(j)+\sum_{1\leq j_1<j_2\leq N}\Lambda(j_1,j_2).$$

根据相关衰减原理,关联函数满足边界条件

当 $\max\{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|,\cdots,|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_s|,\cdots,|\mathbf{r}_{s-1}-\mathbf{r}_s|\}\to\infty$ 时

$$G_s(1,\cdots,s)\to 0.$$

关联函数 $G_1(1)=F_1(1)$, $G_2(1,2),\cdots$, $G_3(1,\cdots,s)$ 是泛函 $A_t(u)$ 的泛函导数

$$G_s(1,\ldots,s) = \left[\frac{\delta^s A_t(u)}{\delta u(1)\delta u(2)\cdots\delta u(s)}\right]_{u=0},$$

而 $A_t(u)$ 与如下的所谓产生泛函

$$L_t(u) = \int\left\{\prod_{1\leq j\leq N}\left[1+\frac{V}{N}u(j)\right]\right\}D_t\,d1\cdots dN$$

有以下关系

$$L_t(u) = e^{A_t(u)}.$$

泛函 $A_t(u)$ 满足方程

$$\frac{\partial A_t(u)}{\partial t} = \int u(1)\Lambda(1)\frac{\delta A_t(u)}{\delta u(1)}\,d1+$$

$$+\frac{1}{2}\int\left\{u(1)u(2)++\frac{N}{V}u(1)+\frac{N}{V}u(2)\right\}\Lambda(1,2)$$

$$\left\{\frac{\delta A_t(u)}{\delta u(1)}\frac{\delta A_t(u)}{\delta u(2)}+\frac{\delta^2 A_t(u)}{\delta u(1)\delta u(2)}\right\}d1\,d2.$$

在量子统计力学中,相关函数是定义如下的算子量:

$$F_2(1,2) = S(1,2)\{F_1(1)F_1(2)\}+G_2(1,2), \qquad (*)$$

$$F_3(1,2,3) = S(1,2,3)\{F_1(1)F_1(2)F_1(3)\}+$$

$$+\frac{1}{2}S(1,2,3)\{F_1(1)G_2(2,3)+F_1(2)G_2(1,3)+$$

$$+F_1(3)G_2(1,2)\}+G_3(1,2,3),\ \ldots,$$

其中 $S(1,2)$, $S(1,2,3)$ 对 Bose 系统为对称化算子,而对 Fermi 系统为反对称化算子. 构成密度矩阵 (density matrix) 的关联函数 (*) 满足量子力学 Liouville 方程(见[2]).

在量子统计力学中,除了关联函数(*)外,还讨论基于一般热力学平均的关联函数(见[3])以及基于准平均的关联函数(见[3]).

关联函数(不管是量子力学的还是经典的)的双线性组合给出 Green 函数(见[5]). 关联函数还具有谱表达方式; 它们满足 Боголюбов 不等式以及变分中值定理(见[4]).

有时利用相应于 Kirkwood 分解的关联函数(见[6]); 另一种形式是空间-时间关联函数(见[8]).

关联函数可以解释为几率量度的特征函数(见[9]).

参考文献

[1] Боголюбов, Н. Н., Проблемы динамической теории в статистической физике, М. - Л. (1946).

[2] Боголюбов, Н. Н., Гуров, К. П., 《Ж. эксперимента-льной и теоретической физики》, 17 (1947), 7, 614 – 628.

[3] Боголюбов, Н. Н., Избранные труды, т 3, К., 1971.

[4] Боголюбов, Н. Н., (мл.), Садовников, Б. И., Некоторые вопросы статистической механики, М., 1975.

[5] Боголюбов, Н. Н., Тябликов, С. В., 《Докл. АН СССР》, **126** (1959), 1, 53 – 56.

[6] Libov, R., Introduction to the theory of kinetic equations, Wiley, 1969.

[7] Isihara, A., Statistical physics, Acad. Press, 1971.

[8] Ruelle, D., Statistical mechanics: rigorous results, Benjamin, 1974.

[9] Preston, C. J., Gibbs states on countable sets, Cambridge Univ. Press, 1974.

А. Н. Ермилов, А. М. Курбатов 撰 沈 青 译

相关(统计学中的)[correlation (in statistics); корреляция]

随机变量之间的一种依赖关系,不一定能用严格的函数关系表出. 与函数依赖关系不同,相关关系通常用在一个随机变量不仅依赖于(给定的)另一个随机变量,而且还依赖于若干随机因素的场合. 两随机事件之间的依赖性体现在:一事件在另一事件发生下的条件概率,与其无条件概率不同. 类似地,一个随机变量对另一个的影响由其在给定另一个的值时的条件分布去刻画. 设 X, Y 为有给定联合分布的随机变量, 其期望为 m_X 和 m_Y 而方差为 σ_X^2 和 σ_Y^2, 且设 ρ 为 X 和 Y 的相关系数, 设对每一个可能值 $X=x$, Y 的条件数学期望 $y(x)=\mathsf{E}[Y|X=x]$ 有定义; 这时, 函数 $y(x)$ 称为 Y 对给定 X 的**回归**(regression), 而其图形则称为 Y 对给定 X 的**回归曲线**(regression curve). Y 对 X 的依赖体现在当 X 变化时 Y 的均值的变化, 仅管对每个固定的值 $X=x$, Y 依然是一个具有一定散布的随机变量. 为了确定在何种精确程度上回归再现了当 X 变化时 Y 的变化, 人们使用给定 $X=x$ 时 Y 的条件方差或者其平均值(Y 围绕着回归曲线的散布的度量):

$$\sigma_{Y|X}^2 = \mathsf{E}[Y-\mathsf{E}(Y|X=x)]^2.$$

若 X 和 Y 独立, 则 Y 的一切条件数学期望与 x 无关且与其无条件期望重合: $y(x)=m_Y$; 因而也有 $\sigma_{Y|X}^2=\sigma_Y^2$. 当 Y 在严格的意义下是 X 的函数时, 则对每个 $X=x$, 变量 Y 只能取一个确定的值, 因而 $\sigma_{Y|X}^2=0$. 类似地, 可定义 $x(y)=\mathsf{E}(X|Y=y)$ (X 对给定 Y 的回归). 分布在回归曲线 $y(x)$ 附近的集中程度的一个自然指标是**相关比**(correlation ratio)

$$\eta_{Y|X}^2 = 1-\frac{\sigma_{Y|X}^2}{\sigma_Y^2}.$$

当且仅当回归具有形式 $y(x)=m_Y$ 时, 有 $\eta_{Y|X}^2=0$, 而在这个场合下相关系数 ρ 为 0, Y 与 X 不相关, 若 Y 对给定 X 的回归为线性的, 即回归曲线为直线

$$y(x) = m_y+\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-m_X),$$

则有

$$\sigma_{Y|X}^2 = \sigma_Y^2(1-\rho^2) \text{ and } \eta_{Y|X}^2 = \rho^2;$$

若进一步有 $|\rho|=1$, 则 Y 与 X 有严格线性关系; 但如果 $\eta_{Y|X}^2=\rho^2<1$, 则 Y 和 X 之间不存在函数关系. 当且仅当 $\rho^2<\eta_{Y|X}^2=1$ 时, 存在着非线性关系的严格函数关系. 除了某些稀有的例外, 仅当 X 和 Y 的联合分布为正态(或接近正态)时, 实际使用相关系数作为缺乏独立性的度量才是合理的, 因为在正态场合, $\rho=0$ 蕴含 X, Y 独立、用 ρ 作为任意随机变量 X, Y 的相依性的度量经常引致错误的结论, 因为即使在存在着函数依赖关系时, ρ 也可以为 0. 如果 X 和 Y 的联合分布为正态的, 则两条回归曲线全是直线, 而 ρ 唯一地确定了分布在回归线附近集中的程度: 当 $|\rho|=1$ 时, 回归线合二而一, 相应于 X, Y 之间的线性相依; 当 $\rho=0$ 时则有独立性.

在研究具有给定的联合分布的多个随机变量 $X_1, \cdots, X_n$ 之间的相依性时, 人们使用多重和偏相关比及系数. 后者是使用通常 X_i 和 X_j 间的相关系数而得到的. 其全体形成**相关阵**(correlation matrix). X_1 与其余变量 $X_2, \cdots, X_n$ 的全体之间线性关系的度量, 由**多重相关系数**(multiple - correlation coefficient)提供. 如果 X_1 和 X_2 之间的相互关系被认为是由其他变量 $X_3, \cdots, X_n$ 的影响所决定的, 则 X_1 和 X_2 相对于 $X_3, \cdots, X_n$ 的**偏相关系数**(partial correlation coefficient)是相对于 $X_3, \cdots, X_n$ 的、X_1 和 X_2 之间的线性关系的一个指标.

对基于**秩统计量**(rank statistic)的相关性的度量, 见 **Kendall 秩相关系数**(Kendall coefficient of rank correlation); **Spearman 秩相关系数**(Spearman coefficient of rank correlation).

数理统计学发展了一些方法, 以估计那些刻画着随机变量之间的相关性的系数; 也有一些方法利用它们

的样本对等物检验有关它们的值的假设. 这些方法统称为相关分析(correlation analysis). 统计数据的相关分析包含下述的基本实际步骤: 1)作出散点图并编出相关表; 2)计算样本相关比或相关系数; 3)检验有关相依的显著性的统计假设. 进一步的研究可包含建立变量之间相依关系的具体形式(见回归(regression)).

对分析二维样本数据有助益的工具中, 有散布图和相关表. 散布图(scatter plot)是由把样本点标在坐标纸上而得到的. 对散布图上点的形势的考察, 产生出有关随机变量之间的相依类型的初步概念(例如, 当一个变量增加时, 另一变量平均说来增加或减小). 在作数值处理前, 通常把观察结果分成组, 并以相关表(correlation table)的形式提出. 在这表的每一栏中, 写进其分量落入适当的组区间的对 (x, y) 的数目 n_{ij}. 假定所有组区间(分别对每一变量言)等长, 则取区间的中心 x_i (或 y_j) 及数 n_{ij} 作为计算的基础. 相关系数和相关比能比散布图提供更确切的变量关系的性质和强度的信息. 样本相关系数(sample correlation coefficient)用公式

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_i\sum_j (x_i-\bar{x})(y_j-\bar{y})n_{ij}}{\sqrt{\sum_i n_{i\cdot}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum_j n_{\cdot j}(y_j-\bar{y})^2}}$$

来定义, 这里

$$n_{i\cdot} = \sum_j n_{ij}, \quad n_{\cdot j} = \sum_i n_{ij}$$

而

$$\bar{x} = \frac{\sum_i n_{i\cdot} x_i}{n}, \quad \bar{y} = \frac{\sum_j n_{\cdot j} y_j}{n}.$$

在有大量数目的、遵从同一近似正态分布的独立观察值的情况下, $\hat{\rho}$ 是相关系数真值 ρ 的一个良好近似, 在所有其他场合, 建议采用相关比作为关系强度的一种刻画; 其解释与所研究的关系类型无关. 相关比 $\eta^2_{Y|X}$ 的样本值 $\hat{\eta}^2_{Y|X}$ 是从相关表中的值, 用公式

$$\hat{\eta}^2_{Y|X} = \frac{\frac{1}{n}\sum_i n_{i\cdot}(\bar{y}_i-\bar{y})^2}{\frac{1}{n}\sum_j n_{\cdot j}(y_j-\bar{y})^2}$$

算出的, 其中 $\bar{y}_i = \sum_j n_{ij}y_j / n_{i\cdot}$. 这里分子代表条件均值 $\bar{y}_i$ 围绕着无条件均值 $\bar{y}$ 的散布(样本值 $\hat{\eta}^2_{X|Y}$ 的定义是类似的). $\hat{\eta}_{Y|X}-\hat{\rho}^2$ 这个量用来指示回归对线性的偏离.

有关变量关系显著性假设的检验, 是基于样本相关特征的分布的, 在正态分布场合, 如果

$$(\hat{\rho})^2 > \left[1+\frac{n-2}{t_\alpha^2}\right]^{-1},$$

则样本相关系数值 $\hat{\rho}$ 显著异于 0, 这里 t_α 是自由度为 $(n-2)$ 的 Student t 分布相应于选定的显著性水平 α 的临界值. 如果 $\rho\neq 0$, 人们通常使用 Fisher 的 z 变换, 它按公式

$$z = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\hat{\rho}}{1-\hat{\rho}}\right)$$

把 $\hat{\rho}$ 变换到 z. 即使对于比较小的 n 值, z 的分布也是具有数学期望

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+\rho}{1-\rho}+\frac{\rho}{2(n-1)}$$

和方差 $1/(n-3)$ 的正态分布的良好逼近. 在这个基础上, 可以对相关系数真值 ρ 确定近似的置信区间.

关于样本相关比的分布, 以及回归线性假设的检验, 见[3].

参考文献

[1] Cramér, H., Mathematical methods of statistics, Princeton Univ. Press, 1946.

[2] Waerden, B. L. van der, Mathematische Statistik, Springer, 1957.

[3] Kendall, M. G. and Stuart, A., The advanced theory of statistics, 2 Inference and relationship, Griffin, 1979.

[4] Айвазян, С. А., Статистическое исследование зависимостей, М., 1968.

A. B. Прохоров 撰 陈希孺 译

相关阵 [**correlation matrix; корреляционная матрица**]

若干个随机变量的相关系数构成的矩阵. 若 $X_1,\cdots,X_n$ 是具有非零方差 $\sigma_1^2,\cdots,\sigma_n^2$ 的随机变量, 则相关阵的元 $\rho_{ij}(i\neq j)$ 等于**相关系数**(correlation coefficient) $\rho(X_i, X_j)$; 对 $i=j$, 该元定义为 1. 由关系式 $\Sigma=BPB$, 相关阵 P 的性质被**协方差阵**(covariance matrix) Σ 的性质所决定. 这里 B 是以 $\sigma_1,\cdots,\sigma_n$ 为对角元的对角阵.

A. B. Прохоров 撰 陈希孺 译

相关比 [**correlation ratio; корреляционное отношение**]

随机变量间相依性的一个特征. 随机变量 Y 相对于随机变量 X 的相关比有表达式

$$\eta^2_{Y|X} = 1-\mathrm{E}\left[\frac{\mathrm{D}(Y|X)}{\mathrm{D}Y}\right],$$

这里 $\mathrm{D}Y$ 为 Y 的方差, $\mathrm{D}(Y|X)$ 为给定 X 时 Y 的条件方差, 它刻画了对一给定的 X 值, Y 围绕着其条件数学期望 $\mathrm{E}(Y|X)$ 的散布. 总有 $0\leqslant\eta^2_{Y|X}\leqslant 1$. 等式 $\eta^2_{Y|X}=0$ 相应

于不相关随机变量；$\eta^2_{Y|X}=1$ 当且仅当 Y 与 X 之间存在着确切的函数关系．当 Y 线性地依赖于 X 时，相关比与相关系数的平方相同．相关比对于 X 和 Y 并非对称的，故除了 $\eta^2_{Y|X}$ 外，人们还考虑 $\eta^2_{X|Y}$（X 相对于 Y 的相关比，可类似地定义）．在 $\eta^2_{Y|X}$ 和 $\eta^2_{X|Y}$ 之间不存在简单的关系，亦见**相关（统计学中的）**(correlation (in statistics)).

A. B. Прохоров 撰

【译注】 由 X,Y 不相关，即其相关系数为 0，一般推不出 $\eta^2_{Y|X}=0$．

陈希孺 译

相关图 [**correlogram；коррелограмма**]，时间序列 $x_1,\cdots,x_T$ 的

序列(样本)相关系数

$$r_t=\frac{\frac{1}{T-t}\sum_{s=1}^{T-t}(x_s-\bar{x})(x_{s+t}-\bar{x})}{\frac{1}{T}\sum_{s=1}^{T}(x_s-\bar{x})^2},\quad t=1,\ldots,T-1,$$

的集合．这里 $\bar{x}$ 是时间序列的样本均值，即

$$\bar{x}=\frac{1}{T}\sum_{s=1}^{T}x_s.$$

相关图这个词有时用于指 r_t 作为 t 的函数的图形．它是序列$\{x_t\}$各项的统计相依性的经验度量．在时间序列分析中，相关图用于对概率模型作统计推断，该概率模型是为了对观察数据进行描述和解释而提出的．

有时把理论相关图(theoretical correlogram)一词用于指一(平稳)随机过程$\{X_t\}$的规则化的**相关函数**(correlation function)

$$\rho_t=\frac{\operatorname{cov}(X_s,X_{s+t})}{\mathrm{D}(X_s)},\quad t=1,2,\ldots,$$

这里

$$\operatorname{cov}(X_s,X_{s+t})=\mathrm{E}(X_s-\mathrm{E}X_s)(X_{s+t}-\mathrm{E}X_{s+t})$$

是随机变量 X_s 和 X_{s+t} 的协方差．而 $\mathrm{D}(x_s)$ 是随机变量 X_s 的方差．若 $\{x_t\}$ 是随机序列 $\{X_t\}$ 的一个现实，则在相当一般的条件下，样本相关图 $\{r_t\}$ 给出理论相关图 $\{\rho_t\}$ 的相合且渐近正态的估计．

从数学的观点看，用相关或用谱去描述一平稳随机序列是等价的；然而，在时间序列的统计分析中，相关法和谱法有不同的应用领域，这有赖于原始资料与分析的最终目的．谱分析给人们以关于时间序列中周期分量的存在和强度的概念，但在研究观察数据中接连值的统计关系时，相关法较为方便．在统计实践中，通常在有根据假定所给时间序列系由一相当简单的随机模型（自回归，滑动平均或较低阶的包含自回归与滑动平均二者的混合模型）所生成时（如在计量经济学中），才使用相关图方法．在这种模型中，理论相关图$\{\rho_t\}$具有特殊性质（在滑动平均模型中，ρ_t当 t 充分大时为 0；在自回归模型中，ρ_t 指数地下降但可能带有振动）．如果在样本相关图中出现这些性质之一，那就是一个迹象，说明某种概率模型可能适合，为了检测其拟合优度及估计所选模型的参数，发展了一些基于序列相关系数的分布的统计方法．

参考文献

[1] Anderson, T. W., The statistical analysis of time series, Wiley, 1971.

[2] Kendall, M. G. and Stuart, A., The advanced theory of statistics, 3, Design and analysis, Griffin, 1966.

[3] Hannan, E. J., Multiple time series, Wiley, 1970.

A. C. Холево 撰 陈希孺 译

对应 [**correspondence；соответствие**]，关系(relation)

两个集合或两个同型数学结构之间的（通常的）二元关系(binary relation)的推广．对应广泛地应用于数学和各种应用学科，例如，理论程序、图论、系统论和数理语言学．

二集合 A 和 B 之间的对应(correspondence)是 Descartes 积 $A\times B$ 的子集 R．换言之，A 和 B 之间的对应是一些序偶 (a,b) 组成的集合，其中 $a\in A$，$b\in B$．通常，用三元组 (R,A,B) 表示对应，且可以用 aRb 或 $R(a,b)$ 代替 $(a,b)\in R$．有时也用术语"二元关系"或"关系"(relation)代替"对应"（一般情况下，其中 A,B 不必相等）．

对于有限集合，常用矩阵和图表示对应．设 A 和 B 分别有 n 个和 m 个元素，且设 (R,A,B) 为一个对应．我们可用一个 $n\times m$ 阶矩阵来描述该对应，这矩阵的行和列分别用 A 和 B 中的元素标记．如果 $(a,b)\in R$，则第 a 行与第 b 列交叉处的值为 1，否则为 0．反之，每个只由 0 和 1 组成的 $n\times m$ 阶矩阵都唯一地描述了 A 和 B 之间的一个对应．在图表示中，用平面上的点表示 A 和 B 中的元素．这些点的符号与它们所代表的元素的符号相同．如果 $(a,b)\in R$，则用由 a 到 b 的箭头号（弧）把 a 和 b 连接起来．这样就把该对应表示为一个有向图．

二集合 A 和 B 之间的所有对应的集合形成一个完全 Boole 代数，其零元素是空对应，单位元是所谓的完全对应(complete correspondence)，它是由所有序偶 (a,b) 组成的，其中 $a\in A$，$b\in B$．设 $R\subseteq A\times B$．称集合

$$\operatorname{Dom}R=\{a\in A:\exists b\,(a,b)\in R\}$$

为 R 的定义域(domain of definition)，且称集合

$$\operatorname{Ran}R=\{b\in B:\exists a\,(a,b)\in R\}$$

为 R 的值域(range)或象(image). 如果 $\mathrm{Dom}\,R=A$, 则称 R 处处有定义. 如果 $\mathrm{Ran}\,R=B$, 则称 R 为满的. 对每个 $a\in A$, 称集合

$$\mathrm{Im}_R\, a = \{b\in B: (a,b)\in R\}$$

为 a 关于 R 的象(image), 对每个 $b\in B$, 称集合

$$\mathrm{Coim}_R\, b = \{a\in A: (a,b)\in R\}$$

为 b 关于 R 的上象(co-image)(或原象(pre-image)), 则有

$$\mathrm{Dom}\,R = \bigcup_{b\in B}\mathrm{Coim}_R\, b,\quad \mathrm{Ran}\,R = \bigcup_{a\in A}\mathrm{Im}_R\, a.$$

每个对应 R 都建立了 A 的子集与 B 的子集间 **Galois 对应**(Galois correspondence), 即使得任一子集 $X\subseteq A$ 对应于子集 $X'=\bigcup_{a\in X}\mathrm{Im}_R\, a\subseteq B$. 其对偶对应(dual correspondence) S 是使任一子集 $Y\subseteq B$ 对应于子集 $Y'=\bigcup_{b\in Y}\mathrm{Coim}_R\, b$. Galois 对应及其对偶对应定义了 A 和 B 上的一个闭包算子.

一对应(R, A, B)的逆(inverse)对应或对合对应, $R^{\#}$ 或 R^{-1}, 由下列等式定义:

$$R^{\#} = \{(b,a): (a,b)\in R\}.$$

这样就建立了对应(R,A,B)与$(R^{\#},B,A)$之间的一个双射, 它是 Boole 代数的同构. 已知二对应(R,A,B)和(S,B,C), 它们的积(product)或复合(composite)定义为

$$(RS,A,C) = \{(a,c): \exists b\,(a,b)\in R\wedge(b,c)\in S\}.$$

对应的乘法满足结合律, 它的单位元是对角线二元关系. 并且, $(RS)^{\#}=S^{\#}R^{\#}$, $R_1\subseteq R_2$ 蕴涵 $R_1^{\#}\subseteq R_2^{\#}$. 从而一个集族间的对应构成一个有序的**具有对合的范畴**(category with involution). 乘法和对合使我们能够用代数关系来表达对应的性质. 例如, 如果 $RR^{\#}\supseteq E_A$ (E_A 是 A 的对角线), 则对应(R, A, B)处处有定义, 如果 $RR^{\#}\supseteq E_A$ 且 $R^{\#}R\subseteq E_B$, 则 R 是函数的(functional), 也就是说, R 是由 A 到 B 内的函数的图.

对任意对应 R, 存在函数对应 F 和 G, 使得 $R=F^{\#}G$. 并且 $R\subseteq RR^{\#}R$. 任意二重函数对应都可诱导出其定义域和值域上的等价关系, 它们的商集具有相同基数. 且这个结论只对二重函数关系成立.

设 $\mathfrak{A}$ 是同型数学结构组成的类, 且设 $\mathfrak{A}$ 对有限 Descartes 积封闭. 两个结构 $A, B\in\mathfrak{A}$ 之间的对应是 $A\times B$ 的子结构 R. 这样就得到群对应、模对应、环对应等等. 这些对应对描述其结构很有用. 例如, 设 A 和 B 为群, 且设 R 为直积 $A\times B$ 的子群, 集合

$$\mathrm{Ker}\,R=\{a\in A:(a,1)\in R\},$$
$$I_R=\{b\in B:(1,b)\in R\}$$

分别称为 R 的核(Kernel)和不确定集(indeterminacy). $\mathrm{Ker}\,R$ 是 $\mathrm{Dom}\,R$ 的正规子群, I_R 是 $\mathrm{Ran}\,R$ 的正规子群, 且商群$(\mathrm{Dom}\,R)/\mathrm{Ker}\,R$ 和$(\mathrm{Ran}\,R)/I_R$ 同构. 由此得出群对应是二重函数的.

参考文献

[1] Курош, А. Г., Общая алгебра. Лекции 1969–1970 учебного года, М., 1974 (英译本: Kurosh, A. G., Lectures on general algebra, Chelsea, 1963).

[2] Мальцев, А. И., Алгебраические системы, М., 1970 (英译本: Maltsev, A. I., Algebraic systems, Springer, 1973).

[3] Цаленко, М. Ш., 《Тр. Моск. матем. об-ва》, **41** (1980), 241–285.

М. Ш. Цаленко 撰

【补注】 在代数几何学中, 对应也被广泛应用, [A1] 中第 2、3 章. 它们定义为下述更专门的概念. 两个(投影)簇 X 和 Y 之间的对应定义为封闭的代数子集 $Z\subseteq X\times Y$. 如果 Z 是不可约的且存在一个 Zariski 开子集 $X_0\subset X$, 使得每个 $x\in X_0$ 恰好仅与 Y 中的一个点有关系 Z (即: $\mathrm{card}\,\mathrm{Im}_Z(x)=1$), 则称 Z 是有理映射(rational mapping). 如果 Z 和 $Z^{\#}$ 都是有理映射, 则称 Z 是双有理映射(birational mapping).

参考文献

[A1] Mumford, D., Algebraic geometry 1: Complex projective varieties, Springer, 1976.

张锦文、赵希顺 译

余割 [cosecant; косеканс]

三角函数(trigonometric functions)之一:

$$y = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x};$$

另一些表示法是 $\csc x$, $\operatorname{cosc} x$, 其定义域是除去横坐标为 $x=\pi n$ ($n=0, \pm1, \pm2,\cdots$)的点以外的整个实轴. 余割是无界奇周期函数(周期为 2π). 余割的导数是

$$(\operatorname{cosec} x)' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x\operatorname{cosec} x.$$

余割的积分是

$$\int\operatorname{cosec} x\, dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

余割的级数展开是

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{x}+\frac{x}{6}+\frac{7x^3}{360}+\frac{31x^5}{15120}+\cdots,$$
$$0<|x|<\pi.$$

Ю. А. Горьков 撰

【补注】 亦见**正弦**(sine).

张鸿林 译

陪集[coset; смежный класс],子群 H 在群 G 中的(左) G 中形式为

$$aH = \{ah: h \in H\}$$

的元素的集合，其中 a 是 G 的一个固定元素．这个陪集也称为 H 在 G 中由 a 确定的左陪集．每个左陪集由它的任一元素决定．$aH=H$ 当且仅当 $a \in H$．对所有 $a, b \in G$，陪集 aH 和 bH 或相等或无交．于是，G 可分解成 H 的互不相交的左陪集的并集；这个分解称为 G 对于 H 的左分解(left decomposition)．类似地，可定义右陪集(right cosets)(是集合 $Ha, a \in G$)和 G 对 H 的右分解(right decomposition)．这些分解由相同个数的陪集组成(在无限的情形，它们有相等的势)．这个数(势)称为子群 H 在 G 中的指数(index of the subgroup)．对于正规子群，左分解和右分解重合，这时可简单地称群对于正规子群的分解(decomposition of a normal group)． О. А. Иванова 撰

【补注】 也见**正规子群**(normal subgroup)．

石生明 译 许以超 校

余弦[cosine; косинус]

三角函数(trigonometric functions)之一:

$$y = \cos x.$$

其定义域是整个实轴；值域是闭区间 $[-1, 1]$；余弦是偶周期函数(周期为 2π)．在余弦和正弦之间存在公式

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

在余弦和正割之间存在公式

$$\cos x = \frac{1}{\sec x}.$$

余弦的导数是

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

余弦的积分是

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C.$$

余弦的级数展开是

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots, \quad -\infty < x < \infty.$$

余弦的反函数是反余弦(arccosine)．

在复自变量 z 的余弦、正弦和指数函数之间存在 Euler 公式(Euler formula):

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

如果 x 是实数，则有

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

如果 $z = ix$ (纯虚数)，则有

$$\cos ix = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \cosh x,$$

其中 $\cosh x$ 是双曲余弦． Ю. А. Горьков 撰

【补注】 自变量(角) φ 的余弦的几何解释如下所述．考虑原点为 0 的(复)平面上的单位圆 T．设 φ 表示半径(看作是变动的)和正 x 轴之间的夹角．这时，$\cos\varphi$ 等于从 T 上对应于 φ 的点 $e^{i\varphi}$ 到 x 轴的(带符号)的距离．亦见**正弦**(sine)．

参考文献

[A1] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1–2, М., 1967–1968 (中译本: А. И. 马库雪维奇，解析函数论，高等教育出版社，1957)．

张鸿林 译

辐角余弦[cosine amplitude; косинус амплитуды]，椭圆余弦(elliptic cosine)

三个基本 **Jacobi 椭圆函数**(Jacobi elliptic functions)之一，记为

$$\mathrm{cn}\, u = \mathrm{cn}(u, k) = \mathrm{cosam}\, u.$$

辐角余弦可以通过 Weierstrass σ 函数、Jacobi θ 函数或幂级数表示如下:

$$\mathrm{cn}\, u = \mathrm{cn}(u, k) = \frac{\sigma_1(u)}{\sigma_3(u)} = \frac{\theta_0(0)\theta_2(v)}{\theta_2(0)\theta_0(v)} =$$

$$= 1 - \frac{u^2}{2!} + (1+4k^2)\frac{u^4}{4!} - (1+44k^2+16k^4)\frac{u^6}{6!} + \cdots,$$

其中 k 是椭圆函数的模，$0 \leqslant k \leqslant 1$；$v = u/2\omega$，$2\omega = \pi\theta_3^2(0)$，对于 $k=0,1$，分别得到 $\mathrm{cn}(u, 0) = \cos u$，$\mathrm{cn}(u, 1) = 1/\cosh u$．

参考文献

[1] Hurwitz, A. and Courant, R., Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen, 2, Springer, 1964, Chapt. 3.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 关函数 $\mathrm{cn}u$ 的更多的结果，例如导数、偶性、在实轴上的性态等等，可在[A1]中找到．

参考文献

[A1] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1–2, М., 1967–1968 (中译本: А. И. 马库雪维奇，解析函数论，高等教育出版社，1957)．

张鸿林 译

双曲余弦[cosine, hyperbolic; косинус гиперболический]

见**双曲函数**(hyperbolic functions)．

余弦定理[cosine theorem; косинусов теорема]

三角形一边的平方等于另外两边的平方和减去这

两边与其夹角的余弦之积的二倍:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C,$$

这里,a, b, c是三角形的三个边,C是a和b之间的夹角. Ю. А. Горьков 撰 张鸿林 译

宇宙常数[cosmological constant; космологическая постоянная]

广义相对论中有时引进的表征真空性质的一个物理常数.含宇宙常数的 **Einstein 方程**(Einstein equations)是

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ij} + \Lambda g_{ij},$$

其中Λ是宇宙常数,g_{ij}是度规张量,R_{ij}是 Ricci 张量,R是空间曲率,T_{ij}是能量动量张量,c是光速,G是引力常数.这些方程是对于作用量

$$S = S_0 - \frac{c^3}{16\pi G}\int(R + 2\Lambda)\,dV$$

的 Lagrange 方程,其中S_0是物质的作用量而V表示四维体积. A. Einstein 在广义相对论中引进宇宙常数[1]是为了保证引力场方程容许有空间均匀的静态解(所谓 Einstein 宇宙模型).然而,自从出现 Friedmann 的演化宇宙模型并为实验所证实以来,原始 Einstein 方程不具有这种解的事实并不被认为是理论的缺点.没有可靠迹象表明宇宙常数明显不为零.但是,存在充分小的宇宙常数($|\Lambda| \leqslant 10^{-55}\mathrm{cm}^{-2}$)与观测数据或一般物理原理并不矛盾.

宇宙常数的存在使最普遍流行的宇宙模型的演化中某些阶段可能有实质性修改(见[2],第四章).在这方面,曾经提出应该用含宇宙常数的宇宙模型来解释类星体分布的某些性质(见[3],[4],[5]).

引力场方程中的Λg_{ij}项可以合并到真空的能量动量张量中(见[2]).在这种情况,真空具有能量密度$\varepsilon = c^4\Lambda/8\pi G$和压强$p = -c^4\Lambda/8\pi G$,相当于态方程$p = -\varepsilon$.在含宇宙常数的理论中,非相对论近似已经表现出真空的性质.因此,含宇宙常数的理论中,点质量的引力势为(见[6],第十六章)

$$\varphi = -G\frac{m}{r} - \frac{\Lambda}{6}r^2c^2.$$

在局部 Lorentz 群的变换下,项Λg_{ij}是不变量,相当于量子场论中真空的 Lorentz 不变性原理.宇宙常数作为真空的能量密度和压强的指标这个概念,使得把宇宙常数的概念与量子场论的概念联系起来原则上成为可能.有各种公式把宇宙常数值与基本物理常数和宇宙年龄联系起来(见[2],第二十四章).

参考文献

[1] Einstein, A., *Sitzungsber. K. Preuss. Akad. Wissenschaft.*, 1917, 142-152.

[2] Зельдович, Я. Б., Новиков, И. Д., Строение и эволюция Вселенной, М., 1975 (英译本: Zel'dovich, Ya. B. and Novikov, I. D., Structure and evolution of the universe, Vol. 2. Relativistic astrophysics, 1983).

[3] Petrosian, V., Salpeter, E. and Szekeres, P., *Astrophys. J.*, **147** (1967), 1222-1226.

[4] Шкловский, И. С., 《Астрономический циркуляр》, **429** (1967).

[5] Кардашев, Н. С., 《Астрономический циркуляр》, **430** (1967).

[6] Tolman, R. C., Relativity, thermodynamics and cosmology, Clarendon Press, 1934. Д. Д. Соколов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Weinberg, S., Gravitation and cosmology, Wiley, 1972. 徐锡申 译

宇宙模型[cosmological models; космологические модели]

宇宙学的基本概念之一,科学地描述宇宙总体(我们周围浩瀚的天地万物),忽略在这方面无关紧要的细节.

宇宙模型的数学形式依赖于采用什么物理理论作为描述运动物质的基础,相应地,人们区分:广义相对论模型,Newton 模型,稳恒态模型,具有可变引力常数的模型等等.它们当中最重要的是广义相对论模型.天文学体系也可像宇宙模型这样分类:Ptolemy 体系,Copernicus 体系等等.现代宇宙模型引进物理上大体积内平均的物理性质的概念,使人们能集中注意本质细节.假设平均值是连续的和(通常是)多次可微的.这种求平均的可能性并非不言而喻的.人们可以想象一个等级式宇宙模型,其中存在尺度递增性质不同的天体.然而,有效的观测数据与这类模型并不相符.

对于广义相对论宇宙模型的求平均过程,迄今仍缺乏适当的数学基础.这里的困难在于,平均后给出同一宇宙模型的各种"微观态"构成不同的伪 Riemann 流形,甚至具有不同的拓扑结构(亦见**几何动力学**(geometro-dynamics)).

广义相对论宇宙模型(general-relativistic cosmological models)的物理基础是 Einstein 的广义相对论(有时包括带有**宇宙常数**(cosmological constant)的方案;见**相对论**(relativity theory)).广义相对论宇宙模型的数学形式是伪 Riemann 流形的整体几何.假定流形的拓扑结构必须从理论上加以预测.具有不同拓扑和不同总体性质的模型可能是局部等度规的,这一事实使得为宇宙模型选择特定拓扑结构的问题复杂化.解决关于拓扑问题的一种方法是提出附加公设,这或者根据普遍理论考虑(例如因果性原理),或者根据实验事实(例如

文献[1],第二卷,第二十四章中根据CP破坏得出的公设).构造宇宙模型通常从某个特定对称类型的假设开始,就此而论,人们区分:均匀各向同性宇宙模型,均匀各向异性宇宙模型,依此类推(见[1],第二卷,[2]).最初的广义相对论宇宙模型是A. Einstein于1917年提出的(见[3]);它是静态均匀各向同性的并包括Λ项,即宇宙常数项.随后,A. A. Friedmann发展了一个非静态均匀各向同性模型,通称Friedmann模型(Friedmann model)([4]).这个模型所预言的非静态性质在1929年被观测到(见[5]).Friedmann模型有不同的变体,依赖于所含参数的值.若物质密度ρ不大于某个临界值ρ_0,有所谓开模型(open model);若$\rho>\rho_0$,有所谓闭模型(closed model).利用适当的坐标,Friedmann宇宙模型的度规具有形式

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \left(\frac{R(t)}{R_0}\right)^2 \times$$

$$\times\left[\frac{dr^2}{1-kr^2/R_0^2}+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2)\right],$$

其中t表示时间,ρ和ρ_0是所述时刻物质的平均密度和所谓临界密度,c是光速,而r,θ和φ是坐标.这个度规又称为Robertson-Walker度规.临界密度ρ_0是时间t的某个函数,发现量$\rho-\rho_0$不变号.如果$k<0$,那么空间截面(spatial cross-section)$t=$常数是Лобачевский空间;如果$k=0$,那么它是Euclid空间(虽然宇宙模型本身不是平坦的);如果$k>0$,则得到超球面空间.函数$R(t)$(宇宙半径)由Einstein方程和物态方程确定;它在一个t值($k\leqslant 0$时)或两个t值($k>0$时)处变为零,而同时模型的平均密度,曲率和其他物理特性变为无穷.于是,人们说宇宙模型在这些点具有奇异性(singularity).取决于物态方程,人们谈到冷模型(压强$p=0$)或热模型($p=\varepsilon/3$,其中ε是能量密度).1965年,各向同性平衡辐射($T\approx 3$K)的发现(见[6])证实了热模型.不管Friedmann模型的粗糙性质,它们已经表达了宇宙结构的主要特性.关于在Friedmann模型基础上宇宙模型的进一步构造,见[1],第二卷第三章.根据Friedmann模型曾经发展了宇宙模型的小偏差演化的理论.这种演化的结果显然是形成星系团和其他天体.可用的观测数据似乎表示,用Friedmann模型描述真实宇宙可达到相当准确的程度.然而,这些数据并不能确定k的符号(看来稍较概然的是$k<0$).通过空间截面的不同因子分解(将它粘在一起的不同方式),还可获得Friedmann模型其他可能的拓扑解释.观测得的数据对这些因子分解的性质仅施加微弱限制(见[1],第二卷).逻辑一贯的理论中,宇宙模型的构造必须从选择流形——伪Riemann度规的承载形开始.然而,迄今仍没有选择流形的方法.宇宙模型的可能整体结构只有少数,以因果性原理和以CP破坏为基础(见[1],第二卷)的限制.

曾经提出过许多其他宇宙模型,特别是均匀各向异性模型(见[1],第二卷,第十八章至第二十二章,[8]).

广义相对论宇宙模型出现以前,曾隐含地假设物质的分布是各向同性的、均匀的和静态的.然而,这个假设导致所谓引力的,光度学的以及其他佯谬(无穷大引力势,无穷大光照度等等).广义相对论模型避免了这些佯谬(见[2]).关于质量分布,对某些广义相对论宇宙模型曾经得到好的Newton近似,类似于广义相对论宇宙模型中有效的那些(见[7]).这些宇宙模型也没有上述佯谬.

参考文献

[1] Зельдович, Я. Б., Новиков, И. Д., Релятивистская астрофизика, М., 1967(英译本: Zel'dovich, Ya. B. and Novikov, I. D., Relativistic astrophysics, 1-Stars and relativity; 2-Structure and evolution of the Universe, 1971-1983).

[2] Петров, А. З., Новые методы в общей теории относительности, М., 1966(英译本: Petrov, A. Z., Einstein spaces, Pergamon, 1969).

[3] Einstein, A., *Sitzungsber. K. Preuss. Akad. Wissenschaft.* (1917), 142-152.

[4] Friedmann, A. A., *Z. Phys.*, **10** (1922), 377-386.

[5] Hubble, E. P., *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **15** (1929), 168-173.

[6] Penzias, A. A. and Wilson, R. W., *Astrophys. J.*, **142** (1965), 419-421.

[7] Heckmann, O. and Schücking, E., Handbuch der Physik, Vol. 53, Berlin, 1959, 489-519.

[8] Белинский, В. А., Лифшиц, Е. М., Халатников, И. М., 《Успехи физ. наук》, **102** (1970), 3, 463-500.

[9] Penrose, R., Structure of space-time, in C. M. DeWitt and J. A. Wheeler (eds.), Batelle Rencontres 1967 Lectures in Math. Physics, Benjamin, 1968.

Д. Д. Соколов 撰

【补注】 围绕每一点的严格球对称性意味着宇宙是空间均匀的和容许有6参数等度规群,其可递曲面是具有常曲率的类空三维曲面(见[A1],[A2]).这个宇宙具有上述Robertson-Walker度规.围绕每一点的球对称性这个意外强的要求是由于这里想造成有观测对称性(observational symmetry)(例如微波背景)这一事实.观测涉及过去零锥而非可递三维曲面.具有宇宙常数为零与密度和压强为非负的所有膨胀的Friedmann模型,在过去包含一个奇点("大爆炸").过去零锥停止在该奇点,而没有覆盖宇宙中全部物质.在我们的"视界"以内来看物质才是可能的.观测到的各向同性对于视界

以外的物质没有任何断言.

长期以来,人们认为初始奇点是强加对称性的结果,但S. W. Hawking和R. Penrose最近提出的一些定理指出,许多宇宙模型中都必然存在某个初始奇点,而不管对称性(见[A2],第八章).因为这个奇点和结局视界,来自天空远隔两点的微波背景没有因果联系(即不具有重叠的过去零锥).这造成了使人感到意外的事情,温度在各处终止于同一值.暴胀模型给出这个"视界问题"的一个解.这是超高温(~10^{25}K)下物质和真空具有物理上特定物态方程的一个Friedmann模型.在这个机制中预期有相变,其中真实真空表现为负压环境下迅速膨胀着的泡.相变期间宇宙和视界指数式地膨胀(因此暴胀).目前可见宇宙仅是一个相变泡的很小分数,它以一个大边缘拟合于暴胀视界的内部.还有其他长期存在的问题,在这个模型中求得其自然解.对于物理导引,见[A3];对于更严格的讨论,见[A4].

文献中曾经考虑过许多其他的宇宙模型.关于Bianchi类型Ⅰ—Ⅸ模型的讨论,见[A5],第十一章.文献[A6]中可以找到几乎所有已知模型.

参考文献

[A1] Walker, A. G., Completely symmetric spaces, *J. London Math. Soc.*, **19** (1944), 219−226.

[A2] Hawking, S. W. and Ellis, G. F. R., The large scale structure of space-time, Cambridge Univ. Press, 1973.

[A3] Guth, A. H. and Steinhardt, P. J., *Scientific American*, **May** (1984), 90−102.

[A4] Gibbons, G. W., Hawking, S. W. and Siklos, S. T. C. (eds.), The very early universe, Cambridge Univ. Press, 1983.

[A5] Hawking, S. W. and Israel, W. (eds.), General relativity, Cambridge Univ. Press, 1979.

[A6] Kramer, D., Stephani, H., MacCallum, M. and Herlt, E., Exact solutions of Einstein's field equations, Cambridge Univ. Press, 1980.

[A7] Weinberg, S., Gravitation and cosmology, Wiley, 1972.

[A8] Landberg, P. T. and Evans, D. A., Mathematical cosmology, Oxford Univ. Press, 1977.

徐锡申 译

余切 [cotangent; котангенс]

三角函数(trigonometric functions)之一:

$$y = \operatorname{cotan} x = \frac{\cos x}{\sin x};$$

另一些表示法是 $\cot x$, $\operatorname{cotg} x$ 和 $\operatorname{ctg} x$. 其定义域是除去横坐标为 $x=\pi n (n=0,\pm 1, \pm 2,\cdots)$ 的点以外的整个实轴. 余切是无界奇周期函数(周期为 π). 在余切和正切之间存在关系式

$$\operatorname{cotan} x = \frac{1}{\tan x}.$$

余切的反函数称为反余切(arccotangent). 余切的导数是

$$(\operatorname{cotan} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}.$$

余切的积分是

$$\int \operatorname{cotan} x \, dx = \ln|\sin x| + C.$$

余切的级数展开是

$$\operatorname{cotan} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \cdots, \quad 0<|x|<\pi.$$

复自变量 z 的余切是亚纯函数, 具有极点 $z=\pi n$, $n=0,\pm 1, \pm 2\cdots$. Ю. А. Горьков 撰

【补注】 亦见**正切曲线**(tangent, curve of the); **正弦**(sine); **余弦**(cosine). 张鸿林 译

Cotes 公式 [Cotes formulas; Котеса формулы]

由被积函数在有限多个等距点处的值近似计算定积分的公式,即具有等距插值点的求积公式(quadrature formula). Cotes 公式为

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} f\left(\frac{k}{n}\right), \quad n=1,2,\ldots \qquad (*)$$

诸数 $a_k^{(n)}$ 通称为 Cotes 系数(Cotes coefficients); 它们依据当 $f(x)$ 为次数不高于 n 的多项式时公式(*)能精确成立这样的条件而确定.

该公式是R. Cotes (1722)提出的, I. Newton考虑了它的更一般的形式. 见 **Newton-Cotes 求积公式**(Newton-Cotes quadrature formula). БСЭ-3

【补注】 Cotes 逝世后,[A2]中发表了Cotes公式.这些公式在西方文献中通称为Newton-Cotes公式(Newton-Cotes formulas).[A1],[A3],[A4]中载有关于它们的详细分析.

参考文献

[A1] Brass, H., Quadraturverfahren, Vandenhoek & Ruprecht, 1977.

[A2] Cotes, R., Harmonia mensurarum, 1722. Published by R. Smith after Cotes' death.

[A3] Davis, P. J. and Rabinowitz, P., Methods of numerical integration, Acad. Press, 1984.

[A4] Engels, H., Numerical quadrature and cubature, Acad. Press, 1980.

李家楷 译

可数集 [countable set; счетное множество]

与自然数集具有相同基数的集合. 例如,有理数集,代数数集.

М. И. Войцеховский 撰 张鸿林 译

可数加性集函数 [countably - additive set function ; счетноаддитивная функция множеств]

定义在集合 M 的子集的代数 Σ 上且满足以下性质的加性**集函数**(set function):对 Σ 中任意可数个互不相交的 集合 E_i,使得

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i).$$

М. И. Войцеховский 撰 王斯雷 译

可数紧空间 [countably - compact space ; счетнокомпактное пространство]

一个拓扑空间,从其任意可数开覆盖中均可选出有限子覆盖. М. И. Войцеховский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Arkhangel'skiĭ, A. V. and Ponomarev, V. I., Fundamentals of general topology: problems and exercises, Reidel, 1984 (译自俄文). 方嘉琳 译

可数赋范空间 [countably - normed space ; счетнонормированное пространство]

由相容范数(compatible norms) $\|\cdot\|_1, \cdots, \|\cdot\|_n, \cdots$ 的可数集来定义其拓扑的局部凸空间, 这里 $\|\cdot\|_p$ 与 $\|\cdot\|_q$ 相容是指如果序列 $\{x_n\}\subset X$ 是按这两个范数的基本序列,且按其中一个范数趋于零,那么它也按另一个范数趋于零. 范数序列 $\{\|\cdot\|\}$ 可由非减范数序列(即当 $p<q$ 时有 $\|\cdot\|_p \leqslant \|\cdot\|_q$)来代替,后者以零邻域基 $U_{p,\varepsilon}=\{x\in X: \|x\|_p<\varepsilon\}$ 生成同样的拓扑. 可数赋范空间是可距的,其距离可定义为

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{\|x-y\|_n}{1+\|x-y\|_n}.$$

在单位圆盘 $|z|<1$ 中解析的整函数的空间是可数赋范空间的例子,其拓扑取为在该圆盘的任何闭子集上的一致收敛拓扑,而范数的集合为 $\|x(z)\|_n=\max_{|z|\leqslant 1-1/n}|x(z)|$ 全体.

参考文献

[1] Гельфанд, И. М., Шилов, Г. Е., Пространства основных и обобщенных функций, М., 1958 (中译本: И.М. 盖尔芳特、Г.Е.希洛夫, 广义函数, Ⅱ, 基本函数和广义函数的空间, 科学出版社, 1985).

В. И. Соболев 撰 史树中 译

可数零维空间 [countably zero - dimensional space ; счетномерное пространство]

一个正规空间 X, 它能表示成维数 $\dim X_i\leqslant 0$ 的子空间 X_i 的并 $X=\bigcup_{i=1}^{\infty}X_i$ 的形式.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 如果 X 是可度量化空间, 则它的可数零维性等价于它是可数维的,即是可数多个有限维子空间的并. 方嘉琳 译

Courant - Friedrichs - Lewy 条件 [Courant - Friedrichs - Lewy condition ; Куранта - Фридрихса - Леви условие]

无穷可微系数类差分格式稳定性的必要条件. 设 $\Omega(P)$ 是解的值 $u_h(P)$ 关于某一个系数(特别,它可以是初始条件)的依赖域,并且设 $\Omega_h(P)$ 是相应的差分方程解的值 $u_h(P)$ 的依赖域. $u_h(P)$ 收敛到 $u(P)$ 的必要条件是,当网格步长 h 缩小时差分方程的依赖域包含微分方程的依赖域:

$$\Omega(P) \subset \overline{\lim_{h\to 0}}\,\Omega_h(P).$$

参考文献

[1] Courant, R., Friedrichs, K. O. and Lewy, H., Ueber die partiellen Differenzgleichungen der mathematische physik, *Math Ann.*, **100** (1928), 32-74.

[2] Годунов, С. К., Рябенький, В. С., Разностные схемы М., 1973 (英译本: Godunov, S. K. and Ryaben'kiĭ, V. S., The theory of difference schemes, North-Holland, 1964).

Н. С. Бахвалов 撰

【补注】 Courant - Friedrichs - Lewy 条件对于双曲型方程的显式差分格式的收敛性和稳定性来说是本质的,参看[A1]-[A5]. 参考文献[A2]是[1]的英文译文.

参考文献

[A1] Courant, R. and Friedrichs, K. O., Supersonic flow and shock waves, Interscience, 1948 (中译本: R. 柯朗, K. O. 弗里德里克斯,超音速流与冲击波,科学出版社,1986).

[A2] Courant, R., Friedrichs, K. O. and Lewy, H., On the partial difference equations of mathematical physics, Nyo-7689, Inst. Math. Sci. New York Univ., 1956 (译自德文).

[A3] Forsythe, G. E. and Wasow, W. R., Finite difference methods for partial differential equations, Wiley, 1960 (中译本: G. E. 福雪斯, W. R. 华沙, 偏微分方程的有限差分方法,上海科学技术出版社, 1964).

[A4] Mitchell, A. R. and Griffiths, D. F., The finite difference method in partial equations, Wiley, 1980.

[A5] Richtmeyer, R. D. and Morton, K. W., Difference methods for initial Value problems, Wiley, 1967.

李荫藩 译

Courant 数 [Courant number ; Курант]

研究一维双曲型偏微分方程(组)的差分格式时所使用的一个术语．假如 τ 是关于时间 t 的网格步长，h 是关于空间 x 的网格步长，λ 是特征线的最大倾斜度，则差分格式的 Courant 数就等于 $\lambda\tau/h$.

参考文献

[1] Годунов, С. К., Рябенький, В. С., Разностные схемы, М., 1973(英译本: Godunov, S. K. and Ryaben'kii, V. S., The theory of difference Schemes, North-Holland, 1964).

Н. С. Бахвалов 撰

【补注】 Courant 数在 **Courant-Friedrichs-Lewy 条件**(Courant-Friedrichs-Lewy condition)中起作用．参考文献在该条目中给出．

李荫藩 译

Courant 定理 [Courant theorem; Куранта теорема]，关于可变边界区域共形映射的

设 $\{D_n\}$ 是复 z 平面中的单连通区域套序列，$\overline{D}_{n+1}\subset D_n$，$\{D_n\}$ 收敛于其关于某点 z_0 的核 D_{z_0}；假定集合 D_{z_0} 由一条 Jordan 曲线围成，则由 D_n 到圆盘 $\Delta=\{w:|w|<1\}$ 且满足 $f_n(z_0)=0$, $f_n'(z_0)>0$ 的共形映射 $w=f_n(z)$ 所组成的函数序列 $\{w=f_n(z)\}$ 在闭区域 $\overline{D}_{z_0}$ 中一致收敛于函数 $w=f(z)$，该函数把 D_{z_0} 共形映射成 Δ 且满足 $f(z_0)=0$, $f'(z_0)>0$.

此定理出自 R. Courant [1]，是 **Carathéodory 定理**(Carathéodory theorem)的推广．

参考文献

[1A] Courant, R., *Gott. Nachr.* (1914), 101-109.

[1B] Courant, R., *Gott. Nachr.* (1922), 69-70.

[2] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, т. 2, М., 1968(中译本: А. И. 马库雪维奇，解析函数论，高等教育出版社，1957).

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 关于"区域列的核"的定义见 **Carathéodory 定理**(Carathéodory theorem)．

杨维奇 译

Cousin 问题 [Cousin problems; Кузена проблемы]

因 P. Cousin([1])而命名的一些问题，他首先对复 n 维空间 $\mathbf{C}^n$ 中的某些简单区域解答了这些问题．

第一(加性)Cousin 问题(first (additive) Cousin problem)．命 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}$ 为复流形 M 的一开覆盖，它由开子集 U_α 构成，在每个 U_α 中确定一个亚纯函数 f_α；假设对所有的 α, β，函数 $f_{\alpha\beta}=f_\alpha-f_\beta$ 在 $U_{\alpha\beta}=U_\alpha\cap U_\beta$ 上全纯(相容性条件(compatibility condition))．现要求构造一函数 f，它在整个流形 M 上是亚纯的，并使得对所有的 α，函数 $f-f_\alpha$ 在 U_α 是全纯的．换言之，这个问题是要构造一具有局部指定的极奇性的整体亚纯函数．

定义在 $\mathscr{U}$ 的两两交集元素 $U_{\alpha\beta}$ 中的函数 $f_{\alpha\beta}$ 定义了 $\mathscr{U}$ 的一全纯 1 上循环，即对所有 α, β, γ 满足条件

$$f_{\alpha\beta}+f_{\beta\alpha}=0\text{，在 }U_{\alpha\beta}\text{ 中，}\tag{1}$$
$$f_{\alpha\beta}+f_{\beta\gamma}+f_{\gamma\alpha}=0\text{，在 }U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma\text{ 中，}$$

一个更一般的问题(称为在上同调表述下的第一 Cousin 问题)是下面所述的．在交集 $U_{\alpha\beta}$ 上给定满足上循环条件(1)的全纯函数 $f_{\alpha\beta}$ 要求找在 U_α 中全纯的函数 h_α，使得对所有的 α, β

$$f_{\alpha\beta}=h_\beta-h_\alpha\tag{2}$$

如果 $f_{\alpha\beta}$ 对应于第一 Cousin 问题的数据和上述函数 h_α 存在，那么函数

$$f=\{f_\alpha+h_\alpha\text{ 在 }U_\alpha\text{中}\}$$

在整个 M 上是确定的，是亚纯的，而且是第一 Cousin 问题的一个解．反之，如果 f 是具有数据 $\{f_\alpha\}$ 的第一 Cousin 问题的一个解，那么全纯函数 $h_\alpha=f-f_\alpha$ 满足(2)．因此，一个特殊的第一 Cousin 问题是可解的，当且仅当相应的上循环是一全纯上边缘(即满足条件(2))．

第一 Cousin 问题可表述为局部形式．层 $\mathscr{M}/\mathscr{O}$ 的唯一确定的整体截面对应于每一组满足相容性条件的数据 $\{U_\alpha, f_\alpha\}$，其中 $\mathscr{M}$ 和 $\mathscr{O}$ 分别是亚纯和全纯函数的芽层；这个对应使得 $\mathscr{M}/\mathscr{O}$ 的任何整体截面都对应于某个第一 Cousin 问题(相应于数据 $\{f_\alpha\}$ 的截面 κ 在点 $z\in U_\alpha$ 的值是 $\mathscr{M}_z/\mathscr{O}_z$ 中以 f_α 为代表的那个元素)．整体截面的映射 $\varphi:\Gamma(\mathscr{M})\to\Gamma(\mathscr{M}/\mathscr{O})$ 映 $\mathscr{M}$ 上的每一亚纯函数 f 到 $\mathscr{M}/\mathscr{O}$ 的截面 κ_f 中，其中 $\kappa_f(z)$ 是 $\mathscr{M}_z/\mathscr{O}_z$ 中 f 在点 $z(z\in M)$ 的芽的类．于是局部化第一 Cousin 问题(localized first Cousin problem)为：给定层 $\mathscr{M}/\mathscr{O}$ 的整体截面 κ，要找 M 上的一亚纯函数 f(即 $\mathscr{M}$ 的一截面)使得 $\varphi(f)=\kappa$.

关于第一 Cousin 问题的可解性定理可以看作构造一具有给定极点的亚纯函数的 **Mittag-Leffler 定理**(Mittag-Leffler theorem)的多维推广．这个问题的上同调表述是，对一固定的覆盖 $\mathscr{U}$，问题是可解的(对任意相容的 $\{f_\alpha\}$)，当且仅当 $H^1(\mathscr{U},\mathscr{O})=0$($\mathscr{U}$ 的具有全纯系数的 Čech 上同调是平凡的)．

M 上特殊的第一 Cousin 问题可解当且仅当 $\mathscr{M}/\mathscr{O}$ 的相应的截面属于映射 φ 的象．M 上任意的第一 Cousin 问题可解当且仅当 φ 是满射的．在任一复流形 M 有正合序列

$$\Gamma(\mathscr{M})\xrightarrow{\varphi}\Gamma(\mathscr{M}/\mathscr{O})\to H^1(M,\mathscr{O}).$$

如果 M 的系数在 $\mathscr{O}$ 内的 Čech 上同调是平凡的(即 $H^1(M,\mathscr{O})=0$)，那么 φ 是满射的并且对 M 的任一覆盖 $\mathscr{U}$，$H^1(\mathscr{U},\mathscr{O})=0$．因此，如果 $H^1(M,\mathscr{O})=0$，任何第一 Cousin 问题在 M 上可解(在经典的，上同调的和局

部的形式下)．特别在所有全纯域和 Stein 流形上，问题可解(见 **Stein 流形** (Stein manifold))．如果 $D\subset\mathbf{C}^2$，那么第一 Cousin 问题在 D 中可解当且仅当 D 是一全纯域．一个不可解的第一 Cousin 问题的例子是: $M=\mathbf{C}^2\setminus\{0\}$, $U_\alpha=\{z_\alpha\neq 0\}$, $\alpha=1, 2$, $f_1=(z_1z_2)^{-1}$, $f_2=0$.

第二(乘性) Cousin 问题 (second (multiplicative) Cousin problem)．给定复流形 M 的开覆盖 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}$ 以及在每一 U_α 中的一亚纯函数 f_α，它在 U_α 的每一分支上 $f_\alpha\not\equiv 0$，假设对所有的 α, β 函数 $f_{\alpha\beta}=f_\alpha f_\beta^{-1}$ 在 $U_{\alpha\beta}$ 中全纯且无处为零(相容性条件 (compatibility condition))．要求构造 M 上的一亚纯函数 f 使得函数 ff_α^{-1} 对所有 α 在 U_α 中全纯并且无处为零．

第二 Cousin 问题的上同调表述如下所述．给定覆盖 $\mathscr{U}$ 和函数 $f_{\alpha\beta}$，它在交集 $U_{\alpha\beta}$ 中全纯且无处为零，并且形成一积性 1 上循环，即

$$f_{\alpha\beta}f_{\beta\alpha}=1, \text{在 } U_{\alpha\beta} \text{ 中},$$

$$f_{\alpha\beta}f_{\beta\gamma}f_{\gamma\alpha}=1 \text{ 在 } U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma \text{ 中},$$

要求找一列函数 h_α 在 U_α 中全纯并无处为零，使得对所有的 α, β 在 $U_{\alpha\beta}$ 中 $f_{\alpha\beta}=h_\beta h_\alpha^{-1}$．如果上循环 $\{f_{\alpha\beta}\}$ 对应于第二 Cousin 问题的数据以及所要求的 h_α 存在，那么函数 $f=\{f_\alpha h_\alpha$ 在 U_α 中$\}$ 在整个 M 上是确定的，是亚纯的，而且是给定第二 Cousin 问题的一个解．反之，如果一特殊的第二 Cousin 问题是可解的，那么相应的上循环是一全纯上边缘．

局部化第二 Cousin 问题 (localized second Cousin problem)．层 $\mathscr{M}^*/\mathscr{O}^*$ 的唯一确定的整体截面对应于第二 Cousin 问题的每一组数据 $\{U_\alpha, f_\alpha\}$ (类似于第一 Cousin 问题)，其中 $\mathscr{M}^*=\mathscr{M}\setminus\{0\}$ (0 是零截面)是亚纯函数的芽的积性层，而 $\mathscr{O}^*$ 是 $\mathscr{O}$ 的这样子层，使得 $\mathscr{O}^*$ 的每一茎 $\mathscr{O}_z^*$ 是由在 z 不为零的全纯函数的芽组成的．整体截面的映射

$$\Gamma(\mathscr{M}^*)\xrightarrow{\psi}\Gamma(\mathscr{M}^*/\mathscr{O}^*)$$

将亚纯函数 f 映射到层 $\mathscr{M}^*/\mathscr{O}^*$ 的一截面 κ_f^*，其中 $\kappa_f^*(z)$ 是 $\mathscr{M}_z^*/\mathscr{O}_z^*$ 中 f 在 $z(z\in M)$ 的芽的类．局部第二 Cousin 问题是: 给定层 $\mathscr{M}^*/\mathscr{O}^*$ 的整体截面 κ^*，要找 M 上的亚纯函数 f，它在 M 的分量(即 $\mathscr{M}^*$ 的一整体截面)上 $f\not\equiv 0$，使得 $\psi(f)=\kappa^*$.

M^*/Q^* 的截面唯一地对应于除子 (divisor)，所以 $\mathscr{M}^*/\mathscr{O}^*=\mathscr{D}$ 称为除子的芽层 (sheaf of germs of divisors)．一复流形 M 上的除子是一形式局部有限和 $\sum k_j\Delta_j$，其中 k_j 是整数而 Δ_j 是纯余维数为 1 的 M 的解析子集．与每一亚纯函数 f 相对应的是这样的除子，它的项是 f 的带有各自重数 k_j 的零点集和极点集的不可约分支，这里零点的重数看成是正的而极点的重数看成是负的．映射 ψ 映每一函数 f 到它的除子 (f); 这样的除子称为真除子 (proper divisors)．用除子表述的第二 Cousin 问题是: 给定流形 M 上的一除子 Δ，要构造 M 上的一亚纯函数 f 使得 $\Delta=(f)$.

关于第二 Cousin 问题的可解性的定理可以看作构造一具有给定零点和极点的亚纯函数的 Weierstrass 定理在多维的拓广．象第一 Cousin 问题的情形一样，任何第二 Cousin 问题在上同调形式下可解的充分必要条件是 $H^1(M, \mathscr{O}^*)=0$．可惜的是层 $\mathscr{O}^*$ 不是凝聚的，且这个条件不很有效．有人试图用取对数的方法将给定的第二 Cousin 问题化为第一 Cousin 问题，但遇到一个形式为一整 2 上循环的障碍，并且得到一个正合序列

$$H^1(M, \mathscr{O})\to H^1(M, \mathscr{O}^*)\xrightarrow{\alpha}H^2(M, \mathbf{Z}),$$

其中 $\mathbf{Z}$ 是整数常层．因此，如果 $H^1(M, \mathscr{O})=H^2(M, \mathbf{Z})=0$，那么在 M 上的任何第二 Cousin 问题是可解的，并且任何除子是真的．如果 M 是一 Stein 流形，那么 α 是一同构; 因此在 Stein 流形 M 上拓扑条件 $H^2(M, \mathbf{Z})=0$ 是第二 Cousin 问题在上同调形式下可解的充分必要条件．复合映射 $c=\alpha\circ\beta$

$$\Gamma(\mathscr{D})\xrightarrow{\beta}H^1(M, \mathscr{O}^*)\xrightarrow{\alpha}H^2(M, \mathbf{Z})$$

映每一除子 Δ 到群 $H^2(M, \mathbf{Z})$ 的一元素 $c(\Delta)$，它就是所谓 Δ 的陈(省身)类 (Chern class)．对应于除子 Δ 的特殊第二 Cousin 问题对 $H^1(M, \mathscr{O})=0$ 可解的充分必要条件是 Δ 的陈类是平凡的: $c(\Delta)=0$．在 Stein 流形上，映射 c 是满射的; 而且对具有正重数 k_j 的某除子 Δ．$H^2(M, \mathbf{Z})$ 中的每一元素可以表为 $c(\Delta)$ 的形式．因此在 Stein 流形 M 上解第二 Cousin 问题的障碍完全由群 $H^2(M, \mathbf{Z})$ 描述．

例 1) $M=\mathbf{C}^2\setminus\{z_1=z_2, |z_1|=1\}$; 第一 Cousin 问题是不可解的; 第二 Cousin 问题是不可解的，例如对具有重数 1 的除子 $\Delta=M\cap\{z_1=z_2, |z_1|<1\}$.

2) $M=\{|z_1^2+z_2^2+z_3^2-1|<1\}\subset\mathbf{C}^3$，$\Delta$ 是 M 和具有重数 1 的平面 $z_2=iz_1$ 的交集的一个分支，第二 Cousin 问题是不可解的 (M 是一全纯域，第一 Cousin 问题是可解的)．

3) 第一和第二 Cousin 问题在区域 $D=D_1\times\cdots\times D_n\subset\mathbf{C}^n$ 是可解的，其中 D_j 是平面区域，且所有 D_j (可能有一个除外)都是连通的．

参考文献

[1] Cousin, P., Sur les fonctions de n variables, *Acta Math.*, 19(1895), 1–62.

[2] Шабат, Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 2, М., 1976.

[3] Gunning, R. C. and Rossi, H., Analytic functions of several complex variables, Prentice-Hall, 1965.

Е. М. Чирка 撰

【补注】 Cousin 问题与 **Poincaré 问题** (Poincaré problem)(给定在一复流形 X 上的整体亚纯函数,它是否为两全纯函数的商,使得它们的芽对所有 $x\in X$ 是互素的?)有关,并且与更多代数的 H. Cartan 和 J.-P. Serre 的定理 A 与定理 B 有关,见[A1],[A2],[A3].

参考文献

[A1] Cazacu, C.A., Theorie der Funktionen mehreren komplexer Veränderlicher, Birkhäuser, 1975(译自俄文).

[A2] Grauert, J.and Remmert, R., Theory of Stein spaces, Springer, 1979(译自德文).

[A3] Hörmander, L., An introduction to complex analysis in several variables, Noth - Holland, 1973.

[A4] Krantz, S. G., Function theory of several complex variables, Wiley, 1982. Chapt. 6.

[A5] Range, R. M., Holomorphic functions and integral representations in several complex variables, Springer, 1986. Chapt. 6.

钟同德 译

协方差 [covariance; ковариация]

两随机变量的联合分布的数字特征,等于这两随机变量与其数学期望之差的积的数学期望. 协方差对具有有限方差的随机变量 X_1 和 X_2 有定义且记为 $\mathrm{cov}(X_1, X_2)$. 这样,

$$\mathrm{cov}(X_1, X_2) = \mathsf{E}[(X_1-\mathsf{E}X_1)(X_2-\mathsf{E}X_2)],$$

因而 $\mathrm{cov}(X_1, X_2)=\mathrm{cov}(X_2, X_1)$; $\mathrm{cov}(X, X)=\mathsf{D}X=\mathrm{var}(X)$. 协方差在表达两随机变量之和的方差时出现:

$$\mathsf{D}(X_1+X_2) = \mathsf{D}X_1+\mathsf{D}X_2+2\,\mathrm{cov}(X_1, X_2).$$

若 X_1, X_2 为独立随机变量,则 $\mathrm{cov}(X_1, X_2)=0$. 协方差给予随机变量的相依性一个刻画;**相关系数**(correlation coefficient)通过协方差去定义. 为在统计上估计协方差,人们使用样本协方差,它由公式

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_1^{(i)}-\overline{X}_1)(X_2^{(i)}-\overline{X}_2)$$

计算. 这里 $(X_1^{(i)}, X_2^{(i)})$ $(i=1,\cdots,n)$ 是独立随机变量,而 $\overline{X}_1$ 和 $\overline{X}_2$ 是其算术平均. A. B. Прохоров 撰

【补注】 在西方文献中,代替 $\mathsf{D}(X)$,人们总用 $V(X)$ 或 $\mathrm{var}(X)$ 来表示方差. 陈希孺 译

协方差分析 [covariance analysis; ковариационный анализ]

数理统计学中的一些方法的汇集. 这些方法涉及到下述模型的分析:某随机变量 Y 的均值依赖于一组非数量因子 F,同时也依赖于一组数量因子 x. 变量 x 称为相对于 Y 的相伴变量(concomitant variables). 因子 F 定义一组定性的条件,Y 和 x 的观察值即在这组条件下获得. 这组条件用所谓指示变量(indicator variables)来描述,相伴变量和指示变量可以是随机的,也可以是非随机的(在试验中受控的). 若 Y 为随机向量,则上述就成为多元协方差分析.

协方差分析中的基本理论和应用问题,与线性模型有关. 例如,若所分析的模型包含 n 个观察值 $Y_1,\cdots,Y_n$ 及 p 个相伴变量和 k 种类型的试验条件. 则相应的协方差分析的线性模型由方程

$$Y_i = \sum_{j=1}^{k} f_{ij}\theta_j+\sum_{s=1}^{p}\beta_s(F_i)x_i^{(s)}+\varepsilon_i(F_i), \qquad (*)$$

$$i = 1,\ldots,n$$

来定义. 这里,若在观察 Y_i 时用了第 j 种试验条件,则指示变量 f_{ij} 等于 1,否则为 0. 系数 θ_j 度量了第 j 种条件的影响. $x_i^{(s)}$ 是在获得 Y_i 时相伴变量 $x^{(s)}$ 所取之值 $(i=1,\cdots,n; s=1,\cdots,p)$; $\beta_s(F_i)$ 是相应的 Y 对 $x^{(s)}$ 的回归系数值,一般来说它依赖于试验条件的具体组合,即依赖于 $F_i=(f_{i1},\cdots,f_{ik})$; $\varepsilon_i(F_i)$ 是具有零均值的随机误差. 协方差分析的主要内容,是为未知参数 $\theta_1,\cdots,\theta_k;\beta_1,\cdots,\beta_p$ 构造统计估计量,以及为检验有关这些参数值的种种假设的统计准则.

如果在模型(*)中事先假定 $\beta_1=\cdots=\beta_p=0$,则得到一个**离差分析**(dispersion analysis)的模型;如果在模型(*)中排除非数量因子的影响(令 $\theta_1=\cdots=\theta_k=0$),则得到一个**回归分析**(regression analysis)模型."协方差分析"这个术语所指的是这样一个事实:在这一分析所涉及的计算中,人们用到 Y 和 X 的协方差的分解,正如在散布分析中对 Y 的离差平方和进行分解那样.

参考文献

[1] Scheffé, H., The analysis of variance, Wiley, 1959.

[2] Kendall, M. G. and Stuart, A., The advanced theory of statistics. Design and analysis, and time series, 3, Griffin, 1983.

[3] *Biometrics*, 13 (1957), 3, Special issue devoted to the analysis of covariance.

C. A. Айвазян 撰

【补注】 相伴变量也称为共变量(covariants). 而人们更常用方差分析(analysis of variance)一词去取代离差分析. 陈希孺 译

协方差阵 [covariance matrix; ковариационная матрица]

若干个随机变量,成对取其协方差,所构成的矩阵. 更确切地,k 维向量 $X=(X_1,\cdots,X_k)$ 的协方差阵为方阵 $\Sigma=\mathsf{E}[(X-\mathsf{E}X)(X-\mathsf{E}X)^T]$, 这里 $\mathsf{E}X=(\mathsf{E}X_1,\cdots,\mathsf{E}X_k)^T$ 是均值向量. 协方差阵的分量是

$$\sigma_{ij} = \mathsf{E}[(X_i-\mathsf{E}X_i)(X_j-\mathsf{E}X_j)] = \mathrm{cov}(X_i, X_j),$$

$$i, j = 1,\ldots,k,$$

而当 $i=j$ 时,它与 $\mathsf{D}X_i(=\mathrm{var}(X_i))$ 相同(即 X_i 的方差位

于主对角线上)．协方差阵是一个对称半正定阵．若协方差阵为正定的，则 X 的分布为非退化的；否则为退化的．对随机向量而言，协方差阵的作用，正如随机变量的方差．如果随机变量 $X_1,\cdots,X_k$ 的方差都是 1，则 $X=(X_1,\cdots,X_k)$ 的协方差阵与其**相关阵** (correlation matrix) 相同．

样本 $X^{(1)},\cdots,X^{(n)}$ 的样本协方差阵，由方差和协方差的估计量构成：

$$S = \frac{1}{n-1}\sum_{m=1}^{n}(X^{(m)}-\overline{X})(X^{(m)}-\overline{X})^T,$$

这里 $X^{(m)}$ $(m=1,\cdots,n)$ 是独立同分布的 k 维随机向量，而 $\overline{X}$ 是 $X^{(1)},\cdots,X^{(n)}$ 的算术平均．如果 $X^{(1)},\cdots,X^{(n)}$ 的分布是具协方差阵 Σ 的多维正态分布，则 $S(n-1)/n$ 是 Σ 的最大似然估计量；在这一场合，矩阵 $(n-1)S$ 各元的联合分布称为 **Wishart 分布** (Wishart distribution)．它是多元统计分析中的基本分布之一，借助于它可检验有关协方差阵 Σ 的假设． A. B. Прохоров 撰 陈希孺 译

解数的协方差 [covariance of the number of solutions ; ковариация числа решений]

在**离差法** (dispersion method) 中为了比较方程

$$n = \varphi + D'\nu \qquad (1)$$

及

$$n = \psi + D'\nu \qquad (2)$$

的解数而引入的一个概念，其中 φ 和 ψ 属于某个正整数序列，D' 在区间

$$(D) = [D_1, D_1 + D_2]$$

上的一组给定的整数上取值，而 ν 在区间

$$(\nu) = [\nu_0, \nu_0 + \nu_0']$$

上的一组整数上取值．令

$$U_1(m) = \sum_{\phi=m} 1,\quad U_2(m) = \sum_{\psi=m} 1,$$

则 (1) 与 (2) 的解数的差之离差即为

$$V' = \sum_{D'\in(D)}\left[\sum_1{}' - \sum_2{}'\right]^2,$$

其中

$$\sum_1{}' = \sum_{\nu\in(\nu)} U_1(n-D'\nu),\quad \sum_2{}' = \sum_{\nu\in(\nu)} U_2(n-D'\nu).$$

利用 И. М. Виноградов 关于二重和的光滑化思想，可以把对 D' 的求和扩展为对 (D) 中所有的 D 求和．这只会增大离差，故有

$$V' \leqslant V = V_1 - 2V_2 + V_3,$$

其中

$$V_1 = \sum_{D\in(D)}(\textstyle\sum_1)^2,$$

$$V_3 = \sum_{D\in(D)}(\textstyle\sum_2)^2,$$

$$V_2 = \sum_{D\in(D)}(\textstyle\sum_1\sum_2);$$

这里

$$\sum_1 = \sum_{\nu\in(\nu)} U_1(n-D\nu),$$

$$\sum_2 = \sum_{\nu\in(\nu)} U_2(n-D\nu).$$

与概率论中的概念相似，V_2 称为方程 (1) 与 (2) 的解数的协方差 (covariance of the number of solutions)．对 V_1、V_3 及协方差 V_2 所作的渐近估计表明，离差 V' 相对来说比较小，这一点在考虑导出方程 (1) 和 (2) 的加性问题时至关重要．

参考文献

[1] Линник, Ю. В., Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах, Л., 1961 (英译本: Linnik, Yu. V., The dispersion method in binary additive problems, Amer. Math. Soc., 1963). Б. М. Бредихин 撰

【补注】 亦见**圆法** (circle method).

张明尧 译 潘承彪 校

共变变换 [covariant ; ковариант]，亦称共变或共变式有限维向量空间 V 上的张量 t 的

从 V 上由一类固定型的张量构成的空间 T 到 V 上的共变张量空间 S 内的满足 $\varphi(g(t))=g(\varphi(t))$ 的映射 φ，这里 g 是 V 上的任意非奇异线性变换且 $t\in T$ 是任意的．这是关于一般线性群 $\mathrm{GL}(V)$ 的张量共变变换的定义．如果 g 不是任意的，而属于某一特定的子群 $G\subset\mathrm{GL}(V)$，则得到相应于 G 的张量共变变换的定义，简称为 G 的共变式．

用坐标的语言来说，有限维向量空间上的张量的共变变换是一族关于张量 t 的分量的函数

$$s_i = \varphi_i(t_1,\ldots,t_n),\quad i=1,\ldots,m$$

的集合，它具有性质：当数集 $t_1,\cdots,t_n$ 在非奇异的线性变换 $g\in G$ 的作用下发生变化时，数集 $s_1,\cdots,s_m$ 依据 V 上的共变张量 s 在变换 g 下的变化而改变．用类似的方式可以定义 (此时考虑的不是单个张量 t 而是张量的有限集) 张量系的联合共变变换 (joint covariant)．如果用反变条件代替张量 s 的共变性，则可得到反变变换或反变 (contravariant) 的概念．

共变变换的概念源于经典的不变量理论，它是**相伴变

换(comitant)概念的特殊情形.任意张量的分量可以看作是对应于一些反变向量和共变向量(即 V 及其对偶 V^* 的向量,参见条目**向量空间上的张量**(tensor on a vector space)中的"对应于张量的型")特定型的系数.设型 f 以这种方式对应于张量 t,型 h 对应于它的共变变换 s,这时 h 只是反变向量的型.在经典的不变量理论中,h 称为 f 的共变变换、特别经常考虑的情形是 h 为单个反变向量的型.这种型的次数称为共变变换的阶(order of the covariant).如果 h 的系数都是 f 系数的多项式,则这些多项式的最高次数称为共变变换的次数(degree of the covariant).

例.设 $f=\sum a_{i_1\cdots i_r}x^{i_1}\cdots x^{i_r}$ 是次数为 r 的型,其中 $x^1,\cdots,x^n$ 是一个反变向量的分量.型 f 对应于一个价为 r 的具有分量 $a_{i_1\cdots i_r}$ 的对称共变张量 t.设

$$h=\frac{1}{r^n(r-1)^n}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{(\partial x^1)^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^1\partial x^n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^n\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{(\partial x^n)^2}\end{vmatrix}.$$

这时 h 的系数都是某个共变张量 s 的分量.张量 s(或型 h)是张量 t(或型 f)的共变变换.型 h 称为 f 的 Hesse 式(Hessian).

参考文献

[1] Гуревич, Г. Б., Основы теории алгебраических инвариантов, М. - Л., 1948 (英译本: Gurevich, G. B., Foundations of the theory of algebraic invariants, Noordhoff, 1964).

В. Л. Попов 撰 龚明鹏 译

共变导数 [covariant derivative; ковариантная производная]

导数概念在流形上不同几何对象的范围内的推广,这些几何对象是向量,张量,形式等.它是关于流形 M 上向量场 X 定义的,作用在具有给定指标类型的张量场 $T_s^r(M)$ 的模上的一个线性算子 ∇_X,并满足下列性质:

$$1)\ \nabla_{fX+gY}U=f\nabla_X U+g\nabla_Y U,$$

$$2)\ \nabla_X(fU)=f\nabla_X U+(Xf)U,$$

这里 $U\in T_s^r(M)$,f 和 g 是 M 上可微函数.利用直线性,这个映射被平凡地延拓到张量场代数,此外,对在不同指标类型的张量 U,V 上的作用还要求成立:

$$\nabla_X(U\otimes V)=\nabla_X U\otimes V+U\otimes\nabla_X V,$$

这里⊗表示张量积.于是,∇_X 是张量场代数上的一个导子(见**环中的导子**(derivation in a ring));它具有和张量的缩并运算(见**张量的缩并**(contraction of a tensor)),张量的斜对称化运算(见**交错**(alternation))以及张量的对称化运算(见**对称化(张量的)**(symmetrization (of tensors)))可交换的性质.

∇_X(对向量场)的性质 1)和 2)允许在 M 上引入一个线性联络(以及对应的平行移动),根据它们,可以给出共变导数的局部定义,这个共变导数延拓到整个流形上时与上面定义的算子 ∇_X 一致;也见**共变微分法**(covariant differentiation).

И. Х. Сабитов 撰

【补注】 共变导数和共变微分法之间没有多少区别,两者按相同的意义使用.

潘养廉 译

共变微分 [covariant differential; ковариантный дифференциал]

微分概念在不同几何对象范围内的推广.它是流形上取值于张量场 U 的模的一个张量 1 形式 DU,由下式定义

$$(DU)(X)=\nabla_X U,$$

这里 $\nabla_X U$ 是场 U 沿 X 的**共变导数**(covariant derivative),具体细节见**共变微分法**(covariant differentiation).

И. Х. Сабитов 撰 潘养廉 译

共变微分法 [covariant differentiation; ковариантное дифференцирование],绝对微分法(absolute differentiation).

一种运算,它以不变量的方式对流形上的几何对象场,如向量,张量,形式等等定义它们的导数和微分.共变微分法理论的基本概念是在 19 世纪末 G. Ricci 的论文中给出的(那里称为绝对微分学),而它们的最完整的形式则是在 1901 年他和 T. Levi-Civita 的合作论文中给出的(见[1]).起初,共变微分法理论是在 Riemann 流形上构造的,主要是想用来研究微分形式的不变量,后来表明共变微分法的定义和性质按一种自然的方式与以后引入的流形上**联络**(connection)和**平行移动**(parallel displacement)的概念有关,现在,共变微分法理论是在联络理论的总框架中展开的.作为张量分析的一个工具,共变微分法广泛地使用在理论物理,特别是广义相对论之中.

设在 n 维流形 M 上给定一个仿射联络以及与之有关的向量的平行移动,更一般地,张量的平行移动.设 X 是一个光滑向量场,$X_p\neq 0$,$p\in M$,U 是一个 (r,s)型,即 r 次反变 s 次共变的张量场;那么,U 在 $p\in M$ 沿 X(关于给定联络)的共变导数(covariant derivative)是指(同为 (r,s) 型的)张量

$$(\nabla_X U)_p=\lim_{t\to 0}\frac{\tau_t^{-1}(U_{x(t)})-U_p}{t},$$

这里$x(t)$是具有初始条件$x(0)=p$的向量场X的积分曲线γ_X上的点，U_p和$U_{x(t)}$分别是U在p和$x(t)$的局部(值)，而$\tau_t^{-1}(U_{x(t)})$是$U_{x(t)}$沿γ_X从$x(t)$到p的平行移动的结果.因此，在张量场U沿向量场X的共变导数的定义背后的基本想法是：由于U_p和$U_{x(t)}$之间没有自然的关系，这是因为它们属于M上张量丛不同的纤维，即它们在M的不同的切空间T_pM和$T_{x(t)}M$上的张量空间T_s^r之中；于是就用$U_p\in T_s^r(T_pM)$与$U_{x(t)}\in T_s^r(T_{x(t)}M)$沿$\gamma_X$平行移动到$T_s^r(T_pM)$的象之间的差作为$U$的"增量"；然后按通常方式取这个"增量"对自变量$t$的增量之比的极限.特别是，如果对$p$附近的点$x(t)$，场$U$是张量$U_p$沿$\gamma_X$平行移动得到的，那么$(\nabla_X U)_p=0$，因而，一般地，$U$在$p$沿$X$的共变导数确定了$U$和$U_p$沿$\gamma_X$平行移动而得的结果之差沿$\gamma_X$的初始速率.对无指标的张量场，即对$M$上可微函数环$\mathscr{F}$中的函数$f$，

$$(\nabla_X f)_p=\lim_{t\to 0}\frac{f(x(t))-f(p)}{t},$$

这就推出$(\nabla_X f)_p$与f沿向量X_p的导数X_pf是恒等的.当$X_p=0$时，按定义，对任何张量场U有$(\nabla_X U)_p=0$.

引入了共变导数，就能够将一个张量场U沿一条光滑曲线$\gamma(t)$的**共变微分**(covariant differential) DU定义为

$$(DU)_{\gamma(0)}=\left[\nabla_{\dot\gamma(t)}U\right]_{\gamma(0)}dt,$$

它可以看成点沿γ移动一个无穷小线段$d\gamma=\dot\gamma(0)\,dt$时(在前述意义上)$U$的"增量"的线性主部.

知道了(r,s)型张量场U在每一点$p\in M$沿每一个向量场X的$\nabla_X U$，就能够对U引入：1)共变微分场DU，作为取值于模$T_s^r(M)$的张量1形式，在X的向量上由公式$(DU)(X)=\nabla_X U$定义；2)共变导数场∇U，作为$(r,s+1)$型的张量场，它规范地对应于形式DU并按公式

$$(\nabla U)(\omega^1,\dots,\omega^r;X_1,\dots,X_s,X)=$$
$$=(\nabla_X U)(\omega^1,\dots,\omega^r;X_1,\dots,X_s)$$

作用在1形式ω^i和向量X_i上.就共变微分来说，通常指的不是1形式DU本身，而是它在向量X的值，按这种解释，$(DU)X$也转变成一个(r,s)型的张量场，特别是它在$p=\gamma(0)$和$X=\dot\gamma$时的值就和上面引入的沿曲线$\gamma(t)$的共变微分$(DU)_{\gamma(0)}$相同.共变导数∇U有时称为**张量U的梯度**(gradient of a tensor)或导数，共变微分.

如果x^i是局部坐标，$e_i=\partial/\partial x^i|_p$表示对应的向量场空间的基，$e^i$表示1形式空间的对偶基，$X^i$和$U^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$是向量和张量场关于这些基的坐标，$\Gamma^k_{ij}$是在流形$M$上引入的仿射联络的系数(见**线性联络**(linear connection))，那么用$\nabla_k U^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$或$U^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s,k}$表示张量场$\nabla U$的分量，就得到下面的表达式(作为例子，选取$r=2$，$s=1$)：

$$(\nabla_X U)^{i_1i_2}_j=$$
$$=\left(\frac{\partial U^{i_1i_2}_j}{\partial x_k}+\Gamma^{i_1}_{km}U^{mi_2}_j+\Gamma^{i_2}_{km}U^{i_1m}_j-\Gamma^m_{kj}U^{i_1i_2}_m\right)X^k\equiv$$
$$\equiv\nabla_k U^{i_1i_2}_j X^k;$$
$$(DU_{\gamma(t)})^{i_1i_2}_j=\nabla_k U^{i_1i_2}_j\,dx^k,$$
$$dx^k=\dot x^k\,dt,\quad \gamma(t)=\{x^k(t)\},$$
$$DU=(U^{i_1i_2}_{j,k}e_{i_1}\otimes e_{i_2}\otimes e^j)e^k,$$
$$\nabla U=U^{i_1i_2}_{j,k}e_{i_1}\otimes e_{i_2}\otimes e^j\otimes e^k,$$
$$\nabla_X U=(DU)(X)$$
$$=U^{i_1i_2}_{j,k}X^k e_{i_1}\otimes e_{i_2}\otimes e^j=C_2^3(\nabla U\otimes X),$$

这里C_2^3是关于第3个反变指标和第2个共变指标的缩并运算(见**张量的缩并**(contraction of a tensor)).

如果M是仿射空间，x^i是仿射坐标，那么$(\nabla_X U)_p$是张量场U沿向量场X的普通导数，$(\nabla_k U)_p$是U在p的关于x^k的偏导数，$(DU)_{\gamma(t)}$是U沿曲线$\gamma(t)$的普通微分.因此，共变导数表现为普通微分法的推广，我们熟知的一阶偏导数和偏微分之间的关系仍然有效.

共变微分法的价值是为研究和描述几何对象的性质和不变形式的运算，提供了方便的分析工具.例如，张量U沿曲线γ为平行移动的条件可用方程$\nabla_{\dot\gamma}U=0$给出，测地线γ的方程写成形式$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma=0$，一阶共变导数方程组的可积条件化成关于交错差$\nabla_\lambda\nabla_\mu U-\nabla_\mu\nabla_\lambda U$的方程；流形上和其上丛的形式的外微分也可用共变微分法表达；还有其他的例子.

高阶共变导数的定义是归纳地给出的：$\nabla^m U=\nabla(\nabla^{m-1}U)$.一般说来，用这种方法得到的张量$\nabla^m U$关于最后的共变指标不是对称的；沿不同的向量场的高阶共变导数也与微分的次序有关.高阶共变导数的交错差是用**曲率张量**(curvature tensor)R^i_{jkl}和**挠率张量**(torsion tensor)S^i_{jk}表达的，它们共同刻画了流形M和仿射空间之间的差异.例如，

$$\nabla_\lambda\nabla_\mu U^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}-\nabla_\mu\nabla_\lambda U^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}=$$
$$=\sum_{k=1}^r R^{i_k}_{j\lambda\mu}U^{i_1\cdots i_{k-1}ji_{k+1}\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}-$$
$$-\sum_{k=1}^s R^{i}_{j_k\lambda\mu}U^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_{k-1}ij_{k+1}\cdots j_s}-S^k_{\lambda\mu}\nabla_k U^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$$

(Ricci恒等式)；

$$\nabla_X\nabla_Y U^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}-\nabla_Y\nabla_X U^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}=$$
$$=\left(\sum_{k=1}^r R^{i_k}_{j\lambda\mu}U^{i_1\cdots i_{k-1}ji_{k+1}\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}-\right.$$

$$-\sum_{k=1}^{s} R^{i_k}_{j_k\lambda\mu} U^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_{k-1} i j_{k+1}\cdots j_s}\Bigg] X^\lambda X^\mu +$$

$$+\nabla_{[X,Y]} U^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s},$$

这里 $[X,Y]$ 是 X 和 Y 的换位子，而

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial}{\partial x^k}\Gamma^i_{lj} - \frac{\partial}{\partial x^l}\Gamma^i_{kj} + \Gamma^i_{kp}\Gamma^p_{lj} - \Gamma^p_{kj}\Gamma^i_{lp},$$

$$S^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}.$$

共变微分法的定义在更一般的情形仍然有效，这时替代具有仿射联络的张量丛的截面 U 而考虑伴随于某个**主纤维丛** (principal fibre bundle) 的具有**联络** (connection) Γ 和结构群 G 的任意(实或复的)**向量丛** (vector bundle)的一个截面 φ，这里 G 借助于非奇异矩阵群的表示作用在纤维上. 对于丛不一定是向量丛的更一般情形，共变微分法也有定义. 这些定义的共同之处([9])在于对象的平行移动的解析表达式，或者说在于用要求一个截面的共变微分等于零来定义该截面是平行的条件. 对无限维流形也有类似的处理.

参考文献

[1] Ricci, G. and Levi-Civita, T., Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications, *Math. Ann.*, **54** (1901), 125–201.

[2] Рашевский, П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, М., 1967.

[3] Норден, А. П., Пространства аффинной связности, 2 изд., М., 1976.

[4] Lichnerowicz, A., Theory of global connections and holonomy groups, Noordhoff, 1955 (译自法文).

[5] Helgason, S., Differential geometry and symmetric spaces, Acad. Press, 1962.

[6] Bishop, R. L. and Crittenden, R. J., Geometry of manifolds, Acad. Press, 1964.

[7] Gromoll, D., Klingenberg, W. and Meyer, W., Riemannsche Geometrie im Grossen, Springer, 1968.

[8] Kobayashi, S. and Nomizu, K., Foundations of differential geometry, 1–2, Interscience, 1963–1969.

[9] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1869, М., 1971, 123–168.

[10] Sulanke, R. and Wintgen, P., Differentialgeometrie und Faserbündle, Deutsch. Verlay Wissenschaft, 1972.

[11] Spivak, M., A comprehensive introduction to differential geometry, 1–5, Publish or Perish, 1970–1975.

И. Х. Сабитов 撰

【补注】 $(r, s+1)$ 型张量场 ∇U 更经常使用的名称是"共变微分"(不是像上面条目中那样用"共变导数")；也就是说，DU 和 ∇U 多少是看作相同的.

潘养廉 译

共变张量 [**covariant tensor**; **ковариантный тензор**]，价 $s \geqslant 1$ 的

$(0, s)$ 型张量，域 K 上向量空间 E 的对偶空间 E^* 的 s 重张量积 $T_s(E)=E^*\otimes\cdots\otimes E^*$ 的元素. 空间 $T_s(E)$ 本身关于同价的共变张量的加法及它们关于数量乘法构成 K 上的向量空间. 设 E 是有限维的，$e_1, \cdots, e_n$ 是 E 的基且 $e^1, \cdots, e^n$ 是对偶于它的 E^* 的基. 这时 $\dim T_s(E)=n^s$ 且形如 $e^{i_1}\otimes\cdots\otimes e^{i_s}$ 的全体张量的集合构成 $T_s(E)$ 的一组基，这里 $1\leqslant i_1, \cdots, i_s\leqslant n$. 任意共变张量可以表示成形式 $t=t_{i_1\cdots i_s}e^{i_1}\otimes\cdots\otimes e^{i_s}$. 诸数 $t_{i_1\cdots i_s}$ 称为共变张量关于 E 的基 $e_1, \cdots, e_n$ 的坐标或分量. 在 E 的基按公式 $e'_j=a^i_j e_i$ 变化且 $T_s(E)$ 的基也作相应改变的情况下，共变张量 t 的分量按所谓的共变律

$$t'_{j_1\cdots j_s} = a^{i_1}_{j_1}\cdots a^{i_s}_{j_s} t_{i_1\cdots i_s}$$

变化.

如果 $s=1$，则称此共变张量为**共变向量**(covariant vector)；当 $s\geqslant 2$ 时，共变张量按一定的方式对应于一个从直积 $E^s=E\times\cdots\times E$ (s 次)到 K 内的 s 重线性映射，它把共变张量 t 关于基 $e_1, \cdots, e_n$ 的分量取为 s 重线性映射 $\tilde{t}$ 在 E^s 中基向量$(e_{i_1}, \cdots, e_{i_s})$ 处的值，反之亦然；基于此，共变张量有时又定义为 E^s 上的多重线性泛函.

参考文献见**共变向量** (covariant vector).

И. Х. Сабитов 撰　龚明鹏 译

共变向量 [**covariant vector**; **ковариантный вектор**]

n 维向量空间 E 的对偶空间 E^* 的元素，即 E 上的线性泛函(线性型). 在有序对(E, E^*)中，E 的元素称为**反变向量** (contravariant vector). 在张量结构的一般概型中，共变向量等同于价为 1 的共变张量.

如果取定了分别含于 E 和 E^* 称为对偶基的 $e_1, \cdots, e_n$ 及 $e^1, \cdots, e^n$，即满足 $(e^i e_j)=\delta^i_j$ 的基(这里 δ^i_j 是 **Kronecker 符号**(Kronecker symbol))，则共变向量的坐标表示特别简单；此时任一共变向量 $\omega\in E^*$ 可以表成形式 $\omega=f_i e^i$ (i 从 1 到 n 求和)，其中 f_i 是线性型 ω 在向量 e_i 处的值. 当对偶基 (e_i) 和(e^j) 按公式

$$\overline{e}_{i'} = p^i_{i'} e_i,\ \overline{e}^{j'} = q^{j'}_i e^i,\ p^i_k q^k_j = \delta^i_j$$

变换成对偶基 $(\overline{e}_{i'})$ 和 $(\overline{e}^{j'})$ 时，反变向量 $x=x^i e_i$ 的坐标 x^i 依反变律 $\overline{x}^{i'}=q^{i'}_i x^i$ 而变，而共变向量 ω 的坐标 f_i 则依共变律 $\overline{f}_{i'}=p^i_{i'} f_i$ 而变(即它们的变化方式与基底相同，这便是"共变"(covariant)一词的来由).

参考文献

[1] Широков, П. А., Тензорное исчисление, 2 изд., Казань, 1961.

[2] Беклемишев, Д. В., Курс аналитической геометрии и линейной алгебры, М., 1971.

[3] Schouten, J. A., Tensor analysis for physicists, Cambridge Univ. Press, 1951.

И. Х. Сабитов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Spivakk, M., A comprehensive introduction to differential geometry, 1－5, Publish or Perish, 1970－1975.

龚明鹏 译

覆叠 [**covering**; **накрытие**]

空间 X 到空间 Y 上的映射 $p: X \to Y$，使对每个点 $y \in Y$，有一个邻域 $U(y)$，它在 p 下的原象是能通过 p 同胚地映到 $U(y)$ 上的那些开子集之并．等价地，p 是具有离散纤维的**局部平凡纤维丛** (locally trivial fibre bundle)．

通常在 X, Y 都连通的假定下研究覆叠；通常还假定 Y 是局部连通且局部单连通的．在这些假定下，可以建立基本群 $\pi_1(X, x_0)$ 和 $\pi_1(Y, y_0)$ 之间的关系：若 $p(x_0)=y_0$，则诱导同态 p_* 将 $\pi_1(X, x_0)$ 同构地映到 $\pi_1(Y, y_0)$ 的子群上，且当在 $p^{-1}(y_0)$ 中改变 x_0 时，恰好得到对应的共轭子群类的全部子群．如果这个类仅由一个子群 H 组成（即 H 是正规子群），此覆叠称为正则的 (regular)．那时，可得到群 $G=\pi_1(Y, y_0)/H$ 在 X 上的一个自由作用，且 p 为映到轨道空间 Y 上的商映射．这个作用由闭路提升得到：若与任一闭路 $q:[0,1]\to Y$，$q(0)=q(1)=y_0$，相关的唯一道路 $\bar{q}$: $[0,1] \to X$，使得 $\bar{q}(0)=x_0$，$p\bar{q}=q$，则点 $\bar{q}(1)$ 仅依赖于此闭路在 G 中的类和 x_0．故 G 中每个元素 γ 对应着 $p^{-1}(y_0)$ 中点的一个置换．这个置换在 $\gamma\neq 1$ 时无不动点且连续依赖于 y_0．由此得到 X 的一个同胚．

在一般情形，这个构造仅定义 $p^{-1}(y_0)$ 中一个置换，即有一 $\pi_1(Y, y_0)$ 在 $p^{-1}(y_0)$ 上的作用，称为覆叠的单值性 (monodromy of the covering)．正则覆叠的一种特殊情形是**万有覆叠** (universal covering)，此时 $G=\pi_1(Y, y_0)$．一般地，给定任一子群 $H\subset\pi_1(Y, y_0)$，可以构造唯一的覆叠 $p: (X, x_0)\to(Y, y_0)$，使 $p_*(\pi_1(X, x_0))=H$．X 中的点是道路 $q:[0,1]\to Y$，$(q(0)=x_0)$ 的类：当 $q_1(1)=q_2(1)$ 且闭路 $q_1q_2^{-1}$ 是 H 的一个元素时，两条道路 q_1, q_2 等同．对于一类道路，点 $q(1)$ 取作此类的象；如此定义 p．空间 X 中的拓扑由 p 是覆叠这个条件唯一确定；这里，Y 的局部单连通性是关键．对于从弧连通空间 (Z, z_0) 到 (Y, y_0) 内的任一映射 f，它的提升 $\bar{f}: (Z, z_0)\to(X, x_0)$ 存在，当且仅当 $f_*(\pi_1(Z, z_0))\subset H$．在 Y 的覆叠上可以定义一个偏序关系（一个覆叠的覆叠还是覆叠）；这个关系对偶于 $\pi_1(Y, y_0)$ 中子群的包含关系．特别地，万有覆叠是唯一的极大元．

例　圆周的参数化 $(\cos\varphi, \sin\varphi)$，$(\varphi\in\mathbf{R})$ 定义了圆周用实直线的一个覆叠，通常用复数形式 $e^{i\varphi}$ 描述它，并称为指数覆叠 (exponential covering)．类似地，环面由平面覆叠．粘合球面的对径点导致相应维数的射影空间用球面的覆叠．一般地，离散群的自由作用是（轨道空间上）正则覆叠的来源；并不是每个这样的作用都导致一个覆叠（轨道空间可能是不可分的），但有限群肯定行．

А. В. Чернавский 撰

【补注】　覆叠有时也称为覆叠射影 (covering projection)．每个覆叠都有同伦提升性质 (homotopy lifting property)（见**覆叠同伦** (covering homotopy)），因而是一个 Hurewica 纤维空间 (Hurewica fibre space) 或**纤维化** (fibration)．

参考文献

[A1] Spanier, E. H., Algebraic topology, McGraw-Hill, 1966, Chapt. 2.

徐森林 译

覆盖与填装 [**covering and packing**; **покрытия и упаковки**]

关于一个集合到另一个集合的多值映射的组合构形．设已给定集合 E 和 V，Γ 是从 E 到 V 中的多值映射，$\Gamma(e)$ 是元 $e\in E$ 在 Γ 作用下的象．并对任一 $C\subseteq E$ 记 $\Gamma(C)=\bigcup_{e\in E}\Gamma(e)$．子集 $C\subseteq E$ 称为对于 (V, E, Γ) 的一个覆盖 (covering)，如果 $\Gamma(C)=V$．子集 $P\subseteq E$ 称为对于 (V, E, Γ) 的一个填装 (packing)，如果对 P 中任意两个不同元 e_i 和 e_j，集合 $\Gamma(e_i)$ 和 $\Gamma(e_j)$ 不相交．子集 $P\subseteq E$ 称为完满填装 (perfect packing) 或完满覆盖 (perfect covering)，如果 P 既是填装又是覆盖．集合 E 称为覆盖集 (covering set)，V 称为被覆盖集 (covered set)．如果逆映射 Γ^{-1} 使得 $\Gamma^{-1}(V)=E$，则可把 V 当作覆盖集而把 E 当作被覆盖集．映射 $\Gamma: E\to V$ 定义了一个关联关系 (incidence relation) I，对于元 $v\in V$ 和 $e\in E$，若有 $v\in\Gamma(e)$，则 v 和 e 相关联（记为 vIe）．

填装与覆盖的概念联系着一些极值问题：对给定的 (V, E, Γ) 寻求对于某些泛函取得极值的填装与覆盖．这种泛函，举例来说，可以通过给 E 的每个元 e 赋以非负实数权 $w(e)$ 来规定．最小覆盖问题乃是构造一个覆盖 C 使得 $\sum_{e\in G} w(e)$ 取极小值．通常研究 $w(e)=1$ 的情形，这是关系到求极小基数的覆盖，或所谓最小覆盖 (least covering) 的问题．

如果 (V, E, Γ) 使得

$$\max_{e\in E}|\Gamma(e)|\leqslant u,\quad \min_{v\in V}|\Gamma^{-1}(v)|\geqslant w,$$

则覆盖的最小基数 $\kappa(V, E, \Gamma)$ 满足不等式

$$\frac{|V|}{u}\leqslant\kappa(V, E, \Gamma)\leqslant 1+\frac{E}{w}\left[\frac{\ln|V|w}{|E|}\right].$$

在关于填装问题的极值问题中，通常要求得最大基数的填装．

有时在被覆盖集 V 上定义了取非负整数值的函数 λ，则满足下述条件的子集 $P\subseteq E$ 称为 λ 覆盖(λ-covering)(λ 填装(λ-packing))：对每个 $v\in V$，与 v 关联的元 $e\in P$ 的个数 $\sigma(v, P)$ 适合不等式

$$\sigma(v,p)\geqslant\lambda(v)$$

(相应地，$\sigma(v, P)\leqslant\lambda(v)$)．在极小基数的 λ 覆盖与极大基数的 λ 填装之间存在一种关系．这就是，给出集合 V 和 E 以及一个多值映射 $\Gamma: E\to V$，并设已给出 V 上的函数 λ 和 λ' 使得对每个 $v\in V$ 有

$$\lambda(v)+\lambda'(v)=|\Gamma^{-1}(v)|,$$

于是若集合 C 是对于 (V, E, Γ) 的极小基数的 λ 覆盖，那么集合 $P=E\setminus C$ 就是极大基数的 λ' 填装，反之亦然．如果 P 是极大 λ' 填装，则集合 $C=E\setminus P$ 是极小基数的 λ 覆盖．下面是与覆盖与填装有关的一些问题类的例子：

1) 设 G 是顶点集为 V、边集为 E 的一个图．如果把 V 当作被覆盖集而把 E 当作覆盖集，顶点与边的关联关系取作 I，则一个覆盖是图的一个边覆盖，而一个填装是一个匹配，且一个完满填装是一个完满匹配．如果把 V 当作覆盖集和被覆盖集，顶点间的邻接关系取作 I，则一个覆盖是一个外稳集，而一个填装是一个内稳集；此外，极小覆盖的基数是外稳数而极大填装的基数是内稳数(见**图的数值特征**(graph, numerical characteristic of a))．

2) 设 V 是度量空间 R 的一个非空集合．集合 $U\subseteq R$ 的系 π 称为 V 的一个 ε 覆盖(ε-covering)，如果任一集合 $U\in\pi$ 的直径 $d(U)$ 不超过 2ε，且有 $V\subseteq\bigcup_{U\in\pi}U$．集合 $S\subseteq R$ 称为关于 V 的一个 ε 网(ε-net)，如果集合 V 的任一点都与 S 中某点的距离不超过 ε．集合 $U\subseteq R$ 称为 ε 可辨别的(ε-distinguishable)，如果 U 中任意两个不同点的距离大于 ε．令 $N_\varepsilon(V)$ 是 V 的 ε 覆盖中集合个数的极小值，再令 $M_\varepsilon(V)$ 是 V 的 ε 可辨别子集中点数的极大值．则数 $\log_2 N_\varepsilon(V)$ 称为 V 的 ε 熵(ε-entropy)，而 $\log_2 M_\varepsilon(V)$ 称为 V 的 ε 容量(ε-capacity)．ε 熵和 ε 容量的概念在函数逼近论和信息论中被用到．

3) 设 B^n 是带有 Hamming 度量的 n 维单位方体，被覆盖集是其顶点集而覆盖集是 B^n 中半径为 r 的球的集合，则球填装中球心的集合是可纠 r 个错的一个码(code)．若填装是完美的，则码称为稠密填装的(densely packed)或完满的(perfect)．

如果作为被覆盖集的是 B^n 的这种顶点的子集 N_f：布尔函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 在这些顶点处取值 1；而覆盖集是完全包含在 N_f 中的面(区间)的集合，则极小基数的覆盖相应于 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 的最短析取范式，而秩之和为最小的覆盖相应于 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 的最小析取范式(见 **Boole 函数**(Boolean function)及其**范式**(normal form))．

在关于覆盖与填装的众多问题中，有的估计其基数，有的考察存在性问题，完美填装的构造和计数，以及为解决这些问题而构造有效算法的可能性等．

参考文献

[1] Rogers, C. A., Packing and covering, Cambridge Univ. Press, 1964.

[2] Fejes Toth, L., Lagerungen in der Eben, auf der Kugel und in Raum, Springer, 1972.

[3] Peterson, W. W. and Weldon, E. J., Error-correcting codes, M. I. T., 1972.

[4] Дискретная математика и математические вопросы кибернетики, т 1, М., 1974.

[5] Harary, F., Graph theory, Addison Wesley, 1972 (中译本：F. 哈拉里，图论，上海科学技术出版社，1980).

[6] Berge, C., Théorie des graphes et leurs applications, Dunod, 1958 (中译本：C. 贝尔热，图论及其应用，上海科学技术出版社，1970).

[7] Витушкин, А. Г., Оценка сложности задачи табулирования, М., 1959.

[8] Колмогоров, А. Н., Тихомиров, В. М., 《Успехи матем наук》, 14 (1959) 3–86.

[9] Бахвалов, Н. С., Численные методы, 2 изд., 1966 (英译本：Bakhvalov, N. S., Numerical methods: analysis, algebra, ordinary differential equations Mir, 1977).

[10] Яблонский, С. В., Введение в дискретную математику, М., 1979.

А. А. Сапоженко 撰

【补注】

参考文献

[A1] Schrijver, A. (Ed.), Packing and covering in combinatorics, CWI, Amsterdam, 1979.

李 乔译 钟 集校

覆叠域 [covering domain; наложения область]，$\mathbf{C}^n$ 上的域(domain over $\mathbf{C}^n$)

一个对 (X, π)，其中 X 是一弧连通的 Hausdorff 空间，$\pi: X\to\mathbf{C}^n$ 是一局部同胚，称为射影(projection)．覆叠域出现在全纯函数的解析开拓中．对区域 $D\subset\mathbf{C}^n$ 中的每个解析(可能是多值的)函数 f，存在一个相应的覆叠域 $\widetilde{D}$ 及一射影 $\pi:\widetilde{D}\to D$，正好像每个单复变量的解析函数有一相应的 Riemann 曲面一样；函数 f 在 $\widetilde{D}$ 上是单值的．覆叠域也称为 Riemann 域(Riemann domains)．

参考文献

[1] Шабат, Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 2, М., 1976.

В. В. Жаринов 撰

【补注】 覆叠域有时称为散布在 $\mathbf{C}^n$ 上的流形(manifold spread over $\mathbf{C}^n$)．亦见**全纯域**(domain of holomorphy)；**Riemann 域**(Riemann domain)；**全纯包**(holo-

morphic envelope).

参考文献

[A1] Gunning, R. C. and Rossi, H., Analytic functions of several complex variables, Prentic-Hall, 1965, Chapt. I, Section G.

[A2] Grauert, H. and Remmert, R., Theory of Stein spaces, Springer, 1979 (译自德文).　　钟同德 译

覆盖元 [**covering element**; **покрывающий элемент**], 偏序集中的

直接尾随于另一元素的元素,更确切地说,"在偏序集 P 中 a 覆盖 b"是指 $b<a$,并且不存在 $x\in P$,使得 $b<x<a$.　　Т. С. Фофанова 撰　戴执中 译

覆叠同伦 [**covering homotopy**; **накрывающая гомотопия**] 给定映射 $p: X\to Y$, 对映射 $F_0: Z\to Y$ 的一个同伦 F_t 的

一个同伦 $G_t: Z\to X$, 使得 $pG_t=F_t$. 这时,如果 F_0 的覆叠映射 G_0 是预先给定的,就说 G_t 是 G_0 的扩张.形式较强的覆叠同伦公理 (covering homotopy axiom) 要求,对给定的映射 $p: Z\to Y$, 任何从一个仿紧统 Z 出发的同伦 $F_t: X\to Y$, 以及任何 $G_0(pG_0=F_0)$, 都存在一个覆叠同伦 G_t,它是 G_0 的一个扩张.在这种情况下, p 称为 Hurewicz 纤维化 (Hurewicz fibration). 最重要的例子由**局部平凡纤维丛** (locally trivial fibre bundle) 提供.如果仅仅要求在 Z 为有限多面体的情况下具有覆叠同伦性质, p 称为 Serre 纤维化 (Serre fibration).

设 X 和 Y 为弧连通的,且 P_A 为 A 的道路空间(即连续映射 $q:[0,1]\to A$ 的空间). 考虑连续映射

$$\mu: D\to P_X,$$

其中

$$D=\{(x,q): x\in X,\ q\in P_Y,\ p(x)=q(0)\}\subset X\times P_Y.$$

假定 $\mu(x,q)$ 起始于点 x 而覆叠了 q. 那么由公式 $G_t(x)=\mu(G_0(x),F_t(x))$ 可给出一个覆叠同伦 G_t,它是 G_0 的扩张.特别地,对于一个**覆叠** (covering), 以及具有固定联络的光滑向量丛,都可以唯一地定义满足这些条件的映射 M. Serre 纤维化中的同伦覆叠公理,保证了可以建立该纤维化的正合同伦序列(见**同伦群** (homotopy group)).　　А. В. Чернавский 撰

【补注】 于是,覆叠同伦是给定同伦的一个提升(同伦提升 (homotopy lifting)). 覆叠同伦性质与同伦扩张性质对偶;后者定义了上**纤维化** (cofibration) 的概念.

参考文献

[A1] Spanier, E. H., Algebraic topology, McGraw-Hill, 1966 (中译本: E. H. 斯潘尼尔,代数拓扑学,上海科学技术出版社,1987).　　张 平 译　沈信耀 校

覆盖(集合的) [**conering (of a set)**; **покрытие**]

给定集合 X 的任何子集族,其并为 X.

1) 拓扑空间的覆盖 (covering of a topological space),一致空间,或者一般地具有某种结构的任意集合的覆盖,都理解为这个集合的任何覆盖. 但是,在拓扑空间理论中,考虑所有元素都是开集的那种开覆盖 (open coverings) 是极其自然的. 考虑开覆盖的重要意义在于这种覆盖的元素包含了空间局部结构的全部信息,而从总体上看,这种覆盖的性质(特别是元素的个数,重数及组合性质)反映了空间本质的整体特征.

例如,拓扑空间的 Lebesgue 维数 dim,用开覆盖的语言定义就是:一个正规空间 X 的维数不超过自然数 n,如果在这个空间的每个有限开覆盖中都可以内接一个有限开覆盖,它在每一点处的重数(即这个覆盖中包含给定点的元素的个数)不超过 $n+1$. 一个覆盖内接于另一个覆盖的关系是覆盖之间一种基本的、普遍的初等的关系. 集合族 γ 内接于集合族 λ,是指族 γ 的每个元素都包含在族 λ 的某个元素中. **仿紧空间** (paracompact space) 类就是用开覆盖来定义的.

集合 X 的覆盖 γ 的子覆盖 (subcovering) 是说族 γ 的一个子族,它本身也是 X 的一个覆盖. 紧性,可数紧性及终紧性等基本概念都是用子覆盖定义的. 一个空间是紧的 (compact),如果它的每个开覆盖都可以找到一个有限子覆盖. 一个空间是可数紧的 (countably compact),如果它的每个可数开覆盖都可以找到一个有限子覆盖. 一个空间是终紧的 (finally compact),如果它的每个开覆盖都可以找到一个可数子覆盖. 开覆盖可用于确定抽象的组合对象;这就开启了利用代数方法研究比多面体更为一般的拓扑空间的道路. П. С. Александров 给出了一个任意覆盖 γ 的网 (nerve) 的基本概念,网作为一个抽象复形,其顶点与 γ 的元素一一对应,这些顶点的有限集构成一个抽象单形,当且仅当 γ 的对应元素的交非空. 把空间的开覆盖系统连同内接关系对应于一个通过单纯映射相关连的抽象复形系统,称为复形的谱 (spectra of complexes).

闭覆盖 (closed coverings) 在拓扑学中也起着重要的作用;这种覆盖的所有元素都是闭集. 如果拓扑空间中所有单点集都是闭的,那么,这个空间中的所有单点子集的族就作出了一个闭覆盖的例子. 然而这种覆盖除了说明 T_1 分离性公理适用之外,没有包含关于空间拓扑的任何信息. 所以,闭覆盖应该与其他重要限制相结合. 特别地,研究局部有限闭覆盖是有用的. 这些在维数论中尤为重要. 闭覆盖的另一个重要的例子是用剖分一个多面体的某复形的闭单形作成的这个多面体

的覆盖．

覆盖有些有趣的性质与其元素的特征无关而与它们的位置有关，下述几种是最常见的：覆盖的基数(cardinality)(覆盖中元素的个数)，局部有限性(local finiteness)(对于空间的每个点，都有一个邻域，它与空间的这个子集族中有限多个成员相交)，点有限性(point finiteness)(包含任一点的覆盖的元素集是有限的)及星形有限性(star - like finiteness)(覆盖的每个元素仅与这个覆盖的有限多个元素相交)．

拓扑空间的集族称为守恒的(conservative)，如果它的任意子族的并的闭包等于该子族元素闭包的并．每个局部有限集族是守恒的．守恒覆盖产生于仿紧空间的研究中，这时任何不只是开的守恒覆盖都是重要而非平凡的．

关于集族γ(特别地，一个覆盖)，点 x 的星形(star of a point)的概念起着重要的作用，它是γ中包含 x 的所有元素之并，通常记作 $St_\gamma(x)$．类似地可以定义关于集族γ集合 A 的星形 $St_\gamma(A)$ (star of a set)．星形概念用在一个覆盖星形内接于另一覆盖的基本关系中，它是比内接关系更精细的关系．集族λ称为星形内接(star - like inscribed)于集族γ，如果对于每个点，可以找到γ中一个元素包含那个点关于λ的星形．在维数论中，关于开覆盖的星形内接关系是重要的、可度量化的一些准则就以此为基础，并且它还是定义一致结构和一致空间的基本初等概念之一．研究拓扑空间在下述意义之下由星形内接关系控制的开覆盖族 F 是有用的：对 F 中任何 γ_1，γ_2，存在 $\mu\in F$，使得 μ 同时星形内接于 γ_1 及 γ_2．

下面用星形内接语言描述的仿紧性的特征是重要的(森田定理(Morita theorem))：一个 Hausdorff 空间是仿紧的，当且仅当在它的任何开覆盖可以内接一个星形开覆盖．

对任意的(甚至闭的)覆盖，星形内接性没有什么可说的．特别地，显然，空间的所有单点子集族星形内接于该空间的任何覆盖．

参考文献

[1] Kelley, J. L., General topology, Springer, 1975 (中译本：J. L. 凯莱，一般拓扑学，科学出版社，1982).

[2] Архангельский, А. В., Пономарев, В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974 (英译本：Arkhangel'skiǐ, A. V., and Ponomarev, V. I., Fundamentals of general topology: problems and exercises, Reidel, 1984).

A. B. Архангельский 撰

【补注】 在西方文献中，内接覆盖通常称为加细(refinement)，守恒覆盖称为保闭包覆盖(closure - preserving covering)．进而，(集合的)星形内接族使用重心加细(barycentric refinement)一词．也有星形加细(star - refinement)的说法，集族λ是(集)族γ的星形加细，如果族 $\{St_\lambda(A): A\in\lambda\}$ 是(加细)γ的一个加细．最后，森田定理就是由 A. H. Stone ([A1])证明的有名的 Stone 叠合定理(Stone coincidence theorem)．

参考文献

[A1] Stone, A. H., Paracompactness and product spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 54 (1948), 997 – 982．

2) 在组合几何(combinatorial geometry)中，有许多与特殊覆盖有关的问题和定理，主要涉及凸集．设 K 是 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 中的一个凸体，bd K 和 int K 分别表示 K 的边界和内部．下面与覆盖有关的问题是大家很熟悉的．

a) 求 int K 平移(平行移动)的最小数 $t(K)$，使之可以覆盖 K．

b) 求位似系数为 $k(0<k<1)$ 的与 K 位似的体的最小数 $b(K)$，使之可以覆盖 K．

c) 求位似系数为 $k>1$，位似中心在 $\mathbf{R}^n\setminus\mathrm{int}\,K$ 中与 K 位似的集合的最小数 $d(K)$，使之可以覆盖 K．

如果 K 有界，则问题 a) 与 b) 等价，且都等价于关于集合 bd K(外来的)照明问题(illumination problem)，与 **Hadwiger 假设**(Hadwiger hypothesis)有关．对于无界的 K，问题 a) 与 b) 一般是不同的，$b(K)$ 和 $t(K)$ 可以是无穷大的．

参考文献

[1] Danzer, L., Grünbaum, B. and Klee, V., Helly's theorem and its relatives, in Proc. Symp. Pure Math. Vol. 7, Amer. Math. Soc., 1963, 101 – 180.

[2] Болтянский, В. Г., Гохберг, И. Ц., Теоремы и задачи комбинаторной геометрии, М., 1965.

[3] Болтянский, В. Г., Гохберг, И. Ц., Разбиение фигур на меньшие части, М., 1971.

[4] Hadwiger, H. and Debrunner, G., Combinatorial geometry in the plane, Holt, Rinchart and Winston, 1964 (译自德文).

[5] Rogers, C. A., Packing and covering, Cambridge Univ. Press, 1964.

[6] Болтянский, В. Г., Солтан, П. С., Комбинаторная геометрия различных классов выпуклых множеств, Киш., 1978.

П. С. Солтан 撰　罗嵩龄、许依群、徐定宥 译

覆叠曲面[covering surface; накрывающая поверхность]

同二维覆叠 (covering).

覆盖定理 [covering theorem; покрытия теоремы]

关于不同正则函数类的一组定理，它描述完全包含于相应函数类之每一函数的值域内的集合的某些性质．下面叙述几个基本的覆盖定理(亦见[1])．

定理 1．若函数 $w=f(z)=z+a_2z^2+\cdots$ 在圆盘 $|z|<1$

内正则单叶(即 $f\in S$)，则圆盘 $|w|<1/4$ 完全被圆盘 $|z|<1$ 在该函数映射下的象所覆盖．仅当 f 具有形式：

$$f(z)=\frac{z}{(1+e^{i\alpha}z)^2},\quad 0\leqslant\alpha<2\pi$$

时，在圆周 $|w|=1/4$ 上才有不属于象域的点．

定理 2．若亚纯函数 $w=F(\zeta)=\zeta+\alpha_0+\alpha_1/\zeta+\cdots$ 是 $|\zeta|>1$ 上的单叶映射，则其象域的整个边界位于圆盘 $|w-\alpha_0|\leqslant 2$ 内．

定理 3．若 $f\in S$，则于圆盘 $|z|<1$ 在 $w=f(z)$ 映射下的**象域**边界上位于从 $w=0$ 出发的任何 n 条等角射线上那 n 个最接近于 $w=0$ 的点之中，至少有一个点与 $w=0$ 的距离不小于 $(1/4)^{1/n}$．

定理 4．若 $f\in S$，则圆盘 $|z|<1$ 在 $w=f(z)$ 映射下的象**包含**一个由 n 条总长度不小于 n 的开直线段组成的集，这些线段以等角度值 $2\pi/n$ 从原点发出．

对于函数 $f\in S$ 且在圆盘 $|z|<1$ 内满足 $|f(z)|<M$，$M\geqslant 1$ 时，有类似于定理 1 和 3 的覆盖定理(带有相应的常数)．覆盖定理 1 和 3 亦可转换成关于圆环 $1<|z|<r$ 中一类满足如下条件的正则单叶函数 $w=f(z)$ 的定理，f 把该圆环映射成位于 $|w|>1$ 内的区域，把圆周 $|z|=1$ 映射成圆周 $|w|=1$．

对于由圆盘 $|z|<1$ 内正则函数 $w=f(z)=z+a_2z^2+\cdots$ 所组成的函数类 R，不存在能被该函数类中每一函数的值域所完全覆盖的圆盘 $|w|<\rho$，$\rho>0$．对于 $|z|<1$ 内的正则函数

$$w=F(z)=z^q+a_2z^{q+1}+\cdots,\quad q\geqslant 1,$$

单位圆盘在每个这种函数映射下的象必包含具有任意给定斜率的某个线段，它包含点 $w=0$ 于其内部且长度不小于 $A=8\pi^2/\Gamma^4(1/4)=0.45\cdots$．此处数值 A 不可能再增大除非增添一些限制条件．在这类函数中，若在环 $0<|z|<1$ 内限定 $F(z)\neq 0$，则圆盘的每个象域完全覆盖圆盘 $|w|<1/16$，但并不都能覆盖以 $w=0$ 为中心的更大圆盘．

对于在圆盘 $|z|<1$ 内取每个值 w 于至多 p 个点的正则函数 $f(z)=z^p(1+a_1z+a_2z^2+\cdots)$ 所组成的函数类 S_p，有一个与定理 1 类似的命题，相应的圆盘为 $|w|<1/2^{p+1}$．而且若 $a_1=a_2=\cdots=a_{p-1}=0$ 或 $a_1=\cdots=a_p=0$，则其相应的圆盘为 $|w|<1/4$ 或 $|w|<1/2$．类似结果适用于圆周平均 p 叶函数，区域平均 p 叶函数等等．覆盖定理 3 亦可转换成关于 S_p 族的定理．

亦见关于 **Bloch 常数**(Bloch constant)的 Bloch 定理．

参考文献

[1] Голузин, Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966 (中译本：Г. М. 戈鲁辛，复变函数的几何理论，科学出版社，1956)．

Г. К. Антонюк 撰　杨维奇 译

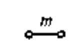
Coxeter 群 [**Coxeter group**；**Кокстера группа**]

具有一组特殊的生成元 $\{r_i:i\in I\}$ 的群，r_i 满足一组定义关系式

$$(r_ir_j)^{n_{ij}}=1,\quad i,j\in I,$$

其中 $n_{ii}=1$(故对任何 i 有 $r_i^2=1$)，$n_{ij}=n_{ji}(i\neq j)$ 是整数 $\geqslant 2$ 或等于 ∞(在后一情形，r_i 与 r_j 之间没有关系)．在这些条件下，n_{ij} 与元素 r_ir_j 的阶相同．若 $n_{ij}=2$，则 r_i 和 r_j 交换．矩阵 $(n_{ij})_{i,j}\in I$ 称为给定 Coxeter 群的 Coxeter **矩阵** (Coxeter matrix)．这矩阵(因而这个群)可以由 **Coxeter 图** (Coxeter graph) 给定，图的顶点是 $a_i(i\in I)$；若 $n_{ij}<\infty$，则 a_i 与 a_j 由 $(n_{ij}-2)$ 条边相连(特别地，$n_{ij}=2$ 时它们不相连)；若 $n_{ij}=\infty$，则它们由一条宽边相连；另一种记号是在 Coxeter 图的顶点 a_i 和 a_j 之间用带有标号 n_{ij} 的单边相连．

例 1) 两个二阶元素生成的群是 Coxeter 群，它具有图



其中 m 是群的阶数的 1/2．

2) 对称群 S_n 是 Coxeter 群，其生成元是 $r_i=(i,i+1)$，$i=1,\cdots,n-1$，其 Coxeter 图的形式是

3) 群 $PGL_2(Z)=GL_2(Z)/\{\pm 1\}$ 是 Coxeter 群，其生成元为

$$r_1=\left\{\pm\left\|\begin{matrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}\right\|\right\},\quad r_2=\left\{\pm\left\|\begin{matrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{matrix}\right\|\right\},$$

$$r_3=\left\{\pm\left\|\begin{matrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{matrix}\right\|\right\};$$

它的图的形式为

群 $PGL_2(Z)$ 包含子群 $PSL_2(Z)=SL_2(Z)/\{\pm 1\}$，其指数是 2，同构于模 Klein 群．

Coxeter 群的概念产生于由超平面的反射生成的离散群的理论，见**反射群** (reflection group)．

每个反射群是 Coxeter 群，生成元可取它的基本多面体的边界超平面的反射．反射群中包括了半单 Lie 群的(通常的与仿射的) **Weyl 群** (Weyl group)．

1934 年，H. S. M. Coxeter ([1]) 计算出 n 维 Euclid 空间 E^n 中全部反射群，并证明它们全是现在所谓的 Coxeter 群．在以后的一篇文章([2])中，他证明了每

个有限 Coxeter 群（finite Coxeter group）同构于 E^n 中的某个元素有公共不动点的反射群，从而得到有限 Coxeter 群的分类(见表 1)．

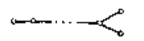
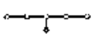
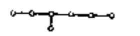
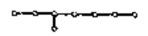
群 的 名 称	Coxeter 图	幂 指 数
A_n, $n\geq 1$		$1, \cdots, n$
B_n 或 C_n, $n\geq 2$		$1, 3, \cdots, 2n-1$
D_n, $n\geq 4$		$1, 3, \cdots, 2n-3, n-1$
E_6		1, 4, 5, 7, 8, 11
E_7		1, 5, 7, 9, 11, 13, 17
E_8		1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29
F_4		1, 5, 7, 11
$G_2^{(m)}$, $m\geq 5$		$1, m-1$
H_3		1, 5, 9
H_4		1, 11, 19, 28

表 1 不可分解的有限 Coxeter 群．生成元的数目等于群的名称的下标．

在无限 Coxeter 群中突出仿射的(affine)和双曲的(hyperbolic) Coxeter 群(Coxeter groups)．一个 Coxeter 群是仿射的(或双曲的)如它同构于 E^n(或相应地，在 Лобачевский 空间 L^n 中)的反射群，其元素没有公共维数 $<n$ 的不变子空间(在双曲的情况，无穷远点也必须考虑成子空间)．

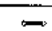
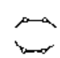
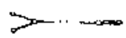
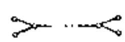
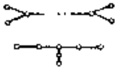
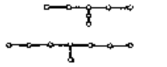
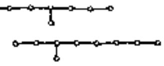
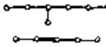
群 的 名 称	Coxeter 图
$\widetilde{A}_1$	
$\widetilde{A}_n$, $n\geq 2$	
$\widetilde{B}_n$, $n\geq 3$	
$\widetilde{C}_n$, $n\geq 2$	
$\widetilde{D}_n$, $n\geq 4$	
$\widetilde{E}_6$	
$\widetilde{E}_7$	
$\widetilde{E}_8$	
$\widetilde{F}_4$	
$\widetilde{G}_2$	

表 2. 不可分解仿射 Coxeter 群．生成元的数目比群的名称的下标多一个．

仿射 Coxeter 群已由 Coxeter 计算出来(见表 2)；作为仿射 Weyl 群它们产生于半单 Lie 群的理论中．

有 k 个生成元的 Coxeter 群是一个二维双曲 Coxeter 群，当且仅当在生成元的适当的标号之下有

$$\frac{1}{n_{12}}+\frac{1}{n_{23}}+\cdots+\frac{1}{n_{k1}}<1$$

且当 $|i-j|>1$ 时有 $n_{ij}=\infty$．当 $n>2$ 时，还没有可能对 n 维双曲 Coxeter 群作完全分类，虽然在比较重要的几类群的研究中获得了一定的成功，见**反射群**(reflection group)．

有限的、仿射的和双曲的 Coxeter 群以及以它们为分量作成的直积仅仅是 Coxeter 群的一小部分．Coxeter 明确地证明了([2])，有限个生成元的任意 Coxeter 群具有有限维实线性表示，在这表示下，生成元被映成线性反射．[4] 中还证明了这个表示是忠实的，特别地，其中蕴含着解决了 Coxeter 群的字的问题([5])．

Coxeter 群的抛物子群(parabolic subgroups of a Coxeter group)．令 G 是具有一组生成元 $\{r_i: i\in I\}$ 的 Coxeter 群．对任何子集 $J\subset I$，由 $\{r_i: i\in J\}$ 生成的子群 G_J 也是 Coxeter 群，此时若 $i\notin J$，则 $r_i\notin G_J$．这种形式的子群称为抛物子群．

Coxeter 群称为不可分解的(indecomposable)，如果它不是两个非平凡的抛物子群的直积；这等价于它的 Coxeter 图的连通性．所有有限的(或仿射的) Coxeter 群是同样类型的不可分解 Coxeter 群的直积；所有双曲 Coxeter 群是不可分解的．不可分解的 Coxeter 群是有限的(分别地，仿射的及双曲的)，当且仅当对称矩阵 $\|-\cos(\pi/n_{ij})\|$ 是正定的(分别地，半正定，秩至多 $|I|-1$ 及负指数 1)．

在有限 Coxeter 群理论中，它们的所谓幂指数(exponents)起着重要作用(见表 1)；这些数比对应的反射群的生成不变量的次数少 1．能用这些幂指数表出群的阶、反射(共轭于生成元的元素)的个数等等．见**反射群**(reflection group)．

有限 Coxeter 群的全部生成元的乘积在共轭意义下不依赖乘法的顺序，被称为 Killing - Coxeter 元(Killing - Coxeter element)或 Coxeter 元(Coxeter element)([3])．

参考文献

[1] Coxeter, H. S. M., Discrete groups generated by reflections, *Ann. of Math.*, **35** (1934), 588-621.

[2] Coxeter, H. S. M., The complete enumeration of finite groups of the form $r_i^2=(r_i r_j)^{k_{ij}}=1$, *J. London Math. Soc.*, **10** (1935), 21-25.

[3] Coxeter, H. S. M., The product of generators of a finite group generated by reflections, *Duke Math. J.*, **18** (1951), 765-782.

[4] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Lie groups and Lie algebras, Addison - Wesley, 1975 (译自法文)．

[5] Tits, J., Le problème des mots dans les groupes de Coxeter, Symp. Math., 1, Acad. Press, 1969, 175-185.

Э. Б. Винберг 撰

【补注】 在表 1 和表 2 中出现的图在西方文献中通常称为 Дынкин 图(Dynkin diagrams)，特别地，在对应

的有限维单 Lie 代数和对应的仿射 Kac - Moody 代数 (affine Kac - Moody algebras) (Kac - Moody Lie 代数)的情形是这样的. 例如,见[4].

石生明 译 许以超 校

Cramer 法则 [Cramer rule; Крамера правило]

如果 n 个未知数 n 个方程的线性方程组

$$a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n=b_n$$

的行列式 D 不等于 0,则这个方程组具有唯一解. 这个解由下列公式给出:

$$x_k=\frac{D_k}{D},\quad k=1,\ldots,n. \qquad (*)$$

这里,D_k 是将 D 中第 k 列元素换为自由项 $b_1,\cdots,b_k$ 的相应元素而得到的行列式. 公式(*)称为 Cramer 公式 (Cramer formulas). 它是 G. Cramer 发现的(见[1]).

参考文献

[1] Cramer, G., Introduction à l'analyse des lignes courbes, Geneva, 1750, p. 657.

[2] Курош, Г., Курс высшей алгебры, 11 изд., М., 1975. (中译本: Г. 库洛什, 高等代数教程, 高等教育出版社, 1953).

И В Проскуряков 撰

【补注】

参考文献

[A1] Apostol, T. M., Calculus, 2, Wiley, 1969, p. 93.

张鸿林 译

Cramér 定理 [Cramér theorem; Крамера теорема]

关于独立随机变量和的大偏差概率的积分极限定理. 设 $X_1, X_2, \cdots$ 是一列具有相同非退化分布函数 F 的独立随机变量,满足 $\mathrm{E}X_1=0$,且使得矩母函数 $\mathrm{E}e^{tX_1}$ 在某区间 $|t|<H$ 内是有限的. 这最后的条件称为 Cramér 条件 (Cramér condition). 令

$$\mathrm{E}X_1^2=\sigma^2,\quad F_n(x)=\mathrm{P}\left\{\frac{1}{\sigma n^{1/2}}\sum_{j=1}^{n}X_j<x\right\}.$$

如果 $x>1$,且当 $n\to\infty$ 时, $x=o(\sqrt{n})$, 那么

$$\frac{1-F_n(x)}{1-\Phi(x)}=\exp\left\{\frac{x^3}{\sqrt{n}}\lambda\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right\}\left[1+O\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right],$$

$$\frac{F_n(-x)}{\Phi(-x)}=\exp\left\{-\frac{x^3}{\sqrt{n}}\lambda\left(-\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right\}\left[1+O\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right].$$

这里 $\Phi(x)$ 是正态 (0, 1) 分布函数,而 $\lambda(t)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k t^k$ 是所谓的 Cramér 级数 (Cramér series),其系数只依赖于随机变量 X_1 的矩;级数对一切充分小的 t 是收敛的. 实际上,由 H. Cramér 于 1938 年得到的最初结果比刚才所叙述的稍弱些.

参考文献

[1] Cramér, H., Sur un nouveaux théorème - limite de la théorie des probabilités, Act. Sci. et Ind., 736, Hermann, 1938.

[2] Ибрагимов, И. А., Линник, Ю. В., Независимые и стационарно связанные величины, М., 1965 (英译本: Ibragimov, I. A. and Linnik, Yu. V., Independent and stationary sequences of random variables, Wolters - No - ordhoff, 1971).

[3] Петров, В. В., Суммы независимых случайных величин, М., 1972 (英译本: Petrov, V. V., Sums of independent random variables, Springer, 1975).

В. В. Прохоров 撰

【补注】 亦见**极限定理** (limit theorems); **大偏差的概率** (probablity of large deviations).

参考文献

[A1] Ellis, R. S., Entropy, large deviations, and statistical mechanics, Springer, 1985.

陈培德 译

Cramér - von Mises 检验 [Cramér - von Mises test; Крамера - Мизеса критерий]

"独立同分布随机变量 $X_1,\cdots,X_n$ 有给定的连续分布函数 $F(x)$" 这个假设 H_0 的**非参数检验** (non - parametric test). Cramér - von Mises 检验基于形如

$$\omega_n^2[\Psi(F(x))]=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\sqrt{n}(F_n(x)-F(x))\right]^2\Psi(F(x))\,dF(x)$$

的统计量,其中 $F_n(x)$ 是由样本 $X_1,\cdots,X_n$ 构造出的**经验分布** (empirical distribution) 函数,而 $\Psi(t)$ 是某一定义于区间 [0,1] 的非负函数,满足 $\Psi(t)$, $t\Psi(t)$ 和 $t^2\Psi(t)$ 都在 [0, 1] 上可积. 这类基于"平方度量"的检验首先由 H. Cramér([1])和 von Mises([2])所考虑. Н. В. Смирнов 提出,取 $\Psi(t)\equiv 1$,并证明了在这个情形下,当 H_0 为真而 $n\to\infty$ 时,统计量 $\omega^2=\omega_n^2$ 有一 ω^2 分布 ('omega - squared' distribution) 为其极限分布,此分布与分布函数 $F(x)$ 无关. 基于统计量 ω_n^2 的 H_0 的统计检验,称为 ω^2 (Cramér - von Mises - Смирнов) 检验 (test). ω_n^2 的数值可用下述表达式求得:

$$\omega_n^2=\frac{1}{12n}+\sum_{j=1}^{n}\left[F(X_{(j)})-\frac{2j-1}{2n}\right]^2,$$

这里 $X_{(1)}\leqslant\cdots\leqslant X_{(n)}$ 是样本 $X_1,\cdots,X_n$ 的变序列. 据显著性水平 α 的 ω^2 检验,假设 H_0 当 $\omega_n^2\geqslant\omega_\alpha^2$ 时被拒绝,其中 ω_α^2 是 ω^2 的分布的上 α 分位点,即 $\mathrm{P}(\omega^2<\omega_\alpha^2)=1-\alpha$. T. W. Anderson 和 D. A. Darling 提出了一个类似的检验,那是基于统计量 $\omega_n^2[(1-F(x))/F(x)]$ (见[5]).

参考文献

[1] Cramér, H., Sannolikhetskalkylen och nagra av dess användningar, Stockholm, 1926.

[2] Mises, R. von, Mathematical theory of probability and statistics, 1964 (译自德文).

[3] Смирнов, Н. В., 《Матем. сб.》, 2(1937), 5, 973–993.

[4] Большев, Л. Н., Смирнов, Н. В., Таблицы математической статистики, 2 изд., М., 1968.

[5] Anderson, T. W. and Darling, D. A., Asymptotic theory of certain 'goodness-of-fit' criteria based on stochastic processes, *Ann. of Math. Stat.*, **23** (1952), 193–212.

M. C. Никулин 撰

【补注】 在西方文献中, $\Psi(t)\equiv 1$ 这一选择通常被称为 Cramér - von Mises 检验. 然而, Смирнов 首先提出这个选择, 且把该统计量重写成上述分布无关的形式. 不论选择什么 Ψ, ω_n^2 的极限分布必与 F 无关. ("平方度量"这一术语指的是表达式 $[\sqrt{n}\,(F_n(x)-F(x))]^2$, 而非指 Ψ 的某一选择). Cramér 实际上考虑的检验是用 dx 取代 $\Psi(F(x))\,dF(x)$, 而 von Mises 则用 $\lambda(x)\,dx$ 取代 $\Psi(F(x))dF(x)$.

[1]的更新是 [A1].

参考文献

[A1] Lenmann, E. L., Testing statistical hypotheses, Wiley, 1959.

陈希孺 译

产生算子 [creation operators ; рождения операторы]

一族闭线性算子 $\{a^*(f): f\in H\}$, 其中 H 是某个 Hilbert 空间, 作用于在 H 上所构作的 **Фок 空间** (Fock space) 中. 它们是**湮没算子** (annihilation operators) $\{a(f): f\in H\}$ 的伴随.

P. A. Минлос 撰

【补注】 算子 $a^*(f)$ 的确切描述及适当的文献, 见**湮没算子** (annihilation operators).

李炳仁 译

创造集 [creative set ; креативное множество]

一类自然数的递归可枚举集 A, 它(在自然数集内)的补集 $\bar{A}$ 是一**产生集** (productive set); 换言之, 一集合 A 是创造集, 若它是递归可枚举集且存在一部分递归函数 $\varphi(x)$, 使得对任意具有 Gödel 数 x 的包含在 $\bar{A}$ 中的递归可枚举子集 W_x,

$$\varphi(x)\in\bar{A}-W_x.$$

在各种算法不可解问题中经常遇到创造集, 因此它构成了非递归的递归可枚举集的最重要的类. 在许多形式理论中, 可证和可驳公式集的(配数的)集合被证出是创造集(假定理论的一切公式的一个自然的枚举); 特别地, Peano 算术是这种情况, 一般地, 所有递归不可分理论(即其可证和可驳公式集是递归不可分的理论)也如此. 所有创造集是相互递归同构的(即对任二创造集有一自然数的递归一一映射, 它把一个集合映到另一个集合上), 且它们属于同一个 Turing 度 —— 递归可枚举集的最大度, 创造性的概念可推广到集序列和其他对象.

参考文献

[1] Rogers, jr., H., Theory of recursive functions and effective computability, McGraw - Hill, 1967.

[2] Shoenfield, J. R., Mathematical logic, Addison - Wesely, 1967.

B. A. Душский 撰

【补注】 上面讲的许多概念如递归可枚举集, 递归同构, Turing 度等的定义和讨论参见**递归集合论** (recursive set theory) 和**不可判定度** (degree of undecidability).

杨东屏 译

Cremona 群 [Cremona group ; Кремоны группа]

域 k 上射影空间 P_k^n 的双有理自同构的群 $\mathrm{Cr}(P_k^n)$; 或等价地, P_k^n 的 **Cremona** 变换 (Cremona transformation) 的群.

P_k^n 的射影变换群 $\mathrm{PGL}(n+1,k)$ 自然地包含在 $\mathrm{Cr}(P_k^n)$ 中作为一个子群; 当 $n\geqslant 2$ 时, 它是真子群. 群 $\mathrm{Cr}(P_k^n)$ 同构于 k 上 n 个变量的有理函数域关于 k 的自同构群 $\mathrm{Aut}\,k(x_1,\cdots,x_n)$. 关于射影平面的 Cremona 群的基本结果是 Noether 定理 (Noether theorem): 代数闭域上的群 $\mathrm{Cr}(P_k^2)$ 由二次变换生成, 或等价地, 由标准二次变换及射影变换生成 (见[1], [7]); 这些生成元间的关系可在[10]中找到(亦见[11]). 迄今(1987)尚不知道 Cremona 群是否是单群. 当基域 k 不是代数闭时, Noether 定理有一个推广 (见[6]).

在双有理几何学中最困难的问题之一是描述群 $\mathrm{Cr}(P_k^3)$ 的结构, 它不再由二次变换生成. 几乎所有关于三维空间的 Cremona 变换的文献都是致力于得到这样变换的具体例子. 最后, 对于高于三维的空间的 Cremona 群的结构几乎一无所知.

Cremona 群的理论中的一个重要研究方向是探索 $\mathrm{Cr}(P_k^n)$ 的子群. 当 k 是代数闭域时, $\mathrm{Cr}(P_k^2)$ 的有限子群已被描述到差一个共轭 (见[8]以及[6]). $\mathrm{Cr}(P_k^2)$ 中的所有对合的分类早在 1877 年即由 E. Bertini 得到 (比如见[4], [5]). 描述 $\mathrm{Cr}(P_k^n)$, $(n\geqslant 3)$ 中所有对合的问题仍未解决. $\mathrm{Cr}(P_k^2)$ 内所有极大连通代数子群已由 F. Enriques 在 1893 年作了描述 (见[4]): 它们恰好是有理曲面的所有极小模型的自同构群, 即平面 P_k^2, 二次曲面 $P^1\times P^1$ 以及一系列直纹面 $F_N\,(N\geqslant 2)$ 的自同构群. 对于群 $\mathrm{Cr}(P_k^n)$ $(n\geqslant 3)$ 的情形, 这个结果有一些推广 (见[3], [9]).

参考文献

[1] Алгебраические поверхности, 《Тр. Матем. ин-та АН СССР》, М., **75** (1965).

[2] Coble, A. B., Algebraic geometry and theta functions,

Amer. Math. Soc., 1929.
[3] Demazure, M., Sous-groupes algébriques de rang maximum du groupes de Cremona, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. Sér.* **4**, 3 (1970), 4, 507–588.
[4] Godeaux, L., Les transformations birationelles du plan, Gauthier-Villars, 1927.
[5] Hudson, H. P., Cremona transformations in plane and space, Cambridge Univ. Press, 1927.
[6] Манин, Ю. И., 《Матем. сб.》, **72** (1967), 2, 161–192.
[7] Nagata, M., On rational surfaces Ⅱ, *Mem. Coll. Sci. Univ.* Kyoto, **33** (1960), 271–293.
[8] Wiman, A., Zur Theorie der endlichen Gruppen von birationalen Transformationen in der Ebene, *Math. Ann.*, **48** (1897), 195–240.
[9] Umemura, H., Sur les sous-groupes algébriques primitifs du groupe de Cremona à trois variables, *Nagoya Math. J.*, **79** (1980), 47–67.

B. A. Исковских 撰 陈志杰 译

Cremona 变换 [Cremona transformation; Кремоново преобразование]

域 k 上射影空间 $P_k^n(n\geqslant 2)$ 的**双有理变换**(birational transformation). L. Cremona (从 1863 年起)对平面和三维空间的双有理变换作了系统的研究. Cremona 变换的群后来也以他的名字命名——称为 **Cremona 群**(Cremona group),并记为 $\mathrm{Cr}(P_k^n)$.

不是射影变换的 Cremona 变换的最简单的例子是平面的二次双有理变换.在非齐次坐标 (x,y) 下,它们可用下面线性分式变换表示

$$x\to\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2},\quad y\to\frac{a_3x+b_3y+c_3}{a_4x+b_4y+c_4}.$$

在这些变换中,特别值得一提的是标准二次变换(standard quadratic transformation) τ:

$$(x,y)\to\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y}\right),$$

或者用齐次坐标写成

$$(x_0,x_1,x_2)\to(x_1x_2,x_0x_2,x_0x_1).$$

这个变换在坐标轴外面是一个同构:

$$\tau: P_k^2\setminus\{x_0x_1x_2=0\}\tilde{\to}P_k^2\setminus\{x_0x_1x_2=0\},$$

它有三个基点(即不定义的点): (0, 0, 1), (0, 1, 0)及(1, 0, 0),并且把每个坐标轴映到不含在这个轴里的唯一基点上.

根据 Noether 定理(见 **Cremona 群**(Cremona group)),若 k 是代数闭域,则平面 P_k^2 的每个Cremona变换都可表示成二次变换的复合.

某些特殊类型的变换,特别是 Geiser 对合及 Bertini 对合,在 Cremona 变换的理论中占有重要的地位(见[1]). Geiser 对合(Geiser involution) α: $P_k^2\to P_k^2$ 由以重数 3 通过 7 个一般位置的点的 P_k^2 上 8 次曲线的线性系所定义. Bertini 对合(Bertini involution) $\beta: P_k^2\to P_k^2$ 由以重数 6 通过 8 个一般位置的点的 P_k^2 上 17 次曲线的线性系所定义.

形如

$$x\to x,$$
$$y\to\frac{P(x)y+Q(x)}{R(x)y+S(x)},\quad P,Q,R,S\in k[x]$$

的 Cremona 变换称为 de Jonquières 变换(de Jonquières transformation). de Jonquières 变换可以最自然地理解为二次曲面 $P_k^1\times P_k^1$ 的双有理变换,它保持到其中一个因子上的投影.于是 Noether 定理可复述如下:二次曲面的双有理自同构群 $\mathrm{Bir}(P^1\times P^1)$ 由一个对合 σ 以及 de Jonquières 变换所生成,其中 $\sigma\in\mathrm{Aut}(P^1\times P^1)$ 是由因子置换所定义的自同构.

P_k^n 中仿射空间 A_k^n 的任意双正则自同构都可扩张为 P_k^n 的 Cremona 变换,所以 $\mathrm{Aut}(A_k^n)\subset\mathrm{Cr}(P_k^n)$. 当 $n=2$ 时,群 $\mathrm{Aut}(A_k^2)$ 由仿射变换的子群以及形如

$$x\to ax+b,\quad y\to cy+Q(x),\qquad (*)$$
$$a\neq 0,\quad c\neq 0,\quad a,b\in k, Q(x)\in k[x]$$

的变换的子群生成.此外,它是这些子群的共合积(见[5]). 群 $\mathrm{Aut}(A_k^n)$ $(n\geqslant 3)$ 的结构尚不清楚. 一般地说,到目前(1987)为止,关于维数 $n\geqslant 3$ 的 Cremona 变换还没有得到有意义的结果.

参考文献

[1] Hudson, H. P., Cremona transformations in plane and space, Cambridge Univ. Press, 1927.
[2] Godeaux, L., Les transformations birationelles du plan, Gauthier-Villars, 1927.
[3] Coble, A. B., Algebraic geometry and theta functions, Amer. Math. Soc., 1929.
[4] Nagata, M., On rational surfaces Ⅱ, *Mem. Coll. Sci. Univ.* Kyoto., **33** (1960), 271–393.
[5] Shafarevich, I. R., On some infinitedimensional groups, *Rend. di Math.*, **25** (1966), 208–212.

B. A. Исковских 撰

【补注】 $\mathrm{Aut}(A_k^2)$ 是**仿射变换**(affine transformation)的子群与形如(*)的变换的子群所成的共合积这一事实,首先是由 H. W. E. Jung (对 char $k=0$)证明的([A1]);任意基域的情形是 W. van der Kulk 证明的([A2]).

参考文献

[A1] Jung, H. W. E., Ueber ganze birationale Transformationen der Ebene, *J. Reine Angew. Math.*, **184** (1942), 161–174.
[A2] Kulk, W. van der, On polynomial rings in two va-

riables, *Nieuw Arch. Wiskunde*, **1** (1953), 33–41.

陈志杰 译

临界函数 [critical function; критическая функция]

一个统计量,其值等于在给定观察结果的条件下,拒绝所检验的假设的条件概率. 设 X 是取值于样本空间 $(\mathfrak{X},\mathfrak{B})$ 的随机变量,其分布属于分布族 $\{P_\theta:\theta\in\Theta\}$. 设要检验假设 $H_0:\theta\in\Theta_0\subset\Theta$, 对立假设为 $\theta\in\Theta_1=\Theta\backslash\Theta_0$. 设 $\varphi(.\cdot)$ 为 $\mathfrak{X}$ 上的可测函数, 使 $0\leqslant\varphi(x)\leqslant1$ 对一切 $x\in\mathfrak{X}$ 成立. 如果用一个随机化检验来检验这个假设, 当试验得出 $X=x$ 时, H_0 以 $\varphi(x)$ 的概率被拒绝而以 $1-\varphi(x)$ 的概率被接受, 则称 $\varphi(\cdot)$ 为该检验的临界函数. 在建立一个非随机化检验时,选择临界函数使其只取 0, 1 两值,因此它是某集合 $K\in\mathfrak{B}$ 的特征函数. K 被称为该检验的临界区域: $\varphi(x)=1$ 当 $x\in K$, $\varphi(x)=0$ 当 $x\notin K$.

参考文献

[1] Lehmann, E. L., Testing statistical hypothesis, Wiley, 1959.

M. C. Никулин 撰 陈希孺 译

临界理想 [critical ideal; критерий идеал]

【补注】 同**分歧素理想** (ramified prime ideal).

临界水平 [critical level; критический уровень]

1 与**临界函数**(critical function)之差. 设要检验某一与 X 的分布有关的假设 H_0. 使用一个基于统计量 $T(X)$ 的检验, 且设当 H_0 为真时 $T(X)$ 的分布函数为 $G(t)$. 若该检验的临界域由不等式 $T(X)>t$ 确定, 则临界水平是 $1-G[T(X)]$.

参考文献

[1] Lehmann, E., Testing statistical hypothesis, Wiley, 1959.

[2] Hajek, J. and Sidak, Z., Theory of rank tests, Acad. Press, 1967.

M. C. Никулин 撰

【译注】 这个条目有问题: 对非随机化检验(如本条目中那样), 临界函数只取 0, 1 两值(参见**临界函数**(critical function)), 方按本条目的解释. 其临界水平只能取 1, 0 两值, 而不可能是 $1-G(T(X))$, 因此值一般介于 0 与 1 之间.

临界水平的真实含义是: 它是样本 x 的函数, 取值于 0, 1 之间, 其值反映了所得样本 X 对假设 H_0 的支持程度. 这个概念只能用在检验的临界域为 $\{T(X)>t\}$ 的情况($\{T(X)<t\}$ 的情况包括在内, 因为可写为 $\{-T(X)>-t\}$). 这时临界水平定义为 $1-G(T(X))$, 其中 G 是 $T(X)$ 的分布函数. 取检验水平为 α 等价于说, 当临界水平小于 α 时就拒绝假设 H_0.

陈希孺 译

临界点 [critical point; критическая точка]

1) 解析函数 $f(z)$ 的 m 阶临界点是复平面上的点 a, 在 a 处函数正则且其导数 $f'(z)$ 有 m 阶零点, 其中 m 为自然数, 换言之, 一临界点由下述条件所定义

$$\lim_{z\to a}\frac{f(z)-f(a)}{(z-a)^m}=0,\ \lim_{z\to a}\frac{f(z)-f(a)}{(z-a)^{m+1}}\neq0.$$

在无穷远点正则的函数 $f(z)$ 以无穷远点($a=\infty$)为 m 阶临界点, 由下列条件定义:

$$\lim_{z\to\infty}[f(z)-f(\infty)]z^m=0,$$
$$\lim_{z\to\infty}[f(z)-f(\infty)]z^{m+1}\neq0.$$

由 m 阶临界点出发的两曲线之夹角, 在解析映射 $w=f(z)$ 下增至 $m+1$ 倍. 若 $f(z)$ 考虑作不可压缩液体平面流的复位势, 则一个临界点由下面的性质所刻画, 即经过此点不是一条而是 $m+1$ 条流线, 并且在临界点处流速为零, 对于反函数 $z=\psi(w)$ (即满足 $f[\psi(w)]\equiv w$ 的函数), 临界点是一个 $m+1$ 阶的代数分支点.

2) 设点 a 是复 $(n-m)$ 维不可约解析集

$$M=\{z\in V: f_1(z)=\cdots=f_m(z)=0\}$$

中一点, M 是由 a 在复空间 $\mathbf{C}^n$ 中的邻域 V 中满足条件 $f_1(z)=\cdots=f_m(z)=0$ 的点所确定, 其中 $f_1,\cdots,f_m$ 是 V 上 n 个复变量 $z=(z_1,\cdots,z_n)$ 的全纯函数. a 称为临界点, 如果 Jacobi 矩阵 $\|\partial f_j/\partial z_k\|$ $(j=1,\cdots,m,k=1,\cdots,n)$ 之秩小于 m. M 的其他点称为**正则的**(regular). M 上的临界点相对来说是很少的: 它们构成一个复维数至多是 $n-m-1$ 的解析集. 特别地, 当 $m=1$, 即若 $M=\{f_1(z)=0\}$, 且 M 的维数为 $n-1$, 则临界点集的维数至多是 $n-2$.

参考文献

[1] Hurwitz, A. and Courant, R.: Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen, 1, Springer, 1964.

[2] Шабат, Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., М., 1976.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 2) 中所定义的点亦称 M 的奇点, 见 [A1].

参考文献

[A1] Grauert, H. and Fritzsche, K., Several complex variables, Springer, 1976 (中译本: H. 格劳尔特, K. 弗里切, 多复变数, 科学出版社, 1988).

3) k 维微分流形 M 到 l 维微分流形 N 上的光滑映射(即连续可微映射) f 的**临界点**是点 $x_0\in M$, 使得 f 在此点的秩 $\mathrm{Rk}_{x_0}f$ (即 M 的切空间在微分映射 df: $T_{x_0}M\to T_{f(x_0)}M$ 下的象 $df(T_{x_0}M)$ 的维数)小于 l. 所有临界点的集合称为**临界集** (critical set), 临界点 x_0 的象 $f(x_0)$ 称为**临界值**(critical value). 若 $y\in N$ 不是任一临界点之象, 则称为**正则点**(regular point)或**正则值**(regular value)(尽管它不须要属于象 $f(M)$). M 中的非临界点亦称正则点.

根据Sard定理(Sard theorem)，若 f 是 C^m 类光滑映射($m>\min(k-l,0)$)，则临界集的象在 N 中是第一范畴的(即它是至多可数个无处稠密集之并)且有 l 维零测度(见[1]，[2])，对于 m 的下界不能更弱(见[3])．常须考虑的情形是 $m=\infty$(在此情形证明被简化，见[4])．此定理被广泛地用来通过"小移动"化为**一般位置**(general position)；例如，容易用它证明，对给定 $\mathbf{R}^n$ 中两个光滑的子流形，其中之一存在任意小平移使得它们的交亦是一子流形(见[2]，[4] 和映射的**横截性**(transversality)．

根据上面的定义，当 $k<l$ 时，每个点 $x_0\in M$ 必须考虑为临界点，然而对于满足 $\mathrm{Rk}_{x_0}f=k$ 的点和满足 $\mathrm{Rk}_{x_0}f<k$ 的点，其性质有显著的差别，在前一情形存在 x_0 的邻域，此处映射粗略地看像 $\mathbf{R}^k$ 到 $\mathbf{R}^l$ 的标准的嵌入；更精确地说，在点 x_0(M 上)和点 $f(x_0)$(在 N 上)邻近分别存在局部坐标 $x_1,\cdots,x_k$ 和 $y_1,\cdots,y_l$ 且 f 能由下式给出

$$y_i=x_i,\quad i\leqslant k;\quad y_{k+1}=\cdots=y_l=0.$$

在第二种情形点 x_0 邻域之象不必须是流形，而显现各种奇异性——尖点、自相交等等．由于这个原因，临界点的定义常被修改为仅包含满足 $\mathrm{Rk}_{x_0}f<\min(k,l)$ 的点 x_0，此时上面叙述的其他定义须作相应的修改([5])．

在可微映射的奇点理论中(见[5]，[6])研究临界点邻域内的映射性质．在这方面往往不是研究任意的临界点(关于这些临界点只能说出很少一点)，而是满足某些条件的临界点使得保证它们是"不太强地退化的"和"典型的"．因此，人们考虑充分光滑的映射或映射族(仅光滑地依赖于有穷多个参数)的临界点，这些点在下述意义下是"不可移去的"，即在原来的映射或映射族的小扰动下("小"理解为对适当的 m 在 C^m 意义下)，扰动后的映射(或族)在原来的临界点邻域有一个相同类型的临界点．对于映射 $M\to\mathbf{R}$(即通常的纯量函数；在此情形临界点常称为平稳点(stationary point))，在上面所指的意义下典型的临界点是非退化的(non-degenerate)临界点，在该处Hesse型是一非退化的二次型，相应的关于函数族的典型临界点见[6]，[7]．

参考文献

[1] Sard, A., The measure of critical values of differentiable maps, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 48(1942), 883-890.

[2] Sternberg, S., Lectures on differential geometry, Prentice Hall, 1964.

[3] Whitney, H., A function not constant on a connected set of critical points, *Duke Math. J.*, 1 (1935), 4, 514-517.

[4] Milnor, J., Topology from the differential viewpoint, Univ. Press of Virginia, Charlottesville, 1965.

[5] Golubitsky, M. and Guillemin, V., Stable mappings and their singularities, Springer, 1974.

[6] Bröcker, P. and Lander, L., Differentiable germs and catastrophes, Cambridge, Univ. Press, 1975.

[7] Арнольд, В. И., 《Функцион. анализ и его прилож.》, 6 (1972), 4, 3-25.

Д. В. Аносов 撰　何育赞 译　容尔谦 校

临界区域 [**critical region**；**критическая область**]

样本空间中的一区域，具有如下性质：当某一随机变量的观察值落入此区域时，则与该变量分布有关的某个假设被拒绝．设 H_0 为与某随机变量 X 的分布有关的假设，X 取值于样本空间 $(\mathfrak{X},\mathfrak{B})$．为构造出 H_0 的非随机化检验，人们把空间 $\mathfrak{X}$ 分割为两个不交集 K 和 $\bar{K}$，使 $K\cup\bar{K}=\mathfrak{X}$，$K\in\mathfrak{B}$，检验相当于下述法则：当 X 在试验中实现的值 x 落入 K 内时拒绝 H_0，不然(即当 $x\in\bar{K}$ 时)就接受 H_0．集合 K 称为该检验的临界区域；其余集 $\bar{K}$ 则称为接受区域．在这个意义下，选择临界区域的问题等价于为假设 H_0 构造非随机化检验的问题．自然地，临界区域是在为检验 H_0 而作的抽样之前就定下来的；另一方面，在Neyman-Pearson理论的范围内，临界区域的实际选择决定于在统计假设检验问题中产生的第一类和第二类错误的概率．

参考文献

[1] Cramér, H., Mathematical methods of statistics, Princeton Univ. Press, 1946.

[2] Lehmann, E. L., Testing statistical hypothesis, Wiley, 1959.

[3] Waerden, B. L. van der, Mathematische Statistik, Springer, 1957.

М. С. Никулин 撰　陈希孺 译

临界值 [**critical value**；**критическое значение**]

可微映射在**临界点**(critical point)上的值．

叉积 [**cross product**；**скрещенное произведение**]，群 G 与环 K 的

一个如下定义的结合环．设 σ 是群 G 到带有单位元的结合环 K 的自同构群的一个映射，K 中可逆元的一个族

$$\rho=\{\rho_{g,h}:g,h\in G\}$$

满足条件：对所有的 $\alpha\in K$ 和 $g_1,g_2,g_3\in G$，

$$\rho_{g_1,g_2}\rho_{g_1g_2,g_3}=\rho^{g_1^\sigma}_{g_2,g_3}\rho_{g_1,g_2g_3},$$

$$\alpha^{g_2^\sigma\cdot g_1^\sigma}=\rho_{g_1,g_2}\alpha^{(g_1g_2)^\sigma}\rho^{-1}_{g_1,g_2},$$

则族 ρ 称为因子组(factor system)．G 与 K 对于因子组 ρ 与映射 σ 的叉积是形式为

$$\sum_{g\in G}\alpha_g t_g,\quad g\in G,\quad \alpha_g\in K$$

的所有有限和(这里 t_g 是对于每个元素 $g\in G$ 唯一指定

的记号)构成的集，并具有由下式定义的两种二元运算:

$$\sum_{g\in G}\alpha_g t_g+\sum_{g\in G}\beta_g t_g=\sum_{g\in G}(\alpha_g+\beta_g)t_g;$$

$$\left[\sum_{g\in G}\alpha_g t_g\right]\left[\sum_{g\in G}\beta_g t_g\right]=\sum_{h\in G}\left[\sum_{\substack{xy=h,\\x,y\in G}}(\alpha_x\beta_y^{x\sigma}\rho_{x,y})\right]t_h.$$

这个环记为 $K(G,\rho,\sigma)$. 元素 t_g 构成它的 K 基.

如果 σ 把 G 映射到 K 的恒等自同构上，则 $K(G,\rho)$ 称为扭群环(twisted group ring)或交叉群环(crossed group ring). 如果再加上条件：对任意 $g,h\in G$ 有 $\rho_{g,h}=1$, 则 $K(G,\rho,\sigma)$ 是 K 上 G 的群环(group ring). (见群代数(group algebra).)

设 K 是域，σ 是单射，则 $K(G,\rho,\sigma)$ 是一个单环，它是所给域和它的 Galois 群的叉积.

参考文献

[1] Sehgal, S. H., Topics in group rings, M. Dekker, 1978.
[2] Бовдн. А. А., 《Сиб. матем. ж.》, 4 (1963), 481－500.
[3] Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 2, M., 1973, 5－118.
[4] Passman, D. S., The algebraic structure of group rings, Wiley, 1977.

А. А. Бовдн 撰

【补注】 在上述定义因子组的关系中，例如 $\rho^{g_1\sigma}_{g_2,g_3}$，当然表示用自同构 $\sigma(g_1)$ 作用于元素 ρ_{g_2,g_3} 的结果. 如果对所有 $g,h\in G$，有 $\rho_{g,h}=1$，则得到斜群环(skew group rings) $K(G,1,\sigma)$. 在研究扩张时自然出现叉积. 事实上，设 N 是 G 的一个正规子群，在 G 中选择 G/N 的代表元集合 $\{\bar g\}$，则对于 G 的群代数 KG 中的每个元 a，可以唯一表为和 $a=\sum a_g\bar g$, $a_g\in KN$. 记

$$\overline{g}\,\overline{h}=\rho_{\bar g,\bar h}\overline{gh},\ \bar g a=\sigma_{\bar g}(a)\bar g,$$

则 $\rho_{a,h}$ 定义了(群 G/N 和环 KN 关于自同构 $\sigma_{\bar g}$ 的集的)一个因子组，且

$$KG=KN(G/N,\rho,\sigma).$$

在不计 Brauer 等价(Brauer equivalence)的情况下，每个中心单代数(central simple algebra)是一个叉积. 但是并非每一个可除代数(division algebra)都同构于一个叉积. K 上两个代数 A 与 B 是 Brauer 等价的，如果存在 n_1,n_2，使得 $A\otimes M_{n_1}(K)\cong B\otimes M_{n_2}(K)$，这里 $M_n(K)$ 是 K 上 $n\times n$ 矩阵代数. 亦见 **Brauer 群**(Brouer group).

林亚南 译

交比 [cross ratio; двойное отношение]

重比(double ratio), 非调和比(anharmonic ratio)

处于一条直线上的四个点 M_1,M_2,M_3,M_4 的交比是这样一个数: 记为 (M_1,M_2,M_3,M_4)，等于

$$\frac{M_1M_3}{M_3M_2}:\frac{M_1M_4}{M_4M_2}$$

这里，如果线段 M_1M_3 和 M_3M_2 方向相同，则认为比 M_1M_3/M_3M_2 是正的，如果 M_1M_3 和 M_3M_2 方向相反，则认为这个比是负的. 交比与四个点的编号有关，而点的编号与它们在直线上出现的次序可以相同，也可以不同. 除了四个点的交比以外，还可考虑通过一点的四条直线的交比. 这个比记为 $(m_1m_2m_3m_4)$，它等于

$$\frac{\sin(m_1m_3)}{\sin(m_3m_2)}:\frac{\sin(m_1m_4)}{\sin(m_4m_2)},$$

这里 (m_im_j) 表示直线 m_i 和 m_j 之间的交角，连同其符号一起考虑. 如果点 M_1,M_2,M_3,M_4 分别处于直线 m_1,m_2,m_3,m_4 上，则有

$$(M_1M_2M_3M_4)=(m_1m_2m_3m_4).$$

如果点 M_1,M_2,M_3,M_4 和 M_1',M_2',M_3',M_4' 是与同一直线四元组 m_1,m_2,m_3,m_4 相交而得到的，则

$$(M_1M_2M_3M_4)=(M_1'M_2'M_3'M_4').$$

交比在射影变换下是不变的. 等于 -1 的交比，称为调和比(harmonic ratio)(见点的调和四元组(harmonic quadruple)).

Э. Г. Позняк 撰

【补注】

参考文献

[A1] Coxeter, H. S. M., Projective geometry, Univ. Toronto Press, 1974.

张鸿林 译

交叉同态 [crossed homomorphism; скрещенный гомоморфизм]

群 G 到带有算子群 G 的群 Γ 的一个映射 $\varphi:G\to\Gamma$，满足条件 $\varphi(ab)=\varphi(a)\cdot(a\varphi(b))$. 若 G 平凡地作用于 Γ，则交叉同态恰好正是通常的同态. 交叉同态也称为 G 的取值于 Γ 的 1－上闭链(cocycles)，见非 **Abel 上同调**(non-Abelian cohomology). 对每个元素 $\gamma\in\Gamma$ 定义一个交叉同态 $\varphi(a)=\gamma^{-1}(a\gamma)(a\in G)$，称为主交叉同态(principal crossed homomorphism)或上同调于 e 的上闭链. 映射 $\varphi:G\to\Gamma$ 是交叉同态，当且仅当 G 到 Γ 的全形(见群的全形(holomorph of a group))的映射 ρ 由公式 $\rho(a)=(\varphi(a),\sigma(a))$ 给出，其中 $\sigma:G\to\operatorname{Aut}\Gamma$ 是定义 G 在 Γ 上作用的同态. 例如，若 σ 是 G 在向量空间 V 上的线性表示，则任何交叉同态 $\varphi:G\to V$ 定义了 G 的一个表示 ρ，这是用 V 的仿射变换表示的. 集合 $\varphi^{-1}(e)\subset G$ 称为交叉同态 φ 的核(kernel); 它总是 G 的子群.

А. Л. Онищик 撰

【补注】

参考文献

[A1] MacLane, S., Homology, Springer, 1963

[A2] Lang, S., Rapport sur la cohomologie des groupes, Benjamin, 1966. 石生明 译 许以超 校

交叉模 [crossed modules; скрещенные модуль]

来源于 G 模(见模(module))概念的一个概念，一个群 M(不一定交换)配有一个算子群 G 和同态 $f: M \to G$，使得对任意 $g\in G$ 和所有 $x,y\in M$ 满足：

$$f(gx)=g(fx)g^{-1},\ (fx)y=xyx^{-1},$$

则称 M 为一个交叉 (G,f) 模．M 是 G 模(即 M 是交换群)，当且仅当 $f=$常数($\equiv e\in G$)．

М. И. Войцеховский 撰 肖 杰译

密码学 [cryptography; криптография]

【补注】 最近几年密码学的研究真可谓是方兴未艾．仔细分析起来，主要有两个方面的原因．首先，公开密钥密码学的创新思想(除了它本身十分有趣以外)大大地推动了密码学发展，为密码学开创了许多全新的应用形式，有些应用形式甚至在直观上有悖于通信在通常意义下的含义．其次，数据保密在各个方面的应用也促进了对密码学需求的剧增．这一点主要表现在，密码学已经走出了它以前只有消极应用(如战争中的保密通信，犯罪活动间的保密通信等等)的旧时代，而步入了具有广泛积极应用的新时代．此外，随着电子邮件及类似系统的业务开展，密码学的应用范围将会变得更加宽广．

考虑在一个不安全信道(见通信信道(communication channel))上传送消息．(信道可以是容易被窃听者窃听的电话线，也可以是信息系统中的某一数据储存设备)．这种待传送的消息称为明文(plaintext)．为了增加保密性，发送者加密(encrypt)明文，然后在不安全的信道上传送加密后的密文(cryptotext)．接收者解密(decrypt)所收到的密文，恢复出原来的明文．("明文"和"密文"的英文术语也经常分别用 cleartext 和 ciphertext)．

加密和解密通常是按照具体的密码体制(cryptosystem)来进行的．本质上，一个密码体制规定若干个(经常是无穷多个)密钥(key)．每一个密钥 K 确定了一个加密函数 e_K 和一个解密函数 d_K．对明文 w 作用 e_K 可得到密文 c

$$e_K(w)=c.$$

反之，

$$d_K(c)=w.$$

因此，

$$d_K(e_K(w))=w.$$

更准确地说，一个密码体制 CS 由以下三部分组成：明文空间(plaintext space)，密文空间(cryptotext space)及密钥空间(key space)．所有这些空间都至多是可数的．较典型的情况是，明文空间或是某一字母表(alphabet) Σ 上的所有字的全体 Σ^* 或是自然语言(如英语)中所有有意义的句子组成的集合．同样，密文空间可以是某一字母表 Δ 上的所有字的全体 Δ^*．每一个密钥 K 确定了一对映射 e_K 和 d_K，它们的含义在上面已做过论述．例如，如果明文和密文空间分别是 Σ^* 和 Δ^*，那么 e_K 将会是 Σ^* 到 Δ^* 中的一个翻译(translation)．

"合法"的通信活动也许会遭到窃听者或密码分析员(cryptanalyst)的窃听．在良好的密码体制中，密码分析(cryptanalysis)是十分困难的．迄今为止，对于这些概念还没有找到让人满意的形式化定义．不过从应用的观点看，形式化并没有捕捉到问题的本质．

在所有的密码体制中，也许要算所谓的 Caesar 密码(Caesar cipher)(简称 CAESAR)最为古老、最为有名．在 Caesar 密码中，明文空间和密文空间都为英文字母表 $\Sigma=\{A,\cdots,Z\}$ 上的所有字(word)的全体．密钥空间是 $\{0,\cdots,25\}$．如果 K 是密钥空间中的一个元素，则 e_K 是这样的一个映射，它把英文字母表中的字母都往后移动 K 位．(Σ 的排序是自然的字母表排序，字母表中的最后一个字母又循环地与第一个字母相连，见字典顺序(lexicographic order)) 例如，

$$e_{25}(IBM)=HAL,\ e_6(MUPID)=SAVOJ,$$

$$e_3(HELP)=KHOS,\ e_0(CRYPTO)=CRYPTO.$$

相应于密钥 K 的解密函数 d_K 定义为

$$d_K=e_{26-K},$$

因此，

$$d_6(SAVOJ)=e_{20}(SAVOJ)=MUPID.$$

显然，在这种情况下所有函数 e_K 和 d_K 都是从 Σ^* 到 Σ^* 上的一一映射(bijection)．

CAESAR 的密钥空间的势(cardinality)非常小．按照前面论述的好坏准则，具有这种性质的密码体制都是不好的：密码分析可以简单地通过试测所有可能的密钥来进行．这项工作显得特别的容易，如果明文是某一自然语言中的句子．这时，对于适当长度的密文(比如长度大于或等于 10)，通常只有一个解密密钥可以产生出一则有意义的明文．自然语言的这种冗余度构成了许多密码体制的密码分析的基础；单个字母的、连续两个字母的及连续三个字母的统计分布知识也揭露了明文字母与密文字母之间的对应关系．

CAESAR 是广为使用的最古老的密码体制．现已研制出了各种各样的其他密码体制．所有这些经典密码体制都具有一个共同的性质，即一旦人们知道了加

密密钥 e_K，人们便也知道了相应的解密密钥 d_K.更明确地说，d_K可由 e_K直接导出或者 d_K 可从 e_K 中计算得到，而这种计算并不十分困难．因此，在经典密码体制中加密密钥 e_K 必须保密．否则，一旦加密密钥 e_K 被公开，相应的解密密钥 d_K 也随之暴露．

公开密钥密码体制 (public key cryptosystem) 的创新思想应归功于 W. Diffie 和 M. Hellman ([A3]). 与上面所说的经典密码体制相反，在公开密钥密码体制中 e_K 的知识未必会暴露 d_K．更准确地说，从 e_K 来计算 d_K 是十分困难的，至少对几乎所有的密钥 K 都是如此．

公开密钥密码体制的思想十分简单，那么为什么这一思想在密码学的历史中却姗姗来迟呢？ -- 个显著的原因是，在公开密钥密码学的思想实现以前必须要有计算复杂性的某些理论的准备（见复杂性理论 (complexity theory)）．

在所有业已建立的公开密钥体制中，由 R. Rivest, A. Shamir 及 L. Adleman 所设计的 RSA 体制现在已是最能经受得住检验的体制．到写作本文为止 (1988)，还没有发现 RSA 体制有什么严重的缺陷（到翻译本文为止 (1990)，情况也是如此）．

RSA 体制是基于这样的事实：从两个大素数 p 和 q 的乘积 $n=pq$ 中分解出这两个素数几乎是不可能的—— 按照当今已知的分解因式算法来做至少是这样．另一方面，产生大随机素数是容易的也是很快的．公开密钥加密是以 n 为基础，而解密则要求人们知道 p 和 q. 具体细节如下．

设 p 和 q 是两个大随机素数（比较典型的情况是，在它们的十进制表示中至少应具有 100 个数字）．记

$$n=pq \quad 和 \quad \varphi(n)=(p-1)(q-1)$$

（这里 φ 是 **Euler 函数** (Euler function)）．选取一个与 $\varphi(n)$ 互素的数 $e>1$ 以及一个满足下列同余关系的 d

$$ed \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$$

（由于 e 与 $\varphi(n)$ 互素，上面的同余关系有解，而且这个解可由 **Euclid 算法** (Euclidean algorithm) 很快求出）．

数 n 和 e 分别称为 RSA 体制的模 (modulus) 和加密指数 (encryption exponent)，它们一起构成了公开加密密钥．密文 c 是 $w^e \pmod n$ 的最小正剩余，其中 w 是字母表 $\{0, \cdots, 9\}$ 上的明文字．一般假定 w 的长度 i 满足不等式 $10^{i-1}<n<10^i$. 这样做的目的一方面是为了保证模计算不会引起什么歧义，另一方面是为了保证明文块不会太短．

利用简单的初等数论理论可以证明 $c^d \equiv w \pmod n$. 因此，陷门 (trapdoor) d 使人们能够解密．

例如，选取 $p=47$ 和 $q=59$，得到 $n=2773$ 及 $\varphi(n)=2668$. 再选取 $e=17$，得到 $d=157$. 由于 $10^3<n<10^4$，明文块应由四个十进制数字组成．例如，$1920^{17} \equiv 2109 \pmod{2773}$. 对于解密，$2109^{157} \equiv 1920 \pmod{2773}$.

分解 2773 是相当容易的，因此求出解密指数 $d=157$ 也是容易的．但是，人们真正感兴趣的是，p 和 q 都非常大以致无法从它们的乘积 n 中分解出来的情况．在这种情况下密码分析又是怎样进行的呢?

例如，假设人们在没有实际分解 n 的情况下能够计算出 $\varphi(n)$. 于是，由 $\varphi(n)=n-(p+q)+1$ 及公开的信息 n 立即可得 $p+q$. 另一方面，$p-q$ 是 $(p+q)^2-4n$ 的平方根，因而也立即可得．此时从 $p+q$ 和 $p-q$ 中立即可以计算出 p 和 q. 这就意味着由计算 $\varphi(n)$ 的算法可以导出一个分解 n 的算法，而且这两个算法的复杂性本质上是一样的．

公开密钥密码体制特别适用于认证和电子签名．

考虑利益冲突的双方 A 和 B，如银行与顾客或两个超级大国．当 A 向 B 传送消息时，A 应在消息上署名，而且这种署名应给予双方如下两种保护．

i) A 和 B 应同时受到保护，以免第三者 C 冒充 A 在信息系统中向 B 传送消息．

ii) A 应受到保护以免 B 能伪造适当的署名消息而声称这些消息是 A 传送给他的．

如果使用经典的密码体制，则要求 i) 能够以适当的形式得到满足，这时 A 和 B 应事先商定一个仅他们俩知道的保密的加密密钥．另一方面，由于 B 可能知道 A 产生署名的方式的某些情况，而要求 ii) 中规定 B 不应该具备产生 A 的署名的能力，因而这时要求 ii) 明显是难以得到满足的．另外，对于多用户的大通信网络，在每一对用户之间都使用不同的保密署名方法是根本不切实际的．

如果使用公开密钥密码体制，则要求 i) 和 ii) 都能得到满足，至少在原则上是这样的．A 以 $e_B(d_A(w))$ 的形式向 B 传送消息 w. B 先用他自己的保密解密密钥 d_B 从 $e_B(d_A(w))$ 中恢复出 $d_A(w)$，然后用 A 的公开加密密钥 e_A 从 $d_A(w)$ 中恢复出 w.（记住 e_A 和 d_A 是互逆的）．由于只有 A 才知道 d_A，要求 i) 和 ii) 同时满足．因此 C 和 B 都无法伪造 A 的署名．同样，A 事后也无法否认他向 B 传送过消息．

参考文献

[A1] Beker, H. and Piper, F., Cipher systems, Northwood, Books, 1982.

[A2] Denning, D. E., Cryptography and data security, Addison - Wesley, 1982.

[A3] Diffie, W. and Hellman, M., New directions in cryptography, *IEEE Trans. Inform. Theory*, IT－22 (1976), 644－654.

[A4] Rivest, R., Shamir, A. and Adleman, L., A method for obtaining digital signatures and public - key cryptosystems, *Comm. ACM*, **21** (1978), 120 - 126.

[A5] Saloma, A., Computation and automata, Cambridge Univ. Press, 1985.

G. Rozenberg, A. Salomaa 撰　杨恩辉 译　符方伟 校

保密学 [cryptology; криптология]

【补注】 **密码学** (cryptography)是研究如何在不安全的信道上实现安全保密通信的学科，而密码分析(cryptanalysis)是研究如何破译这种通信的孪生学科．保密学是密码学和密码分析相结合的学科．历史上第一台电子计算机便是因为要进行密码分析而在英格兰诞生的．有关保密学的详细的历史透视，可参考 D. Kahn 的著作，特别是 [A13]．关于这个主题的更多的情况和其他参考文献可参见[A3]．

密码体制(cryptosystem)的目的是要加密(eveipher)一个易懂的明文 (cleartext 或 plaintext)，从而产生一个难懂的密文(ciphertext)，或称密报(cryptogram)．指定的接收者必须能够解密(decipher)这一密文，从而恢复出原来的明文．但是，偷听者(eavesdropper)(也称为被动的密码分析员(cryptanalyst))必须不能够解密(decrypt)这一密文．

一个密码体制称为是受限的(restricted)，如果它的保密性是建立在对加密和解密算法保密的基础之上的．受限的密码体制通常是由业余的密码员设计的，对于合格的密码分析员来说，简直就是小孩玩的游戏．更为重要的是，在现代多用户的保密通信中它们没有任何使用价值．码(code)就可以看作是受限的密码体制．对于受限的密码体制，这里不再做更进一步的讨论．

一个密码体制称为是一般的(general)，如果它的保密性不是建立在对加密和解密算法的基础上，而是建立在一个相对短的被称为密钥(key)的参数的基础上．用户个人应该容易用他们各自的密钥从密文中译解出明文．而第三者，即使是密码体制的设计者，如果不知道实际上究竟使用了哪一个密钥，那也无法破译出该密码体制．在一般密码体制中，可能的密钥的数目应非常巨大，以防止能够用穷举搜索法(exhaustive search)破译密码(穷举搜索法指的是，逐一地使用每一个可能的密钥来解密一条已知的密文，直到出现一条有意义的明文为止)．但是，仅仅是数日巨大并不能保证密码体制的安全．

一个一般密码体制称为是保密密钥(secret - key)，如果通信的双方在事前必须对使用的密钥达成一个一致的意见．这就需要安全的密钥分布(key distribution)．当用户数目很大时，密钥分布是一个很严重的问题．

一个一般密码体制称为是公开密钥(public - key)，如果它能够使两个陌生的通信双方在不安全信道(见**通信信道**(communication channel))上实现安全保密通信．在这样的体制中，每一个用户选取一个私人密钥(private key)，由此得到一对算法．用户把其中的一个算法作为其公开加密算法(public enciphering algorithm)而公布于众，而把另外一个算法据为自己的私人解密算法(private deciphering algorithm)而严加保密．这样一来，任何一个要同用户通信的陌生人都可使用用户的公开算法来加密消息，然而只有用户本人能够通过使用其私人算法从密文中译解出明文．

除了保密通信以外，密码技术还有许多其他方面的应用．例如，认证(authentication)，数字签名(digital signature)，口令保护(password protection)及最小泄露证明(minimum disclosure proofs)，这些在下面都有所讨论．另外，[A3] 中还提及密码技术的下列应用：保递邮件(certified wail)，硬币投掷(coin flipping)，合同签署(contract signing)，安全的分布式计算(distributed computing)，选举方案(election schemes)，电子扑克游戏(playing electronic poker)，带加密数据(encrypted data)的计算，秘密的交换(exchange of secrets)，健忘的转让(oblivious transfer)，秘密的放大(privacy amplification)，秘密的保护(protection of privacy)，秘密共享(secret sharing)及软件保护(software protection)．

保密密钥体制 [secret-key systems]．一个保密密钥密码体制由以下几部分组成：密钥空间(key space) K，明文消息空间(cleartext message space) M_k，密文消息空间(ciphertext message space) C_k 以及一对函数 E_k: $M_k \to C_k$ 和 D_k: $C_k \to M_k$，其中 M_k，C_k，E_k 及 D_k 都依赖于 $k \in K$，而且对每一明文消息 $m \in M_k$，有 $D_k(E_k(m))=m$．如果已知密钥 k，则获得计算 E_k 和 D_k 的有效算法必须是容易的．密码体制用于保密通信的用法如下．如果 A 和 B 想在他们之间进行保密通信，而且期望他们的通信最终都能保密，那么他们事先必须商定一个使用的保密密钥 $k \in K$．每当 A 要向 B 传送具体的明文消息 $m \in M_k$ 时，A 用加密算法 E_k 产生 $c=E_k(m)$，然后在不安全的信道上把 c 传送给 B；B 在收到 c 后用解密算法 D_k 从中恢复出 $m=D_k(c)$．在许多实际的密码体制中，M_k 和 C_k 都是有限集，而且经常不依赖于密钥 k (如长度为 8 的符号串组成的集)．在这种情况下，实际的明文消息 m 可能太长而无法直接对它加密．这时，必须把 m 分成许多小块，数次重复使用 E_k．

考虑这样一个密码体制，其明文消息空间由 t 比特的字块组成．加密一个较长的消息的明显方法是，把消息分割成许多 t 比特的小字块，然后用同一个保密密钥

逐一地对每一小字块独立地加密. 这种思想称为电子码本(electronic code book)方式,应尽可能地避免使用. 它的最明显的弱点是,它告诉了密码分析者,如果密文中两个字块相同,那么明文中相应的两个字块也是等同的.

在密码学中还有其他几种操作方式(modes of operation)([A17]). 这里仅叙述密码组链接(cipher block chaining)方式.在这种方式中,引人了一个 t 比特字块 C_0(对其守密并不重要)来补充原来的保密密钥. 把明文 m 分割成 t 比特字块 $m=m_1\cdots m_n$. 对于每一个 $i\leqslant n$,按 $c_i=E_k(m_i\oplus c_{i-1})$ 计算相应的密文字块 c_i,其中"$\oplus$"表示逐比特的不可兼的"或". 最终,产生出密文 $c=c_1\cdots c_n$. 如果已知密文和 k、c_0,则可以通过计算 $m_i=c_{i-1}\oplus D_k(c_i)$ 来实现解密. 使用这种操作方式不会产生误差传播: 明文字块 m_i 仅依赖于密文字块 c_i 和 c_{i-1}. 因此一个传输误差仅能破坏解密明文的两个字块. 不过密文的每一个字块 c_i 却依赖于 i 以前(包括 i)的所有明文.

保密密钥密码学区分了三种密码分析的破译水平(level of cryptanalytic attack).

1) 专用密文破译(ciphertext only attack): 密码分析者已知 $c_1=E_k(m_1),\cdots,c_i=E_k(m_i)$,要从中推断出 k,如果不行,则要从中推断出尽可能多的明文 $m_j(1\leqslant j\leqslant i)$.

2) 已知明文破译(known plaintext attack): 密码分析者不仅已知 $c_1,\cdots,c_i$,而且还已知相应的 $m_1,\cdots,m_i$. 要从中推断出 k,如果不行,则从新的密文 $c_{i+1}=E_k(m_{i+1})$ 中推断出 m_{i+1}.

3) 选择明文破译(chosen plaintext attack):密码分析者可以选择明文消息 $m_1,\cdots,m_i$,同时也知道相应的密文消息 $c_1=E_k(m_1),\cdots,c_i=E_k(m_i)$. 要从中推断出 k,如果不行,则从新的密文 $c_{i+1}=E_k(m_{i+1})$ 中推断出 m_{i+1}.

对保密密钥密码体制的主要密码分析的威胁来自消息语言具有较高的冗余度. 因为这时可以使用几种统计破译方法来破译密码([A8]). 为此, C. Shannon 提出了两个基本的破坏统计分析的密码方法: 扩散法和混淆法.

扩散法(diffusion)的目的是使明文的冗余度能较均匀地分布在密文之上. 一个置换(transposition)密码是将字符在消息中的书写顺序重新排列. 扩散法的另一种方法是使密文中的每一个字符与明文中尽可能多的字符有相依关系. 密码组链接方式便很善于产生扩散.

混淆法(confusion)的目的是使密钥与密文之间的关系变得尽可能的复杂. 其结果应是,密码分析员从对密文的统计研究中得不到太多有关密钥的有用信息. 通常,这可由代换(substitution)技巧来实现. 可取的办法是,在几个字符组成的字块上使用代换,或对明文中的不同位置使用不同的代换.

尽管密码分析员的最终目标是要精确地估算出实际使用的密钥或者至少是实际传送的明文消息,但他也许对知道了后者的概率信息就感到满意. 密码分析员甚至在观察密文以前就有了明文的先验信息. 例如,他知道"hello"远比"xykph"更为可能. 密码分析就是试图通过修正明文的先验概率来加强这一先验信息,从而使正确的明文显得更加可能,尽管不一定必然. Shannon 的信息论(information theory)给出了先验信息这一概念的形式定义([A19]).

一个密码体制达到了完满保密(perfect secrecy),如果密文的知识不会产生任何有关相应明文的信息,但可能的例外是相应明文的长度. 换而言之,观察到密文后的后验概率与先验概率完全一样. 这样的体制是存在的,但是相应的密钥分布问题却变得突出了,因为完满保密只有当密钥至少与明文一样长,且仅被使用一次时才成为可能.

如果一个密码体制不提供完满保密,那么它所产生的密文包含着相应明文消息的某些信息. 一个密码体制的唯一性距离(unicity distance)是这样的密文长度——为了期望存在唯一的一个有意义的解密而所需要的密文长度. 对于具有固定密钥空间的经典密码体制,其唯一性距离渐近等于 $H(K)/D$,其中 $H(K)$ 是密钥空间的熵(key space entropy)(大致等于密钥数目的以 2 为底的对数),D 是明文消息语言的单字比特(bit)冗余度(redundancy)(英语语言的冗余度大约为 3.5). 一个密码体制提供理想保密(ideal secrecy),如果它的唯一解距离等于无穷大. 对于这种密码体制,无论密文有多长,在专用密文密码分析以后通常仍残存着某些不肯定性,但是密码分析仍会带来相应明文的某些信息.

一次用密码本(one-time pad)提供完满保密.设 m 是一明文消息,如"hello",又设 k 是一与 m 等长的完全随机的字符串,如"iwpbu". m 中的每一字符都要经受一次循环移位,移位的数值由 k 中相应的字符给出. 在我们所举的例子中,明文字母"h"为"q"所代替, 在英文字母表中, "q"排在"h"后面的第 9 位,这是因为相应的密钥字母"i"在英文字母表中是第 9 个字母. 如此继续,最终产生出密文"qbbnj". 从密文中恢复出原来的明文是容易的,倘若已知密钥. 然而,如果不知道实际使用的密钥,那么任何同样长的明文都可由一适当的密钥解译出来,因为假定了密钥是完全随机的,且仅被使用一次.

一个序列称为伪随机的(pseudo-random),如果它看上去是随机的. 实际上,伪随机序列由称为伪随机

序列生成器(pseudo-random generator)的确定性过程产生(见**伪随机数**(pseudo-random numbers)).这样的生成器读入一个称为种子(seed)的随机起动序列,由它确定性地产生出更长的伪随机序列.一个伪随机序列生成器称为密码强的(cryptographically strong),如果它读人一个较短的保密种子后所产生的伪随机序列用作一次用密码本时,效果与真正的随机序列一样好.密码强的伪随机序列生成器可以用来实现保密密钥密码体制,这时通信的双方应事先商定一个他们将要使用的保密种子.但是,同一保密种子的直接使用次数不应多于一次.较之真正的一次用密码本,这种密码体制具有如下优点:密钥的长度比明文消息的长度小得多.[A1]描述了一个有效的伪随机序列生成器,其密码强度与因子分解难度相当.

扩散法和混淆法结合使用时产生的效果更好.广为使用的数据加密标准(data encryption standard),简称 DES,是这方面的典范.DES 使用 56 比特密钥加密 64 比特数据块.通过一个密钥排定(key scheduling)算法,DES 算法把密钥变成了 16 个 48 比特的部分密钥(partial key),其中密钥的每一比特在密钥排定算法的运行中被多次使用.一个 64 比特的数据块必须经过一系列的加密运算,起初是一个标准的初始置换(initial permutation),之后是 16 轮(round)加密运算,最后是初始置换的逆置换.每一轮加密运算使用了相应的部分密钥以及所谓的 S 盒(S-box),结果使得冗余度得到了一次又一次的扩散和混淆.DES 算法的设计使得解密可由与加密过程完全相同的过程来完成,只要在密钥排定中将部分密钥的顺序颠倒过来.因此同样的设备既可用来实现加密,也可用来实现解密.当在硬件中实现时,DES 的加密与解密速度都相当快(1987 年高达 14 兆比特/秒).[A16]详细地给出了 DES 算法.

关于 DES 的安全性问题,学术界一直争论不休.诱发争论的原因主要来自于这样的事实:DES 的密钥空间不大,以致于运用穷举搜索法破译 DES 是完全可行的.如果一百万个处理器并行地工作,每一个处理器每秒钟试测一百万个密钥,那么在二十小时内就会穷尽整个密钥空间.不过,对于中型规模的保密性工作,DES 还是足以胜任的.运用一个简单的技巧便可以使得穷举搜索法变得十分困难,在实际应用中 DES 应同这一技巧结合起来使用.这一技巧不是用一个 56 比特的密钥而是用三个这样的密钥 k_1, k_2 及 k_3 来加密一个 64 比特的明文块 m,加密过程是 $c=\mathrm{DES}_{k_1}(\mathrm{DES}\ k_2^{-1}(\mathrm{DES}_{k_3}(m)))$.其中,在公式的第二阶段中 DES 的逆的使用是为了提供与单一加密的相容性:当 k_1, k_2 和 k_3 相等时,$c=\mathrm{DES}_{k_1}(m)$.有人建议可以只使用两个密钥,或者在上述公式中令 $k_3=k_1$,或者简单地计算 $c=\mathrm{DES}_{k_1}(\mathrm{DES}_{k_2}(m))$,但是这两种方案都经受不住更复杂巧妙的破译方法的考验.

公开密钥体制[public-key system].一个公开密钥密码体制由以下几部分组成:密钥空间 K,明文消息空间 M_k,密文消息空间 C_k,以及一对函数 $E_k: M_k\to C_k$ 和 $D_k: C_k\to M_k$,其中 M_k, C_k, E_k 及 D_k 都依赖于 $k\in K$,而且 E_k 和 D_k 对任意的明文消息 $m\in M_k$,满足:$D_k(E_k(m))=m$.如果已知任一密钥 k,那么获得计算 E_k 和 D_k 的有效算法必须是容易的.公开密钥体制与保密密钥体制的差别在于,在公开密钥体制中,从计算 E_k 的算法的知识中推断计算 D_k 的任何有效算法必须是不可行的.

公开密钥密码体制的用法如下.每一用户随意选择一个密钥 $k\in K$,之后不作任何更动.用户用密钥 k 获得计算 E_k 及 D_k 的两个算法,将 E_k 公布于众而对 D_k 严加保密.当另一用户向他传送消息时,先在公开的算法薄中查找出他的公开加密算法,然后用这一算法来加密所要传送的消息.只有合法接收者本人能够用他自己的保密算法破译这一消息.公开密钥体制这一概念首次由 W. Diffie 和 M. E. Hellman([A6])以及 R. C. Merkle([A14])独立地提出.

对于任意所选的明文消息,密码分析员都能获得其相应的密文.密码分析员的这一能力使得前面讨论的保密密钥密码体制的经典破译水平完全失去了意义.但是,下边有意义的破译水平却时而被采用.

4) 选择密文破译(chosen ciphertext attack):假定面对着一个特定的用户,其加密及解密算法分别是 E_k 和 D_k.密码分析员可以选择密文消息 $c_1,\cdots,c_i$,同时也已知相应的明文消息 $m_1=D_k(c_1),\cdots,m_i=D_k(c_i)$(假如他们存在).要从中推断出 k 或计算 D_k 的有效算法,如果不行,则从新的密文消息 $c_{i+1}=E_k(m_{i+1})$ 中推断出 m_{i+1}.

考虑两个任意的集合 X 和 Y、一个函数 $f: X\to Y$ 称为是单向的(one-way),如果对任意的 $x\in X$,容易计算 $f(x)$,而对大部分 $y\in Y$,却很难计算出满足 $f(x)=y$ 的 x(假如至少有一个这样的 x 存在).尽管人们目前的知识水平还不能够证明单向函数的存在性,但是有一些函数却被认为是单向的.例如,考虑整数乘法(integer multiplication).两个大整数的乘积是容易计算的,但即使是功能最强的计算机,使用最好的已知算法,在人类的有生之年也无法计算出一个只有两百位数字的整数(它等于两个大致相等的素数的乘积)的因子分解.

一个函数 $f: X\to Y$ 称为单向陷门的(trapdoor one-way),如果 f 及其逆函数都能被有效地计算,但公布计算 f 的有效算法并不能使人从中估算出计算其逆函数的有效算法.使人们既能获得计算函数 f 的有效算法又能获得计算其逆函数的有效算法的秘密称之为

陷门(trapdoor).单向陷门函数的一个很有希望的例子是平方后对一个复合整数取模(squaring modulo a composite integer)的运算. 设 n 是两个不同的大素数之积. 令 $x \equiv y^2 (\bmod n)$,其中 x 与 y 都在 0 到 $n-1$ 中取值. 已知 y 和 n 计算 x 是容易的. 但是,已知 x 和 n 要有效地计算出 y(或任何其他满足 $x \equiv z^2 (\bmod n)$ 的 z)却不是一件容易的事情,它可行的充要条件是 n 的因式分解已知或容易求得. 因此,假如因式分解是难的,那么平方后对一个复合整数取模的运算便是一个单向陷门函数,而陷门就是模的因子.

公开密钥密码体制只有当单向函数和单向陷门函数都存在时才可能存在. 事实上,公开密钥体制中的加密函数必须是单向陷门的,而把密钥映成加密算法的函数必须是单向的. 因此,人们只好满足于那些安全性一直得不到证明的公开密钥密码体制. 著名的 RSA 密码体制(RSA cryptosystem)(该体制是用其发明者 R. L. Rivest, A. Shamir 和 L. Adleman 的名字命名的([A18]))便是那些体制中的一种. RSA 体制建立在计算数论的基础上,其安全性至多与分解大整数的难度相当(或许略差一点). 现在可以购买到它的硬件及软件实现. 注: Merkle 与 Hellman 的所谓的背包密码体制(knapsack cryptosystem)([A15])已被 Shamir 破译([A5]).

公开密钥密码学的缺陷在于,通过对密文的窃听,窃听者总能获得相应明文的某些信息. 例如,窃听者可以使用公开的加密算法来验证对实际明文所做的任何具体猜测. 为了克服这一缺陷, S. Goldwasser 和 S. Micali 首次提出了概率加密(probabilistic encryption)的概念([A11]). 概率加密的目的是要这样加密明文消息,使得获得明文的任何部分信息(partial information)的难度本质上与完全破译该密码体制的难度一样. 在概率加密体制中,加密算法是概率性的: 同一明文消息可以产生出许多不同的密文.

概率加密的 M. Bum 和 Goldwasser 的实现([A2])是以单向陷门函数以及前面提及的密码强的伪随机序列生成器为基础. 直观上,发送者利用密码强的伪随机序列生成器从他随机选取的种子中产生出一个适当长度的伪随机的一次用密码本. 接收者利用他的陷门信息提取平方根,由此恢复使用的一次用密码本,并估算实际传送的明文. 破译该密码体制的难度等价于分解大整数的难度.

尽管公开密钥密码学和概率加密具有保密密钥密码学所不可替代的优点. 但是迄今为止所提出来的一些实现在速度(speed)上没有一个能比得上象 DES 这样的保密密钥体制. 杂交密码体制(hybrid cryptosystem)先用一个公开密钥体制产生一段长度较短的为通信双方共享的信息, 然后将这一信息用作一个保密密钥体制中的一个密钥来加密和解密实际的消息. 如果实际传送的消息很长,那么为了经常改变密钥,在传输中多次使用该公开密钥体制是可取的. 在这一方面, 使用公开密钥分布体制(public key distribution system)比使用公开密钥体制更为可取.

迄今为止,人们还不能证明安全的公开密钥体制或概率加密是否存在. 这一存在性问题与计算复杂性理论中的基本问题,P 是否等于 NP,密切相关([A9]). 事实上,如果 P=NP, 那么安全的公开密钥体制是不可能存在的,因为这时利用公开的已知信息可以有效地验证对密钥所作的任何猜测. 而且,在理论上已有理由相信,不存在这样的公开密钥密码体制,其密码分析的任务是 NP 完全的(NP-complete).

认证(authentication)与**签名**(signature)到现在为止仅仅是讨论了被动(passive)密码分析员的概念. 被动密码分析员的目的仅仅是窃听通信信道. 主动的密码分析员(active cryptanalyst)不仅能够窃听通信信道,而且还可以在传输中插入他自己的消息,以期望能够欺骗接收者,使他相信这一消息为他人所发. 主动的密码分析员还可以改变传输中的真实消息.

一个认证方案(authentication scheme)由以下几部分组成: 密钥空间 K, 消息空间(message space) M_k, 标签空间(tag space) T_k 以及一个认证函数(authentication function) A_k: $M_k \to T_k$, 其中 M_k, T_k 和 A_k 都依赖于 $k \in K$. 函数 A_k 不必是一对一的,它甚至可以是压缩的. 如果已知任一密钥 k, 那么获得计算 A_k 的有效算法必须是容易的. 但是,仅仅已知 m 和 $A_k(m)$,要从中推断出 k 是不可能的, 甚至连推断出 $A_k(m')$ 都是不可能的,其中 m' 是一条不同于 m 的消息. 认证体制的用法如下. 如果 A 和 B 认为也许在他们之间会有认证消息,那么他们事先必须商定好一个密钥 $k \in K$. 每当 A 要对 B 证实某一消息 $m \in M_k$ 时, A 计算 $t=A_k(m)$ 并把 t 连同 m 一起传送给 B. 为了验证所收到的消息的真实性, B 同样也计算 $A_k(m)$,并把它与所收到的标签进行比较. 当然,这并不排除对 m 的加密,如果既要求保密,又要求认证.

尽管认证体制能使 B 充分相信他所收到的消息确实来自于 A, 但是却无法使任何其他人相信 A 确实向 B 传送过 B 所收到的消息. 这就使得认证体制无法用来解决通信双方之间的纠纷,只能用在两个相互信赖的通信双方之中. Diffe 和 Hellman 发明了一个更强的概念——数字签名([A6]). 如果 A 向 B 传送一个数字署名的消息,那么 B 不仅能够自己确信这一消息确为 A 所署名, 而且还能够向仲裁者证明 A 确实在这个消息上签过名.

一个公开密钥密码体制具有签名能力(signature capability), 如果对于每一个 k, $M_k = C_k$, 且对于每一消

息 $m \in M_k$, $E_k(D_k(m))=m$. 当该体制用于数字签名时，其用法如下．设 a 是某一用户 A 的保密密钥，又设 E_a 和 D_a 分别是 A 的公开加密函数和保密解密函数．考虑一明文消息 m，并令 $s=D_a(m)$．任何人都能计算出 $E_a(s)$，知道它的值是 m．但是，只有 A 具有能力获得满足 $E_a(s)=m$ 的 s．在这个意义上，s 可以被看作是 A 在消息 m 上的署名．如果保密性也需要考虑，那么数字署名的消息应该用接收者的公开加密算法 E_b 来进行加密，产生出 $E_b(D_a(m))$. 如果消息很长，那么在它的单向压缩上署名是可取的．

口令保护 [password protection]. 每当用户想使用计算机(或顾客想用自动出纳机，或自动出纳机想接通银行的中央计算机)时，后者如何能够确信前者没有假冒他人的身份？解决这一问题的传统方法是使用口令．假定用户和计算机在他们之间分享某一保密的消息．每当用户的身份受到怀疑时，计算机便要求用户出具这一保密消息．这种方法的安全性完全取决于对口令保密的能力．这一事实表明，在用这种方法解决上述问题的过程中存在着两个薄弱环节：口令表在计算机内部的存储以及用户在键入他的口令时所受到的窃听威胁．

单向函数可以用来克服口令表的脆弱性：在计算机内部储存用户的口令在某一固定的单向函数作用下的象．由于函数是单向的，无需对函数本身保密．每当用户欲证明其身份时，用户向计算机传输他实际的口令，计算机在收到口令之后立即将单向函数作用于其上，对照它内部所储存的象表验证所计算出的结果．而对计算机内部所储存的象表，敌手只能望洋兴叹，因为他无法计算出单向函数的逆，因而无法确定出实际的口令．如果用户使用的口令容易猜测，这种体制则相当脆弱，尽管这时可用一个简单的称为加盐处理(salting)的技巧来补救．

尽管单向函数的使用可以克服口令表的脆弱性，但是口令仍然容易被窃听：或者在它向计算机传输的过程中，或者在它已存入了计算机内存但还没有来得及被单向函数作用的那段时间内．智能终端或个人精明卡(最好是后者)可以用来解决这一问题．为此，该体制的每一位用户从某一共同的公开密钥密码体制中随意选取一个保密密钥，由此产生一对相应的加密与解密算法．用户向计算机公布其加密算法，而对其解密算法则为它编程并把程序存入他自己的终端或精明卡．每当计算机要证实一个用户的身份时，计算机产生一则随机的消息，计算这个用户的加密算法在这则消息上的值，并把所得到的结果作为一个查问(challenge)传送给用户的终端．用户的终端运用它的保密程序，重新计算出原来的消息，并把这一消息送回给计算机以便证实．这种身份证明体制可以以连续查问(continuous challenge)方式使用，这时计算机定期对终端查问．对于实际的实现而言，查问最好是能够非常迅速地进行，即使对它们的回答需要大量的计算．这是因为①主机一般都连接了许多终端；②从用户的眼光看，主机必须仍能以高速运行；③对查问的回答是在各个终端上独立进行的．

身份证明问题(identification problem)同样也可以用下面要叙述的最小泄露技巧来解决([A7])．

最小泄露证明 [minimum disclosure proofs]. 假设我发现了 Fermat 大定理的一个证明．在没有泄露有关这一证明的任何信息(除了这一证明的存在性以及我对这一证明的了解以外)的情况下，我怎样才能使你相信我确实知道了这样一个证明？一般地，一则信息称为可证实的(verifiable)，如果可以通过使用某一普遍承认的证实程序来有效地建立其正确性的证明．为了能使你相信我确实知道某一则可证实的消息，我可以把这则消息完全告诉给你，然后你可自行运用证实程序予以检验．这种方法是这一知识(指的是我知道那则可证实的消息)的最大泄露证明，因为这样一来你会知道有关那则可证实的消息的所有信息．与此相反，最小泄露证明能让我使你毫无怀疑地相信我确实知道我所宣布的那则消息，但却无助于你确定出这则消息是什么．

零知识交互作用证明(zero-knowledge interactive proofs)首次由 Goldwasser, Micali 和 C. Rackoff 提出([A12])．对于具体的数论问题，例如判断是否是二次剩余(quadratic residue)的问题，他们证明了这种零知识交互作用证明的存在性．后来发现，在密码假设下可以推广这一技巧，将它应用于 NP 类(甚至 NP 类的概率推广)中的任一语言的成员关系判别问题([A10], [A4])．具体地说，考虑任一语言 $L \in NP$ 以及任一字符串 $x \in L$. 假设我给出了 $x \in L$ 的一个 NP 证明，则存在一个协议使得我能够使你相信 $x \in L$，但是你却无法知道有关这一证明的任何细节．类似的技巧能让我使你相信我确实知道某一给定的大整数的分解因子，但却无助于你分解这一整数．对于构造安全的密码协议(crypto-protocols)来说，这是一个非常有效的手段．

一般的技巧由一个交互作用的协议组成．在协议的每一轮问答中，我仅允许你在两个可能的查问中选择其中的一个向我提出，只有当我确实掌握了我所声明的那个秘密时，我才具备回答这两个查问的能力，而且只回答其中的一个查问并不向你提供有关这一秘密的任何信息．由于事先我无法预测你究竟会向我提出哪一个查问，因此协议中的每一轮问答的实现都会增强你相信我的声明的信心．事实上，我能够连续 k 次地愚弄你的概率是 2^{-k}，它以指数下降的速度趋于 0. 由于该协议的每一轮问答非常类似于两个小孩在切割一块蛋糕时所使用的经典"协议"——一人切割，另一人选择——人

们便把这种技巧称为切割 - 选择(cut - and - choose)技巧.这种切割 - 选择技巧的最大效用在于,它以协议中问答轮数的线性增长的代价换取了安全性的指数增加.

参考文献

[A1] Blum, L., Blum, M. and Shub, M., A simple unpredictable pseudo - random number generator, *SIAM J. Computing*, **15** (1986), 2, 364 – 383.

[A2] Blum, M. and Goldwasser, S., An efficient probabilistic public-key encryption scheme whichhides all partial information, in *Proc. Crypto* 84, Springer, 1985, 289 – 299.

[A3] Brassard, G., Modern cryptology: a tutorial, Springer, 1988.

[A4] Brassard, G., Chaum, D. and Crépeau, C., Minimum disclosure proofs of Knowledge, Techn. Report PM - R8710, CWI, 1987. Revised Version.

[A5] Brickell, E. F., The cryptaralysis of krapsack cryptosystems, in Proc. Third SIAM Discrete Mathematics Conf.

[A6] Diffie, W. and Hellman, M. E., New directions in cryptography, *IEEE Trans. Inform. Th.* IT - **22** (1976), 644 – 654.

[A7] Feige, U., Fiat, A. and Shamir, A., Zero knowledge proofs of identity, in Proc. 19th ACM Symp. Theory of Computing, 1987, 210 – 217.

[A8] Friedman, W. F., Elements of cryptaralysis, Aegean Park Press, Laguna Hills, CA, 1976, written earlier.

[A9] Garey, M. R. and Johnson, D. S., Computers and intractability: a guide to the theory of NP - Completeness, W. H. Freeman, 1979.

[A10] Goldreich, O., Micali, S. and Wigderson, A., Proofs thatyield nothing but their Validity and a methodology of cryptographic protocol design, in Proc. 27 th IEEE Symp. Foundations of Computer Science, 1986, 174 – 187.

[A11] Goldwasser, S. and Micali, S., Probabilistic encryption, *J. Computer and System Science*, **28** (1984), 270 – 299.

[A12] Goldwasser, S., Micali, S. and Rackoff, C., The knowledge complexity of interactive proof - systems, in Proc. 17 th ACM Symp. Theory of Computing, 1985, 291 – 304.

[A13] Kahn, D., The Codebreakers: the story of secret writing, Macmillan, 1967.

[A14] Merkle, R. C., Secure communications over insecure channels, *Comm. ACM*, **21** (1978), 294 – 299.

[A15] Merkle, R. C. and Hellman, M. E., Hiding information and signatures in trapdoor Knapsacks, *IEEE Trans. Inform. Theory*, IT - **24** (1978), 525 – 530.

[A16] Data encryption standard, in Federal Information processing Standard, FIPS PUB, Vol. 46, Nat. Bureall Standards, U. S. Department Commerce, 1977.

[A17] DES modes of operation, in Federal Information Processing Standard, FIPS PUB, Vol. 81, Nat. Bureau Standard, U. S. Department Commerce, 1980.

[A18] Rivest, R. L., Shamir, A. and Adleman, L., A method for obtaining digital signatures and public - key cryptosystems, *Comm. ACM*, **21** (1978), 120 – 126.

[A19] Shannon, C. E., Communication theory of serecy systems, *Bell System Technical Journal*, **28** (1949), 656 – 715.

G. Brassard 撰　杨恩辉 译　符方伟 校

晶体群[crystallographic group; кристаллографическая группа]

n 维 Euclid 空间 E^n 中具有有界**基本域**(fundamental domain)的运动的离散群. 两个晶体群称为等价的(equivalent),如果它们在 E^n 的仿射变换群下共轭.

晶体群理论的来源与装饰物的对称性($n=2$)及晶体构造($n=3$)的研究有关. 所有平面的(planar)(二维的)和空间的(spatial)(三维的)晶体群(crystallo graphic groups)的完全分类在19世纪末被 E. C. Федоров 以及稍后些被 A. Schoenflies 所完成,(见[2],[3],也见[6],[7],[9]). 在等价意义下共有 17 个平面的和 219 个空间的晶体群;然而在保持定向的仿射变换下将空间的群进行共轭分类,则它们的数目是 230 个. 1910 年, L. Bieberbach 研究了任意维数的晶体群([4]). 特别地,他证明了下述定理:

1)任何 n 维晶体群 Γ 包含 n 个线性无关的平行移动;Γ 中变换的线性部分构成的群 G 是有限群.(对 $n=3$, 已在 [3] 中得到证明.)

2)两个晶体群等价,当且仅当它们作为抽象群是同构的.

3)对任何 n,在等价意义下仅有有限多个 n 维晶体群(这是 Hilbert 第 18 问题的解答).

定理 1 产生晶体群作为抽象群结构的下列描述. 令 L 是晶体群 Γ 中所有平行移动的集合,则 L 是有限指数的正规子群,它同构于 $\mathbf{Z}^n$,并且是它自己在 Γ 中的中心化子. 具有这些性质的正规子群 L 的抽象群 Γ 同构于一个晶体群([7]).

晶体群 Γ 的线性部分构成的群 G 保持格 L; 换句话说,对于 L 的基, G 中的变换由整数元素的矩阵所表示.

为了确定晶体群 Γ, 必须——附加于 G 和 L——对每个 $g\in G$, 确定向量 $a(g)$, 使得变换

$$x\mapsto gx+a(g),\quad x\subset E^n$$

属于 Γ. 在相差用 L 中的一个向量相加的意义下, 向量 $a(g)$ 是唯一的. 映射

$$\alpha: g \mapsto a(g)+L$$

是 G 上的一维闭上链，其值在 V/L 中，其中 V 是与 E^n 相应的向量空间.

如上所说，任何三元组 $\{G, L, \alpha\}$ 就对应于某个晶体群，其中 $G \subset GL(V)$ 是有限线性群，L 是 G 不变格，α 是 G 上的一维闭上链，其值在 V/L 中. 在这对应之下，当 α_1 和 α_2 是两个上同调的闭上链时，两个三元组 $\{G, L, \alpha_1\}$ 和 $\{G, L, \alpha_2\}$ 对应于等价的晶体群. 零上同调类对应于分裂的(或对称形的)晶体群(split (or symmorphic) crystallographic group)，对于原点的适当选择，它是全体变换

$$x \mapsto gx+a \quad (x \in E^n)$$

的集合，其中 $g \in G$, $a \in L$.

用矩阵来解释，所有 n 维晶体群的描述化为 n 阶整数元素方阵的有限群的描述(在群 $GL_n(\mathbf{Z})$ 的共轭意义下)，并对每个这样的群 G 来计算上同调群 $H^1(G, \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n)$.

两个上同调类定义等价的晶体群，当且仅当它们在 G 在 $GL_n(\mathbf{Z})$ 中的正规化子下互相变换. Bieberbach 定理 2 和属于 H. Zassenhaus ([7])的一个结果蕴含着自然同态

$$H^1(G, \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n) \to H^2(G, \mathbf{Z}^n)$$

是一个同构. 从 G 的正合上同调序列立即可推得它.

两个晶体群属于同一个类(class)(算术类(arithmetical class))，若它们的线性部分构成的群在 $GL_n(\mathbf{R})$ (在 $GL_n(\mathbf{Z})$)下是共轭的. 对于 $n=3$, 结晶体群有 32 个类和 73 个算术类.

在整数元素矩阵的有限群中，能挑出格对称性群，即保持向量空间中某个固定格的全体正变换的群(这个向量空间由格的基生成). 1848 年，A. Bravais 确定了所有可能的三维格对称性群，且因此把全体三维格分成 14 种类型(称为 Bravais 类型 (Bravais types))，若 $GL_n(\mathbf{Z})$ 的子群是格对称性群就称之为 Bravais 子群 (Bravais subgroups).

Bravais 子群也可解释成 $GL_n(\mathbf{Z})$ 在 n 变量的正定二次型集合上自然作用的稳定子群. 因此它们可用化简理论来决定(见[11] 及二次型的化简 (quadractic forms, reduction of)). $GL_n(\mathbf{Z})$ 的每个极大有限子群是 Bravais 子群(但其逆不真).

下面的表列出了 $GL_n(\mathbf{Z})$ 的有限子群的数目(在共轭意义下).

n	最大有限子群数	Bravais 子群数	有限子群数
1	1	1	2
2	2	5	13
3	4	14	73
4	9	64	710
5	17	?	?

Bravais 子群的交仍是 Bravais 子群. 包含晶体群 Γ 的线性部分构成的群 G 的最小的 Bravais 子群 $\hat{G}$ 在 $GL_n(\mathbf{R})$ 的(对应地，在 $GL_n(\mathbf{Z})$ 的)共轭意义下，称为 Γ 的几何(算术)全对称(geometrical (arithmetical) holohedry). 设 Γ 是一般位置上的晶体群(crystallographic group in general position)，其意义是没有仿射变换将它映到一个晶体群，其平行移动的格有较低的对称性，则 $\hat{G}$ 是 Γ 的平行移动的格的对称性群，两个晶体群属于同一晶系(syngony)(Bravais 类型 (Bravais type))，如果它们的几何上的(算术上的)全对称重合. 对 $n=3$, 有 7 个晶系的和 14 个 Bravais 类型的晶体群.

晶体群的线性表示 (linear representations of crystallographic groups). 晶体群 Γ 的有限维不可约复线性表示可描述如下. 令 χ 是群 L 的某个特征标(即它到复数乘法群的同态)，令

$$\Gamma_\chi = \{\gamma \in \Gamma: \chi(\gamma l \gamma^{-1}) = \chi(l), \text{对所有} l \in L\},$$

且令 σ 是 Γ_χ 的不可约表示使得 $\sigma(l)=\chi(l)\cdot 1$, 其中 $l \in L$, 则 Γ 的由子群 Γ_χ 的表示 σ 所诱导的表示(见**诱导表示**(induced representation))是不可约的. Γ 的所有不可约表示皆可这样得到(见[9], [10]).

参考文献

[1A] Bravais, A., Abhandlung uber die systeme von regelmässig auf seiner Ebene oder Raum vertheilten Punkten, Teubner, 1897.

[1B] Bravais, A., Abhandlung über symmetrische Polyeder, Teubner, 1890.

[2] Федоров, Е. С., Симметрия и структура кристаллов. Основные работы. М., 1949, 111-255.

[3] Schoenflies, A., Kristallsysteme und Kristallstruktur, Teubner, 1891.

[4A] Bieberbach, L., Ueber die Bewegungsgruppen der Euklidishen Räume I., *Math. Ann.*, **70** (1911), 297-336.

[4B] Bieberbach, L., Ueber die Bewegungsgruppen der Euklidisher Räume II, *Math. Ann.*, **72** (1912), 400-412.

[5] Делоне, Б., Падуров, Н., Александров, А., Математические основы структурного анализа кристаллов, Л.-М., 1934.

[6] Шубников, А. В., Атлас кристаллографических групп симметрии, М.-Л., 1946.

[7] Zassehaus, H., Ueber ein Algorithmus zur Bestimmung der Raumgruppen, *Comm. Math. Helv.*, **21** (1948), 117-141.

[8] Мальцев, А. И., Классическая алгебра, Избр. труды, т. 1, М., 1976, 371-375.

[9] Любарский, Г. Я., Теория групп и её применение в физике, М., 1957 (德译本: Lyubarskii G. Ya., Anwendung der Gruppentheorie in der Physik, Deutsch. Verlag Wissenschaft., 1962).

[10] Фаддеев, Д. К., Таблицы основных унитарных представлений федоровских групп, М.-Л., 1961.

[11] Делоне, Б. Н., Галиулин, Р. В., Штогрин, М. И., в кн., Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 2, М., 1973, 119-254 (英译本: Delone, B. N., Galiulin, R. V. and Shtrogrin, M. I., On the Bravais types of lattices, *J. Soviet Math.*, 4 (1975), 1, 79-156). Э. Б. Винберг 撰

【补注】 令 A 是 E^n 中仿射变换群. A 中平移构成正规子群 T, 而商群 A/T 是线性变换群. 令 G 是 A 的子群, 则 G 中平移构成正规子群 $T\cap G$; 商群 $G/(T\cap G)\subseteq GL(E^n)$ 通常称为 G 的点群; 这个群在前面称为线性部分构成的群.

Федоров 在1885-1889年间获得他的分类结果, 而 Schoenflies 在 1891 年左右得到一个分类. 230 个群的正确的表是在比较 Федоров 和 Schoenflies 的表之后才发现的(见[A1], 书中有历史和别的注记). 这两人都知道 L. Sohnke 的书[A2].

当 $n=5, 6, 7$ 时关于 $GL(n, Z)$ 的极大有限子群, 可参考[A3].

参考文献

[A1] Schwartzenberger, R. L. E., N-dimensional crystallography, Pitman, 1980.

[A2] Sohnke, L., Entwicklung einer Theorie der Kristallstruktur, Teubner, 1879.

[A3] Plesken, W. and Post, M., On maximal finite irreducible subgroups of GL(*n*, Z), I, II, *Math. Computation*, 31 (1977), 536-551; 552-573.

[A4] Klemm, M., Symmetrien von Ornamenten und Kristallen, Springer, 1982. 石生明 译 许以超 校

数学晶体学 [crystallography, mathematical; кристаллография математическая]

刻画晶体外部形式和它们的内部空间结构的方法的总称. 数学晶体学基于形成晶体点阵的质点是按一定次序排列的周期三维结构的思想. 在平衡条件下形成的晶体是具有某种对称性的正(则)凸多面体. 对称群的分类是根据它们在其中被定义的空间的维数 n, 在其中对象是周期的空间的维数 m (因此用 G_m^n 表示这个群), 以及各种其他原则. 为了描述晶体结构, 人们使用各种对称群, 其中最重要的是描述晶体原子结构的空间群 G_3^3, 以及描述晶体外部形式的点对称群 G_0^3.

点对称群 (point symmetry group) 的运算如下: 绕一个 N 阶对称轴的旋转 $360°/N$; 在一个对称平面内的反射(镜面反射); 反演 $\overline{I}$ (关于一个点的对称); 以及反演旋转 $\bar{N}$ (先旋转 $360°/N$, 然后再反演). 反演旋转有时用反射旋转 $\widetilde{N}$ 代替. G_0^3 群有无限多个. 然而由于晶体点阵的存在性, 晶体中仅可能有如下运算: 晶体中仅可能有至多六阶的旋转和至多六阶的对称轴; 但是晶体没有五阶旋转和五阶对称轴; 我们用 1, 2, 3, 4, 6 表示这些旋转. 可能有反演轴 I(这是一个对称中心), 并且可能有反演旋转 $\overline{2}=m$ (这是一个对称平面), $\overline{3}$, $\overline{4}$, $\overline{6}$. 描述晶体外部形式的点晶体群有 32 种.

仅包含旋转的群描述完全由相同的粒子所构成的晶体, 这些群称为第一类群. 包含反射或反演旋转的群描述的晶体中有镜象质点(尽管这些质点可能是相同的粒子), 这些群称为第二类群. 由第一类群刻画的晶体可以结晶为两种对映结构体形式, 不妨分别称其为"左"和"右", 虽然它们互为镜象, 但它们当中的每一个都不含有第二类对称元素.

结晶体的很多性质隶属于某一个具有无限阶对称轴的极限点群 (limit point group) 所刻画的类. 无限阶对称轴的存在意味着晶体旋转任意角(包括无限小的角)后都与其自身重合. 这样的群有七种.

晶体点阵的空间对称群 (spatial symmetry group) 或空间群 (space group) 由群 G_3^3 来刻画. 结构的运算特征是三个不共面的平移 **a**, **b**, **c**, 它们对应于晶体的原子结构的三维周期性.

由于在结构中的平移和点对称运算可以复合, 因此群 G_3^3 中也包括带有一个平移分量的运算和相应的对称元素 —— 各种阶的斜轴和滑移平面.

总之, 已经知道总共有 230 个空间对称群 G_3^3 (Федоров 群), 并且任何一个晶体都归属于这些群中的一个. 由于微小对称元素的平移分量宏观上看不到; 因此 230 个群 G_3^3 中的每一个宏观上相似于 32 个点群中的一个. 一个给定空间群中的平移构成的集合是它的一个平移子群, 或一个 Bravais 格 (Bravais lattice); 这样的格有 14 个. 亦见**晶体群** (crystallographic group).

参考文献

[1] Шубников, А. В., Флинт, Е. Е., Бокий, Г. Б., Основы кристаллографии, М.-Л., 1940.

[2] Федоров, Е. С., Симметрия и структура кристаллов, М., 1949.

[3] Шаскольская, М., Кристаллы, М., 1959.

主要内容取自 БСЭ-3 中的**晶体对称性** (symmetry of crystals) 一条. 卢景波 译

求体积公式 [cubature formula ; кубатурная формула]

近似计算形如

$$I(f) = \int_{\Omega} p(x)f(x)dx$$

的多重积分的公式．积分在 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 中的集合 Ω 上计算，$x=(x_1,\cdots,x_n)$．求体积公式是一个近似等式

$$I(f) \cong \sum_{j=1}^{N} C_j f(x^{(j)}). \qquad (1)$$

被积函数写成两个函数的乘积：假定第一个函数 $p(x)$ 对每一特定的求体积公式是固定的并且通称为权函数；假定第二个函数 $f(x)$ 属于某个使得积分 $I(f)$ 存在的相当广泛的函数类，例如连续函数类．公式(1)右端的和称为求体积和；点 $x^{(j)}$ 通称为该公式的插值点(结点，节点)，数 C_j 为公式的系数．通常 $x^{(j)}\in\Omega$，尽管此条件并非必要．为要通过公式(1)来计算积分 $I(f)$，只需计算求体积和．当 $n=1$ 时，公式(1)及其右端的和称为**求积公式** (quadrature formula)及求积和(quadrature sum)．

设 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 为一多重指标，其中 α_i 是非负整数；令 $|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$；再设 $x^\alpha=x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$ 为 n 元 $|\alpha|$ 次单项式；令

$$\mu = M(n,m) = \frac{(n+m)!}{n!m!}$$

为次数最高为 m 的 n 元单项式的个数；设 $\varphi_j(x)$ $(j=1,2,\cdots)$ 为所有单项式的一个排序使得次数较低的单项式有较小的下标而次数相等的单项式可任意排序，例如排成词典的顺序．按照这种编号，$\varphi_1(x)=1$ 且 $\varphi_j(x)$ $(j=1,\cdots,\mu)$ 包括了所有次数最高为 m 的单项式．设 $\varphi(x)$ 为一 m 次多项式．复空间 $\mathbf{C}^n$ 中满足方程 $\varphi(x)=0$ 的点的集合称为 m 次代数超曲面．

构造求体积公式的一种方法是基于代数插值．选取点 $x^{(j)}\in\Omega(j=1,\cdots,\mu)$ 使得它们不落在任何一个 m 次代数超曲面上，或等价地说，选取它们使 Vandermonde 矩阵

$$V = [\varphi_1(x^{(j)}),\ldots,\varphi_\mu(x^{(j)})]_{j=1}^{\mu}$$

为非奇异．以 $x^{(j)}$ 为结点的函数 $f(x)$ 的 Lagrange 插值多项式具有形式

$$\mathscr{P}(x) = \sum_{j=1}^{\mu} \mathscr{L}_j(x)f(x^{(j)}),$$

其中 $\mathscr{L}_j(x)$ 是第 j 个结点影响之下的多项式，$\mathscr{L}_j(x^{(i)})=\delta_{ij}$($\delta_{ij}$ 是 Kronecker 符号)．将近似等式 $f(x)\approx\mathscr{P}(x)$ 乘以 $p(x)$ 并在 Ω 上积分，可导出类型(1)具有 $N=\mu$ 的求体积公式，且有

$$C_j = I(\mathscr{L}_j),\ j=1,\ldots,\mu. \qquad (2)$$

积分(2)的存在性等价于权函数的矩量 $p_i=I(\varphi_i)$ $(i=1,\cdots,\mu)$ 的存在性．此处和下面均假定所需的 $p(x)$ 的矩量存在．具有 $N=\mu$ 个不含于任何 m 次代数超曲面上的结点且具有由(2)所定义的系数的求体积公式(1)称为插值求体积公式(interpolatory cubature formula)．公式(1)具有 m 性质(m-property)，如果当 $f(x)$ 是次数最高为 m 的多项式时它是精确等式；插值求体积公式具有 m 性质．具有 m 性质及 $N\leqslant\mu$ 个结点的求体积公式(1)是插值求体积公式，当且仅当矩阵

$$[\varphi_1(x^{(j)}),\ldots,\varphi_\mu(x^{(j)})]_{j=1}^{N}$$

的秩为 N．此条件当 $n=1$ 时成立，所以具有 m 性质及 $N\leqslant m+1$ 个结点的求积公式是插值求积公式．插值求体积公式的实际构造归结为结点的选择和系数的计算．诸系数 C_j 由线性代数方程组

$$\sum_{j=1}^{\mu} C_j\varphi_i(x^{(j)}) = p_i,\ i=1,\ldots,\mu$$

确定，该方程组是公式(1)(具有 $N=\mu$)对于次数不超过 m 的所有单项式都精确成立这一陈述的数学表达，方程组的矩阵恰为 $V'(=V^T)$．

今假定需要构造一个具有 m 性质但少于 μ 个结点的求体积公式(1)．这单靠选择系数是不能做到的，因为在(1)中不仅系数未知而且结点也未知，总共有 $N(n+1)$ 个未知数．由于求体积公式要具有 m 性质，故得到 μ 个方程

$$\sum_{j=1}^{N} C_j\varphi_i(x^{(j)}) = p_i,\ i=1,\ldots,\mu \qquad (3)$$

自然要求未知数个数与方程个数相一致，即要求 $N(n+1)=\mu$．这个等式给出结点个数的尝试性估计．如果 $N=\mu/(n+1)$ 不为整数，那么置 $N=[\mu/(n+1)]+1$，此处 $[\mu/(n+1)]$ 表示 $\mu/(n+1)$ 的整数部分．具此结点个数的求体积公式不一定总存在．如果它确实存在，那么它的结点个数是插值求体积公式结点个数的 $1/(n+1)$．然而，在那种情形中，结点本身及系数由非线性方程组(3)确定．在待定参数法中，人们试图通过给出求体积公式的某种形式来构造它，而这种形式将能使方程组(3)简化．当 Ω 和 $p(x)$ 具有对称性时，这是能够做到的．结点位置的选取要与 Ω 和 $p(x)$ 的对称性相容，并且此时规定对称的结点以相同的系数．方程组(3)的简化包含着某种风险：原来的方程组(3)或许是可解的，但简化的方程组未必可解．

例．设 $\Omega=K_2=\{-1\leqslant x_1,\ x_2\leqslant 1\}$．$p(x_1,x_2)=1$．要求构造一个具有 7 性质的求体积公式；$n=2$，$\mu=M(2,7)=36$，结点 12 个．诸结点定位如下．第一组结点由中心在原点、半径为 a 的圆周与坐标轴的交点组成．第二组由中心也在原点、半径为 b 的圆周与直线 $x_1=$

$\pm x_2$ 的交点组成．第三组类似地构成，圆周的半径用 c 表示．规定同一组结点的系数是等同的，并分别以 A，B，C 表示第一、第二和第三组结点的系数．结点和系数这样的选择保证了单项式 $x_1^i x_2^j$ 求体积公式的精确性，其中至少 i 或 j 之一为奇数．对于要有 7 性质的求体积公式，只要它对于 $1, x_1^2, x_1^4, x_1^2x_2^2, x_1^6, x_1^4x_2^2$ 都是精确的就足够了．这就产生了一个含六个未知数 a, b, c, A, B, C 的六个方程的非线性方程组．解此方程组，可得到一个具有正系数及结点位于 K_2 中的求体积公式．

设 G 为使原点保持不动的空间 $\mathbf{R}^n$ 中的正交变换群 $O(n)$ 的有限子群．集合 Ω 和函数 $p(x)$ 称为在 G 之下是不变的，如果 $g(\Omega)=\Omega$ 且 $p(g(x))=p(x)$ 对于 $x\in\Omega$ 及任何 $g\in G$ 都成立．形如 ga 的点的集合通称为包含 a 的轨道，其中 a 为 $\mathbf{R}^n$ 中的一固定点而 g 取遍 G 的所有元素．求体积公式(1)称为在 G 之下是不变的，如果 Ω 和 $p(x)$ 在 G 之下是不变的，并且结点集合为轨道的并集，属同一轨道的结点指派以相同的系数．在 G 之下不变集合的实例有全空间 $\mathbf{R}^n$ 及中心在原点的任何球或球面；如果 G 为正多面体 U 到其自身上的变换群，那么 U 也是不变集合．这样，当 Ω 为 $\mathbf{R}^n$、球、球面、立方体或任何正多面体，而 $p(x)$ 为任何在 G 之下的不变函数(例如 $p(r)$，其中 $r=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$)时，就可论及不变的求体积公式．

定理 1．在 G 之下的不变求体积公式具有 m 性质，当且仅当它对于所有次数不超过 m 的、在 G 之下不变的多项式都是精确的(见[5])．待定系数法可定义为构造具有 m 性质的不变求体积公式的方法．在上面的例中，正方形的对称群可起到群 G 的作用．定理 1 在构造不变求体积公式中具有本质的重要性．

对于简单的积分区域，诸如立方体、单纯形、球或球面，以及对于权 $p(x)=1$，可通过反复应用求积公式来构造求体积公式．例如，当 $\Omega=K_n=\{-1\leqslant x_i\leqslant 1;\ i=1,\cdots,n\}$ 为立方体时，则可利用具有 k 个结点 t_i 和系数 A_i 的 Gauss 求积公式来获得一个具有 k^n 个结点的求体积公式

$$\int_{K_n} f(x)\,dx \cong \sum_{t_1,\ldots,t_n=1}^{k} A_{t_1}\cdots A_{t_n} f(t_{t_1},\ldots,t_{t_n}),$$

该公式对于所有 $0\leqslant\alpha_i\leqslant 2k-1(i=1,\cdots,n)$ 这样的单项式 x^α 都是精确的，特别对于所有次数不超过 $2k-1$ 的多项式都是精确的．这种求体积公式的结点个数增长迅速，这一事实限制了其应用范围．

贯穿下文将假定权函数具有固定的符号，譬如

$$p(x)\geqslant 0, x\in\Omega\ \ ,\text{且}\ \ p_1>0. \tag{4}$$

具有这样的权函数的求体积公式的系数为正数这一事实是该公式的可贵性质．

定理 2．如果积分区域 Ω 是闭的且 $p(x)$ 满足(4)，那么存在这样的插值求体积公式(1)，它具有 m 性质，$N\leqslant\mu$，结点在 Ω 中并具有正系数．实际构造这样公式的问题尚未解决．

定理 3．如果具有满足(4)的权函数的求体积公式有实的结点和系数并且具有 m 性质，那么它的系数至少有 $\lambda=M(n,l)$ 个是正的，其中 $l=[m/2]$ 是 $m/2$ 的整数部分．在定理 3 的假设之下，数 λ 是结点个数的一个下界：

$$N\geqslant\lambda$$

没有 $x^{(j)}$ 和 C_j 是实的假设，该不等式仍然正确．

在具有 m 性质的求体积公式中，特别令人关心的是那些具有结点的个数为极小者．当 $m=1,2$ 时，对于任何 n 及任意的 Ω 和 $p(x)\geqslant 0$ 都容易找出这样的公式．结点的极小个数恰为下界 λ：在第一种情形中它等于 1，在第二种情形中它等于 $n+1$．当 $m\geqslant 3$ 时，结点的极小个数依赖于区域和权．例如，设 $m=3$，区域是中心对称的，并设 $p(x)=1$，则结点个数为 $2n$；对于单纯形和 $p(x)=1$，结点个数则为 $n+2$．

由于(4)，

$$(\varphi,\psi)=I(\varphi\bar{\psi}) \tag{5}$$

是多项式空间中的内积．设 $\mathscr{P}_k$ 为在(5)的意义下与所有次数不超过 $k-1$ 的多项式正交的 k 次多项式的向量空间．此空间具有维数 $M(n-1,k)$，它是 k 次单项式的个数．$\mathscr{P}_k$ 中的多项式称为关于 Ω 和 $p(x)$ 的正交多项式．

定理 4．存在具有$(2k-1)$性质和 $N=M(n,k-1)$ (下界)个结点的求体积公式(1)，当且仅当诸结点为所有关于 Ω 和 $p(x)$ 的 k 次正交多项式的公共根．

定理 5．如果 n 个 k 次正交多项式有 k^n 个有限的且两两相异的公共根，那么这些根可选取为具有$(2k-1)$性质的求体积公式(1)的结点．

对于 $p(x)=1$ 和 Ω 为有界的求体积公式(1)，其误差由

$$l(f)=\int_\Omega f(x)\,dx-\sum_{j=1}^{N}C_j f(x^{(j)})$$

确定．设 B 为 Banach 函数空间使得 $l(f)$ 为 B 中的线性泛函．该泛函的范数 $\|l\|=\sup_{\|f\|=1}|l(f)|$ 刻画给定的求体积公式对于 B 中全部函数的质量．构造求体积公式的另一方法基于极小化作为(未知的)求体积公式(仅具固定的结点个数)的结点和系数的函数 $\|l\|$．然而，此方法的实现即使对于 $n=1$ 也包含着困难．С. Л. Соболев([4])已得到对于任何 $n\geqslant 2$ 的一些重要结果．对于给定的一组结点，作为系数的函数 $\|l\|$ 的极小化问题已完全解决；选择结点的问题基于这

样的假定，即它们组成平行六面体网格而且极小化专门依赖于该网格的参数．特别地，空间 B 可以是 $L_2^m(\mathbf{R}^n)$，其中 $m>n/2$，此时寻求的求体积公式假定为对于所有次数不超过 $m-1$ 的多项式都是精确的．

参考文献

[1] Крылов, В. И., Приближенное вычисление интегралов, 2 изд., М., 1967 (英译本: Krylov, V. I., Approximate calculation of integrals, Macmillan, 1962).

[2] Крылов, В. И., Шульгина, Л. Т., Справочная книга по численному интегрированию, М., 1966

[3] Stroud, A. H., Approximate calculation of multiple integrals, Printice - Hall, 1971.

[4] Соболев, С. Л., Введение в теорию кубатурных формул, М., 1974.

[5] Соболев, С. Л., «Сиб. матем. ж.», 3 (1962), 5, 769–796.

[6] Мысовских, И. П., Интерполяционные кубатурные формулы, М., 1981.

И. П. Мысовских 撰

【补注】 "第 j 个结点影响之下的"多项式 $\varphi_j(x)$ (即由 $\varphi_j(x^{(i)})=\delta_{ij}$ 所定义的)亦称(对于结点 $x^{(j)}$ 的)基本 Lagrange 算子 (basic Lagrangian).

"m 性质"在西方文献中还通称为精度阶 (degree of precision)，即当求体积公式具有精度阶 m 时，它具有 m 性质．

参考文献 [A1] 既是求体积公式的极好的导引，也是一部高等的论著．

参考文献

[A1] Engels, H., Numerical quadrature and cubature, Acad. Press, 1980.

[A2] Davis, P. J. and Rabinowitz, P., Methods of numerical integration, Acad. Press, 1984.

【译注】 构造求体积公式的另一类方法是数论网格求积分法 (见[B1])，该方法的研究始于 20 世纪 50 年代末，其理论基础是数论中的一致分布论．[B2] 中系统地论述了有关求体积公式的理论以及构造公式的代数方法、数论方法、解析方法等多种方法．

参考文献

[B1] 华罗庚、王元，数论在近似分析中的应用，科学出版社，1978.

[B2] 徐利治、周蕴时，高维数值积分，科学出版社，1980.

李家楷 译

立方体、立方 [cube; куб]

1) 立方体：五种正多面体之一；立方体具有 6 个正方形的面，12 个棱，8 个顶点，从每个顶点出发有三个棱(它们相互垂直)．立方体有时也称为正六面体(cube hexahedron).

2) 立方：数 a 的立方 (cube of a number a) 是 a 的三次幂 a^3.

张鸿林 译

拟立方体连续统 [cube-like continuum; кубовидный континуум]，n 维拟立方体连续统 (n-cube-like continuum)

一个紧统(可度量化紧统)，对任何 $\varepsilon>0$，有一个到通常立方体 I^n 上的 ε 映射．如果紧统 X 是可嵌入 I^n 的紧统的可数谱的极限，则 X 是拟立方体连续统的子集．拟立方体连续统类包含一个万有元素，即拟立方体连续统 U，使得每个拟立方体连续统同胚于 U 的某个子空间．

参考文献

[1] Пасынков, Б. А., «Успехи матем. наук», 21 (1966), 4, 91–100.

Л. Г. Замбахидзе 撰

【补注】 在 $n=1$ 的特殊情形，这些连续统也称为蛇状的 (snake-like)，见 [A1].

在[1]中已经证明，空间是拟 I^n 的，当且仅当它与 I^n 关于有界满射的拷贝的逆序列的极限同胚．

参考文献

[A1] Bing, R. H., Snake-like continua, *Duke Math. J.*, 18 (1951), 553–663.

徐定宥、罗嵩龄、许依群 译

三次曲线 [cubic; кубика]

三次平面曲线，即在(射影、仿射、Euclid)平面内齐次坐标 x_0, x_1, x_2 (分别在射影、仿射或 Descartes 坐标系内)满足三次齐次方程

$$F(x) \equiv \sum_{i,j,k=0}^{2} a_{ijk}x_ix_jx_k = 0,\quad a_{ijk}=a_{jik}=a_{ikj}$$

的点的集合．从线外一点向一条三次曲线所能作的切线条数称为三次曲线的类 (class of the cubic)．圆锥曲线

$$\sum_{i=0}^{2}\frac{\partial F}{\partial x_i}x_i' = 0$$

称为点 $M'(x_0', x_1', x_2')$ 的圆锥(或第一)极线 (conic (first) polar)；点 M' 本身称为极点．直线

$$\sum_{i=0}^{2}\frac{\partial F}{\partial x_i'}x_i = 0$$

称为这个点关于三次曲线的直(或第二)极线 (rectilinear (second) polar)．如果极点 M' 是三次曲线上的点，则它的直极线在点 M' 与三次曲线相切，也与 M' 的圆锥极线相切．三次曲线的 Hesse 曲线 (Hessian of a cubic) 就是圆锥极线由两条直线组成的点的集合；它由方程

$$H_3 \equiv \det\left|\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\right| = 0$$

所定义．一条三次曲线与它的 Hesse 曲线交于9个公共拐点．Hesse 曲线上点的圆锥极线分裂成的直线以及连接 Hesse 曲线上对应点的直线构成了一条第三类的六次曲线的包络——三次曲线的 Cayley 曲线(Cayleyan of the cubic)．在通过给定三次曲线的9个拐点的平面上三次曲线的集合构成一个合冲线束(syzygetic pencil)，它包含线束内所有曲线的 Hesse 曲线以及各分裂成三条直线，构成一个合冲三角形(syzygetic triangle)的四条曲线．拐点 M'的圆锥极线分裂成两条直线：三次曲线在 M'的切线以及 M'的调和极线(harmonic polar)——相对于过 M'的割线与三次曲线相交的二个点，调和共轭于 M'的点的集合．三个共线拐点的调和极线相交于一个点．三次曲线有许多射影、仿射与度量分类：按照典范方程的类型；按照三次曲线的奇点类型；按照渐近线的性状等．

Euclid 平面上最著名的三次曲线有：Descartes 叶形线 $(x^3+y^3-3axy=0)$；Agnesi 箕舌线 $(y(a^2+x^2)=a^3)$；三次抛物线 $(y=ax^3)$；半立方抛物线 $(y^2=ax^3)$；环索线 $(y^2(a-x)=x^2(a+x))$；Diocles 蔓叶线 $(y^2(2a-x)=x^3)$；三等分角线 $(x(x^2+y^2)=a(3x^2-y^2))$；以及 Sluze 蚌线 $(a(x-a)(x^2+y^2)=k^2x^2)$．在代数几何学中，cubic 这个词既用于三次超曲面(cubic hypersurface)，也用于三维三次曲线．

参考文献

[1] Смогоржевский, А. С., Столова, Е. С., Справочник по теории плоских кривых третьего порядка, М., 1961.

В. С. Малаховский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Brieskorn, E., Knorer, H., Plane algebraic curves, Birkhauser, 1986.

陈志杰 译

三次方程 [cubic equation; кубическое уравнение]

三次代数方程，即形如

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

的方程，其中 $a\neq 0$．用由 $x=y-b/3a$ 定义的新未知数 y 来代替这个方程中的 x，则可将其化为下列较简单的(典则)形式：

$$y^3+py+q=0,$$

其中

$$p=-\frac{b^2}{3a^2}-\frac{c}{a},$$

$$q=\frac{2b^3}{27a^3}-\frac{bc}{3a^2}+\frac{d}{a},$$

这个方程的解可利用 **Cardano** 公式(Cardano formula)求得；换句话说，任何三次方程都能用根式求解．

三次方程是在16世纪第一次解出的．在16世纪初，S. Ferro 解出了方程 $x^3+px=q$，其中 $p>0$，$q>0$，但是没有发表他的解法．N. Tartaglia 重新发现了 Ferro 的结果；他还解出方程 $x^3=px+q\,(p>0,\ q>0)$，并且未加证明地宣布：方程 $x^3+q=px\,(p>0,\ q>0)$ 能够化为这种形式．Tartaglia 把他的结果告诉了 G. Cardano，后者在1545年发表了一般三次方程的解法．

参考文献

[1] Курош, А. Г., Курс высшей алгебры, 11 изд., М., 1975 (中译本：А. Г. 库洛什，高等代数教程，高等教育出版社，1955).

И. В. Проскуряков 撰

【补注】 三次方程解法的历史在[A2]中做了介绍，其中把 Cardano 的误写成 Cardan(第12章)．

参考文献

[A1] Waerden, B. L. van der, Algebra, 1-2, Springer, 1967-1971. (中译本：B. L. 范德瓦尔登，代数学，科学出版社，Ⅰ 1963，Ⅱ 1976.)
[A2] Rouse Ball, W. W., A short account of the history of mathematics, Dover, reprint, 1960.

张鸿林 译

三次型 [cubic form; кубическая форма]

系数在某个取定的域或环中的多变量的三次齐次多项式．设 k 是一个域，$F_3(x_0,\cdots,x_n)$ 是系数在 k 中的三次型(称为 k 上三次型)．方程

$$F_3(x_0,\ldots,x_n)=0$$

定义了射影空间 P^n 里的一个三次超曲面(cubic hypersurface)，所以代数闭域 k 上的三次型的代数几何理论归结为三次超曲面的理论(见[1])．

与二次型丰富而有意义的算术理论相比较，数域(及其整数环)上的三次型的算术理论至今(1987)发展缓慢．对于两个变量的三次型，其算术理论正是数域的三次扩张的理论(见[2])．对于三个变量的三次型，它是椭圆曲线算术理论的一部分(见[3])．特别地，已经知道违反 Hasse 原理的三个变量的三次型的例子．对于四个变量的三次型有同样的情况(见[1]，[4]，[6])．对于更多个变量的三次型，完全没有一般的理论．

除了有关三次超曲面的点集的构造的结果外，三次型的纯代数理论还包含涉及不变量经典理论的各种结果．事实上，两个或三个变量的三次型的(绝对)不变量代数的结构已经知道；这种情形下的不变量代数没有合冲——它是含一个(4次)或两个(4次及6次)代数无关齐次生成元的多项式代数．如果变量个数超过4，不变量代数含有合冲(见[5])并且其结构十分复杂．H. Poincaré 曾研究过三个及四个变量的所有三次型的空间在群 SL_n 的自然作用下的轨道、稳定子群、典范代表

元以及轨道族(见[6]).

参考文献

[1] Манин, Ю. И., Кубические формы. Алгебра, геометрия, арифметика, М., 1972(英译本: Manin, Yu. I., Cubic forms. Algebra, geometry, arithmetic, North - Holland, 1986).

[2] Делоне, Б. Н., Фадеев, Д. К., Теория иррациональностей третьей степени, «Тр. Матем. ин-та АН СССР» М, 11 (1940).

[3] Cassels, J. W. S., Diophantine equations with special reference to elliptic curves, *J. London Math. Soc.*, **41** (1966), 193–291.

[4] Segre, B., On the rational solutions of homogeneous cubic equations in four variables, *Math. Notae* (*Univ. Rosario*), **11** (1951), 1–68.

[5] Kats, V. G., Popov, V. L., Vinberg, E. B., Sur les groupes linéaires algébriques dont l'algèbre des invariants est libre, *Acad. Sci. Paris*, **283** (1976), 875–878.

[6] Пуанкаре, А., Избр. труды, т. 2, М., 1972, 819–900.

В. А. Исковских, В. Л. Попов 撰　陈志杰 译

三次超曲面 [cubic hypersurface; кубическая гиперповерхность]

由系数在某个基域 k 内的三次齐次方程 $F_3(x_0, \cdots, x_n) = 0$ 所定义的射影代数簇.

三次曲线 (cubic curve). 一条不可约三次曲线或是光滑的(这时它的典范类为0,亏格是1)或有唯一的奇异二重点(此时它是有理的). 三次曲线是存在参模的最低次数曲线(见**参模理论** (moduli theory)). 在特征不等于2或3的代数闭域 k 上的每条光滑三次曲线 X, 都可通过双有理变换化为 Weierstrass 形式, 即在 (x, y) 平面上可用非齐次坐标表示为:

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3,$$

其中 $g_2, g_3 \in k$, $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$. 两条具有系数 (g_2, g_3) 以及 (g_2', g_3') 的 Weierstrass 形式的三次曲线是同构的, 当且仅当

$$\frac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2} = \frac{g_2'^3}{g_2'^3 - 27g_3'^2}.$$

函数

$$j = \frac{1728g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2}$$

取 k 内的任意值, 而且仅依赖于曲线 X; 它称为 X 的**绝对不变量** (absolute invariant).

在三次曲线的点集 $X(k)$ 上可以定义一个二元合成律 $(x_1, x_2) \to x_1 \circ x_2$; $x_1 \circ x_2$ 是通过 x_1, x_2 的直线与 X 的第三个相交点. 如果取定某点 $x_0 \in X(k)$, 合成把 $X(k)$ 变成具有中性元 x_0 的 Abel 群. 赋予了这个结构的三次曲线是一维 Abel 簇 (一条椭圆曲线).

如果 $k = \mathbf{C}$ 是复数域, $X(\mathbf{C})$ 是亏格 1 的 Riemann 曲面, 即一维复环面 —— 商群 $\mathbf{C}/\Gamma(X)$, 其中 $\Gamma(X)$ 是一个二维周期格. 曲线 X 的有理函数域 k 同构于 $\mathbf{C}$ 上具有周期格 $\Gamma(X)$ 的椭圆函数域. 系数 g_2, g_3 可分别理解为权为 4 和 6 的模形式, 相差一个常数因子时, 它们等同于由最低权的 Eisenstein 级数所定义的模形式. 在这种情形下, 函数 j 正是模不变的.

对于代数非闭域 k 上的三次曲线已经发展了丰富的算术理论(见[2]). 其中一些有意义的成果是 Mordell-Weil 定理, 复数乘法理论以及主齐次空间的同调论. 主要未解决的问题(到 1982 为止)有: 在代数数域上秩的有界性; 主齐次局部平凡空间的群的有限性猜测; 对 ζ 函数的 Birch 和 Swinnerton - Dyer 猜测; Weil 的单值化猜测等(亦见**椭圆曲线** (elliptic curve)).

三次曲面 (cubic surface). 在代数闭域 k 上的(不退化为锥面的)不可约三次曲面都是有理面. 曲面 F 的超平面截口 h 的类正是典范类 $(-K_F)$. 任何光滑三次曲面都可从射影平面 P^2 通过 6 个点的爆发(即作一独异变换)而得到, 这 6 个点没有三点共线, 而且六点不共一条二次曲线. 相应的双有理映射 $\varphi: P^2 \to F$ 由通过这 6 个点的三次曲线的线性系所确定. F 上有27条直线, 每一条都是例外曲线(见**例外子簇** (exceptional subvariety)); F 上只有这些例外曲线. 这 27 条线的构形是富于对称性的: 相应图的自同构群同构于 E_6 型 Weyl 群. 三次曲面属于 **del Pezzo 曲面** (del Pezzo surface) 的类 —— 具有丰富反典范类的射影曲面.

在代数非闭域 k 上, 存在光滑三次曲面 F, 它在 k 上不与 P^2 双有理同构(即 F 在 k 上不是有理的). 在这些曲面中可以找到具有 k 点的曲面, 它们在 k 上是单有理的. 这样的三次曲面提供了非闭域上曲面的 **Lüroth 问题** (Lüroth problem) 的反例. 存在域 k, 在 k 上有极小三次曲面. 由 **Segre 极小性准则** (Segre's minimality criterion) ([6]): $\mathrm{Pic}(F) \simeq \mathbf{Z}$. 极小曲面的双有理自同构群已被确定(用其生成元及定义关系式), 而且三次曲面的算术理论已得到发展([4]). 为了描述点集 $F(k)$, 要用到非结合的结构, 如拟群及 Moufang 圈.

三维的三次超曲面. 代数闭域上的维数 $\geqslant 2$ 的所有光滑三次超曲面都是单有理的. 早在 19 世纪 80 年代就已提出了以下问题: 光滑三维三次超曲面是有理的吗? [3] 中给出了否定的回答. 这也提供了三维簇 Lüroth 问题的否定解答. 对每个光滑三维三次超曲面 V 存在一个主极化 5 维 Abel 簇 —— 中间 Jacobi 簇 $J_3(V)$. 当 $k = \mathbf{C}$ 时它被定义为复环面

$$H^{1,2}(V, \mathbf{C}) / H^3(V, \mathbf{Z}),$$

其中$H^{1,2}(V,\mathbf{C})$是同调空间$H^3(V,\mathbf{C})$的分解中相应的 Hodge 分量. 为了证明 V 是非有理的, 证明了 $J_1(V)$ 不是任何亏格为 5 曲线的 Jacobi 簇. 有限特征域上的三次超曲面是非有理的事实在[5] 中得到.

一个三次超曲面 V 由它的 **Fano 曲面** (Fano surface) $\Phi(V)$ 唯一确定. 对于 $\Phi(V)$, 有 **Torelli 定理** (Torelli theorems) (它们对 V 本身也成立). 下述问题还没有解决: 给出一个三维三次超曲面, 描述它的双有理自同构群.

目前(1987)还不知道维数 $\geqslant 4$ 的每个光滑三次超曲面是否有理. 在这种情形下, 仅对某些特殊类型的超曲面证明了有理性; 例如:

$$\sum_{i=0}^{2m+1} a_i x_i^3 = 0, \quad m \geqslant 2.$$

参考文献

[1] Hurwitz, A., Courant, R., Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Functionen, Springer, 1964.

[2] Cassels, J. W. S., Diophantine equations with special reference to elliptic curves, *J. London Math. Soc.*, **41** (1966), 193-291.

[3] Clemens, C. H., Griffiths, P. A., The intermediate Jacobian of the cubic threefold, *Ann. of Math.*, **95** (1972), 281-356.

[4] Манин, Ю. И., Кубические формы, М., 1972 (英译本: Manin, Yu. I., Cubic forms, Algebra, geometry, arithmetic, North - Holland, 1986).

[5] Murre, J. P., Reduction of the proof of the non-rationality of a non-singular cubic threefold to a result of Mumford, *Comp. Math.*, **27** (1973), 63-82.

[6] Segre, B., The non-singular cubic surfaces, Clarendon Press, 1942.

[7] Тюрин, А. Н., 《Успехи матем. наук》, 27 (1972), 5, 3-50

[8] Тюрин, А. Н., 《Изв. АН СССР. Сер. Матем.》, **35** (1971), 498-529.

[9] Шафаревич, И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972 (英译本: Shafarevich, I. R., Basic algebraic geometry, Springer, 1977).

В. А. Исковских 撰

【补注】

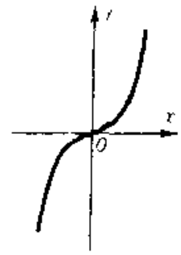
参考文献

[A1] Griffiths, P. A., Harris, J. E., Principles of algebraic geometry, Wiley, 1978.

陈志杰 译

三次抛物线 [cubic parabola; кубическая парабола]

平面曲线(见图), 在 Descartes 坐标系中, 其方程是 $y=ax^3$.



张鸿林 译

三次剩余 [cubic residue; кубический вычет], 模 m 的

使得**同余式** (congruence) $x^3 \equiv a \pmod m$ 可解的整数 a. 如果这个同余式无解, 则称 a 为模 m 的三次非剩余 (cubic non-residue). 如果模是素数 p, 那么同余方程 $x^3 \equiv a \pmod p$ 的可解性可用 Euler 准则来判断: 同余式 $x^3 \equiv a \pmod p$, $(a, p)=1$ 是可解的, 当且仅当

$$a^{(p-1)/q} \equiv 1 \pmod p,$$

这里 $q=(3, p-1)$. 当这个条件满足时, 同余式恰好有 q 个模 p 的不同的解. 特别地, 从这个判别法可推出: 对素数 p 来说, 在数列 $1, \cdots, p-1$ 中恰好有 $(q-1)(p-1)/q$ 个模 p 的三次非剩余和 $(p-1)/q$ 个模 p 的三次剩余.

С. А. Степанов 撰

【补注】 从**类域论** (class field theory) 可推得, 例如, 2 是素数模 p 的三次剩余, 当且仅当 p 可表为 $p=x^2+27y^2$, x, y 是整数. 也见**二次剩余** (quadratic residue); **互反律** (reciprocity laws); **完全剩余系** (complete system of residues); **既约剩余系** (reduced system of residues).

潘承彪 译　戚鸣皋 校

旋度 [curl; вихрь]

向量场 $\mathbf{a}(M)$ 的旋转 (rotation), 由该向量的"旋转分量"给出的向量场. 如果 $\mathbf{a}(M)$ 是运动的连续介质中质点的速度场, 则旋度等于质点角速度的一半. 旋度记作 curl $\mathbf{a}$ (有时用 rot $\mathbf{a}$ 表示). 在 Descartes 直角坐标系 x,y,z 中旋度由下列表达式决定:

$$\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right]; \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right]; \frac{1}{2}\left[\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right]\right\}$$

其中 $u(M)$, $v(M)$, $w(M)$ 是 $\mathbf{a}(M)$ 的分量.

在给定时刻, 每一点的旋度均位于其切线上的空间曲线称为涡线 (vortical line). 由依赖单参量的旋涡线族所产生的任意表面称为涡面 (vortical surface). 涡面中一个极为重要的例子是涡管 (vortical tubes), 它是由某一封闭曲线所有各点引出的旋涡线组所构成的. 如果该曲线无限小, 则所形成涡面称为涡丝 (vortical

thread). 涡面也称为涡层(vortical layers)，认为它是由布满旋涡线的几何曲面所组成的. 通过涡层时流体的质点速度将出现正比于相应点上旋度的切向间断.

根据流体动力学中 Helmholtz 基本定理，如果体积力具有势能，则在均匀理想的不可压缩的流体或正压性的气体流动时，某一时刻处于旋涡线上的介质质点将在其后的全部时间处在旋涡线上. 因此，旋涡表面随时间而保存下来，其中包括涡管和涡线. 每一涡管可以用称为涡管强度(strength)的某一数来描述，该数等于以任意方式穿过管的截面的矢量强度. 该数与截面的形状无关，因为 dir curl**a**=0. 这说明涡管可能是封闭涡环(vortical ring)，抑或在流体边界处有始端和终端. 涡管的强度在理想流体中不随时间而变化.

借助 W.Thomson 引入的速度 v 沿封闭回路 (L) 的环量 Γ 的概念

$$\Gamma = \oint_{(L)} |\mathbf{v}| \cos(\widehat{\mathbf{v} ds}) ds,$$

对 H. Helmholtz 所发现的上述涡管的特性可得到非常简单的说明. 其中 ds 是回路 L 的弧的单元. $(\widehat{\mathbf{v}d\mathbf{s}})$ 表示 $\mathbf{v}$ 和 ds 之间的夹角. 研究速度的环量的特性可导出关于无旋运动随时间保持不变的 Lagrange 定理.

旋度理论的主要任务是按照给定的旋度矢量场确定流体运动的速度场. 如果某一区域充满着在所有方向上均为无限的流体，而且区域 (D) 充满着被封闭的涡面所局限的旋度，则借助矢量-势

$$\Pi = \frac{1}{4\pi}\iiint_{(D)} \frac{\operatorname{curl}\mathbf{v}}{r}\, d\tau,$$

按照下式

$$\mathbf{v} = \operatorname{curl}\Pi$$

可得到速度场. 如果问题是确定有限空间中沿旋涡线的速度，则由于必须考虑奇异核的积分方程，其解相当复杂，这一问题的完全解见[6], [7].

对于平面平行运动这一重要的特殊情况：

$$u = u(x, y),\ \ v = v(x, y),\ \ w = w(x, y),$$

旋度的两分量 α, β 等于零，而第三分量 γ 即表示整个旋度，在这种情况下旋度垂直于 XOY 平面. 当涡线与 XOY 平面相交时，形成称之为旋度点(curl point)的很小的面积. 当流体中存在若干个旋度点时，由于这些点在流体中产生的速度，而使这些点本身运动起来. 旋度点的运动方程有力学正则方程的形式.

参考文献

[1] Appell, P., Traité de mécanique rationelle, 3, Gauthier-Villars, Paris, 1909.

[2] Вилля, Г., Теория вихрей, Л-М., 1936(译自法文).

[3] Lichtenstein, L., Grundlagen der Hydromechanik, Springer, 1929.

[4] Miline-Thomson, L. M., Theoretical hydronamics, MacMillan, 1950.

[5] Lamb, H., Hydrodynamics, Cambridge Univ. Press, 1906.

[6] Гюнтер, Н. М.,《Изв. АН СССР》, 6 сер., **20** (1926), 13−14, 1323−1348; 15−17, 1503−1532.

[7] Гюнтер, Н. М.,《Ж. Ленингр. Физ.-матем. об-ва》, **1** (1926), 1, 12−36. Л. Н. Сретенский 撰

【补注】 亦见**向量场的旋转**(rotation of a vector field). 旋度算子的向量微分的数学讨论可参阅[A3]−[A5]（亦见**向量分析**(vector analysis)）.

参考文献

[A1] Serrin, J., Mathematical principles of fluid mechanics, in Handbook of Physics, Vol. 8, Springer, 1959.

[A2] Newman, J. N., Marine hydrodynamics, M. I. T..

[A3] Spivak, M., Calculus on manifolds, Benjamin, 1965 (中译本：M. 斯皮瓦克，流形上的微积分，科学出版社，1980).

[A4] Bishop, R. L. and Goldberg, S. I., Tensor analysis on manifolds, Dover, reprint, 1980.

[A5] Craven, B. D., Functions of several variables, Chapman and Hall, 1981. 朱治强 译 沈 青 校

曲率 [curvature；кривизна]

一系列(用到数、向量、张量的)数量特征的共同名称，它们描述某个对象(曲线、曲面、Riemann 空间等)在它的性质方面与某个被认为是平坦的对象(直线、平面、Euclid 空间等)的偏离程度. 曲率概念通常是局部地，即在每一点定义的. 曲率概念是和研究二阶以内的偏离相关的，因此所讨论的对象被假定是用 C^2 光滑函数指定的. 在某些情形，这个概念是用积分定义的. 因此不用 C^2 光滑条件它们仍然有效. 通常说来，如果曲率在一切点都等于零，那么所讨论的对象恒同于(在小范围，而不是在大范围内)对应的"平坦"对象.

曲线的曲率(curvature of a curve). 设 γ 是 n 维 Euclid 空间中一条正则曲线，用它的自然参数 t 参数化. 设 $\alpha(P, P_1)$ 和 $s(P, P_1)$ 分别是 γ 在其上点 P, P_1 处的切线之间的角度和 γ 在 P, P_1 之间那段弧的长度. 那么，极限

$$k = \lim_{P_1 \to P} \frac{\alpha(P, P_1)}{s(P, P_1)}$$

称为在 P 处曲线 γ 的曲率. 曲线的曲率等于向量 $d^2\gamma(t)/dt^2$ 的模长，这个向量的方向恰是曲线的主法线方向，为使曲线 γ 重合于某直线段或整条直线，必要和充分的是 γ 的曲率 k 恒等于零.

曲面的曲率(curvature of a surface). 设 Φ 是三维 Euclid 空间中的正则曲面. 设 P 是 Φ 的一个点，T_P 是 Φ 在 P 的切平面，$\mathbf{n}$ 是 Φ 在 P 的法向，α 是过 $\mathbf{n}$ 和 T_P 中某个单位向量 $\mathbf{l}$ 的平面. 平面 α 和曲面 Φ 的交 γ_l 是一条曲

线，称为曲面 Φ 在点 P 的方向为 $\mathbf{l}$ 的法截线 (normal section)．数

$$k_1 = \left(\frac{d^2\gamma_1}{dt^2}, \mathbf{n}\right),$$

这里 t 是 γ 的自然参数，称为 Φ 在 $\mathbf{l}$ 方向的法曲率 (normal curvature)．除符号外，法曲率等于曲线 γ_1 的曲率．

切平面 T_P 含有两个互相垂直的方向 $\mathbf{l}_1$ 和 $\mathbf{l}_2$，使得任何方向的法曲率可以用 Euler 公式 (Euler formula) 表示成：

$$k_l = k_1\cos^2\theta + k_2\sin^2\theta,$$

这里 θ 是 $\mathbf{l}_1$ 和 $\mathbf{l}$ 之间的角．数 k_1 和 k_2 称为主曲率 (principal curvatures)，而方向 $\mathbf{l}_1$ 和 $\mathbf{l}_2$ 通常称为曲面的主方向 (principal directions)．主曲率是法曲率的极值，曲面在给定点的法曲率的结构可以像下面那样用图示描述．当 $k_l \neq 0$ 时，方程

$$\mathbf{r}(\mathbf{l}) = \mathbf{l}\left|\frac{1}{k_l}\right|^{1/2},$$

这里 $\mathbf{r}(\mathbf{l})$ 是径向量，在切平面 T_P 中定义了一条二次曲线，称为 Dupin 标形 (Dupin indicatrix)．Dupin 标形只能是下列三种曲线之一：椭圆，双曲线或一对平行线．曲面中的点相应地被分类为椭圆点、双曲点或抛物点．在椭圆点，曲面的第二基本形式是定号的；在双曲点，它是变号的；而在抛物点则是退化的．如果在一点的所有法曲率都等于零，那么该点称为平坦 (flat) 点，如果 Dupin 标形是一个圆，那么该点称为脐点 (umbilical point) 或球面点 (spherical point)．

主方向(除了一个次序外)是唯一决定的，除非该点是一个脐点或平坦点，此时每个方向都是主方向．这方面有下面的 Rodriques 定理 (Rodriques theorem)：方向 $\mathbf{l}$ 是主方向，当且仅当在方向 $\mathbf{l}$ 有

$$d\mathbf{n} = -\lambda\, d\mathbf{r}\ ，沿方向\ \mathbf{l},$$

这里 $\mathbf{r}$ 是曲面的径向量、$\mathbf{n}$ 是单位法向量．

曲面上的一条曲线称为曲率线 (curvature line)，如果它在每一点的方向都是主方向．曲面上，除脐点和平坦点外，在每点的一个邻域中曲面可以这样来参数化，使得曲率线是坐标曲线．

数量

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

称为曲面的平均曲率 (mean curvature)．数量

$$K = k_1k_2$$

称为曲面的 Gauss 曲率 (Gaussian curvature) 或全曲率 (total curvature)．Gauss 曲率是曲面内蕴几何的对象，即它可以用第一基本形式表达：

$$K = \frac{1}{(EG-F^2)^2}\begin{vmatrix} E & E_u & E_v \\ F & F_u & F_v \\ G & G_u & G_v \end{vmatrix} - \tag{1}$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{EG-F^2}}\left\{\left(\frac{E_v - F_u}{\sqrt{EG-F^2}}\right)_v - \left(\frac{F_v - G_u}{\sqrt{EG-F^2}}\right)_u\right\},$$

这里 E, F, G 是曲面的第一基本形式的系数．

利用公式(1)，可以对具有线素 ds^2 的抽象二维 Riemann 流形定义 Gauss 曲率．一个曲面局部等距于平面，当且仅当它的 Gauss 曲率恒等于零．

Riemann 空间的曲率 (curvature of a Riemannian space)．设 M^n 是一个 n 维正则 **Riemann 空间** (Riemannian space)，BM^n 是 M^n 上的正则向量场空间，M^n 的曲率一般用 Riemann (曲率) 张量 (见 **Riemann 张量** (Riemann tensor))，即用下述多线性映射刻画：

$$R: BM^n \times BM^n \times BM^n \to BM^n,$$

它定义为：

$$R(X, Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]}Z, \tag{2}$$

这里 ∇ 是 M^n 的 Levi-Civita 联络，$[,]$ 表示 Lie 括号，如果在某个局部坐标系 x^i 中置 $X = \partial/\partial x^k$，$Y = \partial/\partial x^l$，那么(2)可以改写为

$$Z^i_{;k;l} - Z^i_{;l;k} = Z^m R^i_{mkl},$$

这里；是共变微分的记号．

因此，Riemann 张量定量地刻画了在 Riemann 空间中，二次共变导数的非交换性．它也提供了 Riemann 空间区别于 Euclid 空间其他性质的定量描述．

在局部坐标系 x^i 中，Riemann 张量的系数可以用 Christoffel 记号和度量张量的系数如下表达：

$$R^l_{ijk} = \frac{\partial\Gamma^l_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial\Gamma^l_{ik}}{\partial x^j} + \Gamma^l_{ir}\Gamma^r_{jk} - \Gamma^l_{jr}\Gamma^r_{ik},$$

$$R_{iklm} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^k\partial x^m} + \frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^i\partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^k\partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i\partial x^m}\right] + g_{np}\left[\Gamma^p_{km}\Gamma^n_{il} - \Gamma^p_{im}\Gamma^n_{kl}\right],$$

其中 R_{iklm} 是四个共变指标的 Riemann 张量，或按无坐标记法它是映射 $\langle R(X,Y)U, Z\rangle$ (这里 $\langle\cdot\ ,\cdot\rangle$ 表示数量积)．

Riemann 张量具有下面的对称性质：

$$R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z,$$

$$<R(X, Y)Z, U> = -<R(X, Y)U, Z>,$$

$$<R(X, Y)Z, U> = <R(Z, U)X, Y>,$$

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0,$$

在局部坐标中它们可写成下面的形式:

$$R_{iklm} = -R_{kilm} = -R_{ikml},$$

$$R_{iklm} = R_{lmik},$$

$$R_{iklm} + R_{imkl} + R_{ilmk} = 0.$$

Riemann 张量有 $n^2(n^2-1)/12$ 个代数独立的分量，Riemann 张量的共变导数满足(第二)Bianchi 恒等式((second) Bianchi identity):

$$(\nabla_X R)(Y, Z, U) + (\nabla_Y R)(Z, X, U) +$$

$$(\nabla_Z R)(X, Y, U) = 0.$$

这里 $(\nabla_X R)(Y, Z, U)$ 是 $R(Y, Z)U$ 关于 X 的共变导数，在局部坐标中，这个恒等式是

$$R^n_{ikl;m} + R^n_{imk;l} + R^n_{ilm;k} = 0.$$

有时候 Riemann 张量的定义相差一个符号.

一个 Riemann 空间局部等距于 Euclid 空间，当且仅当它的 Riemann 张量恒等于零.

为描述 Riemann 空间 M^n 的曲率，有时候采用另一种等价的方法. 设 σ 是 M^n 在点 P 的切空间 TM^n 中二维线性空间，那么 M^n 在点 P 方向为 σ 的截曲率(sectional curvature)定义为

$$K_\sigma = \frac{<R(V, W)W, V>}{<V, V><W, W> - <V, W>^2},$$

这里 V 和 W 是决定 σ 的向量. 同一个面积元 σ 可以用不同的向量 V 和 W 来定义，但是 K_σ 不依赖于所选的具体向量. 对二维 Riemann 空间而言，截曲率和 Gauss 曲率相同. Riemann 张量能用截曲率来表达:

$$<R(X, Y)Z, U> =$$

$$= \frac{1}{6}\{k(X+U, Y+Z) - k(X+U, Y) + k(X+U, Z) +$$

$$-k(X, Y+Z) - k(U, Y+Z) + k(X, Z) +$$

$$+k(U, Y) - k(Y+U, X+Z) + k(Y+U, X) +$$

$$+k(Y+U, Z) + k(Y, Z+X) +$$

$$+k(U, Z+X) - k(Y, Z) - k(U, X)\},$$

这里

$$k(V, W) = K_\sigma(<V, V><W, W> - <V, W>^2).$$

它还用到了 Riemann 空间曲率的一些较弱的特征，即 Ricci 张量(Ricci tensor)或 Ricci 曲率(Ricci curvature)

$$R_{ik} = R^l_{ilk},$$

和标量曲率(scalar curvature)

$$R = g^{ik}R_{ik}.$$

Ricci 张量是对称的: $R_{ik} = R_{ki}$.

有时候在 Riemann 张量的基础上，使用更复杂的构造——特别是二次乘积来刻画曲率. 这种类型的一个最常用的不变量是

$$C = R^i_{klm}R_i^{klm},$$

它在 Schwarzschild 引力场的研究中用到.

对二维空间，Riemann 张量为

$$R(X, Y)Z = K(<Y, Z>X - <X, Z>Y), \tag{3}$$

这里 K 是 Gauss 曲率. 这时标量曲率等于 K. 对三维空间 Riemann 张量形如:

$$R_{iklm} = R_{il}g_{km} - R_{im}g_{kl} + R_{km}g_{il} - R_{kl}g_{im} +$$

$$+ \frac{R}{2}(g_{im}g_{kl} - g_{il}g_{km}),$$

这里 g_{ij} 是度量张量，R_{ij} 是 Ricci 张量，R 是数量曲率.

如果截曲率与点和二维方向都无关，那么该空间就是熟知的常曲率空间(space of constant curvature); 这种空间的 Riemann 张量形式如(3)(常数 K 称为空间 M^n 的曲率. 当 $n>2$ 时，已证明: 如果在各点曲率均与方向无关，那么 M^n 是常曲率空间(Schur 定理(Schur theorem)).

子流形的曲率(curvature of a submanifold)，设 Φ 是 E^3 中正则曲面，γ 为 Φ 上的一条曲线，α_P 是 Φ 在 γ 的一点 P 的切平面. 假定 P 的一个小邻域被投影到平面 α_P 上，$\bar{\gamma}$ 是曲线 γ 在 α_P 上的投影. 曲线 γ 在 P 的**测地曲率**(geodesic curvature) κ 定义为一个数，它的绝对值等于曲线 $\bar{\gamma}$ 在 P 的曲率. 如果经过 P 时，$\bar{\gamma}$ 的切线的转动和该曲面的法向形成一个右手螺旋，那么就认为测地曲率是正的. 测地曲率是 Φ 的内蕴几何对象. 它的值可由下面的公式来计算:

$$\kappa = \frac{e_{ij}\left(\frac{d^2x^i}{ds^2}\frac{d^2x^j}{ds^2} + \Gamma^i_{kl}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds}\frac{dx^j}{ds}\right)}{\left(g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}\right)^{3/2}}, \tag{4}$$

这里 $x^i(s)$ 是曲线 γ 在 Φ 的局部坐标 x^i 中的**自然方程**(natural equation)，g_{ij} 是 Φ 的度量张量关于这些坐标

的分量，Γ_{kl}^{i} 是 Christoffel 记号，e_{ij} 是完全**判别式张量**(discriminant tensor). 利用公式(4)可以在抽象二维 Riemann 空间上对曲线定义测地曲率. Riemann 流形上一条曲线与测地线或测地线的一部分重合，当且仅当它的测地曲率恒等于零.

设 Φ 是三维 Riemann 空间 M 的一个二维子流形. 对 Φ 的曲率定义有两种观点. 一方面，可以将 Φ 看作为一个 Riemann 空间，它的度量是由 M 的度量诱导得来的，于是使用公式(1)来定义它的曲率. 这个曲率称为内曲率(internal curvature). 另一方面，可以给出 Euclid 空间中曲面曲率定义同样的构造，并将它应用于 Riemann 空间的子流形. 这样得到不同的曲率概念，称为外曲率(external curvature). 它们有下面的关系：

$$K_{i} = K_{e} + K_{\sigma},$$

这里 K_{σ} 是 M 在 Φ 的切平面方向的曲率，K_{i} 和 K_{e} 分别是内曲率和外曲率.

法曲率，内曲率和外曲率的概念，在上述子流形的维数和余维数方面可以推广.

Riemann 张量的概念可以推广到结构比 Riemann 空间弱的各类空间. 例如，Riemann 张量和 Ricci 张量仅依赖于空间的仿射结构，因而在有仿射联络的空间中也可定义，尽管在这种情形它们不像以前那样具有所有的对称性质. 例如，$R_{ik} \neq R_{ki}$. 这种类型的其他例子是共形曲率张量和射影曲率张量. 共形曲率张量(conformal curvature tensor)(Weyl 张量(Weyl tensor))是

$$C_{iklm} = R_{iklm} - R_{l[i}g_{k]m} + R_{m[i}g_{k]l} + \frac{1}{3} R_{l[i}g_{k]m},$$

这里括号表示对于有关指标的交错，共形曲率张量等于零是使空间局部地与共形 Euclid 空间一致的必要和充分条件. 射影曲率张量(projective curvature tensor)是

$$P_{lki}^{q} = R_{lki}^{q} + \delta_{k}^{q}\frac{R_{li} + R_{il}}{n^{2}-1} + \delta_{l}^{q}\frac{R_{ki} + R_{ik}}{n^{2}-1} + \delta_{i}^{q}\frac{R_{lk} - R_{kl}}{n+1},$$

这里 δ_{i}^{k} 是 Kronecker 记号，n 是空间的维数. 射影曲率张量等于零是空间局部地与射影 Euclid 空间一致的必要和充分条件.

曲率的概念推广到非正则对象的情形，特别是有界曲率的二维流形的理论. 在这里，空间中曲率不是在一个点而是在一个区域中定义的，所关心的是一个区域的全曲率. 在正则的情形，全曲率(total curvature)等于 Gauss 曲率的积分. 一个测地三角形的全曲率可以用它的顶点处的角 β_{i} 来表达：

$$K = \sum\beta_{i} - \pi, \tag{5}$$

这个关系式是 **Gauss - Bonnet 定理**(Gauss - Bonnet theorem)的特殊情形. 公式(5)已用来作为在有界曲率的流形中定义全曲率的基础.

曲率是现代微分几何学中的一个基本概念. 加在曲率上的限制通常会提供关于对象的有意义的信息. 例如，在 E^{3} 的曲面论中，Gauss 曲率的符号定义了点的类型(椭圆型、双曲型或抛物型)，Gauss 曲率处处非负的曲面同有一系列性质，由于这些性质它们能一起归入一个自然类(见[4]，[6]). 零平均曲率的曲面(见**极小曲面**(minimal surface))有许多特殊的性质. 非正则曲面的理论特别研究有有界积分绝对 Gauss 曲率或平均曲率的曲面类.

在 Riemann 空间中，有了关于任意点和任意二维方向的截曲率的一致界限，就有可能去使用一些比较定理. 后者使人们能够比较给定空间中的测地线或区域的体积与常曲率空间中相应的曲线或区域特性的偏离程度. 对 K_{σ} 的某些限制甚至能总体上预先决定空间的拓扑结构. 例如：

球面定理(sphere theorem). 设 M 是一个维数 $n \geq 2$ 的完全单连通 Riemann 空间，并且 $1/4 < \delta \leq K_{\sigma} \leq 1$. 那么 M 同胚于球面 S^{n}.

Hadamard - Cartan 定理(Hadamard - Cartan theorem)和 Gromoll - Meyer 定理(Gromoll - Meyer theorem). 设 M 是维数 $n \geq 2$ 的完全 Riemann 空间. 如果处处有 $K_{\sigma} \leq 0$ 并且 M 是单连通的，或者如果处处有 $K_{\sigma} > 0$ 并且 M 非紧，那么 M 同胚于 Euclid 空间 E^{n}.

在许多种自然科学中用到曲率的概念. 例如，当物体沿着轨道运动时，轨道的曲率与离心力之间有一种关系. Gauss 曲率在 Gauss 关于制图学的研究中首次出现. 液体表面的平均曲率和表面张力的效应有关. 在**相对论**(relativity theory)中，质量和能量的分布(更精确地说，能量 - 动量张量)与时空(space - time)的曲率之间有一种关系. 引力场中粒子形成的理论也用到共形曲率张量.

参考文献

[1] Рашевский, П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967.
[2] Погорелов, А. В., Дифференциальная геометрия, 5 изд., М., 1969.
[3] Blaschke, W., Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie. Elementare Differentialgeometrie, I, Springer, 1921.
[4] Александров, А. Д., Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, М. - Л., 1948.
[5] Gromoll, D., Klingenberg, W. and Meyer, W., Riemannsche Geometrie im Grossen, Springer, 1968.
[6] Погорелов, А. В., Внешняя геометрия выпуклых поверхностей, М., 969.

Д. Д. Соколов 撰

【补注】 可以用不同的方法表达公式(1),例如在[2]中它写为

$$K=\frac{1}{(EG-F^2)^2}\times\left\{\begin{vmatrix}-\frac{G_{uu}}{2}+F_{uv}-\frac{E_{vv}}{2} & \frac{E_u}{2} & F_u-\frac{E_v}{2}\\ F_v-\frac{G_u}{2} & E & F\\ \frac{G_v}{2} & F & G\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0 & \frac{E_v}{2} & \frac{G_u}{2}\\ \frac{E_v}{2} & E & F\\ \frac{G_u}{2} & F & G\end{vmatrix}\right\}.$$

对 Riemann 张量的第四个对称关系,即 $R(X,Y)Z+R(Y,Z)X+R(Z,X)Y=0$ 习惯上称为第一 Bianchi 恒等式(first Bianchi identity).第二 Bianchi 恒等式(second Bianchi identity)是指关系式

$$\nabla_X R(Y,Z,U)+\nabla_Y R(Z,X,U)+\nabla_Z R(X,Y,U)=0,$$

本条目中称为 Bianchi 恒等式.

诸如平均曲率,共形曲率张量,测地曲率和射影曲率张量等概念在高维(高于曲面的)情形也有定义,例如见[A2](平均曲率),[A3],[1](共形曲率张量和射影曲率张量),(也见**共形 Euclid 空间**(conformal Euclidean space)).曲面上一条曲线的测地曲率的绝对值等于$|\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma|$,这里假定 γ 是用它的弧长参数(自然参数)描述的,并且 ∇ 是曲面的 Levi-Civita 联络.关于曲线的自然参数和自然方程的概念见**自然方程**(natural equation).对曲面的各种基本(二次)形式的讨论见**曲面的基本形式**(fundamental forms of a surface);**嵌入流形几何学**(geometry of imbedded manifolds)和**第二基本形式**(second fundamental form).

Riemann 空间 M^n 在点 P 的切平面 σ 方向的截曲率也称为 **Riemann 曲率**(Riemannian curvature).

设 R_{ij} 表示 Ricci 张量,Q 是 R_{ij} 在 $P\in M^n$ 给出的 T_PM^n 上的二次形式.那么对单位向量 $\xi\in T_PM^n$ 的值 $Q(\xi)$ 是 T_PM^n 中包含 ξ 的所有平面方向的截曲率 K_σ 的平均值,称为 P 处方向 ξ 的 Ricci 曲率(Ricci curvature)或平均曲率(mean curvature).所有的 $Q(\xi)$ 的均值 R 是 P 点的标量曲率(scalar curvature),也见 **Ricci 张量**(Ricci tensor)和 **Ricci 曲率**(Ricci curvature).如果 M 是一个 **Kähler 流形**(Kähler manifold),σ 限制为复平面(即在殆复结构下不变的平面),那么 K_σ 称为全纯截曲率(holomorphic sectional curvature).

对一条长度 L 的空间简单闭曲线 C,积分 $K=\int_0^L k(s)ds$ 称为 C 的全曲率(total curvature).一般地 $K\leqslant 2\pi$,而当且仅当 C 是一条平面闭曲线时,$K=2\pi$ (W. Fenchel).在 E^3 中固定原点 O 并考察以 O 为中心的单位球面 S^2.对 C 的每点 P,设 $\bar{P}$ 是 S^2 上使得 $O\bar{P}$ 是(位移后的)C 在 P 的单位切向量的点.当 P 遍及 C 时,$\bar{P}$ 在 S^2 上画出一条曲线,即 C 的球面标线(spherical indicatrix)$\bar{C}$.对应 $C\mapsto\bar{C}$ 称为球面表示法(spherical representation).C 的全曲率等于 $\bar{C}$ 的长度.还可以用主法向量和副法向量替换 C 的切向量并进行类似的构图,就产生其他的球面标线,见**球面标线**(spherical indicatrix).

参考文献

[A1] Hsiung, C. C., A first course in differential geometry, Wiley, 1981.

[A2] Kobayashi, S. and Nomizu, K., Foundations of differential geometry, Ⅱ, Interscience, 1969, p. 33.

[A3] Schouten, J. A., Ricci-Calculus, Springer, 1954, Chapt. Ⅵ.

潘养廉 译

曲率形式 [curvature form; кривизны форма]

具有结构 Lie 群 G 的主纤维丛 P 上的 2 形式 Ω,它取值于群 G 的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$,并且由 P 上的**联络形式**(connection form)θ 用下式定义

$$\Omega=d\theta+\frac{1}{2}[\theta,\theta].$$

曲率形式表示给定的联络与由条件 $\Omega\equiv 0$ 刻画的局部平坦联络(locally flat connection)偏离的程度.它满足 Bianchi 恒等式(Bianchi identity)

$$d\Omega=[\Omega,\theta]$$

并定义了和乐代数(见**和乐群**(holonomy group)).

Ю. Г. Лумисте 撰

【补注】 方程 $\Omega=d\theta+[\theta,\theta]/2$ 称为结构方程(structure equation).

参考文献

[A1] Kobayashi, S. and Nomizu, K., Foundations of differential geometry, Ⅰ, Interscience, 1963.

潘养廉 译

曲率线 [curvature line; кривизны линия]

曲面上的一条曲线,在其每一点上的切线方向都是一个主方向.曲率线由下列方程来定义:

$$\begin{vmatrix}dv^2 & -du\,dv & du^2\\ E & F & G\\ L & M & N\end{vmatrix}=0,$$

其中 E, F, G 是曲面的第一基本形式的系数，L, M, N 是第二基本形式的系数. 沿着曲率线的曲面的法线构成一个可展曲面. 回转曲面上的曲率线是子午线和纬线. 可展曲面上的曲率线是曲面的母线(为直线)以及与母线正交的曲线.

А. Б. Иванов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Struik, D. J., Differential geometry, Addison - Wesley, 1950.

张鸿林 译

曲率线网 [curvature lines, net of; кривизны линий сеть]

n 维 Euclid 空间 $E_n(n\geqslant 3)$ 中光滑超曲面 V_{n-1} 上由**曲率线**(curvature line) 组成的正交网. V_{n-1} 上的曲率线网是一个**共轭网**(conjugate net). 例如, 如果 $V_2\subset E_3$ 是一个旋转曲面, 那么经线和纬线构成一个曲率线网. 如果 $V_p\subset E_n(2\leqslant p<n)$ 是一个光滑 p 维曲面, 它具有一个一维法线场, 使其法线 $[x,\mathbf{n}]$ 落在点 $x\in V_p$ 的二阶微分邻域之中, 那么, 恰恰像在 V_{n-1} 上一样, 场的法线确定 V_p 上的曲率线和曲率线网, 然而 $V_p(p<n-1)$ 上的曲率线网不一定是共轭网.

参考文献

[1] Eisenhart, L. P., Riemannian geometry, Princeton Univ. Press, 1949.

[2] Шуликовский, В. И., Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении, М., 1963.

В. Т. Базылев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hsiung, C. C., A first course in differential geometry, Wiley, 1981.

潘养廉 译

曲率张量 [curvature tensor; кривизны тензор]

流形 M^n 上**曲率形式**(curvature form) 关于局部共基分解得到的 (1, 3) 型张量. 特别地, 关于和乐共基 $dx^i(i=1,\cdots,n)$, 线性联络的曲率张量的分量 R^k_{lij} 用联络的 Christoffel 记号 Γ^k_{ij} 及其导数表达成

$$R^k_{lij}=\partial_i\Gamma^k_{jl}-\partial_j\Gamma^k_{il}+\Gamma^k_{ip}\Gamma^p_{jl}-\Gamma^k_{jp}\Gamma^p_{il}.$$

具有结构 Lie 群 G 的主纤维空间上的任何联络的曲率张量是按类似的方式利用相应的曲率形式作分解来定义的; 这个方法特别也适用于共形联络和射影联络. 曲率张量取值于群 G 的 Lie 代数, 它是所谓具有非标量分量的张量的一个例子.

作为参考见**曲率** (curvature).

М. И. Войцеховский 撰　潘养廉 译

曲率变换 [curvature transformation; кривизны преобразование]

流形 M 上向量场空间 $\mathscr{T}(M)$ 的映射 $R(X,Y)$, 它线性地依赖于 X, $Y\in\mathscr{T}(M)$, 由下式给出

$$R(X,Y)Z=\nabla_X\nabla_YZ-\nabla_Y\nabla_XZ-\nabla_{[X,Y]}Z;$$

这里 ∇_X 是 X 方向的**共变导数** (covariant derivative), $[X,Y]$ 是 X 和 Y 的 Lie 括号. 映射

$$R\equiv R(X,Y)Z:\mathscr{T}^3(M)\to\mathscr{T}(M)$$

是由 ∇_X 定义的**线性联络**(linear connection)的**曲率张量** (curvature tensor).

М. И. Войцеховский 撰　潘养廉 译

曲线 [curve; кривая]

通常指一般的线 (见**线(曲线)** (line (curve))), 包括直线作为其特殊情况.

张鸿林 译

定倾曲线 [curve of constant slope; откоса линия]

切线与一固定方向成定角的曲线. 螺旋线是它的一个例子. 定倾曲线的挠率和曲率之比是常数. 定倾曲线的切线的球面标线是一个圆. 如果 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(s)$ 是定倾曲线的自然参数表示, 那么 $(\mathbf{r}^{\mathrm{II}},\mathbf{r}^{\mathrm{III}},\mathbf{r}^{\mathrm{IV}})=0$ (见[2]). 一条平面曲线 γ 的渐屈线是定倾曲线, 它们的切线都和曲线 γ 所在的平面交成定角 (见[1]). 对每一条定倾曲线, 有一个和它的伴随三面形相关的活动锥面, 它的顶点落在此曲线上, 而母线则生成可展曲面.

参考文献

[1] Blaschke, W., Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie. Elementare Differentialgeometrie, I, Springer, 1921.

[2] Forsyth, A. R., Lectures on the differential geometry of curves and surfaces, Cambridge, 1912.

[3] Appell, P. E., *Arch. Math. Phys.*, **64** (1879), 1. 19-23.

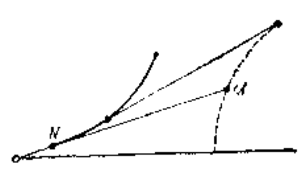
Е. В. Шикин 撰

【补注】 关于上面提到的三维空间中曲线所定义的各种概念, 例如三面形, 见**微分几何学** (differential geometry).

潘养廉 译

追踪曲线 [curve of pursuit; погони линия]

表示追踪问题解的曲线, "追踪"问题的提法如下: 设点 M 沿一条给定的曲线匀速运动. 寻求点 N 匀速运动生成的轨线, 使得在其运动的任何时刻, 该轨线的切线都通过该时刻点 M 所在的位置.



在平面上,追踪曲线的方程组必须满足如下形式

$$\eta-y = \frac{dy}{dx}(\xi-x),\ F(\xi,\eta) = 0,$$

这里 dy/dx 是追踪曲线的斜率,$F(\xi,\eta)=0$ 是给定曲线的方程.

"追踪"问题由 Leonardo da Vinci 提出,并由 P. Bouguer (1732) 解决.它的推广见[2]的最后一章.

参考文献

[1] Савелов, А. А., Плоские кривые, М., 1960.

[2] Littlewood, J. E., A mathematician's miscellany, Methuen, 1953.

Д. Д. Соколов 撰 潘养廉 译

曲线积分 [curvilinear integral; криволинейный интеграл], 线积分(line integral).

沿曲线的积分,在 n 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 中考虑一条给定的可求长曲线 $\gamma=\{x=x(s): 0\leqslant s\leqslant S\}$, $x=(x_1,\cdots,x_n)$, 其中 s 为弧长; 设 $F=F(x(s))$ 是定义在 γ 上的函数. 曲线积分

$$\int_\gamma F(x)\,ds$$

由下面的等式定义:

$$\int_\gamma F(x)\,ds = \int_0^S F(x(s))\,ds \qquad (1)$$

(右方是实区间上的积分),称为第一类线积分 (line integral of the first kind),或称为关于弧长的线积分. 它是某种积分和的极限,而这种积分和可以用与曲线有关的项来表达. 例如,若 $F(x(s))$ Riemann 可积(见 **Riemann 积分**(Riemann integral)), $\tau=\{s_i\}_{i=0}^m$ 为$[0,S]$的一个分割, $\delta_\tau=\max_{i=1,\cdots,m}(s_i-s_{i-1})$ 为其网格, $\xi_i\in[s_{i-1},s_i]$, $\Delta s_i=s_i-s_{i-1}$ 为 γ 从点 $x(s_{i-1})$ 到点 $x(s_i)$ ($i=1,\cdots,m$) 的弧长, 而

$$\sigma_\tau = \sum_{i=1}^m F(x(\xi_i))\Delta s_i,$$

那么

$$\int_\gamma F(x)\,ds = \lim_{\delta_\tau\to 0}\sigma_\tau.$$

假若可求长曲线 γ 由参数形式给出, $x=x(t)=(\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t))$, $a\leqslant t\leqslant b$, 而 $F=F(x(t))$ 是定义在 γ 上的函数,则积分

$$\int_\gamma F(x)\,dx_k,\quad k=1,\ldots,n$$

定义为

$$\int_\gamma F(x)\,dx_k = \int_a^b F(x(t))\,d\varphi_k(t) \qquad (2)$$

(右方的积分为 **Stieltjes 积分** (Stieltjes integral)), 且称为第二类线积分 (line integral of the second kind) 或关于坐标的线积分. 它也同样是某种适当构作的 Riemann 和的极限: 若 $\tau=\{t_i\}_{i=0}^m$ 为 $[a,b]$ 的一种分割, $\eta_i\in[t_{i-1},t_i]$, $\Delta x_{ki}=\varphi_k(t_i)-\varphi_k(t_{i-1})$, $i=1,\cdots,m$, 而

$$\tilde\sigma_\tau = \sum_{i=1}^m F(x(\eta_i))\Delta x_{ki},$$

则

$$\int_\gamma F(x)\,dx_k = \lim_{\delta_\tau\to 0}\tilde\sigma_\tau.$$

对于在 γ 上连续的函数 F,曲线积分(1)与(2)总是存在的. 若 A 和 B 分别为 γ 的始点和终点,则曲线积分(1)与(2)分别表示为

$$\int_{\widehat{AB}} F(x)\,ds \quad 和 \quad \int_{\widehat{AB}} F(x)\,dx_k.$$

第一型线积分和曲线的方向无关:

$$\int_{\widehat{BA}} F(x)\,ds = \int_{\widehat{AB}} F(x)\,ds,$$

但第二型线积分当曲线方向改变时将改变符号:

$$\int_{\widehat{BA}} F(x)\,dx_k = -\int_{\widehat{AB}} F(x)\,dx_k.$$

假如 γ 是由连续可微的参数方程 $x(t)=(\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t))$ ($a\leqslant t\leqslant b$) 给出的连续可微曲线, F 是 γ 上的连续函数,那么

$$\int_\gamma F(x)\,ds = \int_a^b F(x(t))\sqrt{\sum_{k=1}^n[\varphi_k'(t)]^2}\,dt$$

$$\left[\sum_{k=1}^n[\varphi_k'(t)]^2>0\right],$$

$$\int_\gamma F(x)\,dx_k = \int_a^b F(x(t))\varphi_k'(t)\,dt,\quad k=1,\ldots,n,$$

从而右方的积分都与 γ 所选取的参数表达式无关. 若 $\tau=(\cos\alpha_1,\cdots,\cos\alpha_n)$ 为曲线 γ 的单位切向量,则第二型曲线积分可通过下面的公式表示为第一型曲线积分:

$$\int_\gamma F(x)\,dx_k = \int_\gamma F(x)\cos\alpha_k\,ds.$$

假如 γ 由向量形式 $\mathbf{r}(t)=(\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t))$ 给出,而 $\mathbf{a}(x(t))=(a_1(x(t)),\cdots,a_n(x(t)))$ 是定义在 γ 上的向量值函数, 则由定义

$$\int_\gamma \mathbf{a}(x)\,d\mathbf{r} = \int_\gamma(\mathbf{a},\mathbf{r})\,ds = \sum_{k=1}^n\int_\gamma a_k(x)\,dx_k,$$

曲线积分与其他积分之间的关系由 **Green 公式** (Green

formulas)以及 **Stokes 公式**(Stokes formula)表达.

曲线积分可以用来计算平面区域的面积:若有限的平面区域 G 的边界为简单可求长曲线 γ, 则它的面积是

$$\operatorname{mes} G = \int_\gamma x_1\,dx_2 = -\int_\gamma x_2\,dx_1 = $$
$$= \frac{1}{2}\int_\gamma x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1,$$

其中闭路 γ 的方向为逆时针方向.

若曲线 γ 上分布着具有线性密度 $\rho(x)$ 的质量 M, 则

$$M = \int_\gamma \rho(x)\,ds.$$

假如 $\mathbf{F}(x)$ 为某力场的强度(即作用于单位质量上的力),则

$$\int_\gamma \mathbf{F}(x)\,d\mathbf{r}$$

等于力场将单位质量沿 γ 移动所作的功.

线积分在向量场理论中要用到.假如 $\mathbf{a}=\mathbf{a}(x)=(a_1(x),\cdots,a_n(x))$ 为定义在某 n 维区域 G 上的连续向量场($n>1$), 那么以下三个性质是相互等价的:

1) 对任意的闭可求长曲线 $\gamma\subset G$,

$$\int_\gamma \mathbf{a}(x)\,d\mathbf{r} = 0$$

(满足这种条件的场称为位势场).

2) 对于 G 的任意两点 A, B 以及以 A 为始点 B 为终点的任意两条可求长曲线 $(\widehat{AB})_1$, $(\widehat{AB})_2$, 有

$$\int_{(\widehat{AB})_1} \mathbf{a}(x)\,d\mathbf{r} = \int_{(\widehat{AB})_2} \mathbf{a}(x)\,d\mathbf{r}.$$

3) 在 G 内存在函数 $u(x)$ (称为场 $\mathbf{a}(x)$ 的位势函数), 使得 $\nabla u(x)=\mathbf{a}(x)$, 即 $\partial u(x)/\partial x_k=a_k(x)$ ($k=1,\cdots,n$), 并且对任意的 $A, B\in G$ 以及曲线 $\widehat{AB}\subset G$,

$$\int_{\widehat{AB}} \mathbf{a}(x)\,d\mathbf{r} = u(B)-u(A).$$

若 $n=2$ 或 3, 且 G 为单连通区域($n=2$)或单连通曲面($n=3$), 又设 $\mathbf{a}(x)$ 连续可微, 则性质 1)—3) 都等价于以下的性质:

4) 向量场 $\mathbf{a}(x)$ 的旋度在 G 上为 0:

$$\operatorname{rot}\mathbf{a}(x) = 0,\quad x\in G.$$

假如 G 不是单连通的,则 4) 未必与 1)–3) 等价.例如,去掉原点的全平面上定义的场

$$\mathbf{a}(x_1,x_2) = \left(-\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2},\ \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}\right),$$

满足条件 $\operatorname{rot}\mathbf{a}(x)=0$ ($x\neq 0$), 但

$$\int_{|\mathbf{r}|=1} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} = 2\pi \neq 0.$$

参考文献

[1] Ильин, В. А., Позняк, Э. Г., Основы математического анализа, 2 изд., ч. 2, М., 1980.

[2] Кудрявцев, Л. Д., Курс математического анализа, т. 2, М., 1981.

[3] Никольский, С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 2, М., 1975.

Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】 线积分是微分形式在链上积分的一种特殊情形,即 1-形式在 1-链上的积分(见**微分形式**(differential form);**链**(chain),特别是**流形上的积分法**(integration on manifolds)).

参考文献

[A1] Rudin, W., Principle of mathematical analysis, McGraw-Hill, 1976 (中译本: W. 卢丁, 数学分析原理, 人民教育出版社, 1979).

[A2] Spivak, M., Calculus on manifolds, Benjamin-Cummings, 1965 (中译本: M. 斯皮瓦克, 流形上的微积分, 科学出版社, 1980).

王斯雷 译

尖点 [**cusp** 或 cuspidal point; **возврата точка** 或 точка заострения]

曲线的一种**奇点**(singular point),曲线在这点的两个分支有公共的半切线.在平面曲线的情形下,可区分为第一类和第二类尖点.第一种情形曲线位于切锥的同侧(图 a);第二种情形在异侧(图 b).

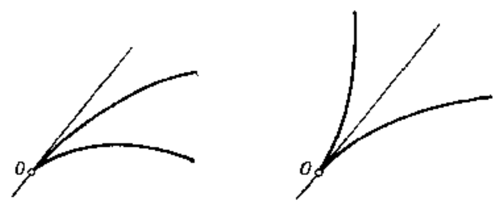


图 a　　图 b

А. Б. Иванов 撰

【补注】 上述"分支"一词是在它如下朴素而非专业性的意义上使用的.把曲线 C 看作一个有限或无限区间在 Euclid 空间 E^n 内的象,为便于说明,这里取 $n=2$.设 φ 是定义在某个区间上的单值解析函数.若 $x=\varphi(y)$ (或 $y=\varphi(x)$) 定义了 C 的一个子集 C_0,就称它为 C 的一个分支(branch).在代数几何学或解析几何学里,分支的概念另有一个更专业性的(因而更精确的)定义,即把在点 $x\in C$ 的分支定义为在曲线 C 的正规化(见**正规概形**(normal scheme))上 x 以上的点.用这个概念即可把尖点定义为在这个点上仅有一个分支的曲线的奇点.

例如,具有第一类尖点的曲线是 $X^4+X^2Y^2+2X^2Y-$

$XY^2+Y^2=0$ (图 a), 具有第二类尖点的例子是 $Y^2=X^3$(图 b).

"尖点"这一词亦用于模形式理论中(见 **Fuchs 群** (Fuchsian group); **模形式** (modular form)).

参考文献

[A1] Walker, R. J., Algebraic curves, Springer, 1978.

陈志杰 译

尖点 [**cusp** ; **касп**], 通常尖点 (ordinary cusp)

代数曲线的一类特殊的奇点. 代数闭域 k 上代数曲线 X 的一个奇点 x 称为尖点, 如果它的局部环 $\mathcal{O}_{X,x}$ 的完全化同构于平面代数曲线 $y^2+x^3=0$ 在原点的局部环的完全化.

【补注】 也可通过两条平面曲线在一点的相交数 (intersection number) 来定义尖点 (见 [A1], pp. 74 - 84). 尖点的推广是超尖点 (hypercusp), 见 [A1], p. 82.

参考文献

[A1] Fulton, W., Algebraic curves, An introduction to algebraic geometry, Benjamin, 1969.

陈志杰 译

分割 [**cut** ; **разрез**], 区域 $D\subset \mathbf{C}$ 中沿非封闭简单弧 $\gamma=\{z(t):0\leqslant t\leqslant 1\}$ 的

从区域 D 中去掉弧 γ 上的点, 即用区域 (或若干区域) $D\setminus\gamma$ 代替区域 D; 称 γ 本身为割线. 此处假定整个 γ 属于 D 或者除起点 $z(0)$ 或终点 $z(1)$ 外属于 D 而 $z(0)$ 或 $z(1)$ 属于边界 ∂D. 对于 $0<t<1$ 时割线 γ 的每点 $z(t)$ 都对应着区域 D 与 γ 近接部分的两个素端; 左素端和右素端 (见**极限元** (limit elements)). 这些素端的并构成割线 γ 的左边和右边.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 割线亦称裂纹 (slit).

也有把极限元或素端称作边界元的. 一般地说, 这些概念不完全相同, 但对于"好"区域 D (例如具有 ordan 边界), 它们是一致的. 与之相关的还有所谓横截线 (crosscut) 概念, 即 D 内的开简单弧, 它的起点和终点是 ∂D 上两个不同的点, 参见 [A1], 特别是其中的第三章.

"cut"这个词还出现于一些不同的数学领域, 有更多的含义. 例如, 有关于实数或有理数的 **Dedekind 分割** (Dedekind cut) 的概念, 见**实数** (real number); 测地线上割点 (cut point) 的概念; 图的分割 (cut) 或分割集 (cutset) 的概念; 传输网络的分割 (cut) 或分割集 (cutset), 见**网络中的流** (flow in a network). 最后, 还有**割迹** (cut locus) 和**下料问题** (cutting problem).

参考文献

[A1] Ohtsuka, M., Dirichlet problem, extremal length and prime ends, v. Nostrand Reinhold, 1970.

杨维奇 译

割迹 [**cut locus** ; **разреза множество**], 自点 O 的

Riemann 流形 W 中从点 O 出发的测地射线上满足下列性质的点 x 组成的集合: 射线 Ox 不能延拓为越过点 x 的测地线. 在二维的情形, 割迹是一个不含闭链的一维图 (见[2]); 如果 W 是任意维数的解析流形, 那么割迹是一个解析子流形的多面体 (见[3]). 割迹连续依赖于点 O. 割迹不仅可以关于一个点, 也可以关于其他的子集, 例如边界 ∂W, 给出定义, 还可以在不同于 Riemann 流形的空间上, 例如凸曲面 (见[4]) 和曲率有界的二维流形上定义.

参考文献

[1] Gromoll, D., Klingenberg, W. and Meyer, W., Riemannsche Geometrie im Grossen, Springer, 1968.

[2] Myers, S. B., Connections between differential geometry and topology, I. Simply connected surfaces, *Duke Math. J.*, 1 (1935), 376 - 391.

[3] Buchner, M. A., Simplicial structure of the real analytic cut locus, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 64 (1977), 1, 118 - 121.

[4] Kunze, J., Der Schnittort auf konvexen Verheftungsflächen, Springer, 1969.

В. А. Залгаллер 撰

【补注】 "不能延拓为测地线"的意思是 Ox 在点 x 后失去了极小性, 即如果 $Ox\subset Ox'$, 那么 Ox' 不再是从 O 到 x' 的极小道路.

潘养廉 译

下料问题 [**cutting problem** ; **раскроя задача**], 合理下料问题 (rational cutting problem)

原材料分块配置的选择问题, 这种配置通常在满足成套要求的情况下使原材料消耗最小. 根据下料的工艺和工厂组织的各种特点, 对于大批量生产和个别生产的合理下料数学模型可有许多区别: 对于直线形 (线段、矩形、平行六面体) 或曲线形分块的模型, 对于原材料的大小和形状不变或可变的模型, 以及考虑原材料缺陷的位置的模型 (见[1]). 在所容许的下料模式上的约束可用来反映行业和所使用的设备的特点. 下料问题等价于装货问题, 即货物在烘干窑中、在车皮中、在船舱中的某些堆放问题.

在有同样的原材料块的大批量生产情形中, 如果有可能把对一个原材料块切割成某些所需要的模式 $j=1,\cdots,m$ 的所有下料方式清楚地列为 $i=1,\cdots,N$, 那么下料问题可归结为下述**线性规划** (linear programming) 问题: 求每种方式所使用的原材料水平 $x_i\geqslant 0$, 使得对于每个 j, 在条件 $\sum_i a_{ij}x_i\geqslant b_j$ 满足时, $\sum_i x_i=\min$, 这里 a_{ij} 是第 j 种模式的分块在第 i 种下料方式下的个数, b_j 是为生产每一产品所需要的第 j 种型式的分块的个

数.在实际中,通常不可能列出所有下料方式.因此,上述线性规划问题是从某个固定的下料方式的集合出发用逐次改进下料计划的方法来解决的.同时,所考虑的下料方式的清单通常是变化的.每一步,选取(在计算机上生成)如下的下料方式之一,这些下料方式根据对偶线性规划问题的估计,能整体上改进下料计划.在"线性"原材料情形下(即只需对长度切割),上述生成过程可用**动态规划**(dynamic programming)方法在可接受的时间内来实现(见[1],[2]).在矩形页状原材料的下料问题中,这一方法原则上也可运用,但是在实际问题中,计算量可能太大.这时,就用启发性算法来生成更好的下料方式:通常只限于考虑不多于三种不同分块模式的下料问题(见[2],[3]).

在原材料可能选择一种或几种标准大小的情形下,或者在有必要利用现有的几种不同大小的原材料的情形下,下料问题可同样地陈述和解决(见[1]).求解直线和矩形情形的下料问题的程序要考虑与所用设备特征相联系的约束(见[2],[3]).这些程序中包含某些功能,如对分块定额的计算和下料图纸的绘制.

在大批量生产中经常使用不同长度的线性材料.这时,下料问题就是如何依次选择具体长度的原材料来切割.在机械制造业中,可适当地使用专门的计算尺来规定经过若干次切割后所余下的下料计划([1]).在服装业中,只用于解决服装下料问题的专用微型计算机已被用来设计不同长度的织物卷的裁剪(见[4]).在冶金厂中,钢板的长度是在轧钢机上运转中测量的,而下料装置是在计算机得到的下料问题解的基础上自动控制的(见[5]).在苏联以外的玻璃工业中,玻璃的缺陷是自动检测的,而且计算机能解决需要避开缺陷的下料问题.在木材工业中,原木在尺寸和形状上也不一致,但是下料问题的大批量性使得系数 a_{ijk}(它刻画由 k 类的原木用第 i 种方法所锯得的 j 型板材的输出)有稳定的统计性质.木材工业中的下料问题很早就在数学中用公式表示了(见[1]),并且已经在生产条件下有效地解决了(见[6]).

对于大批量生产中的曲线形分块情形,完全适用的程序已经发展起来,它可在无限长带的情形下对一行或两行的冲压(见[7],[8]),或对由给定的平板上切割下的带的冲压,选取最优的切割位置.对于包含不同的曲线形分块的下料问题的肉眼判断,与仅在这些分块集上的线性规划问题的逐次解相结合,也是很有效的.

在个别生产情形下,下料问题要求用求解更复杂的**整数规划**(integer programming)问题来代替线性规划问题,并且还有一个隐含的系数矩阵,因为没有列出所有可行的下料.对于线性的和矩形的原材料下料,实用的启发式的近似算法已经程序化(见[2]).

对于个别生产中的曲线块情形的研究已经有某些发展,但至今(1983)还没有足够满意的下料问题的计算机算法.造船工业看来对这种算法最感兴趣.相当有效的是人机对话算法,它把人的目测能力与计算机对于所设计的图样的修正、计算和输出的能力结合在一起.

参考文献

[1] Канторович, Л. В., Залгаллер, В. А., Рациональный раскрой промышленных материалов, 2 изд., Новосиб., 1971.

[2] Мукачева, Э. А., 《Кузн. - штамп. произ - во》, 6 (1979), 14 – 17.

[3] Математическое обеспечение расчетов линейного и прямоугольного раскроя, Уфа, 1980 (Тр. Все - союзного науч. семинара).

[4] Гальцкер И. И., Сафронова, И. В., Механическая технология производства одежды, М., 1977.

[5] Эпштейн, В., Лагутин, А., 《Материально - техн. снабж.》, 11 (1976), 77 – 81.

[6] Соболев, И. В., Управление производством пиломатериалов, Петрозаводск, 1976.

[7] Белякова, Л. Б., Рябинина, Н. О., 《Кузн.- штамп. произ - во》, 11 (1977), 25 – 28.

[8] Стоян, Ю. Г., Панасенко, А. А., Периодическое размещение геометрических объектов, К., 1978.

В. А. Залгаллер, Л. В. Канторович 撰

【补注】

参考文献

[A1] Beasley, J. E., An algorithm for the two - dimensional assortment problem, *European J. Operations Research*, 19 (1985), 253 – 261.

[A2] Gilhore, P. C. and Gobory, R. E., A linear programming approach to the cutting Stock problem, *Operations Research*, 11 (1963), 863 – 888.

[A3] Ladson, L. S., Optimization theory for large systems, Macmillan, 1970, Chap. 4.

史树中 译

CW 复形 [**CW - complex ; клеточное разбиение, CW - комплекс**], 胞腔剖分 (cellular decomposition)

满足下述条件的**胞腔复形**(cell complex) X: (C) 对任何 $x \in X$, 复形 $X(x)$ 是有限的,即由有限多个胞腔组成.(对于胞腔复形 X 的任何子集 A, $X(A)$ 表示 X 中包含 A 的所有子复形的交.(W) 如果 F 是 X 的一个子集,且对 X 的任何胞腔 t,交集 $F \cap \bar{t}$ 是 $\bar{t}$ 中(从而也是 X 中)的闭集,那么 F 是 X 的闭子集.这样,每一个点 $x \in X$ 都属于 X 的一个确定的胞腔 t_x,且 $X(x)=X(t_x)=X(\bar{t}_x)$.

CW 的记号源于上述两个条件中(英文)名称的起首字母——(C)代表闭包有限性,而(W)代表弱拓扑.

有限胞腔复形 X 满足条件(C)与(W).更一般地,每个点 x 都包含在某个有限子复形 $Y(x)$ 中的胞腔复形 X 是 CW 复形.设 F 为 X 的一个子集,使得对 X 的每一

个胞腔 t, $F\cap\bar{t}$ 是 $\bar{t}$ 中的闭集. 那么对任何 $x\in X$, 交 $F\cap Y(x)$ 是 X 中闭集. 如果点 x 不属于 F, 则开集 $U_x=X\setminus(F\cap Y(x))$ 包含 x, 且不与 F 相交. 集合 $(X\setminus F)=\bigcup_{x\in X\setminus F}U_x$ 是开的, 故 F 是闭集.

CW 复形类 (或与 CW 复形具有相同伦型的空间类) 对于同伦论来说是最适当的一类拓扑空间. 因此, 如果 CW 复形 X 的一个子集 A 是闭的, 那么从拓扑空间 A 到拓扑空间 B 的映射 f 是连续的, 当且仅当 f 在 $\bar{t}\cap A$ 上的限制是连续的, 这里 t 为 X 的任一胞腔. 如果 C 是 CW 复形 X 的紧子集, 则复形 $X(C)$ 是有限的. 对于 CW 复形 X 的每一个胞腔 t, 都存在一个集合 D, 它在 $\bar{t}$ 中是开的, 且以 $\bar{t}\setminus t$ 为形变收缩核.

通常, CW 复形是用归纳步骤造出的: 每一步都是在前一步的结果上粘贴给定维数的胞腔. 这样的复形的胞腔结构与其同伦性质直接相关. 即使是多面体这样的"好"空间, 考虑其作为 CW 复形表示也是很有帮助的: 这种表示中的数目通常比单纯剖分的少. 如果 X 是在空间 A 上贴附 n 维胞腔而得到的, 那么子集 $X\times 0\bigcup A\times I$ 是 $X\times I$ 的强形变收缩核, 这里 $I=[0,1]$.

相对 CW 复形 (relative CW - complex) 是一个偶对 (X, A), 它由拓扑空间 X, 闭子集 A, 连同闭子空间序列 $(X, A)^k$ $(k\geqslant 0)$ 组成, 它们满足下述条件: a) 空间 $(X, A)^0$ 是 A 添加零维胞腔而得到的; b) 对于 $k\geqslant 1$, $(X, A)^k$ 是由 $(X, A)^{k-1}$ 添加 k 维胞腔而得到的; c) $X=\bigcup(X, A)^k$; d) X 的拓扑与族 $\{(X, A)^k\}$ 相容. 空间 $(X, A)^k$ 称为 X 相对于 A 的 k 维骨架 (k - dimensional skeleton). 当 $A=\varnothing$ 时, 相对 CW 复形 $(X, \varnothing)=X$ 是前述意义下的 CW 复形, 且其 k 维骨架是 X^k.

例. 1) 单纯复形 K 和 L 适合 $L\subset K$ 的偶对 (K, L), 定义了一个相对 CW 复形 $(|K|, |L|)$, 其中 $(|K|, |L|)^k=(K^k\bigcup L)$. 2) 球 V^n 是 CW 复形: 对 $k<n-1$, $(V^n)^k=p_0$, $(V^n)^{n-1}=S^{n-1}$, 而对 $k\geqslant n$, $(V^n)^k=V^n$. 球面 S^{n-1} 是 CW 复形 V^n 的子复形. 3) 如果偶对 (X, A) 是相对 CW 复形, 则 $(X\times I, A\times I)$ 亦然, 且 $(X\times I, A\times I)^k=((X, A)^k\times\{0, 1\})\bigcup((X, A)^{k-1}\times I)$ (当 $k=0$ 时, 根据定义, $(X, A)^{-1}$ 是 A). 4) 如果 (X, A) 是相对 CW 复形, 则 X/A 是 CW 复形, 且 $(X/A)^k=(X, A)^k/A$, 此处 X/A 是把 A 的所有点等同于一个点所得的商空间.

参考文献

[1] Teleman, C., Grundzüge der Topologie und differenzierbare Mannigfaltigkeiten, Deutsch. Verlag Wissenschaft., 1968 (译自罗马尼亚文).

[2] Spanier, E. H., Algebraic topology, McGraw - Hill, 1966 (中译本: E. H. 斯潘尼尔, 代数拓扑学, 上海科学技术出版社, 1987).

[3] Dold, A., Lectures on algebraic topology, Springer, 1980.

Д. О. Баладзе 撰

【补注】 CW 复形由 J. H. C. Whitehead ([A4]) 作为**单纯复形** (simplicial complex) 的推广而引入. 它的一个明显的优点是, 分解时所需的胞腔数通常比三角剖分时的单形数少得多. 这一点在计算同调、上同调和**基本群** (fundamental group) ([A1]) 时特别有用. CW 复形已被证明在同伦函子 (homotopy functor) 的分类空间方面是有用的, 这时它作为 **Eilenberg - MacLane 空间** (Eilenberg - MacLane space) 出现.

专门论述 CW 复形的教科书是 [A2] 和 [A3].

参考文献

[A1] Brown, R., Elements of modern topology, McGraw-Hill, 1968.

[A2] Cooke, G. E. and Finney, P. I., Homology of cell complexes, Princetone Univ. Press, 1967.

[A3] Lundell, A. T. and Weingram, S., The topology of CW - complexes, v. Nostrand, 1969.

[A4] Whitehead, J. H. C., Combinatorial homotopy I, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **55** (1949), 213–245.

张 平译 沈信耀 校

控制论 [cybernetics; кибернетика]

关于控制、通信和信息处理的科学 (字面意义是"操舵术"). 古希腊哲学家 Plato 应该算是第一个在控制的一般意义上使用这一术语的. A. M. Ampère (1834) 曾提议将关于人类社会管理的科学称为"控制论". N. Wiener (1948) 将关于动物和机器中的控制与通信的科学称为"控制论". 其后控制论的发展受到计算机的很大影响, 到 19 世纪 70 年代初, 控制论最后形成为一门数理性质的学科, 它的独特的研究对象是所谓的控制论系统. 控制论系统 (cybernetics systems) 是从某种 (信息的) 观点出发关于复杂系统的抽象, 这种复杂系统由自然科学、技术科学和社会科学等 (从它们独自的立场) 进行十分广泛的研究. 为了显示出这些不同性质的系统的一般特色, 控制论提供一个一般的和原则上是新的研究方法. 这就是所谓的计算机仿真 (computer simulation), 它是介于经典的演绎方法和经典的实验方法之间的一种方法. 因此, 控制论, 像数学一样, 可以用作其他很多学科的一种研究工具. 此外, 控制论方法可能研究的问题范围比经典的 (解析的) 数学方法要广阔得多, 它几乎包括所有学科. 在最简单的情形下, 控制论系统可简化成一元. 控制论系统的元 A 在一定的抽象处理中, 被视为一个五元组 $\langle x, y, z, f, g\rangle$. 所谓 A 的输入信号 (input signal) 记为 $x=x(t)$, 更准确地说, 它是一个时间 t 的函数的有限集合: $\langle x_1(t), \cdots, x_k(t)\rangle$. 在很多具体控制论系统中, 时间 t 被视为一个仅取离散值的参数 (一般是整数集). 但是, 不失一般性, 也可以考虑通常的连续时间的情况 (这就是下面要做的). 对于控制论系

统的同一个元 A，函数 $x_i(t)$ 取值的范围可以是不同的实数集．通常地，函数的值域是普通的连续数区间，整数集，或它们的各种有限子集．函数 $x_i(t)$ 本身通常假设是分段连续的．符号 y 表示元的输出信号(output signal) $y=y(t)$，它是与输入函数 $x_i(t)$ 同类型的有限的函数集 $y=\langle y_1(t), \cdots, y_m(t)\rangle$．元 A 的内部状态记为 $z=z(t)$，它也是相同类型的有限的函数集 $z=\langle z_1(t), \cdots, z_n(t)\rangle$．符号 f 和 g 表示泛函，分别给出内部状态 $z(t)$ 和输出信号 $y(t)$ 的现时值：

$$\begin{aligned} z(t) &= f(t, x(t), D_t z(t)); \\ y(t) &= g(t, x(t), D_t z(t)). \end{aligned} \tag{1}$$

这里 $D_t z(t)$ 表示将向量函数 $z(t)=\langle z_1(t), \cdots, z_n(t)\rangle$ 限制在由半开区间 $[\tau_1, t), \cdots, [\tau_n, t)$ 给出的值域，其中 $\tau_i=\tau_i(t)$ 是 t 的分段连续函数，使得 $\tau_i<t$ $(i=1, \cdots, n)$ 成立．

控制论系统的元的上述定义预先设定了时间 t 可取任意的实数值．事实上，对于绝大多数情况 t 的取值仅限于非负数．此外，元的定义还应当补充以指定的初始状态 $z_0=z(0)$，也可以补充初始输出状态 $y_0=y(0)$．对于这种情况，关系(1)仅在 t 的正值上来考虑．除了确定元之外，控制论系统常常还包含随机元，这时结果就复杂化了．为此，一般地已证明，只要在(1)的右端的泛函的自变量中，增加取值于连续的或离散的实数集的随机函数 $\omega(t)$ 就够了．

还有进一步推广这一定义的可能性，特别是对元的输入、输出信号和内部状态引入无限维向量函数．可是应该指出，与数学不同，控制论的特点是对研究对象的构造性方法．这意味着，对被考虑的所有函数的值，应该能够实际加以计算(到一定的精确度)．因此，在研究控制论系统以及它们的元时，实际上迟早要进行有限近似化处理．

多元控制论系统(multi-element cybernetic systems)是通过将元的集合(通常是有限的) M 的某些元的输出信号等同于另一些元的输入信号的办法构造出来的．形式上这种等同可以由下列方程组给出

$$x_i^p(t) = y_j^r(t), p, r \in M, \quad i \in I_p, \quad j \in J_p, \tag{2}$$

其中 $x_i^p(t)$ 表示第 p 个元的输入信号的第 i 个分量，$y_j^r(t)$ 则表示第 r 个元的输出信号的第 j 个分量．在这样的等同(元组合进系统)后，某些元的输入信号的部分分量成为自由的，也就是说，它们同任何输出分量都不等同．所有这些分量被组合起来，成为被构造的系统 S 的输入向量信号 $x(t)$．剩下的输出信号的自由分量构成系统 S 的输出信号 $y(t)$．与输入信号不同，在输出信号 $y(t)$ 中，(依照被构造的系统的定义)可包含任意数目的组成系统 S 的元的输出信号的非自由分量．按定义，系统的初始状态，是由所有元的初始状态分量(按某种顺序)组成的向量．决定系统在任意时刻的状态的向量 $z(t)$ 也是按类似方法组成的．

在通过元的集合和等同关系(2)来定义系统时，必须保证定义是适定的(well-posed)，就是说，在给定系统初始状态 $z(0)$ 和输入信号 $X(t)$ (对所有 $t \geqslant 0$)之后，应能够计算输出信号 $y(t)$ (对所有 $t>0$)．例如，使系统的定义成为适定的一个必要条件是，(2)中的函数 $y_j^r(t)$ 的值域包含在 $X_i^p(t)$ 的值域之内．为了简化保证系统定义适定性的问题，通常不允许一个输入分量同时等同于多于一个的输出分量．

方程组(2)定义了控制系统的结构(structure) (不要与数学中结构的抽象概念相混同!)．在许多应用中，考虑具有变结构的系统是很有用的．在这方面，通过引入附加子系统，可以将任何有变结构的系统归结为具有不变结构的系统．

上述关于抽象控制论系统的定义包含着大量不同知识领域中考虑的特殊系统，其中包括逻辑网络，抽象自动机(automaton)网络，机械动力学系统，各种类型的机电和电子设备(包括计算机)，生物有机体及其各种子系统(例如神经系统)，生态的、经济的和社会的系统．为了能够将具体的生物、技术和社会系统当作一个抽象的控制论系统来考虑，必须对它们的大量特性(诸如尺寸、质量、化学结构、表示信号和状态的很多具体形式，等等)进行抽象．

从控制论的观点研究系统是一种纯信息的研究，换句话说，元的状态以及元与元之间的关系是由一组代码表示出来的，其主要目的是确定它们差异的度量(在预先指定的描述精度内)，而不是直接测量某些实际的物理量，例如，若在某电网络中仅含两个电压水平 v_1 和 v_2，它们可以由数字代码 0 与 1 给出而与这些电压的实际值无关．应该指出，虽然在控制论系统的上述定义中仅用到数字代码，但一旦需要利用任意有限字母表中的字，不难将它们替换成数字字母代码．

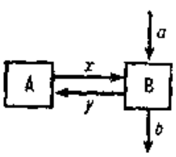
任意一个具有有意义的输入信号 $x(t)$ 和输出信号 $y(t)$ 的系统，都可以当成是一个信息处理器(processor of information)，它将信息流 $x(t)$ 变成信息流 $y(t)$．在离散时间和 $x(t), y(t)$ 的定义域是有限的情况下，信息处理(在输入信息具有适当代码时)可以解释为两个固定字母表上字与字间的一种对应关系．在此情况下，系统可以解释为一个离散信息处理器．具有有意义的输入信号的系统称为开的(open)；与此相反，闭系统(closed systems)在它的任一元处均无自由输入分量．在此情况下，输入向量信号 $x(t)$ 的分量数为零，因此不能载有任何信息．闭系统在这词的严格意义上既不可能有输出也不可能有输入．可是即使在这一情况下，考虑到系统内部状态 $z(t)$ 随时间的变化，它们也可以

被解释为信息发生器．在下面，将这种发生器视为一种特殊的信息处理器将是方便的．

对于控制论系统，它们的分析与综合问题都是十分重要的．系统的分析问题(problem of analysis)在于寻求由系统给出的信息处理的各种性质，特别是将处理过程表述成一个方便的算法形式．后一种情况实质上是将系统集结(组合)成一个单独的元的问题．系统的综合问题(problem of synthesis)与分析问题相反，必须按系统完成的信息处理的描述，构造出一个实际上能进行这一信息处理的系统．这时当然必须首先定义一类元，利用它们去构造一个所要求的系统．

选择控制论系统间的形式变换的问题具有十分重大的意义，这种变换不改变由系统决定的信息处理(还可能有其他不变量)．这又导致系统的多种定义的等价性问题，使有可能提出最优化问题(problem of optimization)，亦即，从一类等价系统中寻找一个具有极值泛函的系统的问题(这个泛函是定义在这类系统上的)．

分解问题(problem of decomposition)的内容是，系统的部分或全部元表示为由更小的元组成的系统(子系统)．在大量的应用中有特殊重要意义的是可以表为两个子系统(元)组合的系统：通常称为控制系统(controlling system)(控制器(controller)和被控系统(controlled system)(装置(plant))．这样的系统可以表示成方框图的形式(见图)，其中 A 是控制系统，B 是控制的对象；字母 x 表示所谓的直通信信道(channel of direct communication)(元 A 的输出与元 B 的输入等同)，而 y 表示逆通信信道(channel of reverse communication)，a 表示系统的输入信号(周围介质和各种噪声的作用)，而 b 表示输出信号，它刻画着子系统 B 的行为(控制的有效性)．



对这样的系统，综合问题的一般提法如下：对于一个给定的系统 B，一类给定的外作用 a，和一给定的控制有效性判据 b，需要构造一个控制系统 A 以保证控制效应的具体判据 b．属于这样定义的有：开环控制的综合问题(b 是时间的向量函数)，伺服机(在某种意义上使向量 $b-a$ 极小)，最优控制系统(使被控对象在最短时间内进入它的状态空间的期望区域的系统)等．

保证系统运行于可靠状态的问题，在控制论系统的理论中占有非常重要的地位．这里，从控制论的角度来看，可靠性(reliability)与系统本身的组织问题(元的冗余度和元之间通信的冗余度，特殊代码系统等)有关，这个问题远比保证元及其内部通信的实际可靠性更加重要．

对于相当简单的系统，上面列举的问题的绝大部分(如果不是在完全意义下，至少也是在简化的提法下)都可以用经典数学加以解决，可能增补一些不大的更动．对于在实际问题中遇到的复杂系统，一般来说，这些方法是不适合的．这里我们对系统复杂性的理解并不着重于数量上的复杂性(元的数目，通信的数目，状态、输入及输出的维数)，而主要着重于基本性质上的复杂性．在这种意义上系统称为复杂的(complex)就由于它没有简单的表述．而这除了要用到大量的元和它们的各种各样的参数(设不能再减少)之外，还要预先假设元间的通信是分散和不规则的．用经典的演绎方法对这些系统做有效的研究，实际上变得不可能了．经典的实验研究方法也只在一个有限范围内才适用．在很多情况下，这种应用受到昂贵实验费用的限制，而在另外很多情况下(气象学、生态学、宏观经济等等)，自然的实验或者是完全不可能的，或者无论怎样说都是十分冒险的．

因此作为研究复杂系统的基本方法的控制论应用了计算机仿真方法．由于高速通用计算机的出现，这种仿真方法已成为科学认知的新的有力的通用的方法．机器仿真方法就其纯形式来说，是以所谓的仿真模型(simulation models)的应用为基础的．这种模型本质上是将建模系统的描述翻译成计算机代码．服务于模型的特殊程序产生建模系统的输入信号 $x(t)$ 的各种具体实现，并且与引入计算机的系统描述(包括其初始状态)相一致构造出输出信号 $y(t)$．因此，正像在普通实验中(在自然中)一样，所得结果将通过特别程序来处理，这种程序包括诸如各种量的分布的直方图，这些量刻画着所研究系统的行为并确定着各种定性特征(例如，系统和它所定义的信息处理应属于这一类或那一类)，等等．首先，控制论系统的分析问题就是用这种方法解决的．为了用计算机仿真方法解决综合和最优化问题，服务于实验的计算机程序系统要补充设置计算机与研究者间的交互对话，对建模系统的描述按人的提示进行修改，以及对自动处理这种修改提供实施步骤．

将控制论系统的描述转换成计算机代码是一个相当繁重的工作．因此，现代计算机仿真设备包括专门的编译程序(或解释程序)，它能将专门设计的系统建模语言自动地转换成机器代码．这种建模语言的基础是一种能提供对参数、函数和用于描述系统中通信的实际描述手段(适合于研究者的)．通常为了保留通用性(即描述任意系统的可能性)，建模语言力求获得一个较其他类的语言更简单方便的描述．此外，这些建模

语言还包括实现上述计算机仿真的附加描述手段．现在(1987)，为了系统建模和产生计算机仿真结果，数种通用及专用语言都已经发展起来了:西方有 Simula、Simscript 语言，而苏联有 Sleng，Nedis 等语言．

在很多计算机仿真系统中，所用的方法都有了补充，因为可能利用数学的某些分支(如排队论)的分析工具，以及现代的计算方法．首先，这涉及各种类型的最优化方法:线性规划、动态规划、梯度法、随机规划等．

控制论系统的研究，在很多情况下，最好是对计算机仿真补充以自然仿真．这时，待建模的控制论系统的某些部分以自然形式被表现为通用计算机(通过专门翻译)，而其余部分的建模、实验的控制及结果的处理都如上述方法在通用计算机上进行．应用通用及专用计算机于自然实验的控制自动化，以及对所得实验数据的收集与处理，是完善所有实验科学的研究过程的重要趋势．但是即使这样，纯计算机仿真仍然有着广泛的应用．

控制论与数学的关系并非仅限于在控制论中应用数学方法．数学与控制论还具有共同的研究对象．例如，在算法的数学理论中算法是一个研究对象，但同时也能被视为一个控制论系统，而且在控制论中既是一种研究工具，也是一个研究对象．但是数学与控制论的研究方法却是十分不同的．例如，对数学来说，算法主要是作为数学基础的一个基本概念．因此，主要问题在于研究这个概念的一般性质，为此必须将其定义归结到最少数目的简单基本概念和运算．控制论为自己提出的课题是，实际制定出合适的方法以综合具体的系统，其中包括算法．这种实际的倾向使得发展充分适宜于应用的、面向问题和步骤的**算法语言**(algorithmic language)成为非常必要．数学主要关心在某些类算法中建立等价性原则上是否可能的问题，而控制论却主要关心为实际实现算法的等价变换创造合适的工具．控制论不研究信息表示的最简单形式:将信息表示为抽象字母表中的字，而是研究复杂的数据结构，这是在计算机上有效地实现算法所必须的．上述例子相当清楚地说明了控制论方法研究它的数学对象的特点．对其他数学对象(抽象自动机、逻辑网络等)的控制论研究也会发现这种方法上的差异．

从控制论和数学间的相互关系的观点来看具有特殊意义的是，它们对待经典数理逻辑的工具的处理方法．数学方面预先假设公理系统和演绎规则都已经得到最大的简化，而没有它们就不可能对**逻辑演算**(logical calculus)的一般特性和可行性进行有效的分析．控制论提出用实际办法对演绎构造进行自动化的问题，从而开始发展实用的数理逻辑语言．这种语言与经典的数理逻辑语言有关系，而作为现代的程序语言(如 **Algol - 68 语言** (Algol - 68))则与 Post 算法语言或 Марков 正规算法有关系．演绎规则在这种语言中(在与具体的有意义的数学文章的相互关系中)有一种令人信服的能力，它并不弱于现代数学专著中常见的“明显地”一词中所隐藏的力量．

演绎构造的自动化是控制论分支的最重要部分之一，并被称为“人工智能”．自然的人类的智能(脑以及接受和发出外信息的器官)是一个最有趣最复杂的控制论系统．关于人怎样思考的问题曾经而且将继续是一个非常有趣和奇妙的科学问题．控制论企图从理论和实际两方面来解决这个问题．它是一个人类智能活动各个方面进行的自动化(全部或部分地有人的干预)问题，而且最终地，是智能整体的自动化问题．

除了逻辑思维(演绎构造)的自动化之外，人工智能的重要组成部分还有**模式识别**(pattern recognition)(主要是视觉的和听觉的)，自然人类语言的操作(句子和词语意义的识别，维持对话进行)，教育和自我教育等．研究和设计控制机器人假肢运动的有效算法，人工声音设计以及声音控制等，都是具有重大意义的问题．在对有目的的行为、目标和子目标的选择方法以及达到目标的规划的研究中产生出一群特殊的课题．创造人工智能的一个实际途径在于创造(人机)对话系统，这将在人类各种智能活动领域(逻辑演绎，从一种自然语言到另一种的翻译，下棋，等等)中提高劳动生产率．随着它们不断的完善，在协同工作中计算机所起的作用将不断地增大，直到相应的过程得到全部自动化．

控制论和现代计算机技术之间的相互关系是非常重要的问题，这种相互关系有两个不同的方面．第一，计算机是研究控制论的基本工具;其次，计算机作为最复杂的控制论系统，也是控制论中一个出色的重要研究对象．当然，计算机在实际设计中还有很多有待解决的技术问题没有进入控制论．可是，计算机和计算系统的结构问题，控制计算过程的组织(包括数据库的组织)都属于控制论的范围，并构成控制论的一个比较重要的分支．这一情况值得注意，因为它表现出苏联所理解的控制论学科，与西方(主要是美国)所理解的不同之处，在西方，结构和计算系统的控制问题主要属于“计算机科学”，而未包括在控制论之内．

控制论系统实际上在所有知识领域里都会遇到．这种系统虽然有这些或那些特性，但都可以用专门适用于相应一类系统的控制论方法来研究．这样就有可能对它们进行深入的研究．控制论的一些专门的应用分支，例如工程控制论、经济控制论、生物控制论、医学控制论和军事控制论等也就这样产生了，并不断地向前发展．在语言学中应用数学和控制论方法导致所谓的**数理语言学** (mathematical linguistics)的产生，这

一学科与人工智能中的语言学问题有直接的关系.

参考文献

[1] Wiener, N., Cybernetics, Wiley & M.I.T., 1948(中译本:N.维纳,控制论,科学出版社,1963).

[2] Ashby, W. R., Itroduction to cybernetics, Chapman & Hall, 1956.

[3] Глушков, В. М., Введение в кибернетику, К., 1964.

[4] Энциклопедия кибернетики, т 1-2, К., 1974.

В. М Глушков 撰

【补注】 正像已经在上面的正文中所说的,在西方文献中"控制论"一词的用法和苏联是不同的.下面给出西方的观点.从定义出发比较方便.

控制论是一个科学探究的领域,它与人造系统的研究有关系.正是这样,它本身有别于物理科学的描述性质,也有别于数学的纯逻辑结构和目的.控制论包括如控制理论(见**控制系统**(control system))、通信理论(见**通信信道**(communication channel))、信息处理、**运筹学**(operations research)、计算机科学(见**抽象计算机**(computer, abstract))、决策论、**数理统计学**(mathematical statistics)等领域(的部分).

"控制论"一词在苏联与东欧比在北美和西欧更为流行.与这一术语打交道的难点在于,不清楚它包括什么,因之也不明白它不包括什么.

在控制论领域中很难发现什么统一的主题.正如已讲过的,这个领域主要涉及人造的系统和一些对工程和管理科学十分重要的系统.所有这些表明控制论领域有着很强的约定俗成的一面,它倾向专注于设计,它的主要特征是综合而非分析.不幸的是,实际事实说明,控制论是由许多重复不多、共性很少的专业组成的.在起统一化作用的思想中,有运用数学语言,用最优技术来形成并达到目标,和用随机模型来表示不确定性.此外,动力学起着重要的但非主导的作用,它是研究系统随时间的演化的.在条目正文中所给出的控制论系统的定义是一次对输入-状态-输出形式的动力学系统定义的尝试.从数学的观点看,可以用更逻辑更直接的方式达到这个目的.例如,可以定义一个动力系统(dynamical system) Σ 为一个三元组 $\Sigma=(T, W, B)$,其中 $T\subseteq R$ 为时间集,W 为信号字母表(W 不必是有限集或可数集),而 $B\subseteq W^T$ 为行为;B 区分哪些时间轨线是和哪些轨线不是与支配 Σ 的规律相容的.在大多数应用中,T 或是 $\mathbf{Z}$ 或是 $\mathbf{R}$,而 Σ 是时间不变的(定常的),或者说,对所有 $t\in T$ 假设 $\sigma^t B=B$,其中 σ^t 表示 t 移位(shift):$(\sigma^t f)(t')=f(t+t')$.在下面将假设 $T=\mathbf{Z}$ 或 $\mathbf{R}$ 且 Σ 是定常的.

可以进一步改进这个定义,使得系统的状态也变成这个结构的一部分.一个状态空间系统(state space system) Σ_s 定义为一个四元组 $\Sigma_s=(T, W, X, B_s)$,其中 T, W 如上,X 表示状态空间,$B_s\subseteq(W\times X)^T$ 表示内行为.行为 $B:=\{W:\exists x$ 使得 $(w, x)\in B_s\}$ 称为外行为.我们应认为 w 是可观测的变量,或者最好是已经建模的变量,x 则是一潜在的辅助变量,它描述系统的记忆.这一结构可以定形,只要假设 B_s 满足状态公理(axiom of state),它要求有:

$$\{(w_1, x_1)\in B_s, (w_2, x_2)\in B_s, x_1(0)=x_2(0)\}\rightarrow$$
$$\rightarrow\{(w_1, x_1)\wedge(w_2, x_2)\},$$

这里 $\wedge$ 表示毗连:

$$(f_1\wedge f_2)(t):=\begin{cases}f_1(t), & 当\ t<0\ 时,\\ f_2(t), & 当\ t\geqslant 0\ 时.\end{cases}$$

离散时间系统(discrete-time system)的例子是形式语言;而离散时间状态空间系统(discrete-time state space system)的例子则是自动机,在大多数应用中 B 是由借助微分或差分方程表示的演化律给定的.如果这一微分方程或差分方程对 x 是一阶的,而对 w 是零阶的,我们就得到状态空间系统.

状态空间模型在控制、通信、信息处理等问题中有些重要的优点,这已由**动态规划**(dynamic programming)的例子说明了.将一个状态空间模型和给定的外行为相联系的有关课题被称为实现理论(realization theory).在集合论水平的漂亮的实现理论算法已经建立,对于特殊类型的系统,特别是线性系统,也是如此.

在很多动力学系统中,可以将外变量分解为输入(inputs),原因和输出(outputs)、效果.将此原因-效果结构和状态模型的记忆结构结合起来,并假设动力学是由一演化律所表述,就给出如下的模型类

$$\sigma x=f(x, u),\ y=h(x, u)\ (离散时间),$$

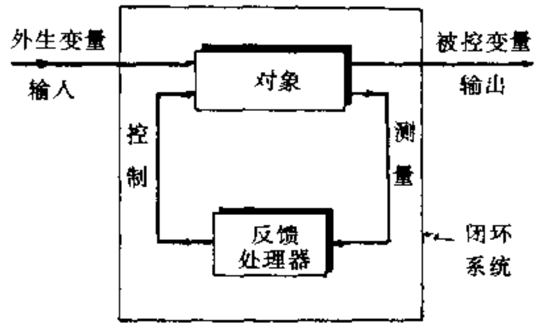
$$\dot{x}=f(x, u),\ y=h(x, u)\ (连续时间).$$

这些模型和初始及终止条件相结合,在动态决策(控制理论,见**自动控制理论**(automatic contral theory))和计算机科学(**自动机理论**(automata, theory of))中特别有用,在后一领域中时间通常是逻辑时间,亦即,它表示顺序,且必须是时钟时间.

上述类型的动力学系统在控制论领域里已经形成而且已有非常多的研究.输入(控制)变量的出现使得这类模型非常适合于设计型的问题.而输出(测得的)变量的出现则使它非常适合于信息处理问题.但是在实际上,上面的定义正是动力学的通常模型而没有新东西,而且物理系统(如 Maxwell 方程,Newton 定律)也表现出这样的结构.因此,称这些是控制论系统是不恰当的使用术语.

在内联接系统中,常常令某些子系统的输出去作另外一些子系统的输入.一种重要的内联接是下图中

所示的反馈环 (feedback loop).



通过设计适当的反馈处理器，可以得到闭环系统的某些被期望的性质(稳定性、最优性等).

控制论的一个突出特点，按西方的意见，是人们可以通过这一途径得到有目标的系统(purposeful systems). 各个子系统并非独立的，而是被设计得或已发展得使一个子系统的运行能适应于另一子系统的运行.

在数学系统和控制理论中发展起来某些有趣的控制论结构是观测器或滤波器、辨识系统以及自适应控制机构. 它们产生了内模原理、分离性原理、确定性等价控制等等. 以这种方式得到的内联接系统的结构可以视为是控制论的内容. 长久地看，这些原理背后的思想可能成为控制论核心的一部分.

虽然计算在控制论中起着重要作用，但将仿真方法或计算机科学中像计算机语言和结构等归为控制论看来并不实际可行. 另一方面，人工科学的领域就其所涉及的目标和问题而言，确实可以被视为控制论的一部分.

参考文献

[A1] Willems, J. C., Models of dynamics, in Dynamics reported, Wiley & Teubner, Forthcoming.

[A2] Simon, H. A., The science of the artificial, M. I. T., 1969.

高为炳 译

闭链 [cycle; цикл]

边缘为 0 的链(chain).

循环坐标 [cyclic coordinates; циклические координаты]

某一物理系统的不以显式形式进入该系统的特征函数表达式的广义坐标. 在使用相应的运动方程时，可立刻得到运动的相应于每一循环坐标的积分. 例如，如果 **Lagrange 函数**(Lagrange function) $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ 不以显式形式含有 q_j，其中 q_i 是广义坐标，$\dot{q}_i$ 是广义速度，t 是时间，则 q_j 为一循环坐标，并且第 j 个 Lagrange 方程有 $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)=0$ 的形式(见 **Lagrange 方程(力学中的)**(Lagrange equations (in mechanics))，立即给出运动积分

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \text{常数}.$$

参考文献

[1] Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М., Механика, М., 1958(英译本: Landau, L. D. and Lifshits, E. M., Mechanics, Pergamon, 1965).

Д. Д. Соколов 撰

【补注】 在完全可积分的 Hamilton 方程组理论中，循环坐标(角坐标(angle coordinate)，角变量(angle variable))的概念是与作用-角坐标(action-angle coordinates)联系着的. 每个这样的(具有有限自由度的)系统，其 Hamilton 算符能够转换成具有 (y_k, x_k) 坐标的 $H(y_1,\cdots,y_n)$ 形式，即它不包含 $x_1,\cdots,x_n$. 这时 y_k 称为作用坐标，x_k 称为角坐标.

朱治强 译

循环群 [cyclic group; циклическая группа]

具有单个生成元的群. 所有循环群都是 Abel 群. 每个素数阶的有限群是循环群. 对每个有限数 n 在同构意义下有且仅有一个 n 阶循环群; 存在无限循环群，它同构于整数加法群 $\mathbf{Z}$. n 阶有限循环群 G 同构于模 n 剩余类环 $\mathbf{Z}(n)$ 的加法群(也同构于(复)n 次单位根的群 $\mathbf{C}(n)$). 每个 n 阶元 a 皆可作为这个群的生成元. 于是

$$G = \{1=a^0=a^n, a, \ldots, a^{n-1}\}.$$

О. А. Иванова 撰 石生明 译 许以超 校

循环模 [cyclic module; циклический модуль]，环 R 上的(左)

同构于商模 R/I 的左模，I 是 R 的某个左理想. 特别地，不可约模是循环模. 与循环模相关的有 Köthe 问题(Köthe problem)(见[4]): 什么环上任一模(或有限生成模)都同构于循环模的直和? 在交换环类中，这种环恰为 Artin 主理想环(见[1], [3]). 对于其上每个有限生成模都是循环模的直和的交换环也已有完全的刻画([2]).

参考文献

[1] Faith, C., Algebra: rings, modules and categories, 1–2, Springer, 1973–1977.

[2] Brandal, W., Commutative rings whose finitely generated modules decompose, Springer, 1979.

[3] Faith, C., The basis theorem for modules a brief survey and a look to the future, in Ring theory, Proc. Antwerp Conf. 1977, M., Dekker, 1978, 9–23.

[4] Köthe, G., Verallgemeinerte Abelsche Gruppen mit hyperkomplexem operatoren ring, *Math. Z.*, 39 (1935), 31–44.

Л. А. Скорняков 撰 章璞 译

循环半群 [**cyclic semi - group; циклическая полугруппа**]

同**单演半群** (monogenic semi - group).

摆线 [**cycloid; циклоида**], 亦称旋轮线

平面超越曲线,它是沿直线滚动的圆上一点 M 的轨迹(图1).

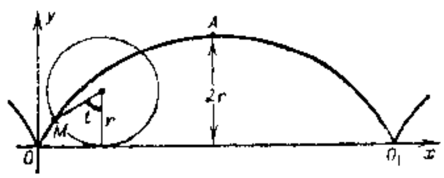


图 1

其参数方程是

$$x = rt - r\sin t,$$

$$y = r - r\cos t.$$

其中 r 是圆的半径, t 是圆的转角. 在 Descartes 坐标中的方程是

$$x = r\arccos\frac{r-y}{r} - \sqrt{2ry-y^2}.$$

摆线是周期曲线: 周期是 $OO_1=2\pi r$. 点 $O, O_k=(2k\pi r, 0)$ $(k=\pm 1, \pm 2, \cdots)$ 是尖点. 点 $A=(\pi r, 2r)$ 和 $A_k=((2k+1)\pi r, 2r)$ 是所谓顶点. 面积是 $S_{OAO_1O}=3\pi r^2$, 曲率半径是 $r_k=4r\sin(t/2)$.

如果曲线是由沿直线滚动的圆外(内)一点 M 描绘的,则称为伸长的 (extended) (或缩短的 (contracted)) 摆线 (分别见图 2 和图 3), 有时也称为次摆线 (trochoid).

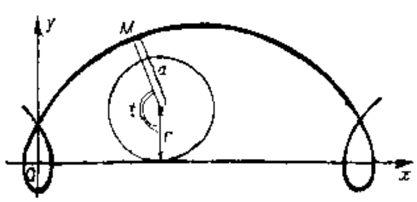


图 2

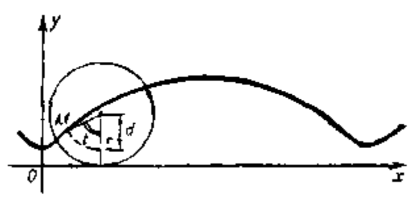


图 3

其参数方程是

$$x = rt - d\sin t,$$

$$y = r - d\cos t.$$

其中 d 是从点 M 到滚动圆中心的距离.

摆线是一种等时曲线 (tautochronic), 即这样的曲线: 一个质点在重力作用下沿曲线下降到一定高度所需时间, 与质点原来在曲线上的位置无关.

Д. Д. Соколов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Lawrence, J. D., A catalog of special plane cures. Dover, reprint, 1972.

张鸿林 译

旋轮类曲线 [**cycloidal curve; циклоидальная кривая**]

当一个圆沿着另一个圆滚动时, 动圆上的一点所描绘的平面曲线. 这一点称为生成点.

如果生成点在动圆的圆周上, 则视动圆处于定圆之外或之内, 旋轮类曲线相应地称为**外摆线** (epicycloid) 或**内摆线** (hypocycloid). 如果生成点在动圆之外或之内, 则旋轮类曲线称为**次摆线** (trochold).

旋轮类曲线的形状取决于动圆和定圆的半径之比. 例如, 如果半径之比是有理数, 则旋轮类曲线是封闭的代数曲线; 如半径之比是无理数, 则旋轮类曲线不是封闭的. 在圆外旋轮线之中, 最有名的是**心脏线** (cardioid); 在圆内旋轮线之中, 最有名的是**星形线** (astroid) 和 **Steiner 曲线** (Steiner curve).

旋轮类曲线的参数方程可以写成复数形式:

$$z = l_1 e^{\omega_1 it} + l_2 e^{\omega_2 it}, \quad z = x + iy.$$

这个方程是方程

$$z = l_0 + l_1 e^{\omega_1 it} + \cdots + l_n e^{\omega_n it}$$

的特殊情况, 而方程 (2) 则描绘高次摆线 (cycloids of higher order).

参考文献

[1] Савелов, А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Lawrence, J. D., A catalog of special plane curves, Dover, reprint, 1972.

[A2] Fladt, K., Analytische Geometrie spezieller ebener Kurven, Akad. Verlagsgesell., 1962.

张鸿林 译

分圆扩张 [**cyclotomic extension; круговое расширение**], 域 k 的

由 k 添加单位根 (见**原根** (primitive root)) 得到的扩域 K. 有时也用于称呼 K 在 k 上的任意子扩张. 一个无限代数扩张, 如果是一些有限分圆扩张的并, 则称为分圆扩张. 当 $k=\mathbf{Q}$ 为有理数域时所得到的**分圆域** (cyclotomic field) 是分圆扩张的重要例子.

设 k 的特征为 0，$k(\zeta_n)$ 为添加本原单位根 ζ_n 后得到的分圆扩张，则 $k(\zeta_n)$ 是 k 与分圆域 $\mathbf{Q}(\zeta_n)$ 的合成，因而分圆域的很多性质可以搬到分圆扩张上去．例如，$k(\zeta_n)$ 是 k 的 Abel 扩张（这对特征有限的域也成立），$k(\zeta_n)/k$ 的 Galois 群是 $\mathbf{Q}(\zeta_n)/\mathbf{Q}$ 的 Galois 群的子群，特别地，前一个 Galois 群的阶能整除 $\varphi(n)$，$\varphi(n)$ 为 Euler 函数．

当 k 为代数数域时，在 $k(\zeta_n)/k$ 中分歧的素除子能整除 n，但当 $k\neq\mathbf{Q}$ 时整除 n 的素除子在 $k(\zeta_n)$ 中仍可能是不分歧的．代数数域的分圆扩张，若其 Galois 群 Γ 与 l 进数的加法群 $\mathbf{Z}_l$ 同构，则称为分圆 Γ 扩张（见[2]，[3]，[4]）．当 $\zeta_l\in k$ 时，此 Γ 扩张形如 $k_\infty=\bigcup_n k_n$，其中 $k_n=k(\zeta_{l^n})$．

参考文献

[1] Lang, S., Algebra, Addison - Wesley, 1974.

[2] Шафаревич, И. Р., Дзета - функция, М., 1969.

[3] Кизьмин, Л. В.,《Изв. АН СССР Сер. матем.》, 36 (1972), 2, 267 – 327.

[4] Iwasawa, K., On $\mathbf{Z}_l$ - extensions of algebraic number fields, *Ann. of Math.*, 98 (1973), 2, 246 – 326.

Л. В. Кузьмин 撰　裴定一 译

分圆域 [cyclotomic field; круговое поле]

由有理数域 $\mathbf{Q}$ 添加原单位根 ζ_n 后得到的域 $K_n=\mathbf{Q}(\zeta_n)$，其中 n 为自然数，有时也称 $\mathbf{Q}_p(\zeta_n)$ 为（局部）分圆域．（(local) cyclotomic field），其中 $\mathbf{Q}_p$ 为有理 p 进数域．当 n 为奇数时总有 $K_n=K_{2n}$，因此通常假定 $n\not\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 4)$．于是不同的 n 对应不同构的域 K_n．

分圆域是从割圆问题中自然提出的．把圆周 n 等分等价于在复平面上作出本原根 ζ_n．由于分圆域的结构是"相当简单"的，因而它是提炼数论中一些普遍概念的方便的实验材料，例如，代数整数和除子的概念都是在分圆域的研究中首先提出的．

Kronecker - Weber 定理（Kronecker - Weber theorem）指出了分圆域在所有代数数域中的特殊位置，这定理说，当且仅当存在某个 n 使 $K\subset K_n$ 时，$K/\mathbf{Q}$ 为 Abel 扩张．对局部分圆域也有类似的结论．

代数理论．域 K_n 是 $\mathbf{Q}$ 的 Abel 扩张，它的 Galois 群

$$G(K_n/\mathbf{Q})\simeq(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*.$$

其中 $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*$ 为模 n 的剩余环的乘法群．特别地，它的次数 $[K_n:\mathbf{Q}]$ 为 $\varphi(n)$，$\varphi(n)$ 为 Euler 函数．域 K_n 是全虚的，其最大全实子域 $K_n^+=\mathbf{Q}(\zeta_n+\zeta_n^{-1})$ 上的次数为 2．

设 $n=p_1^{t_1}\cdots p_s^{t_s}$ 为 n 的素因子分解，则 K_n 是由域 $K_{p_1^{t_1}},\cdots,K_{p_s^{t_s}}$ 合成的，这些域彼此线性无缘．在域 K_{p^t} 中素数 p 的分歧指数为 $e=(p-1)p^{t-1}=\varphi(p^t)$，且在其中有主除子等式 $(p)=(1-\zeta_{p^t})^e$．$\mathbf{Q}$ 的其他素除子在 K_{p^t} 中都不分歧，因而当且仅当 $p\mid n$ 时，p 在 K_n 中分歧．

数 $1,\zeta_n,\cdots,\zeta_n^{\varphi(n)-1}$ 组成域 K_n 的整基．K_{p^t} 的判别式为 $\pm p^{p^{t-1}(pt-t-1)}$．若 E 与 F 为 $\mathbf{Q}$ 上线性无缘的域，且具有互素的判别式 D_E 和 D_F，则 $D_{EF}=D_E^n D_F^m$，其中 $n=[F:\mathbf{Q}]$，$m=[E:\mathbf{Q}]$．因而对任意 n 都可计算判别式 D_{K_n}（见[3]）．

域 K_{p^t} 中形如

$$\frac{(1-\zeta_{p^t}^{a})}{(1-\zeta_{p^t}^{b})}$$

的一组数（其中 $a,b\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p)$），生成单位群中具有有限指数的一个子群，这个子群中的元素称为循环单位（circular units）或分圆单位（cyclotomic units）．

分圆域的分解定律，也就是 $\mathbf{Q}$ 中的素除子 (p) 分解成 K_n 中的素除子的定律，是类域论（见[4]）中建立的 Abel 扩张的一般分解定律的特例．确切地说，若 $(p,n)=1$，f 是使 $p^f\equiv 1(\mathrm{mod}\ n)$ 成立的最小自然数，则在 K_n 中，

$$(p)=\mathfrak{p}_1\cdots\mathfrak{p}_g,$$

其中素除子 $\mathfrak{p}_1,\cdots,\mathfrak{p}_g$ 两两不同，$N(\mathfrak{p}_i)=\mathfrak{p}^f$，$fg=\varphi(n)$．因此 (p) 的分解仅依赖于 $p\ (\mathrm{mod}\ n)$ 的剩余．若 $p|n$，利用 $K_n=K_m K_{p^t}$，其中 $(m,p)=1$，(p) 在 K_{p^t} 中全分歧，可以得到 (p) 在 K_n 中的确切分解．

若 K 是 $\mathbf{Q}$ 的极大 Abel 扩张，则 $K=\bigcup_n K_n$，且

$$G(K/\mathbf{Q})\simeq\varprojlim G(K_n/\mathbf{Q})\simeq\varprojlim(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*\simeq\hat{\mathbf{Z}}^*,$$

其中 $\hat{\mathbf{Z}}$ 是整数环 $\mathbf{Z}$ 关于全体有限指数理想的完全化．特别地，对每个素数 l，存在唯一的扩张 $\mathbf{Q}_{\infty,l}/\mathbf{Q}$，它的 Galois 群与 l 进整数群 $\mathbf{Z}_l$ 同构．

由类域论（class field theory），存在互反映射

$$\psi: J_{\mathbf{Q}}\to G(K/\mathbf{Q}),$$

其中 $J_{\mathbf{Q}}$ 为 $\mathbf{Q}$ 的伊代尔群．在分圆域的情况，ψ 有一个简单明了的描述（见[4]）．

解析理论．可以用解析方法证明 K_n 的除子类群的很多结果．以 h_n 表示 K_n 的类数，则

$$h_n=2^{-t}\pi^{-t}R^{-1}w\sqrt{|D|}\prod_{\chi\neq\chi_0}L(1,\chi),$$

其中 w，D 和 R 分别为 K_n 的单位根数、判别式及调整子，$t=\varphi(n)/2$，$L(1,\chi)$ 是相应于 Dirichlet 特征 χ 的 L 函数，χ 遍历模 n 的所有非主的本原乘法特征．函数 $L(1,\chi)$ 可以用 Gauss 和（见[7]）明确表示出来．这解决了对于给定的 n 计算 h_n 的问题．

h_n 可以很自然地分解为两个因子（类数的第一和第二因子）的乘积：$h_n=h_n^- h_n^+$，其中 h_n^+ 是域 K_n^+ 的类数．当 $n=p^t$ 时，$h_n^+=[E:E_0]$，其中 E 是 $K_{p^t}^+$ 的单位群，E_0 是实分圆单位群（任何分圆单位乘上一个适当的单位根就成为实的）．

当 l 为素数时，K_l 的类数对于 l 的可除性，在 Fermat 问题中起着重要的作用．已经知道，有无穷个素数 l 使得 $h_l \equiv 0 \pmod{l}$（这样的 l 称为非正则的（irregular）．关于正则素数 l，即 $h_l \not\equiv 0 \pmod{l}$，尚不知道（1982）是有限个还是无限个．猜测对所有 l 有 $h_l^+ \not\equiv 0 \pmod{l}$．这被很多情况所肯定．因子 h_l^- 较容易研究．利用 Bernoulli 数，给出了 h_l^-（及 h_l）被 l 整除的一个较为简单的判别准则（[7]）．已经知道，当 $l \to \infty$ 时 $h_l \to \infty$ 当且仅当 $l \leqslant 19$ 时，$h_l = 1$（见 [6]）．

所谓 p 进的 L 函数在分圆域的类群的研究中得到了成功的应用（见 [5]，[8]）．

参考文献

[1] Kummer，E.，Ueber die Zerlegung der aus Wurzeln der Einheit gebildeten komplexen Zahlen in ihre Primfaktoren，*J. Reine Angew. Math.*，**35** (1847)，327－367.

[2] Weyl，H.，Algebraic theory of numbers，Princeton Univ. Press，1959.

[3] Lang，S.，Algebraic number theory，Addison－Wesley，1970.

[4] Cassels，J. W. S. and Fröhlich，A. (eds.)，Algebraic number theory，Acad. Press，1967.

[5] Шафаревич，И. Р.，Дзета－функция，М.，1969.

[6] Uchida，K.，Class number of imaginary abelian number fields Ⅲ，*Tohoku Math. J.*，**23** (1971)，573－580.

[7] Боревич，З. И.，Шафаревич，И. Р.，Теория чисел，2 изд.，М.，1972（英译本：Borevich，Z. I. and Shafarevich，I. R.，Number theory，Acad Press，1975）.

[8] 岩泽健吉（Iwasawa，K.），Lectures on p－adic L－functions，Springer，1972.

[9] Lang，S.，Cyclotomic fields，Springer，1978.

Л. В. Кузьмин 撰

【补注】 仍然不知道（1987）是否有无限多个正则素数，但猜想正则素数在所有素数中的密度为 $e^{-1/2} \approx 0.6065$，见 [A5]．已经证明（对 $n \not\equiv 2 \pmod{4}$）$h_n = 1$ 当且仅当 $\varphi(n) \leqslant 20$ 或 $n = 35，45，84$，见 [A3]，[A5]．利用代数几何的方法，B. Mazur 和 A. Wiles 利用 p 进的 L 函数证明了关于分圆域类群结构的一条重要定理．

参考文献

[A1] Coates，J.，The work of Mazur and Wiles on cyclotomic fields，*Sem. Bourbaki*，**33** (1980/81)，575 (*Lecture Notes in Math.*，**901** (1981)，220－242).

[A2] Lang，S.，Cyclotomic fields，Ⅱ，Springer，1980.

[A3] Masley，J. M. and Montgomery，H. L.，Cyclotomic fields with unique factorization，*J. Reine Angew. Math.*，**286－287** (1976)，248－256.

[A4] Mazur，B. and Wiles，A.，Class fields of abelian extensions of **Q**，*Invent. Math.*，**76** (1984)，179－330.

[A5] Washington，L. C.，Cyclotomic fields，Springer，1982.

裴定一 译　赵春来 校

分圆多项式 [cyclotomic polynomials；деления круга многочлен]

满足关系

$$x^n - 1 = \prod_{d \mid n} \Phi_d(x)$$

的多项式 Φ_1，Φ_2，…，其中的乘积遍历数 n 的所有正因子 d，也包括 n 自身．在复数域上，有

$$\Phi_n(x) = \prod_{\zeta} (x - \zeta),$$

其中 ζ 取遍所有 n 次本原单位根（见**原根**（primitive root）．$\Phi_n(x)$ 的次数是 1，…，n 中与 n 互素的整数 k 的个数．多项式可以通过从 $x^n - 1$ 中除去所有满足 $d < n$ 及 $d \mid n$ 的 $\Phi_d(x)$ 的乘积而递归算出．它的系数在素域 **P** 中，因此在特征为零的情形时，系数是整数．于是有

$$\Phi_1(x) = x - 1,\ \Phi_2(x) = x + 1,\ \Phi_3(x) = x^2 + x + 1,$$

进而，若 $n = p$ 为素数，则

$$\Phi_p(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1} = x^{p-1} + \cdots + x + 1.$$

多项式 $\Phi_n(x)$ 可以用 **Möbius 函数**（Möbius function）μ 清楚地表述出来：

$$\Phi_n(x) = \prod_{d \mid n} (x^d - 1)^{\mu(n/d)}.$$

例如

$$\Phi_{12}(x) =$$

$$= (x^{12} - 1)(x^6 - 1)^{-1}(x^4 - 1)^{-1}(x^3 - 1)^0(x^2 - 1)(x - 1)^0 =$$

$$= \frac{x^6 + 1}{x^2 + 1} = x^4 - x^2 + 1.$$

在有理数域上，所有多项式 $\Phi_n(x)$ 都是不可约的，但它们在有限素域上可能是可约的．例如在 mod 11 的剩余类域上，有关系式：

$$\Phi_{12}(x) = x^4 - x^2 + 1 = (x^2 + 5x + 1)(x^2 - 5x + 1).$$

方程 $\Phi_n(x) = 0$ 给出了所有的 n 次本原根，人们称它为分圆方程（equation of division of the circle）．这个方程的解以三角函数形式表示为：

$$r_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} = e^{2k\pi i/n},$$

其中的分数 k/n 是既约的，即 k 与 n 互素．分圆方程的根式解的问题与构造正 n 边形（或等价地，将圆分成 n 等分）的问题有密切联系．后一个问题能用圆规和直尺解出的充要条件是方程 $\Phi_n(x) = 0$ 是根式可解的．C. F.

Gauss 在 1801 年证明了，当且仅当

$$n=2^{m}\cdot p_1\cdots p_s$$

时上述条件满足，其中 m 是非负整数，$p_1,\cdots,p_s$ 是形如 $2^{2^k}+1$ 的两两不同的素数，k 为非负整数．

参考文献

[1] Waerden, B. L. van der, Algebra, 1 2, Springer, 1967－1971(译自德文).

[2] Сушкевич, А. К., Основы высшей алгебры, 4 изд., М.－Л., 1941.

И. В. Проскуряков 撰

【补注】 $\Phi_n(x)$ 的次数等于 $\varphi(n)$，即 Euler 函数 φ 在 n 处的值．见 **Euler 函数** (Euler function)．

形如 $2^{2^k}+1$ (k 为非负整数)的素数称为 Fermat 素数(Fermat prime)．这些数与 Fermat 问题有关系，即何时数 $F_k=2^{2^k}+1$ 是素数？仅有的最小 Fermat 素数为 F_0, F_1, F_2, F_3, F_4 (见[A1], pp. 183－185)．

参考文献

[A1] Stewart, I., Galois theory, Chapman and Hill, 1973.

[A2] Davenport, H., Multiplicative number theory, Springer, 1980.

冯绪宁 译

柱体 [cylinder; цилиндр]

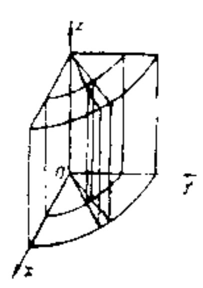
由一个**柱面**(cylindrical surface (cylinder))和两个与其相交的平行平面围成的立体．处于柱面内的平面部分称为柱体的底(bases of the cylinder)，界于两底之间的柱面部分称为柱体的侧面(lateral surface of the cylinder)．如果一个柱体的底是圆盘，则这个柱体称为圆柱体(circular cylinder)．如果一个圆柱体侧面的母线垂直于其底所在平面，则这个圆柱体称为直圆柱(rectangular circular cylinder)．直圆柱的轴(axis)是通过两底中心的直线．直圆柱的体积是 $\pi R^2 h$，其中 R 是底的半径，h 是直圆柱的高；侧面的面积是 $2\pi Rh$．

А. Б. Иванов 撰　张鸿林 译

柱面坐标 [cylinder coordinates 或 cylindrical coordinates; цилиндрические координаты]

三个数 ρ, φ 和 z，它们与 Descartes 坐标 x, y 和 z 之间存在下列公式：

$$x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\ z=z,$$



其中 $0\leqslant\rho<\infty$, $0\leqslant\varphi<2\pi$, $-\infty<z<+\infty$．坐标曲面(见图)是：圆柱面($\rho=$常数)、半平面($\varphi=$常数)和平面($z=$常数)．柱面坐标系是正交的．

Lamé 系数 (Lamé coefficients)是

$$L_\rho=L_z=1,\ L_\varphi=\rho.$$

曲面的面积元素是

$$ds=\sqrt{\rho^2(d\rho d\varphi)^2+(d\rho dz)^2+\rho^2(d\varphi dz)^2}\ .$$

体积元素是

$$dV=\rho d\rho d\varphi dz.$$

向量分析的微分算子是

$$\mathrm{grad}_\rho f=\frac{\partial f}{\partial\rho},\ \mathrm{grad}_\varphi f=\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\varphi},\ \mathrm{grad}_z f=\frac{\partial f}{\partial z};$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{a}=\frac{1}{\rho}a_\rho+\frac{\partial a_\rho}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial a_z}{\partial z};$$

$$\mathrm{curl}_\rho\mathbf{a}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial a_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial a_\varphi}{\partial z},\ \mathrm{curl}_\varphi\mathbf{a}=\frac{\partial a_\rho}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial\rho};$$

$$\mathrm{curl}_z\mathbf{a}=\frac{1}{\rho}a_\varphi+\frac{\partial a_\varphi}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\rho}{\partial\varphi};$$

$$\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$$

广义柱面坐标 (generalized cylinder coordinates)是三个数 u, v 和 w，它们与 Descartes 坐标 x, y, z 之间存在下列公式：

$$x=au\cos v,\ y=bu\sin v,\ z=cw,$$

其中 $0\leqslant u<\infty$, $0\leqslant v<2\pi$, $-\infty<w<\infty$．$a>0$, $b>0$, $c>0$, $a\neq b$．坐标曲面是：椭圆柱面($u=$常数)，半平面($v=$常数)和平面($w=$常数)．

Д. Д. Соколов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Chambers, U. G., A course in vector analysis, Chapman and Hall, 1969.

张鸿林 译

柱函数 [cylinder functions; цилиндрические функции]，Bessel 函数(Bessel functions)

Bessel 微分方程

$$z^2\frac{d^2Z}{dz^2}+z\frac{dZ}{dz}+(z^2-\nu^2)Z=0 \qquad (1)$$

的解 Z_ν，其中 ν 是任意实数或复数(见 **Bessel 方程**(Bessel equation))．

任意阶的柱函数．如果 ν 不是整数，则方程(1)的通

解具有下列形式：

$$Z_\nu = c_1 J_\nu + c_2 J_{-\nu},$$

其中 c_1 和 c_2 是常数，J_ν, $J_{-\nu}$ 是所谓第一类柱函数 (cylinder functions of the first kind) 或 **Bessel 函数** (Bessel functions). 它们具有展开式

$$J_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (z/2)^{\nu+2m}}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+\nu+1)}, \quad (|\arg z| < \pi).$$

右边关于 $z^{-\nu}J_\nu(z)$ 的级数对于一切 $|z| \leqslant R$, $|\nu| \leqslant N$ 绝对和一致收敛，其中 R 和 N 是任意正数．函数 $J_\nu(z)$ 和 $J_{-\nu}(z)$ 是解析的，具有奇点 $z=0$ 和 $z=\infty$; $J_\nu(z)$ 和 $J_{-\nu}(z)$ 的导数满足下列恒等式：

$$z[J_\nu(z)J'_{-\nu}(z) - J_{-\nu}(z)J'_\nu(z)] = -\frac{2\sin\nu\pi}{\pi}. \qquad (2)$$

但是，如果 ν 是整数，则 J_ν 和 $J_{-\nu}$ 是线性相关的，它们的线性组合不能给出方程 (1) 的通解．因此，除了第一类柱函数以外，还要引入第二类柱函数 (cylinder functions of the second kind) $N_\nu(z)$ (或 **Neumann 函数** (Neumann functions)，Weber 函数 (Weber functions))：

$$N_\nu(z) = \frac{1}{\sin\nu\pi}[J_\nu(z)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(z)] \qquad (3)$$

(另一种表示法是 $Y_\nu(z)$). 借助于这些函数，方程 (1) 的通解可以写为下列形式：

$$Z_\nu = c_1 J_\nu + c_2 N_\nu.$$

对于应用来说，方程 (1) 的另一些解，即第三类柱函数 (cylinder functions of the third kind) (或 **Hankel 函数** (Hankel functions)) 也是重要的．这些函数记为 $H_\nu^{(1)}(z)$ 和 $H_\nu^{(2)}(z)$，其定义是

$$H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + iN_\nu(z) = \frac{1}{i\sin\nu\pi}[J_{-\nu}(z) - J_\nu(z)e^{-i\nu\pi}],$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - iN_\nu(z) = \frac{1}{i\sin\nu\pi}[J_\nu(z)e^{i\nu\pi} - J_{-\nu}(z)].$$

恒等式

$$\left.\begin{aligned} z[J_\nu(z)N'_\nu(z) - N_\nu(z)J'_\nu(z)] &= \frac{2}{\pi}, \\ z[H_\nu^{(1)}(z)H_\nu^{(2)\prime}(z) - H_\nu^{(2)}(z)H_\nu^{(1)\prime}(z)] &= -\frac{4i}{\pi} \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

和关系式

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2}[H_\nu^{(1)}(z) + H_\nu^{(2)}(z)],$$

$$H_\nu(z) = \frac{1}{2i}[H_\nu^{(1)}(z) - H_\nu^{(2)}(z)]$$

成立．对于实数 $z=x$ 和 ν, Hankel 函数是方程 (1) 的复共轭解．这时，函数 $J_\nu(x)$ 和 $N_\nu(x)$ 分别给出 Hankel 函数的实部和虚部．

第一类、第二类和第三类柱函数满足递推公式

$$\left.\begin{aligned} Z_{\nu-1}(z) + Z_{\nu+1}(z) &= \frac{2\nu}{z}Z_\nu(z), \\ Z_{\nu-1}(z) - Z_{\nu+1}(z) &= 2Z'_\nu(z). \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

每一对函数

$$J_\nu, J_{-\nu};\ J_\nu, Y_\nu;\ H_\nu^{(1)}, H_\nu^{(2)}$$

(其中 ν 是非整数) 都构成方程 (1) 的基本解组．

变形柱函数 (modified cylinder functions) 是虚自变量的柱函数：

$$I_\nu(z) = \begin{cases} e^{-i\nu\pi/2}J_\nu(e^{i\pi/2}z), & -\pi < \arg z \leqslant \pi/2, \\ e^{-3i\nu\pi/2}J_\nu(e^{-3i\pi/2}z), & \pi/2 < \arg z \leqslant \pi, \end{cases}$$

以及 **Macdonald 函数** (Macdonald function)

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2}i\pi e^{i\pi\nu/2}H_\nu^{(1)}(e^{i\pi/2}z) = -\frac{1}{2}i\pi e^{-i\pi\nu/2}H_\nu^{(2)}(e^{-i\pi/2}z).$$

这些函数是微分方程

$$z^2\frac{d^2Z}{dz^2} + z\frac{dZ}{dz} - (z^2+\nu^2)Z = 0$$

的解，并且满足递推公式

$$\left.\begin{aligned} I_{\nu-1}(z) - I_{\nu+1}(z) &= \frac{2\nu}{z}I_\nu(z), \\ K_{\nu-1}(z) - K_{\nu+1}(z) &= -\frac{2\nu}{z}K_\nu(z), \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

$$K_{-\nu}(z) = K_\nu(z). \qquad (7)$$

整数阶和半整数阶的柱函数．如果 $\nu=n$ 是整数，则整数阶柱函数 (cylinder functions of integral order) $J_n(z)$ 可以由 Jacobi - Anger 公式

$$\exp\left\{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} t^n J_n(z),$$

或

$$\exp\{\pm iz\sin\theta\} = J_0(z) + 2\sum_{j=1}^{\infty}\{J_{2n}(z)\cos 2n\theta \pm J_{2n+1}(z)\sin(2n+1)\theta\}$$

来定义. 等式

$$J_n(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m 2^{n+2m}}{2^{n+2m}m!(m+n)!},$$

$$J_{-n}(z)=(-1)^n J_n(z)$$

成立. 函数 $J_n(z)$ 是自变量 z 的超越整函数; 当 $z=a$ ($a\neq 0$) 是代数数时, $J_n(z)$ 是超越数, 而且当 $m\neq n$ 时 $J_m(a)\neq J_n(a)$. 作为方程(1)的、与 $J_n(z)$ 线性无关的另一个解, 通常取

$$N_n(z)=\lim_{\nu\to n}\frac{1}{\sin\nu\pi}[J_\nu(z)\cos\nu\pi-J_{-\nu}(z)]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\lim_{\nu\to n}\left[\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial\nu}-(-1)^n\frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial z}\right]=\frac{2}{\pi}\left[c+\ln\frac{z}{2}\right]J_n(z)+$$

$$-\frac{1}{\pi}\left[\frac{z}{2}\right]^n\sum_{m=0}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^m}{m!(m+n)!}\left[\frac{z}{2}\right]^{2m}\left[\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{l}+\sum_{l=1}^{m+n}\frac{i}{l}\right]\right\}+$$

$$-\frac{1}{\pi}\left[\frac{z}{2}\right]^{-n}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{n-m-1}{m!}\left[\frac{z}{2}\right]^{2m},\quad n=0,1,\ldots,\tag{8}$$

其中 $c=0.577215\cdots$ 是 Euler 常数. 在上式中, 如果在一个有限和中的上求和指标小于下求和指标, 则相应的和取值为 0. 等式

$$Y_{-n}(z)=(-1)^n Y_n(z)$$

成立.

当且仅当下标 ν 取值 $\nu=n+1/2$ ($n=0, 1,\cdots$) 时, 柱函数化为初等函数 (球面 Bessel 函数 (spherical Bessel functions) 或半整数阶柱函数 (cylinder functions of half-integral order)). 下列公式成立 ($n=0, 1,\cdots$):

$$J_{n+1/2}(z)=(-1)^n\sqrt{\frac{2}{\pi}}z^{n+1/2}\left[\frac{d}{z\,dz}\right]^n\frac{\sin z}{z},$$

特别是

$$J_{1/2}(z)=\sqrt{2/\pi z}\,\sin z;$$

$$J_{-n-1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}z^{n+1/2}\left[\frac{d}{z\,dz}\right]^n\frac{\cos z}{z},$$

特别是

$$J_{-1/2}(z)=\sqrt{2/\pi z}\,\cos z;$$

$$H^{(1)}_{-n-1/2}(z)=i(-1)^n H^{(1)}_{n+1/2}(z),$$

$$H^{(2)}_{-n-1/2}(z)=-i(-1)^n H^{(2)}_{n+1/2}(z),$$

$$N_{n+1/2}(z)=(-1)^{n+1}J_{-n-1/2}(z);$$

$$N_{-n-1/2}(z)=(-1)^n J_{n+1/2}(z);$$

$$K_{n+1/2}(z)=K_{-n-1/2}(z)$$

$$=(-1)^n\sqrt{\frac{\pi}{2z}}z^{n+1}\left[\frac{d}{z\,dz}\right]^n\frac{e^{-z}}{z}.$$

柱函数的积分表示 (integral representations of cylinder functions). 当 $\nu=n=0, 1,\cdots$ 时, 有 Bessel 积分表示 (Bessel integral representations)

$$J_n(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos(z\sin\varphi-n\varphi)\,d\varphi$$

和

$$N_n(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\sin(z\sin\varphi-n\varphi)\,d\varphi-$$

$$-\frac{2}{\pi}e^{-in\pi/2}\int_0^\infty e^{-z\sinh t}\operatorname{cotanh}n\left[t+\frac{1}{2}i\pi\right]dt,\quad \operatorname{Re}z>0.$$

对于 $\operatorname{Re}\nu+1/2>0$ 和 $\operatorname{Re}z>0$, 有 Poisson 积分表示 (Poisson integral representations)

$$J_\nu(z)=\frac{2(z/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1/2)}\int_0^{\pi/2}\cos(z\sin\varphi)\cos^{2\nu}\varphi\,d\varphi.$$

和

$$I_\nu(z)=\frac{(z/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1/2)}\int_{-1}^{1}e^{-zt}(1-t^2)^{\nu-1/2}\,dt$$

$$H_\nu^{(k)}(z)=\frac{(-1)^k i2^{\nu+1}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1/2)}z^\nu\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^{\nu-1/2}\varphi}{\sin^{2\nu+1}\varphi}\times$$

$$\times\exp\left[(-1)^{k-1}i\left[z-\nu\pi+\frac{1}{2}\varphi\right]-2z\cot\operatorname{an}\varphi\right]d\varphi,$$

$$k=1,2,\ldots,$$

$$K_\nu(z)=\frac{\sqrt{\pi}(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1/2)}\int_0^\infty e^{-z\operatorname{cotanh}t}\sinh^{2\nu}t\,dt.$$

除了这些积分表示以外, 还有许多其他积分表示, 特别是围道积分形式的表示 (见[2], [4], [5]).

柱函数的渐近性质 (asymptotic behaviour of cylinder functions). 对于 $|z|\ll 1$, $\nu=n+\eta>0$, $0<\eta<1$, 有

$$J_\nu(z)\sim\frac{z^\nu}{2^\nu\nu!},$$

$$J_{-\nu}(z)\sim(-1)^n(\nu-1)!\frac{\sin(\pi\eta)}{\pi}\left[\frac{2}{z}\right]^\nu.$$

对于实数 $z=x$, 有

$$N_0(x)\sim\frac{2}{\pi}\left[\ln\frac{x}{2}+C\right],\quad N_\nu(x)\sim-\frac{(\nu-1)!}{\pi}\left[\frac{2}{x}\right]^\nu.$$

对于 $z\gg 1$, $|z|\gg\nu$, 有下列估计:

[其中 $(\nu,m)=\dfrac{\Gamma(\nu+m+1/2)}{m!\Gamma(\nu-m+1/2)}$ 是 Hankel 符号 (Hankel symbol)]

$$J_\nu(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\cos\left(z-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{1}{4}\pi\right)\times\right.$$

$$\times\left[\sum_{m=0}^{M-1}(-1)^m\frac{(\nu,2m)}{(2z)^{2m}}+O(|z|^{-2M})\right]+$$

$$-\sin\left(z-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{1}{4}\pi\right)\times$$

$$\left.\times\left[\sum_{m=0}^{M}(-1)^m\frac{(\nu,2m+1)}{(2z)^{2m+1}}+O(|z|^{-2M-1})\right]\right\},$$

$$-\pi<\arg z<\pi;$$

$$N_\nu(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\sin\left(z-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{1}{4}\pi\right)\times\right.$$

$$\times\left[\sum_{m=0}^{M-1}(-1)^m\frac{(\nu,2m)}{(2z)^{2m}}+O(|z|^{-2M})\right]+$$

$$+\cos\left(z-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{1}{4}\pi\right)\times$$

$$\left.\times\left[\sum_{m=0}^{M-1}(-1)^m\frac{(\nu,2m+1)}{(2z)^{2m+1}}+O(|z|^{-2M-1})\right]\right\},$$

$$-\pi<\arg z<\pi;$$

$$H_\nu^{(1)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{i(z-\nu\pi/2-\pi/4)}\times \tag{9}$$

$$\times\left[\sum_{m=0}^{M-1}\frac{(\nu,m)}{(-2iz)^m}+O(|z|^{-M})\right],$$

$$-\pi<\arg z<2\pi;$$

$$H_\nu^{(2)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{-i(z-\nu\pi/2-\pi/4)}\times \tag{10}$$

$$\times\left[\sum_{m=0}^{M-1}\frac{(\nu,m)}{(2iz)^m}+O(|z|^{-M})\right],$$

$$-2\pi<\arg z<\pi;$$

$$I_\nu(z)=\frac{\cos(\nu\pi)}{\pi\sqrt{2\pi z}}\left\{\sum_{m=0}^{M-1}[e^z-i(-1)^m e^{-i\pi\nu-z}]\times\right.$$

$$\times\Gamma\left(m+\frac{1}{2}-\nu\right)\Gamma\left(m+\frac{1}{2}+\nu\right)\frac{(2z)^{-m}}{m!}$$

$$\left.+e^zO(|z|^{-M})\right\},\quad-\frac{3\pi}{2}<\arg z<\frac{\pi}{2};$$

$$K_\nu(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}e^{-z}\left[\sum_{m=0}^{M-1}\frac{(\nu,m)}{(2z)^m}+O(|z|^{-M})\right],$$

$$-\frac{3\pi}{2}<\arg z<\frac{3\pi}{2}.$$

对于 $\nu=n+1/2$ $(n=0,\ 1,\cdots)$, 级数 (9) 和 (10) 中断. Hankel 函数是对变量 z 的复数值当 $|z|\to\infty$ 时趋向于 0 的唯一的柱函数(这在应用中具有特殊的意义):

$$\lim_{|z|\to\infty}H_\nu^{(1)}(z)=0,\quad 0\leqslant\arg z\leqslant\pi,$$

$$\lim_{|z|\to\infty}H_\nu^{(2)}(z)=0,\quad -\pi\leqslant\arg z\leqslant 0.$$

对于大的 $|z|$ 和 $|\nu|$ 的值, 可以应用一些特殊类型的渐近级数(见[1], [2], [3], [5]).

柱函数的零点. 任意柱函数的零点(zeros of cylinder functions), 除了 $z=0$ 以外, 都是单零点. 如果 a, b 和 ν 都是实数, 则在 $J_\nu(z)$ 的两个实零点之间存在 $aJ_\nu(z)+bN_\nu(z)$ 的一个实零点. 对于实数 ν, $J_\nu(z)$ 具有无穷多个实零点; 对于 $\nu>-1$, $J_\nu(z)$ 的所有零点都是实数; 如果 $0<j_{\nu,1}<j_{\nu,2}<\cdots$ 是 $J_\nu(z)$ 的正的零点, 则

$$0<j_{\nu,1}<j_{\nu+1,1}<j_{\nu,2}<j_{\nu+1,2}<j_{\nu,3}<\cdots.$$

对于 $\nu>0$, $j_{\nu,1}>0$ 成立; 对于 $J_\nu'(z)$ 的最小正零点 $j_{\nu,1}'>0$ 也成立. 每对函数: $J_n(z)$, $J_{n+m}(z)$; $J_{n+1/2}(z)$, $J_{n+m+1/2}(z)$ $(n=0,\ 1,\cdots;\ m=1,\ 2,\cdots)$, 除了 $z=0$ 以外, 没有公共零点. 如果

$$\nu=-(2n+1)-\eta,\ 0<\eta<1,\ n=0,\ 1,\ \cdots,$$

则 $J_\nu(z)$ 恰好具有 $4n+2$ 个复零点, 其中有两个是纯虚数; 如果 $\nu=-2n-\eta(0<\eta<1,\ n=1,\ 2,\cdots)$, 则 $J_\nu(z)$ 恰好具有 $4n$ 个复零点, 其实部都不为零.

柱函数的加法定理和级数展开. 下述加法定理(addition theorem) 成立:

$$Z_\nu(\lambda R)_{\sin\nu\psi}^{\cos\nu\psi}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}Z_{\nu+m}(\lambda r_2)J_m(\lambda r_1)_{\sin m\theta}^{\cos m\theta},$$

$$\frac{Z_\nu(\lambda R)}{(\lambda R)^\nu}=2^\nu\Gamma(\nu)\times$$

$$\times\sum_{m=0}^{\infty}(\nu+m)\frac{Z_{\nu+m}(\lambda r_2)J_{\nu+m}(\lambda r_1)}{(\lambda r_2)^\nu(\lambda r_1)^\nu}C_m^\nu(\cos\theta),$$

$$I_\nu(\lambda R)_{\sin\nu\psi}^{\cos\nu\psi}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m I_{\nu+m}(\lambda r_2)I_m(\lambda r_1)_{\sin m\theta}^{\cos m\theta}.$$

$$\frac{I_\nu(\lambda R)}{(\lambda R)^\nu} = 2^\nu\Gamma(\nu)\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(\nu+m)\times \frac{I_{\nu+m}(\lambda r_2)I_{\nu+m}(\lambda r_1)}{(\lambda r_2)^\nu(\lambda r_1)^\nu}C_m^\nu(\cos\theta),$$

$$K_\nu(\lambda R)\begin{matrix}\cos\nu\psi\\ \sin\nu\psi\end{matrix} = \sum_{m=-\infty}^{\infty}K_{\nu+m}(\lambda r_2)I_m(\lambda r_1)\begin{matrix}\cos m\theta\\ \sin m\theta\end{matrix},$$

$$\frac{K_\nu(\lambda R)}{(\lambda R)^\nu} = 2^\nu\Gamma(\nu)\sum_{m=0}^{\infty}(\nu+m)\times \frac{K_{\nu+m}(\lambda r_2)I_{\nu+m}(\lambda r_1)}{(\lambda r_2)^\nu(\lambda r_1)^\nu}C_m^\nu(\cos\theta),$$

其中

$$R = \sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos\theta},$$

$$\sin\psi = \frac{r_1}{R}\sin\theta,\ \ r_2>r_1;$$

而

$$C_m^\nu(x) = \sum_{k=0}^{[m/2]}(-1)^k2^{m-2k}\frac{\Gamma(\nu+m-k)}{\Gamma(\nu)k!(m-2k)!}x^{m-2k},$$

$C_0^\nu(x)=0$ 是**超球多项式**(ultraspherical polynomials). 在进行柱函数的展开时,利用 **Lommel 多项式**(Lommel polynomial),**Neumann 级数**(Neumann series),**Fourier-Bessel 级数**(Fourier-Bessel series),以及 **Dirichlet 级数**(Dirichlet series).

与柱函数有关的一些函数是 **Anger 函数**(Anger function),**Struve 函数**(Struve function),**Lommel 函数**(Lommel function),以及 **Kelvin 函数**(Kelvin functions)和 **Airy 函数**(Airy functions).

柱函数可以按下述方式定义为球面函数的极限函数:

$$\lim_{n\to\infty}P_n\left(\cos\frac{z}{n}\right) = J_0(z),$$

$$\lim_{n\to\infty}n^mP_n^{-m}\left(\cos\frac{x}{n}\right) = J_m(x),\ \ 0<x<\pi;$$

$$\lim_{n\to\infty}n^mP_n^{-m}\left(\cosh\frac{z}{n}\right) = I_m(z),$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{-m}\sin(n\pi)}{\sin(m+n)\pi}Q_n^m\left(\cosh\frac{z}{n}\right) = K_m(z).$$

这里,球面函数的渐近表示式与柱函数相联系,反之亦然,例如在 Hilb 公式(Hilb formula)

$$P_n(\cos\theta) = \sqrt{\frac{\theta}{\sin\theta}}J_0\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right]+O(n^{-3/2}),$$

中,以及在 Macdonald, Watson, Tricomi 等展开式中(见 [1], [2], [4]).

柱函数值的计算机计算. 为了计算函数 $J_0(x)$, $J_1(x)$, $N_0(x)$, $N_1(x)$, $I_0(x)$, $I_1(x)$, $K_0(x)$, $K_1(x)$ 的值,使用多项式和有理函数的逼近是方便的(见[5]). 关于按 Чебышев 多项式的展开,见[6]. 关于大整数阶的函数之值的计算,特别是在计算机上,可以使用递推公式(5)-(7)(见[5]).

现有的一些柱函数表可在[7],[8],[9]中找到.

参考文献

[1] Watson, G. N., A treatise on the theory of Bessel functions, 1, Cambridge Univ. Press, 1952.

[2] Bateman, H. and Erdélyi, A., Higher transcendental functions. Bessel functions, 2, McGraw-Hill, 1953 (中译本:A.爱尔台里等编,高级超越级数,上海科学技术出版社,1957, 1958).

[3] Лебедев, Н. Н., Специальные функции и их приложения. 2 изд., М.-Л., 1963.

[4] Градштейн, И. С., Рыжик, И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, 5 изд., М., 1971.

[5] Abramowitz, M. and Stegun, I. A., Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables, Dover, reprint, 1973, Chapts, 9-11.

[6] Clenshaw, C. W., Chebyshev series for mathematical functions, Math. Tables, 5, Cambridge Univ. Press, 1962.

[7] Лебедев, А. В., Федорова, Р. М., Справочник по математическим таблицам, М., 1956.

[8] Бурунова, Н. М., Справочник по математическим таблицам. Дополнение No. 1, М. 1959.

[9] Fletcher, A., Miller, J. C. P., Rosenhead, L. and Comrie, L. J., An index of mathematical tables, 1-2, Oxford Univ. Press, 1962.

函数表

[1] Чистова, Э. А., Таблицы функций Бесселя от действительного аргумента и интегралов от них, М., 1958.

[2] Кармазина, Л. Н., Чистова, Э. А., Таблицы функций Бесселя от мнимого аргумента и интегралов от них, М., 1958.

[3] Tables of Bessel functions of fractional order, 1-2, Nat. Bur. Standards, 1948-1949.

[4] Crowder, H. K. and Francis, G. C., Tables of spherical Bessel functions and ordinary Bessel functions of order half and odd integer of the first and second kind, Ballistic Res. Lab. Mem. Rep 1027, 1956.

[5] Tables of spherical Bessel functions, 1-2, Nat. Bur.

Standards, 1947.

[6] Tables of the Bessel functions $J_0(z)$ and $J_1(z)$ for complex arguments. Nat. Bur. Standards, 1947.

[7] Tables of the Bessel functions $Y_0(z)$ and $Y_1(z)$ for complex arguments. Nat. Bur. Standards, 1950.

[8] Bessel functions III Zeros and associated values, Roy. Soc. Math. Tables. 7, Cambridge Univ. Press, 1960.

Л. Н. Кармазина, А. П. Прудников 撰
张鸿林 译 沈永欢 校

柱集 [cylinder set ; цилиндрическое множество]

实数域 **R** 上向量空间 L 中由方程

$$S\equiv S_{\{A,F_1,\ldots,F_n\}}=\{x\in L:(F_1(x),\ldots,F_n(x))\in A\}$$

给出的集合 S. 这里, $F_i\in L^*(i=1,2,\cdots)$ 皆为定义在 L 上的线性函数, 且 $A\subset\mathbf{R}^n$ 为 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中的 Borel 集, $n=1,2,\cdots$.

L 中所有柱集的全体组成集合的一个代数, 即所谓的柱代数(cylinder algebra). 包含有诸柱集的 L 子集的最小 σ 代数称为柱 σ 代数 (cylinder σ - algebra).

当 L 为拓扑向量空间时, 只考虑下述柱集 $S_{\{A,F_1,\ldots,F_n\}}$, 它们由连续线性函数的全体 $\{F_1,\cdots,F_n\}$ 定义. 这时, 柱代数与柱 σ 代数, 应理解为从这种柱集出发, 所产生的 L 的相应子集的全体. 在 L 为某拓扑空间 M 的拓扑对偶 $(L-M')$ 这个重要的特殊情形, L 中的柱集可用 L 上 * 弱连续线性函数, 即由形如

$$F_\varphi(x)=x(\varphi),\quad x\in L$$

的函数来定义, 这里 φ 为 M 的任一元素.

Р. А. Минлос 撰

【补注】 稍为更一般些, 可设 $X=\prod_{\alpha\in A}X_\alpha$ 为(拓扑)空间的乘积. 这时, X 中一个 n 柱集(n - cylinder set) 或简称柱集(cylinder set) 是形如 $U\times\prod_{\alpha\notin S}X_\alpha$ 的集合, 这里, S 为 A 的有限子集, 而 U 为 $\prod_{\alpha\in S}X_\alpha$ 的子集.

陈公宁 译 沈信耀 校

柱结构 [cylindrical construction; цилиндрическая конструкция]

【补注】 见**映射柱** (mapping cylinder).

柱测度 [cylindrical measure ; цилиндрическая мера]

1) 拓扑向量空间上的测度论中的柱测度是定义在拓扑向量空间 E 中的柱集 (cylinder sets) 的代数 $\mathfrak{A}(E)$ 上的有限可加测度 μ; 所谓柱集是指下列形式的集合:

$$A=F^{-1}_{\varphi_1,\ldots,\varphi_n}(B),\qquad (*)$$

其中 $B\in\mathfrak{B}(\mathbf{R}^n)$ 是空间 $\mathbf{R}^n$ 的子集的 Borel σ 代数 $(n=1,2,\cdots)$; $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ 是 E 上的线性泛函, $F_{\varphi_1,\ldots,\varphi_n}$ 是映射

$$E\to\mathbf{R}^n:x\to\{\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)\}\in\mathbf{R}^n,\ \ x\in E.$$

这里假定, 对固定的泛函组 $(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)$, μ 在任何形式为(*)的集合的 σ 子代数 $\mathfrak{B}_{\varphi_1,\ldots,\varphi_n}(E)\subset\mathfrak{A}(E)$ 上的限制是 $\mathfrak{B}_{\varphi_1,\ldots,\varphi_n}$ 上的 σ 可加测度 (另外的名称是预测度 (premeasure)、拟测度 (quasi - measure)).

2) 在多实变函数论中, 柱测度是 **Hausdorff 测度** (Hausdorff measure) 的特殊情形; 它通过公式

$$\lambda(B)=\lim_{\varepsilon\to 0}\inf_{\substack{\{A\}:\\ \operatorname{diam}A<\varepsilon}}\left\{\sum l(A)\right\},$$

定义在空间 $\mathbf{R}^{n+1}$ 的 Borel σ 代数 $\mathfrak{B}(\mathbf{R}^{n+1})$ 上, 这里下确界是对集合 $B\in\mathfrak{B}(\mathbf{R}^{n+1})$ 的所有用柱 A 形成的有限或可数覆盖来取的; 其中柱 A 有球面基, 其轴与 $\mathbf{R}^{n+1}$ 的第 $n+1$ 条坐标轴相平行; 而 $l(A)$ 是柱 A 的轴截面的 n 维体积. 当 B 是定义在区域 $G\subset\mathbf{R}^n$ 上的 n 个变量的连续函数 f 的图象:

$$B=\{(x_1,\ldots,x_{n+1}):x_{n+1}=f(x_1,\ldots,x_n)\},$$

那么 $\lambda(B)$ 就是所谓函数 f 的 n 维变差.

参考文献

[1] Гельфанд, И. М., Виленкин, Н. Я., Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, М., 1961 (中译本: И. М. 盖尔芳特, Н. Я. 维列金, 广义函数, Ⅳ, 调和分析的某些应用, 装备希尔伯特空间, 科学出版社, 1965, 1984).

[2] Витушкин, А. Г., О многомерных вариациях, М., 1955.

Р. А. Минлос 撰

【补注】 有关函数的 n 维变差见**函数的变差** (variation of a function).

参考文献

[A1] Schwartz, L., Radon measures on arbitrary topological spaces and cylindrical measures, Oxford Univ. Press, 1973.

史树中 译

柱面 [cylindrical surface(cylinder); цилиндрическая поверхность]

一条直线(母线(generator))与本身平行地移动, 且总与一条给定的曲线 (准线 (directrix)) 相交, 这时所形成的曲面称为柱面.

二次柱面(见**二次曲面**(surface of the second order)) 的准线是二次曲线. 根据准线的形状, 二次柱面分为三种类型: **椭圆柱面** (elliptic cylinder), 其标准方程是

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;$$

虚椭圆柱面(imaginary elliptic cylinder):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1;$$

双曲柱面(hyperbolic cylinder):

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1;$$

和抛物柱面(parabolic cylinder):

$$y^2=2px.$$

如果准线是退化的二次曲线(即一对直线),则柱面是一对平面(根据相应的准线的性质,可以是相交的、平行的或重合的,实的或虚的).

n **次柱面**(cylindrical surface of oder n)是在某一仿射坐标系 x, y, z 中由不含一个坐标(例如 z)的 n 次代数方程

$$f(x, y)=0 \tag{*}$$

给出的代数曲面. 由方程(*)定义的 n 次曲线有时称为**柱面的基线**(base of the cylindrical surface).

А. Б. Иванов 撰 张鸿林 译

柱形面 [**cylindroid**; **цилиндроид**]

一个可展曲面(developable surface),其母线与两平行平面 π_1 和 π_2 的交点的集合是两条相同的简单闭曲线. 如果一个柱形面界于它与平面 π_1 和 π_2 相交所得两平面区域之间,则这个柱形面称为封闭的.

И. Х. Сабитов 撰 张鸿林 译

［Ｇｅｎｅｒａｌ　Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝数学百科全书　第一卷
作者＝
页数＝９３２
ＳＳ号＝１０４００５８７
出版日期＝